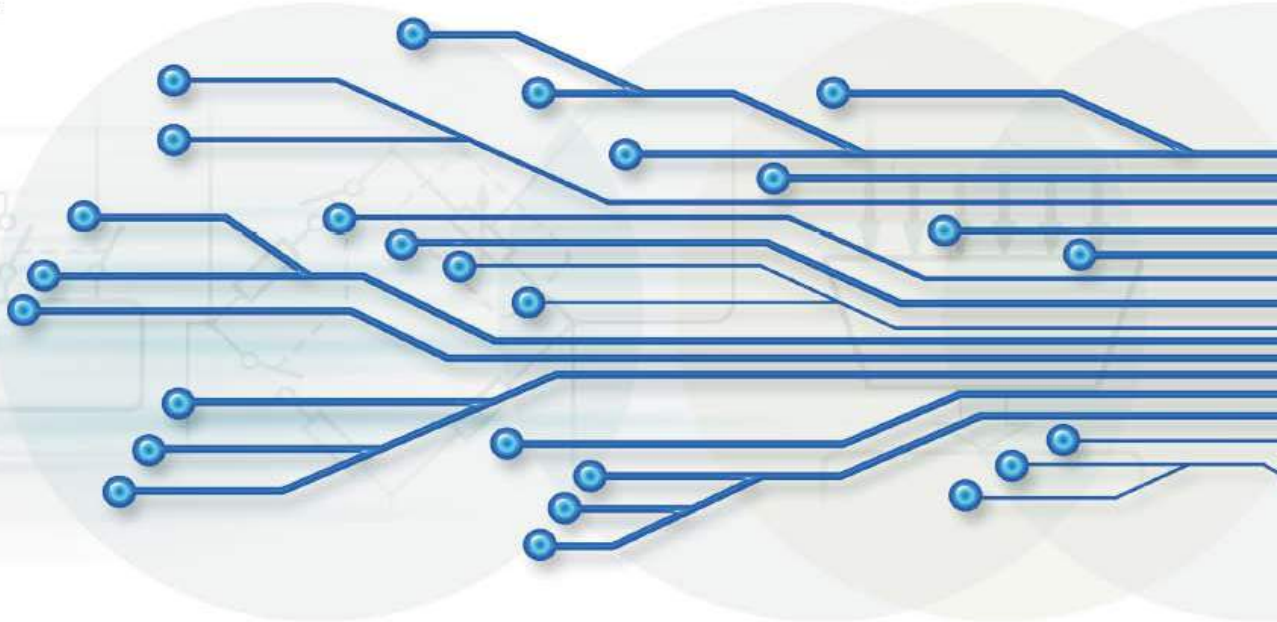




OCTAVA EDICIÓN

Apoyo en la



# CIRCUITOS ELÉCTRICOS

RICHARD C. DORF - JAMES A. SVOBODA

 **Alfaomega**

---

# Circuitos Eléctricos

---

OCTAVA EDICIÓN

Richard C. Dorf

Universidad de California

---

James A. Svoboda

Universidad Clarkson

 **Alfaomega**

México • Argentina • Colombia • Chile

**Formación**

Editec

**Al cuidado de la edición:**Luz Ángeles Lomeli Díaz  
lalomeli@alfaomega.com.mx**Gerente editorial:**Marcelo Grillo Giannetto  
mgrillo@alfaomega.com.mx

## Datos catalográficos

Dorf, Richard y Svoboda, James  
Circuitos Eléctricos  
Octava Edición

Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V., México

ISBN: 978-607-707-232-4

Formato: 20 x 25.5 cm

Páginas: 908

**Circuitos Eléctricos**

Richard C. Dorf y James A. Svoboda

ISBN: 978-0-470-52157-1 edición original en inglés "Introduction to Electric Circuits", 8th Edition, publicada por John Wiley &amp; Sons, Inc. New Jersey, USA.

Derechos reservados © John Wiley &amp; Sons, Inc.

Octava edición: Alfaomega Grupo Editor, México, junio 2011

**© 2011 Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V.**

Pitágoras 1139, Col. Del Valle, 03100, México D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana

Registro No. 2317

Pág. Web: <http://www.alfaomega.com.mx>E-mail: [atencionalcliente@alfaomega.com.mx](mailto:atencionalcliente@alfaomega.com.mx)**ISBN: 978-607-707-232-4****Derechos reservados:**

Esta obra es propiedad intelectual de su autor y los derechos de publicación en lengua española han sido legalmente transferidos al editor. Prohibida su reproducción parcial o total por cualquier medio sin permiso por escrito del propietario de los derechos del copyright.

**Nota importante:**

La información contenida en esta obra tiene un fin exclusivamente didáctico y, por lo tanto, no está previsto su aprovechamiento a nivel profesional o industrial. Las indicaciones técnicas y programas incluidos, han sido elaborados con gran cuidado por el autor y reproducidos bajo estrictas normas de control. ALFAOMEGA GRUPO EDITOR, S.A. de C.V. no será jurídicamente responsable por: errores u omisiones; daños y perjuicios que se pudieran atribuir al uso de la información comprendida en este libro, ni por la utilización indebida que pudiera dársele.

Edición autorizada para venta en todo el mundo.

**Impreso en México. Printed in Mexico.****Empresas del grupo:****México:** Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V. – Pitágoras 1139, Col. Del Valle, México, D.F. – C.P. 03100.

Tel.: (52-55) 5575-5022 – Fax: (52-55) 5575-2420 / 2490. Sin costo: 01-800-020-4396

E-mail: [atencionalcliente@alfaomega.com.mx](mailto:atencionalcliente@alfaomega.com.mx)**Colombia:** Alfaomega Colombiana S.A. – Carrera 15 No. 64 A 29, Bogotá, Colombia,Tel.: (57-1) 2100122 – Fax: (57-1) 6068648 – E-mail: [cliente@alfaomega.com.co](mailto:cliente@alfaomega.com.co)**Chile:** Alfaomega Grupo Editor, S.A. – Dr. La Sierra 1437, Providencia, Santiago, ChileTel.: (56-2) 235-4248 – Fax: (56-2) 235-5786 – E-mail: [agechile@alfaomega.cl](mailto:agechile@alfaomega.cl)**Argentina:** Alfaomega Grupo Editor Argentino, S.A. – Paraguay 1307 P.B. Of. 11, C.P. 1057, Buenos Aires,Argentina, – Tel./Fax: (54-11) 4811-8352, 4811 7183 y 4811 0887 – E-mail: [ventas@alfaomegaeditor.com.ar](mailto:ventas@alfaomegaeditor.com.ar)

La naturaleza científica del hombre común  
es salir y hacer lo mejor que pueda.

—John Prine

Pero capitán, yo no puedo cambiar las leyes de la física.  
—Teniente Comodoro, Montgomery Scott (Scotty), del USS *Enterprise*

*Dedicado a nuestros nietos:*

Ian Christopher Boilard, Kyle Everett Schafer, y Graham Henry Schafer

y

Heather Lynn Svoboda, James Hugh Svoboda, Jacob Arthur Leis,  
Maxwell Andrew Leis, y Jack Mandlin Leffler





## Los autores

---

Richard C. Dorf, profesor de Ingeniería Eléctrica y Computacional en la Universidad de California, Davis, da cursos a graduados y estudiantes universitarios de Ingeniería Eléctrica en los campos de circuitos y sistemas de control. Obtuvo su doctorado en Ingeniería Eléctrica por la U.S. Naval Postgraduate School, una maestría por la Universidad de Colorado y una Licenciatura en Ciencias por la Universidad Clarkson. Profundamente comprometido con la materia de la ingeniería eléctrica y su gran valor para los menesteres sociales y económicos, ha escrito y disertado a nivel internacional sobre la contribución y avances de la Ingeniería Eléctrica.

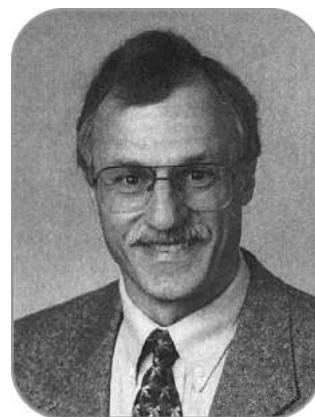
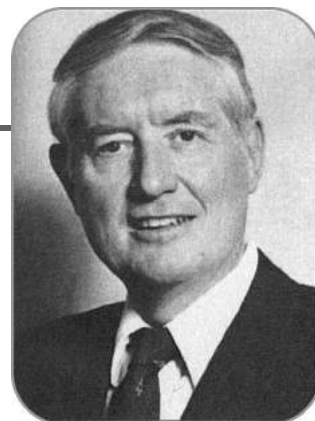
El profesor Dorf tiene una vasta experiencia a nivel educacional e industrial y está activo profesionalmente en los campos de la robótica, la automatización, los circuitos eléctricos, y las comunicaciones. Ha prestado servicio como profesor huésped en la Universidad de Edinburgo, Escocia; el Instituto Massachusetts de Tecnología (MIT), la Universidad Stanford y la Universidad de California en Berkeley.

Miembro del Institute of Electrical and Electronic Engineers y de la American Society for Engineering Education, el Doctor Dorf es ampliamente conocido en el medio por sus obras *Sistemas de control modernos*, undécima edición (Prentice Hall, 2008) y *The International Encyclopedia of Robotics* (Wiley, 1988). El Doctor Dorf es coautor de *Circuits, Devices and Systems* (con Ralph Smit), quinta edición (Wiley, 1992). También editó el ampliamente usado *Electrical Engineering Handbook*, tercera edición (CRC Press e IEEE Press) publicado en 2008. Su más reciente obra es *Technology Ventures*, tercera edición (McGraw-Hill 2010).

James A. Svoboda es profesor adjunto de ingeniería eléctrica y computacional en la Universidad Clarkson, donde da cursos sobre temas de circuitos, electrónica y programación computacional. Obtuvo su doctorado en Ingeniería Eléctrica por la Universidad de Wisconsin en Madison, una maestría por la Universidad de Colorado y una licenciatura en Ciencias del General Motors Institute.

Circuitos para segundo año es uno de los cursos favoritos del profesor Svoboda. Ha dado este curso a 5 500 estudiantes universitarios en la Universidad Clarkson durante los últimos 30 años. En 1986 recibió el Distinguished Teaching Award de la Universidad Clarkson.

El profesor Svoboda ha escrito varios artículos en los cuales describe las ventajas de utilizar nulificadores (*nullors*) para modelar circuitos eléctricos en análisis por computadora. Le interesa la manera en que la tecnología afecta la formación en ingeniería y ha desarrollado algunos paquetes de software para su uso en los Circuitos para segundo año.





# Prefacio

---

El tema central de *Circuitos Eléctricos* es el concepto de que los circuitos eléctricos forman parte de la estructura básica de la tecnología moderna. Ante tal tema, nos esforzaremos por demostrar cómo tanto el análisis y el diseño de circuitos eléctricos están estrechamente enlazados con la habilidad del ingeniero para diseñar sistemas complejos de electrónica, comunicaciones, cómputo y de control, así como productos para el consumidor.

## ENFOQUE Y ORGANIZACIÓN

Este libro está diseñado para un curso de uno a tres periodos en circuitos eléctricos o análisis de circuitos lineales, además de que su estructura permite una *flexibilidad* máxima en su manejo. El diagrama de flujo de la figura 1 muestra organizaciones de capítulo alternativas que pueden ajustarse a diferentes perfiles, sin interrumpir la continuidad.

La presentación se acopla a los lectores que van a descubrir los conceptos básicos de los circuitos eléctricos por vez primera y el alcance de este libro es amplio. Los estudiantes deben llegar a este curso con un conocimiento elemental de cálculo diferencial e integral.

Este libro se esfuerza en preparar al lector para que resuelva problemas reales que involucran circuitos eléctricos. Por consiguiente, los circuitos se muestran como resultado de invenciones reales y las respuestas a necesidades reales en la industria, la oficina y el hogar. Aun cuando las herramientas del análisis de circuitos eléctricos pudieran ser parcialmente abstractas, los circuitos eléctricos son los bloques de la construcción de la sociedad moderna, actual. El análisis y diseño de los circuitos eléctricos son habilidades imprescindibles para todos los ingenieros.

## NOVEDADES EN LA OCTAVA EDICIÓN

### Se incrementa el uso de PSpice® y MATLAB®

De manera importante, se ha dado una mayor atención al uso de PSpice y MATLAB para la resolución de problemas de circuitos. Empieza con dos nuevos apéndices, uno para presentar PSpice y otro para MATLAB. Estos apéndices describen brevemente las capacidades de los programas e ilustran los pasos necesarios para empezar a utilizarlos. A continuación se utilizan PSpice y MATLAB a lo largo del texto para resolver varios problemas de análisis y diseño de circuitos. Por ejemplo, PSpice se utiliza en el capítulo 5 para encontrar un circuito equivalente de Thévenin, y en el capítulo 15 para representar entradas y salidas de circuitos como series de Fourier. MATLAB se usa frecuentemente para obtener diagramas de entradas y salidas de circuitos que nos ayudan a ver qué nos dicen nuestras ecuaciones. MATLAB también nos ayuda algo con la larga y tediosa aritmética. Por ejemplo, en el capítulo 10, MATLAB nos ayuda a hacer la compleja aritmética para analizar circuitos de corriente

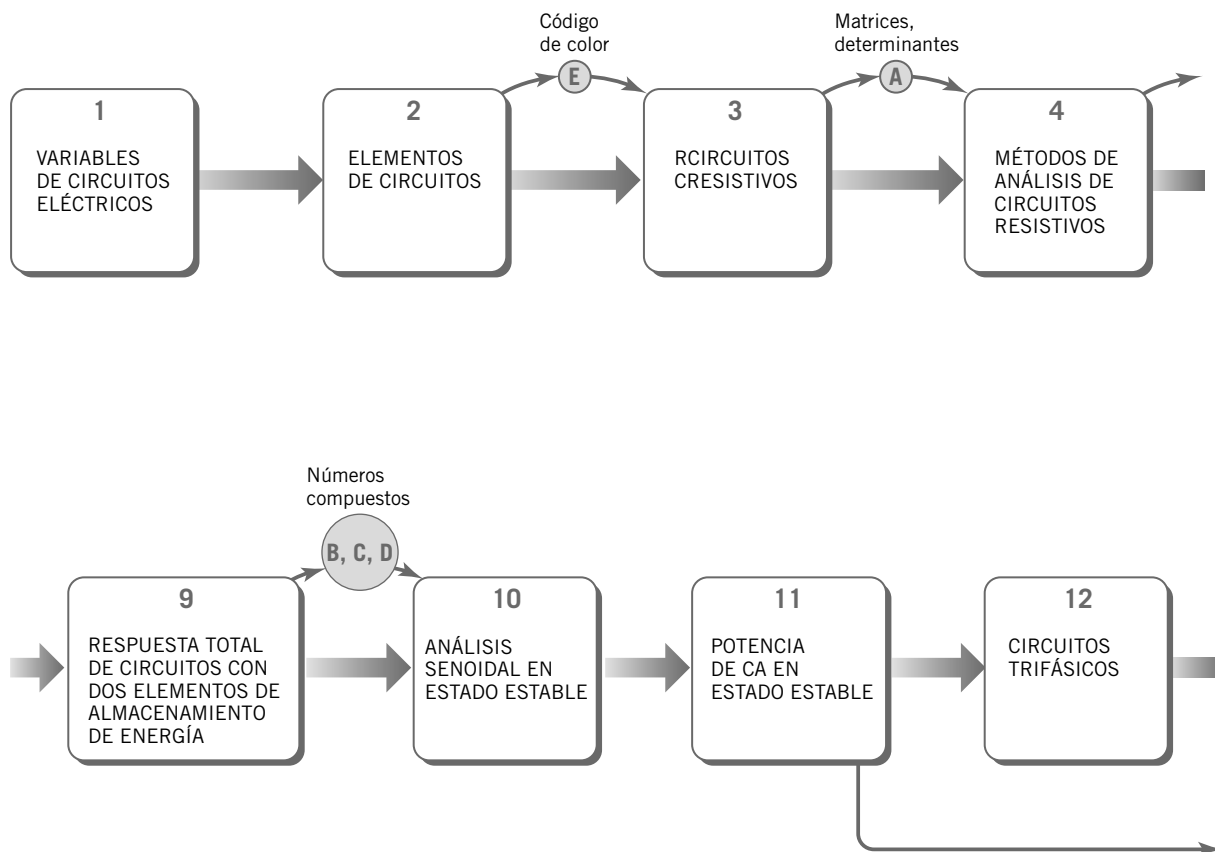


FIGURA 1 Diagrama de flujo que muestra rutas alternativas a través de los temas de este libro.

alterna (ca), y en el capítulo 14 nos ayuda con la fracción parcial requerida para encontrar las transformaciones inversas de Laplace.

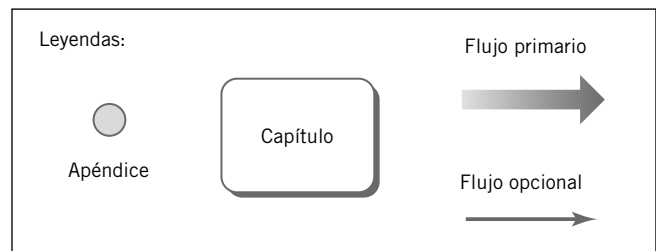
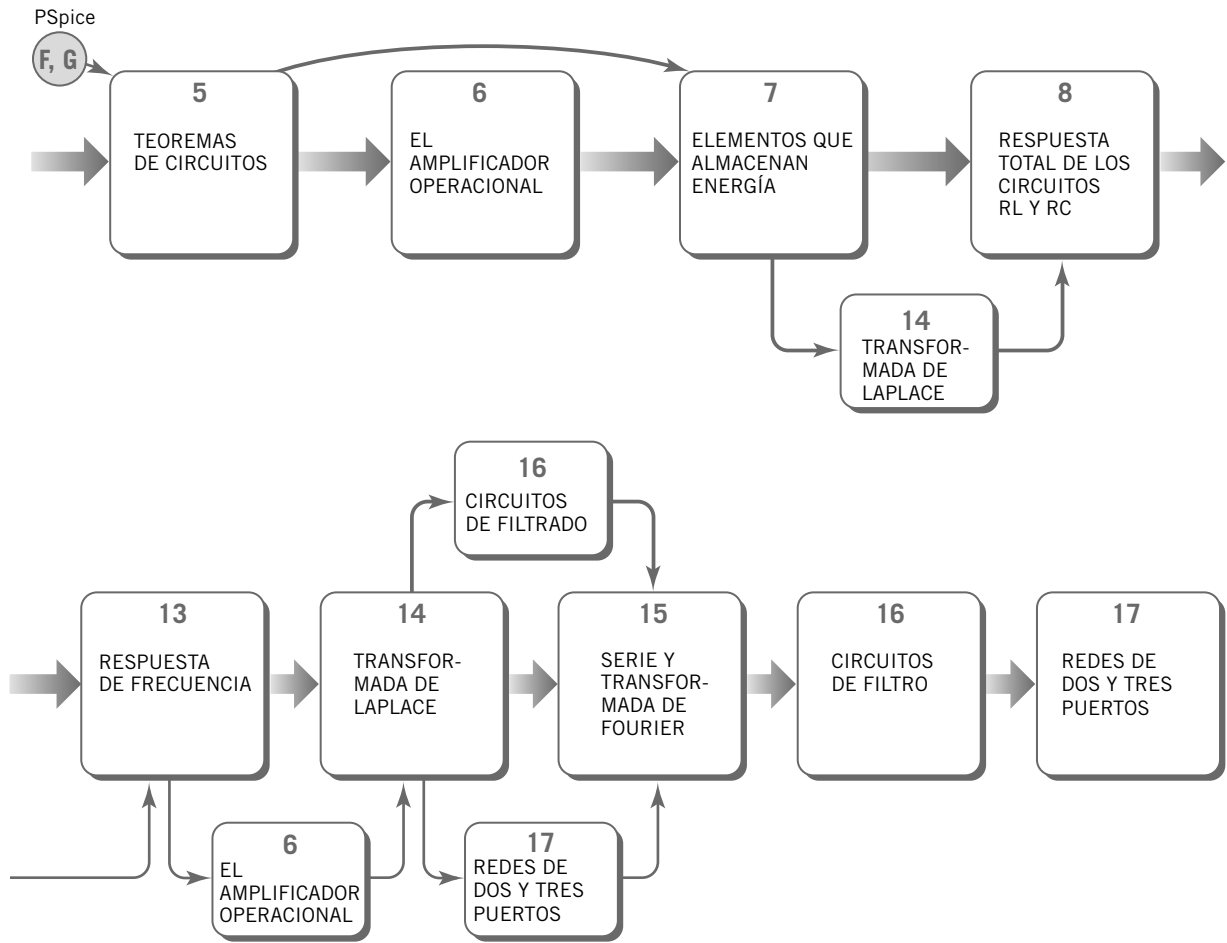
Desde luego, PSpice y MATLAB hacen más que el solo ejecutar los programas. Ponemos especial atención a la interpretación del resultado de estos programas de cómputo y su verificación para estar seguros de que están correctos. Por lo común, esto se hace en la sección “¿Cómo lo podemos comprobar...?” que se incluye en cada capítulo. Por ejemplo, la sección 8.9 muestra cómo interpretar y comprobar una respuesta transitoria de PSpice, y la sección 13.7 muestra cómo interpretar y verificar una respuesta de frecuencia utilizando MATLAB o PSpice.

### Revisiones para mejorar la claridad

Los capítulos 14 y 15, que cubren la transformada de Laplace y la serie y transformada de Fourier, han sido reescritos a fondo, tanto para mejorar la claridad de la exposición como para aumentar la cobertura de MATLAB y PSpice. Además, se hicieron revisiones en el texto para mejorar la claridad. En ocasiones dichas revisiones son menores, pues se refieren a frases o párrafos; otras veces implican revisiones mayores que implican páginas o secciones enteras.

### Más problemas

La octava edición contiene 120 problemas nuevos, con lo que el total supera los 1 350. Esta edición emplea varios tipos de problemas y van de los sencillos a los que significan un reto, como:



- Problemas de análisis directos.
- Análisis de circuitos complejos.
- Problemas sencillos de diseño. (Por ejemplo, dados un circuito y la respuesta especificada, determinar los valores  $RLC$  requeridos.)
- Comparar y contrastar, problemas de multipartes que llaman la atención a las semejanzas o diferencias entre dos situaciones.

- Problemas de MATLAB y PSpice.
- Problemas de diseño. (Dadas ciertas especificaciones, invente un circuito que las satisfaga.)
- ¿Cómo lo podemos comprobar...? (Verifique si una solución es en verdad la correcta.).

## **CARACTERÍSTICAS DE EDICIONES ANTERIORES QUE SE CONSERVAN**

### **Introducción**

Cada capítulo inicia con una introducción que invita a estudiar el material de ese capítulo.

### **Ejemplos**

Considerando que este libro está orientado a formar expertos en la solución de problemas, hemos incluido más de 260 ejemplos ilustrativos. Incluso, cada ejemplo tiene un título que indica al estudiante qué es exactamente lo que se ilustra en ese ejemplo en particular.

En algunos ejemplos seleccionados de han incorporado varios métodos de solución de problemas. Estos casos indican a los estudiantes que se pueden emplear múltiples métodos para obtener soluciones similares o, en algunos casos, que múltiples soluciones pueden ser correctas. Esto ayuda a los estudiantes a formarse las habilidades de pensar de manera crítica para discernir la mejor opción entre diversos resultados.

### **Las secciones Diseño de ejemplos, Método para resolver un problema, y ¿Cómo lo podemos comprobar...?”**

Cada capítulo concluye con un ejemplo de diseño que utiliza los métodos de ese capítulo para resolver un problema de diseño. En el capítulo 1 se presenta un método formal para la solución de problemas en cinco etapas, y que luego se utiliza en cada uno de los ejemplos de diseño. Un paso importante en el método de resolución de problemas requiere que usted mismo compruebe sus resultados para verificar que son correctos. En cada capítulo se incluye una sección “¿Cómo lo podemos comprobar...?” que ilustra cómo se puede comprobar el tipo de resultados obtenidos en ese capítulo para asegurarse de su exactitud.

### **Ecuaciones clave y fórmulas**

Encontrará que las ecuaciones clave, fórmulas y notas importantes se han destacado en un recuadro sombreado para ayudarle a identificar con precisión la información de importancia.

### **Resumen de tablas y figuras**

Los procedimientos y métodos desarrollados en este texto se han resumido en determinadas tablas y figuras clave. Los estudiantes encontrarán que conforman un excelente recurso para la resolución de problemas.

- Tabla 1.5.1. La convención pasiva.
- Figura 2.7.1 y Tabla 2.7-1. Fuentes dependientes.
- Tabla 3.10-1. Fuentes en serie y en paralelo, elementos en serie y en paralelo. Voltaje y división de corriente.
- Figura 4.2-3. Nodos de voltajes comparados con corrientes y voltajes de elementos.

- Figura 4.5-4. Enlaces de corrientes comparados con corrientes y voltajes de elementos.
- Figuras 5.4-3 y 5.4-4. Circuitos equivalentes de Thévenin.
- Figura 6.3-1. El amplificador operacional ideal.
- Figura 6.5-1. Catálogo de circuitos de amplificadores operacionales de amplio uso.
- Tabla 7.8-1. Condensadores e inductores.
- Tabla 7.13-2. Condensadores e inductores en serie y en paralelo.
- Tabla 8.11-1. Circuitos de primer orden.
- Tablas 9.13-1, 2 y 3. Circuitos de segundo orden.
- Tabla 10.6-1. Circuitos de CA en el dominio de frecuencia (fasores e impedancias).
- Tabla 10.8-1. Voltaje y división de corriente para circuitos de CA.
- Tabla 11.5-1. Fórmulas de potencia para circuitos de CA.
- Tablas 11.13-1 y 11.13-2. Inductores acoplados y transformadores ideales.
- Tabla 13.4-1. Circuitos resonantes.
- Tablas 14.2-1 y 14.2-2. Tablas de Transformada de Laplace.
- Tabla 14.7-1. Modelos de dominios de elementos de circuitos.
- Tabla 15.4-1. Series de Fourier de formas de onda periódicas seleccionadas.

### Introducción al procesamiento de señal

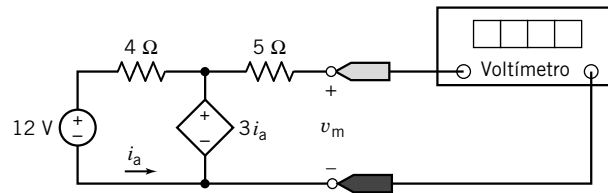
El procesamiento de señal es una aplicación importante de los circuitos eléctricos. Este libro lo presenta de dos maneras. La primera, dos secciones (6.6 y 7.9) describen métodos para diseñar circuitos eléctricos que implementen ecuaciones algebraicas y diferenciales. La segunda, numerosos ejemplos y problemas a lo largo del libro ilustran el procesamiento de señal. Las señales de entrada y salida de un circuito eléctrico están identificadas de manera explícita en cada uno de estos ejemplos y problemas, los cuales investigan la relación entre las señales de entrada y de salida impuesta por el circuito.

### Ejemplos interactivos y ejercicios

Muchos ejemplos a lo largo del libro están marcados como ejemplos interactivos. Esta marca indica que las versiones computarizadas de ese ejemplo están disponibles en el sitio web de la Editorial ubicado en <http://virtual.alfaomega.com.mx>. La figura 2 ilustra la relación entre el ejemplo del libro y el ejemplo computarizado disponible en el sitio web. La figura 2a muestra un ejemplo del capítulo 3. El problema presentado por el ejemplo interactivo de la figura 2b es semejante al ejemplo del texto, pero difiere en algunas formas:

- Los valores de los parámetros del circuito se han vuelto aleatorios.
- Las fuentes independientes y las dependientes pueden haberse invertido.
- La dirección de referencia del voltaje medido puede haberse invertido.
- Se hace una solicitud distinta. En este caso, se pide al estudiante que resuelva el problema del libro de manera contraria, utilizando el voltaje medido para determinar el valor del parámetro del circuito.





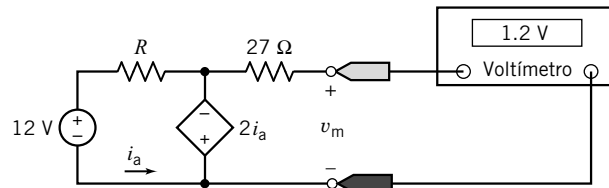
(a)

Ejemplos realizados

Calculadora

Problema nuevo

Muestra la respuesta



El voltímetro mide el voltaje en voltios.  
¿Cuál es el valor de la resistencia,  $R$ , en  $\Omega$ ?

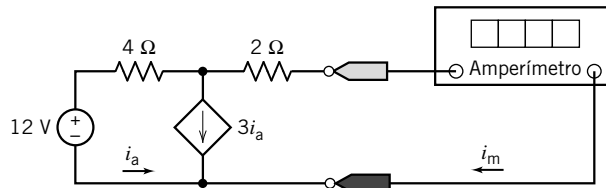
(b)

Ejemplos realizados

Calculadora

Problema nuevo

Muestra la respuesta



El amperímetro mide una corriente en amperios. ¿Cuál es el valor de la corriente medida por el amperímetro?

(c)

FIGURA 2 (a) El circuito comprende el ejemplo 3.2-5. (b) El ejemplo interactivo correspondiente. (c) Un ejercicio interactivo correspondiente.

El ejemplo interactivo plantea un problema y luego acepta y comprueba la respuesta del usuario. A los estudiantes se les proporciona inmediata retroalimentación con respecto a la exactitud de su trabajo. El ejemplo interactivo selecciona los valores del parámetro de alguna manera aleatoria, proporcionando una aparente provisión infinita de problemas. Este emparejamiento de una solución a un problema particular con un abasto infinito de problemas similares es una ayuda eficaz para el aprendizaje de los circuitos eléctricos.

El ejercicio interactivo que muestra la figura 2c considera un circuito similar, pero diferente. A semejanza del ejemplo interactivo, el ejercicio interactivo plantea un problema y luego acepta y comprueba la respuesta del usuario. El aprendizaje del estudiante se apoya en mayor forma a partir de la amplia ayuda en forma de problemas de ejemplo resueltos, disponibles en el ejercicio interactivo mismo, al cual se accede mediante el botón Worked Example.

Las variaciones de este problema se obtienen con el botón New Problem. También podemos atisbar la respuesta si utilizamos el botón Show Answer. Los ejemplos y los ejercicios interactivos

proporcionan cientos de problemas prácticos adicionales, con infinitas variaciones, todos con respuestas que se verifican de inmediato por la computadora.

## SUPLEMENTOS Y MATERIAL EN SITIO WEB

El uso de las computadoras y de la red ha proporcionado una emocionante oportunidad de repensar el material suplementario. Los suplementos disponibles se han incrementado considerablemente.

### Sitio asociado del libro

Se pueden encontrar recursos adicionales para el estudiante y para el maestro en el sitio web de la Editorial ubicado en <http://virtual.alfaomega.com.mx>.

#### Estudiante

- **Ejemplos interactivos** Los ejemplos y los ejercicios interactivos son poderosos recursos de apoyo para los estudiantes. Se conformaron como herramientas para asistir a los estudiantes en habilidades de pericia. Los ejemplos seleccionados del texto e incluidos en la red dan a los estudiantes opciones para navegar a través del problema. Cuando los estudiantes realizan la tarea, han desarrollado las habilidades adecuadas para completar con éxito sus asignaciones. Es una ayuda virtual para las tareas.
- **MATLAB Tutorial**, de Gary Ybarra y Michael Gustafson de la Universidad Duke, construye ejemplos sobre MATLAB en el texto. Al proporcionar estos ejemplos adicionales, los autores muestran cómo esta poderosa herramienta se utiliza fácilmente en áreas apropiadas del análisis de circuitos. Se crearon diez problemas de ejemplo en HTML. Los archivos M para los ejemplos basados en computadora están disponibles para bajarlos en el sitio web de la Editorial ubicado en <http://virtual.alfaomega.com.mx>.

#### Maestro

- Manual de soluciones
- Diapositivas de PowerPoint

## AGRADECIMIENTOS

Estamos muy agradecidos con muchas personas cuyos esfuerzos contribuyeron a la elaboración de este texto. En especial damos las gracias a nuestro editor asociado Daniel Sayre, al gerente ejecutivo de marketing Chris Ruel y a Diana Smith, asistente de marketing, por su apoyo y entusiasmo. También agradecemos a Janet Foxman y Dorothy Sinclair de Wiley, y a Heather Johnson de Elm Street Publishing Services por sus esfuerzos en la producción de este libro. Deseamos agradecer a Lauren Sapira, Carolyn Weisman y Andre Legaspi por sus importantes contribuciones a este proyecto.

En particular, agradecemos al equipo de revisores que verificaron los problemas y soluciones para cerciorarse de su certeza.

## Revisores de datos

Khalid Al-Olimat, Ohio Northern  
University  
Lisa Anneberg, Lawrence  
Technological University  
Horace Gordon, University of South Florida  
Limachos Kondi, SUNY, Buffalo  
Michael Polis, Oakland University  
Sannasi Ramanan, Rochester Institute  
of Technology  
William Robins, University of Minnesota

James Rowland, University of Kansas  
Mike Shen, Duke University  
Thyagarajan Srinivasan, Wilkes  
University  
Aaron Still, U.S. Naval Academy  
Howard Winert, Johns Hopkins  
University  
Xiao-Bang Xu, Clemson University  
Jiann Shiun Yuan, University of  
Central Florida

## Revisores

Rehab Abdel-Kader, Georgia Southern  
University  
Said Ahmed-Zaid, Boise State  
University  
Farzan Aminian, Trinity University  
Constantin Apostoia, Purdue  
University Calumet  
Jonathan Bagby, Florida Atlantic University  
Carlotta Berry, Tennessee State University  
Kiron Bordoloi, University of Louisville  
Mauro Caputi, Hofstra University  
Edward Collins, Clemson University  
Glen Dudevoir, U.S. Militar Academy  
Malik Elbuluk, University of Akron  
Prasad Enjeti, Texas A&M University  
Alieydaghi, University of Maryland  
Eastern Shore  
Carlos Figueroa, Cabrillo College  
Walid Hubbi, New Jersey Institute of Technology  
Brian Huggins, Bradley University  
Chris Ianello, University of Central Florida  
Simone Jarzabek, ITT Technical Institute  
James Kawamoto, Mission College  
Rasool Kenarangui, University  
of Texas Arlington  
Jumoke Ladeji-Osias, Morgan State University  
Mark Lau, Universidad del Turabo

Seyed Mousavinezhad, Western Michigan  
University  
Philip Munro, Youngstone State University  
Ahmad Nafisi, California Polytechnic State  
University  
Arnost Neugroschel, University of Florida  
Tokunbo Ogunfunmi, Santa Clara University  
Gary Perks, California Polytechnic State  
University, San Luis Obispo  
Owe Petersen, Milwaukee School of Engineering  
Ron Pieper, University of Texas  
Teodoro Robles, Milwaukee School of Enginee-  
ring  
Pedda Sannuti, Rutgers University  
Marcelo Simoes, Colorado School of Mines  
Ralph Tanner, Western Michigan University  
Tristan Tayag, Texas Christian University  
Jean-Claude Thomassian, Central  
Michigan University  
John Ventura, Christian Brothers University  
Annette von Jouanne,  
Oregon State University  
Ravi Warriar, Kettering University  
Gerald Woelfi, Milwaukee School of  
Engineering  
Hewlon Zimmer, U.S. Merchant  
Marine Academy

# Contenido

---

## CAPÍTULO 1

<b>Variables de circuitos eléctricos .....</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción .....	1
1.2 Circuitos eléctricos y corriente .....	1
1.3 Sistemas de unidades .....	5
1.4 Voltaje .....	7
1.5 Potencia y energía .....	7
1.6 Análisis y diseño de circuitos .....	11
1.7 ¿Cómo lo podemos comprobar...? .....	13
1.8 Ejemplo de diseño — Controlador de válvulas de un motor de propulsión a chorro .....	14
1.9 Resumen .....	15
Problemas .....	15
Problemas de diseño .....	19

## CAPÍTULO 2

<b>Elementos de circuitos .....</b>	<b>20</b>
2.1 Introducción .....	20
2.2 Ingeniería y modelos lineales .....	20
2.3 Elementos de circuito activos y pasivos .....	24
2.4 Resistencias .....	25
2.5 Fuentes independientes .....	28
2.6 Voltímetros y amperímetros .....	31
2.7 Fuentes dependientes .....	33
2.8 Transductores .....	37
2.9 Interruptores .....	39
2.10 ¿Cómo lo podemos comprobar...? .....	41
2.11 Ejemplo de diseño — Sensor de temperatura .....	42
2.12 Resumen .....	44
Problemas .....	44
Problemas de diseño .....	52

**CAPÍTULO 3**

<b>Circuitos resistivos .....</b>	<b>53</b>
3.1 Introducción .....	53
3.2 Leyes de Kirchhoff .....	53
3.3 Resistores en serie y división de voltaje .....	61
3.4 Resistores en paralelo y división de la corriente .....	66
3.5 Fuentes de voltaje en serie y fuentes de corriente en paralelo .....	72
3.6 Análisis de circuitos .....	73
3.7 Análisis de circuitos resistivos utilizando MATLAB .....	78
3.8 ¿Cómo lo podemos comprobar...? .....	82
3.9 Ejemplo de diseño — Fuente de voltaje ajustable .....	84
3.10 Resumen .....	87
Problemas .....	88
Problemas de diseño .....	106

**CAPÍTULO 4**

<b>Métodos de análisis de circuitos resistivos .....</b>	<b>108</b>
4.1 Introducción .....	108
4.2 Análisis de voltajes de nodos de circuitos con fuentes de corriente .....	109
4.3 Análisis de voltajes de nodos de circuitos con fuentes de corriente y de voltaje .....	115
4.4 Análisis de voltajes de nodos con fuentes dependientes .....	120
4.5 Análisis de corrientes de enlaces con fuentes de voltaje independientes .....	122
4.6 Análisis de corrientes de enlaces con fuentes de corriente y de voltaje .....	127
4.7 Análisis de corrientes de enlaces con fuentes dependientes .....	131
4.8 Comparación entre el método de voltajes de nodos y el método de corrientes de enlaces .....	134
4.9 Análisis de corrientes de enlaces utilizando MATLAB .....	136
4.10 Uso de PSpice para determinar los voltajes de nodos y las corrientes de enlaces .....	138
4.11 ¿Cómo lo podemos comprobar...? .....	140
4.12 Ejemplo de diseño — Despliegue angular del potenciómetro .....	143
4.13 Resumen .....	146
Problemas .....	147
Problemas de PSpice .....	160
Problemas de diseño .....	160

**CAPÍTULO 5**

<b>Teoremas de circuitos .....</b>	<b>162</b>
5.1 Introducción .....	162
5.2 Transformaciones de fuentes .....	162
5.3 Superposición .....	167
5.4 Teorema de Thévenin .....	171
5.5 Circuito equivalente de Norton .....	175
5.6 Transferencia de potencia máxima .....	179
5.7 Uso de MATLAB para determinar el circuito equivalente de Thévenin .....	182
5.8 Uso de PSpice para determinar el circuito equivalente de Thévenin .....	185
5.9 ¿Cómo lo podemos comprobar...? .....	188
5.10 Ejemplo de diseño — Puente de indicador de tensión .....	189
5.11 Resumen .....	192
Problemas .....	192
Problemas de PSpice .....	205
Problemas de diseño .....	206

**CAPÍTULO 6**

<b>El amplificador operacional .....</b>	<b>208</b>
6.1 Introducción .....	208
6.2 El amplificador operacional .....	208
6.3 El amplificador operacional ideal .....	210
6.4 Análisis nodal de circuitos que contienen amplificadores operacionales ideales .....	212
6.5 Diseño mediante el uso de amplificadores operacionales .....	217
6.6 Circuitos de amplificadores operacionales y ecuaciones algebraicas lineales .....	222
6.7 Características de los amplificadores operacionales prácticos .....	227
6.8 Análisis de circuitos de amplificadores operacionales mediante el uso de MATLAB .....	234
6.9 Análisis de circuitos de amplificadores operacionales mediante el uso de PSpice .....	236
6.10 ¿Cómo lo podemos comprobar ...? .....	237
6.11 Ejemplo de diseño — Circuito de interfase de transductor .....	239
6.12 Resumen .....	241
Problemas .....	242
Problemas de PSpice .....	255
Problemas de diseño .....	256

**CAPÍTULO 7**

<b>Elementos que almacenan energía .....</b>	<b>257</b>
7.1 Introducción .....	257
7.2 Condensadores .....	258
7.3 Almacenamiento de energía en un condensador .....	264
7.4 Condensadores en serie y en paralelo .....	267
7.5 Inductores .....	269
7.6 Almacenamiento de energía en un inductor .....	274
7.7 Inductores en serie y en paralelo .....	276
7.8 Condiciones iniciales de los circuitos permanentes .....	277
7.9 Circuitos de amplificadores operacionales y ecuaciones diferenciales lineales .....	281
7.10 Uso de MATLAB para trazar el voltaje y la corriente de un condensador o un inductor .....	281
7.11 ¿Cómo lo podemos comprobar ...? .....	287
7.12 Ejemplo de diseño — Integrador e interruptor .....	290
7.13 Resumen .....	293
Problemas .....	294
Problemas de diseño .....	309

**CAPÍTULO 8**

<b>Respuesta total de los circuitos <i>RL</i> y <i>RC</i> .....</b>	<b>311</b>
8.1 Introducción .....	311
8.2 Circuitos de primer orden .....	311
8.3 Respuesta de un circuito de primer orden a una entrada constante .....	314
8.4 Conmutación secuencial .....	327
8.5 Estabilidad de circuitos de primer orden .....	329
8.6 Fuente de paso unitario .....	331
8.7 Respuesta de un circuito de primer orden a una fuente no constante .....	335
8.8 Operadores diferenciales .....	340
8.9 Uso de PSpice para analizar circuitos de primer orden .....	342
8.10 ¿Cómo lo podemos comprobar ...? .....	345
8.11 Ejemplo de diseño — Una computadora y su impresora .....	349

8.12	Resumen .....	352
	Problemas .....	353
	Problemas de PSpice.....	366
	Problemas de diseño .....	367

## CAPÍTULO 9

### Respuesta total de circuitos con dos elementos de almacenamiento de energía .....368

9.1	Introducción .....	368
9.2	Ecuación diferencial para circuitos con dos elementos de almacenamiento de energía .....	369
9.3	Solución de la ecuación diferencial de segundo orden: la respuesta natural.....	373
9.4	Respuesta natural del circuito $RLC$ en paralelo no forzado.....	376
9.5	Respuesta natural del circuito $RLC$ en paralelo no forzado críticamente amortiguado.....	379
9.6	Respuesta natural de un circuito $RLC$ en paralelo no forzado subamortiguado .....	380
9.7	Respuesta forzada de un circuito $RLC$ .....	382
9.8	Respuesta total de un circuito $RLC$ .....	386
9.9	Método de las variables de estado para el análisis de circuitos .....	389
9.10	Raíces en el plano compuesto.....	393
9.11	¿Cómo lo podemos comprobar...?.....	394
9.12	Ejemplo de diseño — Dispositivo de encendido de la bolsa de aire de un automóvil .....	397
9.13	Resumen .....	399
	Problemas .....	401
	Problemas de PSpice.....	412
	Problemas de diseño .....	413

## CAPÍTULO 10

### Análisis senoidal en estado estable.....425

10.1	Introducción .....	415
10.2	Fuentes senoidales .....	416
10.3	Respuesta de estado estable de un circuito $RL$ para una función de forzamiento senoidal.....	421
10.4	Función de forzamiento exponencial compuesta.....	422
10.5	El fasor.....	426
10.6	Relaciones del fasor para los elementos $R$ , $L$ y $C$ .....	430
10.7	Impedancia y admitancia .....	434
10.8	Leyes de Kirchhoff que utilizan fasores .....	438
10.9	Análisis del voltaje de nodos y de la corriente de enlaces utilizando fasores .....	443
10.10	Superposición, equivalentes de Thévenin y Norton y transformaciones de fuentes .....	449
10.11	Diagramas de fasores.....	454
10.12	Circuitos de fasores y el amplificador operacional.....	455
10.13	La respuesta total .....	457
10.14	Uso de MATLAB para el análisis de circuitos en estado estable con entradas senoidales.....	464
10.15	Uso de PSpice para analizar circuitos de CA.....	466
10.16	¿Cómo lo podemos comprobar...?.....	469
10.17	Ejemplo de diseño — Circuito del amplificador operacional .....	471
10.18	Resumen .....	474
	Problemas .....	474
	Problemas de PSpice.....	493
	Problemas de diseño .....	494

**CAPÍTULO 11**

<b>Potencia de CA de estado estable.....</b>	<b>496</b>
11.1 Introducción.....	496
11.2 Potencia eléctrica.....	496
11.3 Potencia instantánea y potencia promedio.....	497
11.4 Valor efectivo de una forma de onda periódica.....	501
11.5 Potencia compleja.....	503
11.6 Factor de potencia.....	511
11.7 Principio de superposición de potencia.....	519
11.8 Teorema de la transferencia de potencia máxima.....	522
11.9 Inductores acoplados.....	523
11.10 El transformador ideal.....	531
11.11 ¿Cómo lo podemos comprobar...?.....	536
11.12 Ejemplo de diseño — Transferencia de potencia máxima.....	538
11.13 Resumen.....	540
Problemas.....	542
Problemas de PSpice.....	556
Problemas de diseño.....	556

**CAPÍTULO 12**

<b>Circuitos trifásicos.....</b>	<b>558</b>
12.1 Introducción.....	558
12.2 Voltajes trifásicos.....	559
12.3 Circuito Y a Y.....	562
12.4 Fuente y carga conectadas a $\Delta$ .....	571
12.5 Circuito Y a $\Delta$ .....	573
12.6 Circuitos trifásicos balanceados.....	576
12.7 Potencias promedio e instantánea en una carga trifásica balanceada.....	578
12.8 Medición de potencia con dos vatímetros.....	581
12.9 ¿Cómo lo podemos comprobar...?.....	584
12.10 Ejemplo de diseño — Corrección del factor de potencia.....	587
12.11 Resumen.....	588
Problemas.....	589
Problemas PSpice.....	593
Problemas de diseño.....	593

**CAPÍTULO 13**

<b>Respuesta de frecuencia.....</b>	<b>594</b>
13.1 Introducción.....	594
13.2 Ganancia, cambio de fase y la función de red.....	594
13.3 Diagramas de Bode.....	606
13.4 Circuitos resonantes.....	623
13.5 Respuesta de frecuencia de circuitos de amplificadores operacionales.....	630
13.6 Trazo de diagramas de Bode utilizando MATLAB.....	632
13.7 Uso de PSpice para trazar un diagrama de respuesta de frecuencia.....	634
13.8 ¿Cómo lo podemos comprobar...?.....	636



13.9	Ejemplo de diseño — Sintonizador de radio .....	640
13.10	Resumen .....	642
	Problemas .....	643
	Problemas de PSpice .....	656
	Problemas de diseño .....	658

#### CAPÍTULO 14

<b>Transformada de Laplace .....</b>	<b>660</b>	
14.1	Introducción .....	660
14.2	Transformada de Laplace .....	661
14.3	Entradas de pulso .....	667
14.4	Transformada inversa de Laplace .....	671
14.5	Teoremas del valor inicial y final .....	677
14.6	Solución de ecuaciones diferenciales que describen un circuito .....	680
14.7	Análisis de circuitos utilizando impedancia y condiciones iniciales .....	681
14.8	Función de transferencia e impedancia .....	692
14.9	Convolución .....	695
14.10	Estabilidad .....	699
14.11	Expansión de fracción parcial utilizando MATLAB .....	702
14.12	¿Cómo lo podemos comprobar...? .....	707
14.13	Ejemplo de diseño — Compuerta de carga del transbordador espacial .....	710
14.14	Resumen .....	713
	Problemas .....	714
	Problemas de PSpice .....	728
	Problemas de diseño .....	729

#### CAPÍTULO 15

<b>Serie y transformada de Fourier .....</b>	<b>730</b>	
15.1	Introducción .....	730
15.2	Serie de Fourier .....	731
15.3	Simetría de la función $f(t)$ .....	739
15.4	Serie de Fourier de formas de onda seleccionadas .....	744
15.5	Forma exponencial de la serie de Fourier .....	746
15.6	Espectro de Fourier .....	754
15.7	Circuitos y serie de Fourier .....	758
15.8	Uso de PSpice para determinar la serie de Fourier .....	761
15.9	Transformada de Fourier .....	766
15.10	Propiedades de la transformada de Fourier .....	769
15.11	Espectro de las señales .....	773
15.12	Convolución y respuesta del circuito .....	774
15.13	Transformada de Fourier y la transformada de Laplace .....	777
15.14	¿Cómo lo podemos comprobar...? .....	779
15.15	Ejemplo de diseño — Alimentación de potencia de CD .....	781
15.16	Resumen .....	784
	Problemas .....	785
	Problemas de PSpice .....	791
	Problemas de diseño .....	791

**CAPÍTULO 16**

<b>Circuitos de filtro .....</b>	<b>793</b>
16.1 Introducción .....	793
16.2 Filtro eléctrico.....	793
16.3 Filtros.....	794
16.4 Filtros de segundo orden.....	797
16.5 Filtros de alto orden .....	805
16.6 Simulación de circuitos de filtro utilizando PSpice.....	811
16.7 ¿Cómo lo podemos comprobar...?.....	815
16.8 Ejemplo de diseño — Filtro antiseudónimo .....	817
16.9 Resumen .....	820
Problemas .....	820
Problemas de PSpice.....	825
Problemas de diseño .....	828

**CAPÍTULO 17**

<b>Redes de dos y tres puertos .....</b>	<b>829</b>
17.1 Introducción .....	829
17.2 Transformación de T a $\Pi$ y redes de dos puertos y tres terminales .....	830
17.3 Ecuaciones de redes de dos puertos.....	832
17.4 Parámetros Z y Y para un circuito con fuentes dependientes.....	835
17.5 Parámetros híbridos y de transmisión.....	837
17.6 Relaciones entre parámetros de dos puertos.....	839
17.7 Interconexión de redes de dos puertos.....	841
17.8 ¿Cómo lo podemos comprobar...?.....	844
17.9 Ejemplo de diseño — Amplificador de transistores .....	846
17.10 Resumen .....	848
Problemas .....	848
Problemas de diseño .....	852

**APÉNDICE A**

<b>Inicios con PSpice.....</b>	<b>853</b>
--------------------------------	------------

**APÉNDICE B**

<b>MATLAB, matrices y aritmética compuesta .....</b>	<b>860</b>
--	------------

**APÉNDICE C**

<b>Fórmulas matemáticas.....</b>	<b>871</b>
----------------------------------	------------

**APÉNDICE D**

<b>Código de colores del resistor estándar .....</b>	<b>874</b>
--	------------

<b>Referencias .....</b>	<b>876</b>
--------------------------	------------

<b>Índice .....</b>	<b>879</b>
---------------------	------------



# Variables de circuitos eléctricos



CAPÍTULO

1

## EN ESTE CAPÍTULO

- |     |                                  |     |   |
|-----|----------------------------------|-----|---|
| 1.1 | Introducción                     | 1.7 | ¿Cómo lo podemos comprobar...?  |
| 1.2 | Circuitos eléctricos y corriente | 1.8 | <b>EJEMPLO DE DISEÑO</b> — Controlador de válvulas de un motor de propulsión a chorro |
| 1.3 | Sistemas de unidades             | 1.9 | Resumen   |
| 1.4 | Voltaje                          |     | Problemas   |
| 1.5 | Potencia y energía               |     | Problemas de diseño   |
| 1.6 | Análisis y diseño de circuitos   |     |   |

## 1.1 INTRODUCCIÓN

Un circuito consta de elementos eléctricos conectados entre sí. Los ingenieros utilizan los circuitos eléctricos para resolver problemas de importancia para la sociedad actual. En particular:

1. Los circuitos eléctricos se usan en la generación, transmisión y consumo de la potencia eléctrica y la energía.
2. Los circuitos eléctricos se emplean en la codificación, decodificación, almacenamiento, transmisión y procesamiento de la información.

En este capítulo haremos lo siguiente:

- Representar la corriente y el voltaje de un elemento del circuito eléctrico, prestando particular atención a la dirección de referencia de la corriente y a la dirección de referencia o polaridad del voltaje.
- Calcular la potencia y la energía proporcionadas o recibidas por un circuito.
- Utilizar la convención pasiva para determinar si el producto de la corriente y el voltaje de un elemento de circuito es la potencia proporcionada por ese elemento o la potencia recibida por el elemento.
- Aplicar notación científica para representar cantidades eléctricas con un amplio margen de magnitudes.

## 1.2 CIRCUITOS ELÉCTRICOS Y CORRIENTE

Al comparar con otras fuentes de potencia, las principales características de la electricidad son su movilidad y su flexibilidad. La energía eléctrica puede ser trasladada a cualquier punto a lo largo de un conjunto de cables y, dependiendo de las necesidades del usuario, convertida en luz, calor o movimiento.

Un **circuito eléctrico** o red eléctrica es una interconexión de elementos eléctricos unidos entre sí en una vía cerrada, de modo que una corriente eléctrica pueda fluir constantemente.

Considere un circuito sencillo que conste de dos elementos eléctricos bien conocidos, una batería y una resistencia, como se muestra en la figura 1.2-1. Cada elemento está representado por un elemento de dos terminales que se muestran en la figura 1.2-2. A estos elementos a veces se les llama dispositivos, y nodos a las terminales.

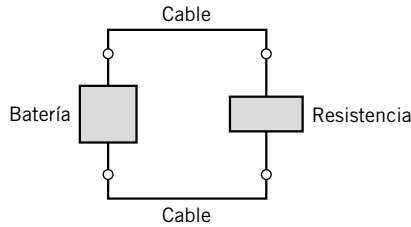


FIGURA 1.2-1 Circuito sencillo.



FIGURA 1.2-2 Elemento eléctrico de dos terminales a y b generales.

La carga puede fluir en un circuito eléctrico. *Corriente es la velocidad de cambio de carga que pasa en un punto dado.* Carga es la propiedad intrínseca de materia que causa los fenómenos eléctricos. La cantidad de carga  $q$  se puede expresar en términos de carga en un electrón, es decir,  $-1.602 \times 10^{-19}$  culombios. Por tanto,  $-1$  culombio es la carga en  $6.24 \times 10^{18}$  electrones. La corriente a través de un área específica es definida por la carga eléctrica que pasa por el área por unidad de tiempo. En consecuencia,  $q$  se define como la carga expresada en culombios (C).

**Carga** es la cantidad de electricidad causante de los fenómenos eléctricos.

Entonces, lo podemos expresar como

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1.2-1)$$

La unidad de corriente es el amperio (A); un amperio es 1 culombio por segundo.

**Corriente** es la velocidad de flujo de la carga eléctrica que pasa por un punto dado.

Observe que a lo largo de este capítulo utilizamos una letra minúscula, como  $q$ , para indicar una variable que es una función de tiempo,  $q(t)$ ; y una mayúscula, como  $Q$ , para representar una constante.

El flujo de corriente se representa por convención como un flujo de cargas positivas. Esta convención la inició Benjamín Franklin, primer gran científico estadounidense de la electricidad. Desde luego, ahora sabemos que la carga que fluye en conductores de metal es el resultado de electrones con carga negativa. No obstante, consideraremos la corriente como el flujo de una carga positiva, de acuerdo con la convención aceptada.

La figura 1.2-3 muestra la notación para describir una corriente. Hay dos partes para esta notación: un valor (quizá representado por un nombre de variable) y una dirección asignada. A manera de vocabulario, decimos que se da una corriente *en* o *a través de* un elemento. La figura muestra que hay dos maneras de asignar la dirección de la corriente a través del elemento. La corriente  $i_1$  es la proporción del flujo de carga de electricidad de la terminal a a la b. Por otro lado, la corriente  $i_2$  es el flujo de la carga de electricidad de la terminal b a la a.

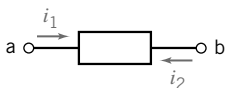
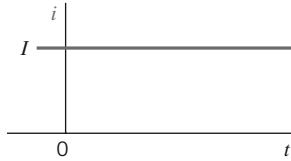


FIGURA 1.2-3 La corriente en un circuito.

FIGURA 1.2-4 Corriente directa de magnitud  $I$ .

Las corrientes  $i_1$  e  $i_2$  son semejantes pero diferentes. Tienen el mismo tamaño pero diferentes direcciones. Por lo tanto,  $i_2$  es la negativa de  $i_1$  y entonces

$$i_1 = -i_2$$

Siempre se asocia una flecha con una corriente para indicar su dirección. Una descripción completa de corriente requiere un valor (que puede ser positivo o negativo) y una dirección (indicada por una flecha).

Si la corriente que fluye a través de un elemento es constante, se representa por la constante  $I$ , como se muestra en la figura 1.2-4. Una corriente constante se denomina *corriente directa* (cd).

Una **corriente directa** (cd) es una corriente de magnitud constante.

Una corriente que varía con el tiempo  $i(t)$  puede tomar varias formas, ya sea de rampa, senoide o exponencial, como se ven en la figura 1.2-5. La corriente sinusoidal se denomina *corriente alterna* (ca).

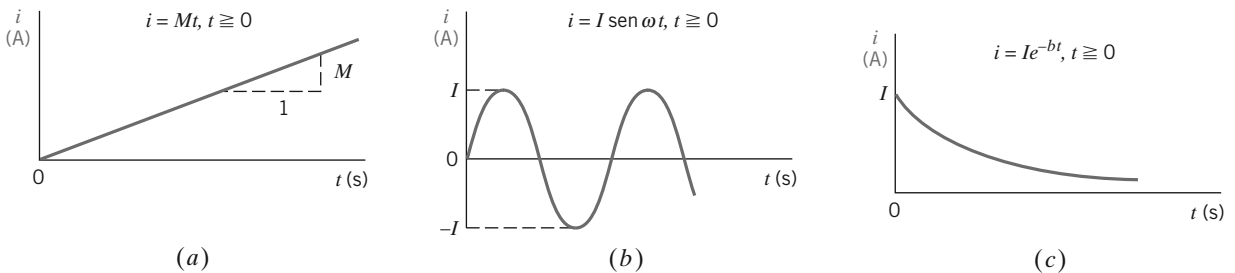


FIGURA 1.2-5 (a) Rampa con una pendiente  $M$ . (b) Senoide. (c) Exponencial.  $I$  es una constante. La corriente  $i$  es cero para  $t < 0$ .

Si se conoce la carga  $q$ , la corriente  $i$  se encuentra fácilmente mediante la ecuación 1.2-1. O bien, si se conoce la corriente  $i$ , se puede calcular la carga  $q$ . Observe que de la ecuación 1.2-1 obtenemos

$$q = \int_{-\infty}^t i \, d\tau = \int_0^t i \, d\tau + q(0) \quad (1.2-2)$$

donde  $q(0)$  es la carga en  $t = 0$ .

### EJEMPLO 1.2-1 Corriente a partir de una carga

Obtenga la corriente en un elemento cuando la carga entrante sea

$$q = 12t \text{ C}$$

donde  $t$  es el tiempo en segundos.

**Solución**

Recuerde que la unidad de carga es el culombio, C. Por tanto, la corriente, a partir de la ecuación 1.2-1 es

$$i = \frac{dq}{dt} = 12 \text{ A}$$

donde la unidad de corriente son los amperios, A.

**EJEMPLO 1.2-2** Carga a partir de corriente

Obtenga la carga que ha entrado a la terminal de un elemento de  $t = 0$  a  $t = 3$  s cuando la corriente entrante al elemento es como se muestra en la figura 1.2-6.

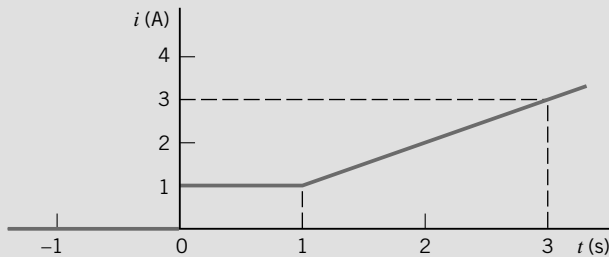


FIGURA 1.2-6 Forma de onda de corriente del ejemplo 1.2-2.

**Solución**

De la figura 1.2-6 podemos describir  $i(t)$  como

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t \leq 1 \\ t & t > 1 \end{cases}$$

Con la ecuación 1.2-2, tenemos

$$\begin{aligned} q(3) - q(0) &= \int_0^3 i(t) dt = \int_0^1 1 dt + \int_1^3 t dt \\ &= t \Big|_0^1 + \frac{t^2}{2} \Big|_1^3 = 1 + \frac{1}{2}(9 - 1) = 5 \text{ C} \end{aligned}$$

De manera alternativa, observamos que esa integración de  $i(t)$  de  $t = 0$  a  $t = 3$  s sólo requiere calcular el área bajo la curva que se muestra en la figura 1.2-6. Entonces tenemos que

$$q = 1 + 2 \times 2 = 5 \text{ C}$$

**EJERCICIO 1.2-1** Obtenga la carga que ha entrado en un elemento en tiempo  $t$  cuando  $i = 8t^2 - 4t$  A,  $t \geq 0$ . Suponga que  $q(t) = 0$  para que  $t < 0$ .

*Respuesta:*  $q(t) = \frac{8}{3}t^3 - 2t^2$  C

**EJERCICIO 1.2-2** La carga total que ha entrado en un circuito es  $q(t) = 4 \text{ sen } 3t$  C cuando  $t \geq 0$ , y  $q(t) = 0$  cuando  $t < 0$ . Determine la corriente en este circuito para que  $t > 0$ .

*Respuesta:*  $i(t) = \frac{d}{dt} 4 \text{ sen } 3t = 12 \cos 3t$  A

### 1.3 SISTEMAS DE UNIDADES

Para representar un circuito y sus elementos, debemos definir un sistema que conste de unidades para las cantidades que ocurran en el circuito. En la reunión general de la Conferencia General de Pesos y Medidas de 1960, los representantes modernizaron el sistema métrico y crearon el *Système International d'Unités*, más conocido como Unidades SI.

**SI** es el *Système International d'Unités*; o International System of Units.

Las unidades fundamentales, o básicas, del SI se muestran en la tabla 1.3-1. Los símbolos de unidades que representan nombres propios (de persona) van con inicial mayúscula, los demás no. No se usan puntos después de los símbolos, y los símbolos no tienen forma plural. Las unidades derivadas de otras cantidades físicas se obtienen de la combinación de unidades fundamentales. La tabla 1.3-2 muestra las unidades derivadas más comunes junto con sus fórmulas en términos de unidades fundamentales o unidades derivadas anteriores. Se muestran los símbolos para las unidades que los tienen.

**Tabla 1.3-1 Unidades base del SI**

CANTIDAD	UNIDAD SI	
	NOMBRE	SÍMBOLO
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	amperio	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

**Tabla 1.3-2 Unidades derivadas del SI**

CANTIDAD	NOMBRE DE UNIDAD	FÓRMULA	SÍMBOLO
Aceleración – lineal	metro por segundo por segundo	$m/s^2$	
Velocidad – lineal	metro por segundo	$m/s$	
Frecuencia	hertz	$s^{-1}$	Hz
Fuerza	newton	$kg \cdot m/s^2$	N
Presión o tensión	pascal	$N/m^2$	Pa
Densidad	kilogramo por metro cúbico	$kg/m^3$	
Energía de trabajo	joule (julio)	$N \cdot m$	J
Potencia	watt (vatio)	$J/s$	W
Carga eléctrica	culombio	$A \cdot s$	C
Potencial eléctrico	voltio	$W/A$	V
Resistencia eléctrica	ohmio	$V/A$	$\Omega$
Conductancia eléctrica	siemens	$A/V$	S
Capacitancia eléctrica	faradios	$C/V$	F
Flujo magnético	weber	$V \cdot s$	Wb
Inductancia	henry	$Wb/A$	H



Tabla 1.3-3 Prefijos SI

MÚLTIPLO	PREFIJO	SÍMBOLO
$10^{12}$	tera	T
$10^9$	giga	G
$10^6$	mega	M
$10^3$	kilo	k
$10^{-2}$	centi	c
$10^{-3}$	mili	m
$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{-9}$	nano	n
$10^{-12}$	pico	p
$10^{-15}$	femto	f

Las unidades básicas como las de longitud en metros (m), de tiempo en segundos (s), y de corriente en amperios (A), se pueden usar para obtener unidades. Así, por ejemplo, tenemos la unidad de carga (C) resultado del producto de corriente y tiempo ( $A \cdot s$ ). La unidad fundamental para la energía es el joule (J), la cual es fuerza por distancia o  $N \cdot m$ .

La gran ventaja del sistema SI es que incorpora un sistema decimal para que haya una relación en cantidades mayores o menores con respecto a la unidad básica. Las potencias de 10 se representan por los prefijos estándar que se muestran en la tabla 1.3-3. Un ejemplo del uso común de un prefijo es el centímetro (cm), que es 0.01 metros, o la centésima parte de un metro.

El multiplicador decimal siempre debe acompañar a las unidades apropiadas y nunca se escribe solo. De manera que podemos escribir 2 500 W como 2.5 kW. Del mismo modo, podemos escribir 0.012 A como 12 mA.

### EJEMPLO 1.3-1 Unidades del SI

Una masa de 150 gramos experimenta una fuerza de 100 newtons. Obtenga la energía o trabajo que se consumió si la masa se movió 10 centímetros. Además, obtenga la potencia si la masa completa su movimiento en 1 milisegundo.

#### Solución

La energía se encuentra como

$$\text{energía} = \text{fuerza} \times \text{distancia} = 100 \times 0.1 = 10 \text{ J}$$

Observe que la distancia se utilizó en unidades de metros. La potencia se encuentra a partir de

$$\text{potencia} = \frac{\text{energía}}{\text{periodo de tiempo}}$$

donde el periodo de tiempo es  $10^{-3}$  s. Por consiguiente,

$$\text{potencia} = \frac{10}{10^{-3}} = 10^4 \text{ W} = 10 \text{ kW}$$

**EJERCICIO 1.3-1** ¿Cuál de las tres corrientes  $i_1 = 45 \mu\text{A}$ ,  $i_2 = 0.03 \text{ mA}$ , e  $i_3 = 25 \times 10^{-4} \text{ A}$ , es la más grande?

**Respuesta:**  $i_3$  es la más grande.

## 1.4 VOLTAJE

Las variables básicas en un circuito eléctrico son la corriente y el voltaje. Estas variables describen el flujo de carga a través de los elementos de un circuito y la energía requerida para que la carga fluya. La figura 1.4-1 muestra la notación para describir un voltaje. Hay dos partes en esta notación: un valor (quizá representado por una variable de nombre) y una dirección asignada. El valor de un voltaje puede ser positivo o negativo. La dirección se la dan sus polaridades (+, -). Como una cuestión de vocabulario, se dice que un voltaje ocurre *a través de* un elemento. La figura 1.4-1 muestra que hay dos formas de marcar el voltaje a través de un elemento. El voltaje  $v_{ba}$  es proporcional al trabajo requerido para mover una carga positiva de la terminal a a la b. Por otra parte, el voltaje  $v_{ab}$  es proporcional al trabajo requerido para mover una carga positiva de la terminal b a la a. En ocasiones  $v_{ba}$  se lee como “el voltaje de la terminal b con respecto a la terminal a”. Del mismo modo,  $v_{ab}$  se puede leer como “el voltaje en la terminal a con respecto a la terminal b”. De manera alternativa, a veces se dice que  $v_{ba}$  es el voltaje que va de la terminal a a la b. Los voltajes  $v_{ab}$  y  $v_{ba}$  son semejantes pero diferentes. Tienen la misma magnitud pero diferentes polaridades. Eso significa que

$$v_{ab} = -v_{ba}$$

Si se considera  $v_{ba}$ , la terminal b se denomina “terminal +” y la terminal a se denomina “terminal -”. Por otra parte, cuando nos referimos a  $v_{ab}$ , la terminal a se denomina la “terminal +” y la terminal b es la “terminal -”.

El **voltaje** que pasa a través de un elemento es el trabajo (energía) que se requiere para mover una unidad de carga positiva de la terminal - a la terminal +. La unidad de voltaje es el voltio, V.

La ecuación para el voltaje que pasa a través del elemento es

$$v = \frac{dw}{dq} \quad (1.4-1)$$

donde  $v$  es el voltaje,  $w$  es la energía (o trabajo), y  $q$  es la carga. Una carga de 1 culombio entrega una energía de 1 joule al moverse a través de un voltaje de 1 voltio.

## 1.5 POTENCIA Y ENERGÍA

La potencia y la energía que se entregan a un elemento tienen una gran importancia. Por ejemplo, la salida usual de una bombilla eléctrica, o foco, se puede expresar en términos de potencia. Un foco de 300 watts (vatios) proporciona más luz que uno de 100 watts.

**Potencia** es el periodo de gasto o absorción de energía.

Por lo tanto, tenemos la ecuación

$$p = \frac{dw}{dt} \quad (1.5-1)$$

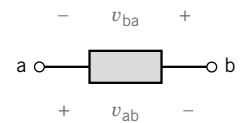


FIGURA 1.4-1  
Voltaje a través de un elemento del circuito.

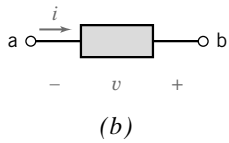
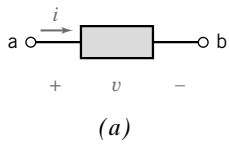


FIGURA 1.5-1 (a) La convención pasiva se usa para voltaje y corriente del elemento. (b) No se usa la convención pasiva.

donde  $p$  es potencia en watts,  $w$  es energía en joules, y  $t$  es tiempo en segundos. La potencia asociada con la carga que fluye a través de un elemento es

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = v \cdot i \quad (1.5-2)$$

A partir de la ecuación 1.5-2 vemos que potencia es simplemente el producto del voltaje a través de un elemento por la corriente mientras la corriente fluye a través del elemento. La potencia tiene unidades de watts.

A cada elemento de un circuito se asignan dos variables de circuito: un voltaje y una corriente. La figura 1.5-1 muestra que hay dos diferentes maneras de arreglar la dirección de la corriente y la polaridad del voltaje. En la figura 1.5-1a, la corriente entra en el circuito en la terminal + del voltaje y sale en la terminal -. Por el contrario, en la figura 1.5-1b, la corriente entra en el elemento del circuito en la terminal - del voltaje y sale en la terminal +.

Primero veamos la figura 1.5-1a. Cuando la corriente entra en el elemento de circuito en la terminal + del voltaje y sale en la terminal -, se dice que el voltaje y la corriente se “apegan a la convención pasiva”. En ella, el voltaje impulsa una carga positiva en la dirección indicada por la corriente. Según esto, la potencia calculada al multiplicar el voltaje del elemento por la corriente del elemento

$$p = vi$$

es la potencia **absorbida** por el elemento. (Esta potencia también se denomina “potencia recibida por el elemento”). La potencia absorbida por un elemento puede ser tanto positiva como negativa, lo cual dependerá de los valores del voltaje y la corriente del elemento.

A continuación, veamos la figura 1.5-1b. Aquí no se ha utilizado la convención pasiva. En cambio, la corriente entra al elemento de circuito en la terminal - del voltaje y sale en la terminal +. En este caso, el voltaje impulsa una carga positiva en la dirección opuesta a la indicada por la corriente. Por consiguiente, cuando el voltaje y la corriente del elemento no se apegan a la convención pasiva, la potencia calculada al multiplicar el voltaje de del elemento por la corriente del elemento es la potencia **alimentada** por el elemento. La potencia alimentada por un elemento puede ser positiva o negativa, dependiendo de los valores del voltaje y la corriente del elemento.

La potencia absorbida por n elemento en la energía alimentada por ese mismo elemento están relacionadas por

$$\text{potencia absorbida} = - \text{potencia alimentada}$$

En la tabla 1.5-1 se resumen las reglas de la convención pasiva. Cuando el voltaje y la corriente del elemento se apegan a la convención pasiva, la energía absorbida por un elemento se puede determinar

Tabla 1.5-1 Potencia absorbida o alimentada por un elemento

POTENCIA ABSORBIDA POR UN ELEMENTO	POTENCIA ALIMENTADA POR UN ELEMENTO
<p>Dado que las direcciones de referencia de <math>v</math> e <math>i</math> se apegan a la convención pasiva, la potencia</p> $p = vi$ <p>es la potencia absorbida por el elemento.</p>	<p>Dado que las direcciones de referencia de <math>v</math> e <math>i</math> no se apegan a la convención pasiva, la potencia</p> $p = vi$ <p>es la potencia alimentada por el elemento.</p>

por la ecuación 1.5-1 al reescribirla como

$$dw = p dt \quad (1.5-3)$$

Al integrarla tenemos

$$w = \int_{-\infty}^t p d\tau \quad (1.5-4)$$

Si el elemento sólo recibe potencia para  $t \geq t_0$  y obtenemos  $t_0 = 0$ , entonces tenemos

$$w = \int_0^t p d\tau \quad (1.5-5)$$

### EJEMPLO 1-5-1 Potencia y energía eléctricas

Consideremos el elemento que se muestra en la figura 1.5-1a cuando  $v = 4 \text{ V}$  e  $i = 10 \text{ A}$ . Obtenga la potencia absorbida por el elemento y la energía absorbida durante un intervalo de 10 s.

#### Solución

La potencia absorbida por el elemento es

$$p = vi = 4 \cdot 10 = 40 \text{ W}$$

La energía absorbida por el elemento es

$$w = \int_0^{10} p dt = \int_0^{10} 40 dt = 40 \cdot 10 = 400 \text{ J}$$

### EJEMPLO 1.5-2 Potencia eléctrica y la convención pasiva

Considere el elemento que se muestra en la figura 1.5-2. La corriente  $i$  y el voltaje  $v_{ab}$  se apegan a la convención pasiva, por lo tanto, la potencia *absorbida* por este elemento es

$$\text{potencia absorbida} = i \cdot v_{ab} = 2 \cdot (-4) = -8 \text{ W}$$

La corriente  $i$  y el voltaje  $v_{ba}$  no se apegan a la convención pasiva, por lo tanto la potencia *alimentada* por este elemento es

$$\text{potencia alimentada} = i \cdot v_{ba} = 2 \cdot (4) = 8 \text{ W}$$

Como se esperaba

$$\text{potencia absorbida} = -\text{potencia alimentada}$$

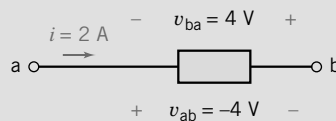
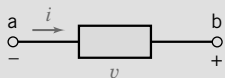


FIGURA 1.5-2 El elemento considerado en el ejemplo 1.5-2.

Ahora veamos un ejemplo de cuando no se utiliza la convención pasiva. Entonces  $p = vi$  es la potencia alimentada por el elemento.

**EJEMPLO 1.5-3** Potencia, energía y la convención pasiva

Considere el circuito que se muestra en la figura 1.5-3 con  $v = 8e^{-t}$  V e  $i = 20e^{-t}$  A para que  $t \geq 0$ . Obtenga la potencia alimentada por este elemento y la energía alimentada por el elemento durante el primer segundo de operación. Supongamos que  $v$  e  $i$  son cero para que  $t < 0$ .



**FIGURA 1.5-3** Elemento cuya corriente fluye hacia la terminal con un signo de voltaje negativo.

**Solución**

La potencia alimentada es

$$p = v_i = (8e^{-t})(20e^{-t}) = 160e^{-2t} \text{ W}$$

Este elemento está proporcionando energía a la carga que fluye a través de él.

La energía alimentada durante el primer segundo es

$$\begin{aligned} w &= \int_0^1 p \, dt = \int_0^1 (160e^{-2t}) \, dt \\ &= 160 \left. \frac{e^{-2t}}{-2} \right|_0^1 = \frac{160}{-2} (e^{-2} - 1) = 80(1 - e^{-2}) = 69.2 \text{ J} \end{aligned}$$

**EJEMPLO 1.5-4** Energía en un rayo

La corriente promedio en un rayo común es de  $2 \times 10^4$  A, y su duración suele ser de 0.1 s (Williams, 1988). El voltaje entre las nubes y el suelo es de  $5 \times 10^8$  V. Determine la carga total transmitida a la tierra y la energía liberada.

**Solución**

La carga total es

$$Q = \int_0^{0.1} i(t) \, dt = \int_0^{0.1} 2 \times 10^4 \, dt = 2 \times 10^3 \text{ C}$$

La energía total liberada es

$$w = \int_0^{0.1} i(t) \times v(t) \, dt = \int_0^{0.1} (2 \times 10^4)(5 \times 10^8) \, dt = 10^{12} \text{ J} = 1 \text{ TJ}$$

**EJERCICIO 1.5-1** La figura E 1.5-1 muestra cuatro elementos de circuito identificados con las letras A, B, C y D.

- ¿Cuál de los dispositivos alimenta 12 W?
- ¿Cuál de los dispositivos absorbe 12 W?

- (c) ¿Cuál es el valor de la potencia recibida por el dispositivo *B*?
- (d) ¿Cuál es el valor de la potencia entregada por el dispositivo *B*?
- (e) ¿Cuál es el valor de la potencia entregada por el dispositivo *D*?

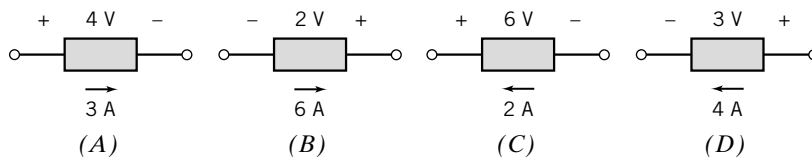


FIGURA E 1.5-1

**Respuestas:** (a) B y C, (b) A y D, (c)  $-12\text{ W}$ , (d)  $12\text{ W}$ , (e)  $-12\text{ W}$

## 1.6 ANÁLISIS Y DISEÑO DE CIRCUITOS

El análisis y diseño de circuitos eléctricos son las actividades primarias que se describen en este libro, a la vez que son las habilidades propias de un ingeniero electricista. El *análisis* de un circuito tiene que ver con el estudio metódico del circuito dado diseñado para obtener la magnitud y dirección de una o más variables de circuitos, como una corriente o el voltaje.

El proceso del análisis empieza con una exposición del problema, y por lo común se incluye un modelo de circuito dado. El objetivo es determinar la magnitud y la dirección de una o más variables de circuito, y la tarea final es verificar que la solución propuesta sea la correcta. Suele suceder que el ingeniero identifique primero lo que se conoce y los principios que utilizará para determinar la variable desconocida.

En la figura 1.6-1 se muestra el método que se seguirá a lo largo de este libro para la solución del problema. Por lo general se da el planteamiento del problema. Entonces el proceso de análisis se mueve de manera secuencial pasando por las cinco etapas que se muestran en la figura 1.6-1. En la primera se describen la situación y los supuestos. En la segunda se establecen los objetivos y

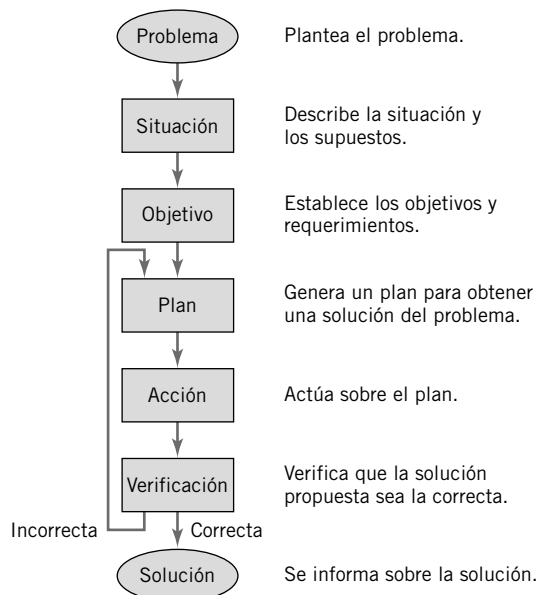


FIGURA 1.6-1 El método para la solución del problema.

requerimientos, y por lo común se registra la variable de circuito requerida que se ha de determinar. La tercera etapa es para generar un plan que ayudará a obtener la solución del problema. La cuarta etapa implica efectuar las actividades que se planearon y hacer un seguimiento a las etapas descritas en el plan. En la etapa final se verifica que la solución propuesta sea la correcta. Si lo es, se informa sobre la solución y se registra por escrito o se presenta de viva voz. Si la etapa de verificación indica que la solución propuesta no es la correcta o es inadecuada, entonces se vuelve a las etapas del plan, para reformular un plan mejorado y se repiten las etapas 4 y 5.

Para ilustrar este método analítico se propone un ejemplo. En el ejemplo 1.6-1 utilizaremos las etapas descritas en el método de solución de problemas de la figura 1.6-1.

### EJEMPLO 1.6-1 El método formal para la solución del problema

Un experimentador en un laboratorio supone que un elemento está absorbiendo potencia y utiliza un voltímetro y un amperímetro para medir el voltaje y la corriente como se muestra en la figura 1.6-2. Las mediciones indican que el voltaje es  $v = +12\text{ V}$  y que la corriente es  $i = -2\text{ A}$ . Determine si el supuesto del experimentador es correcto.

**Describe la situación y los supuestos:** estrictamente hablando, el elemento *está* absorbiendo potencia. El valor de la potencia absorbida por el elemento puede ser positiva, nula o negativa. Cuando decimos que alguien “supone que un elemento está absorbiendo potencia” significa que alguien asume que la potencia absorbida por el elemento es positiva.

Los medidores son ideales. Se conectan al elemento de tal manera que midan el voltaje marcado  $v$  y la corriente marcada como  $i$ . Los valores del voltaje y de la corriente aparecen en las lecturas de los medidores.

**Establecer los objetivos:** es calcular la potencia absorbida por el elemento para determinar si el valor de la potencia absorbida es positivo.

**Generar un plan:** es verificar que el voltaje y la corriente del elemento se apegan a la convención pasiva. Si es así, la potencia absorbida por el dispositivo es  $p = vi$ . Si no lo es, la potencia absorbida por el dispositivo es  $p = -vi$ .

**Actuar sobre el plan:** refiriéndose a la tabla 1.5-1, podemos ver que el voltaje y la corriente del elemento se apegan a la convención pasiva. Por lo tanto, la potencia absorbida por el elemento es

$$p = v_i = 12 \cdot (-2) = -24\text{ W}$$

El valor de la potencia absorbida no es positivo.

**Verificar la solución propuesta:** implica invertir las pruebas, como se muestra en la figura 1.6-3. Ahora el amperímetro mide la corriente  $i_1$  en vez de la corriente  $i$ , por lo que  $i_1 = 2\text{ A}$  y  $v = 12\text{ V}$ . Puesto que  $i_1$  y  $v$  no se apegan a la convención pasiva,  $p = i_1 \cdot v = 24\text{ W}$  es la potencia alimentada por el elemento. Alimentar  $24\text{ W}$  es el equivalente a absorber  $-24\text{ W}$ , por consiguiente, verificar la solución propuesta.

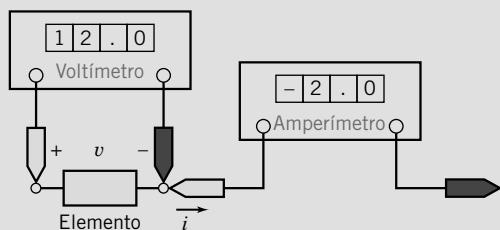


FIGURA 1.6-2 Un elemento con un voltímetro y un amperímetro.

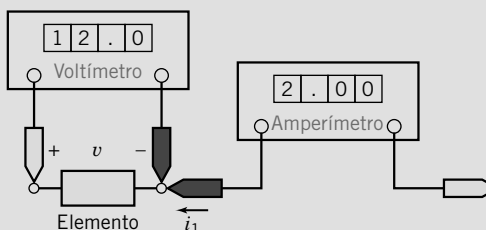


FIGURA 1.6-3 El circuito de la figura 1.6-2 probado al revés con el amperímetro.

*Diseño* es una actividad con un propósito determinado en la cual un diseñador visualiza un resultado deseado. Es el proceso de originar circuitos y predecir cómo cumplirán tales circuitos su objetivo. Diseño en ingeniería es el proceso de producir un conjunto de descripciones de un circuito que satisfaga un conjunto de requerimientos de desempeño y exigencias.

El proceso del diseño puede incorporar tres fases: análisis, síntesis y evaluación. La primera tarea es diagnosticar, definir y preparar, es decir, entender el problema y elaborar un enunciado explícito de objetivos; la segunda implica encontrar soluciones plausibles, la tercera se refiere a formarse una opinión sobre la validez de las soluciones en relación con los objetivos y la selección de diversas alternativas. Se impone un ciclo en el cual la solución sea revisada y mejorada por un nuevo examen del análisis. Estas tres fases forman parte de un marco de trabajo en la planeación, organización y desarrollo de los proyectos de diseño.

**Diseño** es el proceso de la creación de un circuito para cumplir con un conjunto de objetivos.

El proceso de la solución de problemas que se muestra en la figura 1.6-1 se utiliza en algunos ejemplos de diseño incluidos en este capítulo.

## 1.7 ¿CÓMO LO PODEMOS COMPROBAR...?

A los ingenieros se les suele solicitar comprobar que la solución de un problema sea la correcta. Por ejemplo, las soluciones propuestas para problemas de diseño se deben comprobar para confirmar que se ha cumplido con todas las especificaciones. Además, se deben revisar los resultados de la computadora para protegerse contra errores de captura de datos, así como las exigencias de los comerciantes, las cuales se deben analizar a fondo.

También a los estudiantes de ingeniería se les pide que verifiquen la exactitud de sus trabajos. Por ejemplo, tomarse un breve lapso antes de terminar un examen permitiría dar una vista rápida e identificar esas soluciones que podrían requerir un poco más de aplicación.

Este texto incluye algunos ejemplos que ilustran útiles técnicas para comprobar las soluciones de determinados problemas que se analizan en el capítulo. Al final de cada capítulo se presentan algunos problemas con los cuales se tiene la oportunidad de practicar las técnicas aprendidas.

### EJEMPLO 1.7-1 ¿Cómo podemos comprobar la potencia y la convención pasiva?

El reporte de un laboratorio indica que los valores de  $v$  e  $i$  medidos por el elemento de circuito mostrado en la figura 1.7-1 son  $-5$  V y  $2$  A, respectivamente. También establece que la potencia absorbida por el elemento es de  $10$  W. **¿Cómo podemos comprobar** el valor reportado de la potencia absorbida por este elemento?

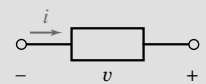


FIGURA 1.7-1 Un elemento de circuito con voltaje y corriente medidos.

#### Solución

¿El elemento de circuito absorbe  $-10$  W o  $+10$  W? El voltaje y la corriente mostrados en la figura 1.1-7 no se apegan al signo de la convención pasiva. Si nos referimos a la tabla 1.5-1 podemos ver que el producto de este voltaje y corriente es la potencia alimentada por el elemento, más que la potencia absorbida por el elemento.

Entonces, la potencia alimentada por el elemento es

$$p = vi = (-5)(2) = -10 \text{ W}$$

La potencia absorbida y la potencia alimentada por un elemento tienen la misma magnitud pero signos opuestos. Por lo tanto, hemos verificado que en realidad el elemento de circuito está absorbiendo  $10$  W.



## 1.8 EJEMPLO DE DISEÑO

## CONTROLADOR DE VÁLVULA DE UN MOTOR DE PROPULSIÓN A CHORRO

Un cohete espacial experimental pequeño utiliza un circuito de dos elementos, como se ve en la figura 1.8-1, para controlar la válvula de un motor de propulsión a chorro a partir del punto de despegue en  $t = 0$  hasta la expiración del cohete un minuto después. La energía que el elemento 1 debe alimentar para un lapso de un minuto es de 40 mJ. El elemento 1 debe ser una batería.

Se sabe que  $i(t) = De^{-t/60}$  mA para  $t \geq 0$ , y que el voltaje que pasa por el segundo elemento es  $v_2(t) = Be^{-t/60}$  V para  $t \geq 0$ . La magnitud máxima de la corriente,  $D$ , está limitada a 1 mA. Determine las constantes requeridas  $D$  y  $B$  y describa la batería requerida.

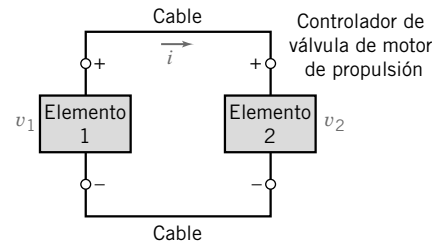


FIGURA 1.8-1 Circuito para controlar la válvula de un motor de propulsión a chorro para un cohete espacial.

## Describa la situación y los supuestos

1. La corriente entra por la terminal positiva del segundo elemento.
2. La corriente sale de la terminal positiva del primer elemento.
3. Los cables son precisos y no tienen efecto alguno sobre el circuito (no absorben energía).
4. El modelo del circuito, como se muestra en la figura 1.8-1, supone que el voltaje a través de los dos elementos es el mismo; es decir,  $v_1 = v_2$ .
5. El voltaje  $v_1$  de la batería es  $v_1 = Be^{-t/60}$  V donde  $B$  es el voltaje inicial que se descargará de manera exponencial al abastecer de energía a la válvula.
6. El circuito opera de  $t = 0$  a  $t = 60$  s.
7. La corriente es limitada, por lo tanto,  $D \leq 1$  mA.

## Establezca el objetivo

Determine la energía alimentada por el primer elemento para un periodo de un minuto y luego seleccione las constantes  $D$  y  $B$ . Describa la batería seleccionada.

## Genere un plan

Primero, encuentre  $v_1(t)$  e  $i(t)$  y luego obtenga la potencia,  $p_1(t)$ , alimentada por el primer elemento. A continuación, utilizando  $p_1(t)$ , encuentre la energía alimentada para los primeros 60 s.

OBJETIVO	ECUACIÓN	REQUERIDO	INFORMACIÓN
La energía $w_1$ para los primeros 60 s	$w_1 = \int_0^{60} p_1(t) dt$	$p_1(t)$	$v_1$ e $i$ son conocidas, excepto para las constantes $D$ y $B$ .

## Actúe sobre el plan

En primer lugar, se requiere  $p_1(t)$ , de modo que hay que calcular antes

$$\begin{aligned} p_1(t) &= iv_1 = (De^{-t/60} \times 10^{-3} \text{ A})(Be^{-t/60} \text{ V}) \\ &= DBe^{-t/30} \times 10^{-3} \text{ W} = DBe^{-t/30} \text{ mW} \end{aligned}$$

En segundo lugar, se necesita encontrar  $w_1$  para los primeros 60 s como

$$w_1 = \int_0^{60} (DBe^{-t/30} \times 10^{-3}) dt = \frac{DB \times 10^{-3} e^{-t/30}}{-1/30} \Big|_0^{60} \\ = -30DB \times 10^{-3} (e^{-2} - 1) = 25.9DB \times 10^{-3} \text{ J}$$

Puesto que se requiere que  $w_1 \geq 40$  mJ,

$$40 \leq 25.9DB$$

A continuación, seleccione el valor de limitación,  $D = 1$ , para obtener

$$B \geq \frac{40}{(25.9)(1)} = 1.54 \text{ V}$$

Por lo tanto, seleccionamos una batería de 2 V a fin de que la magnitud de la corriente sea menor de 1 mA.

### Verifique la solución propuesta

Habrà que verificar que con una batería de 2 V se alimenten al menos 40 mJ. Dado que  $i = e^{-t/60}$  mA y que  $v_2 = 2e^{-t/60}$  V, la energía alimentada por la batería es

$$w = \int_0^{60} (2e^{-t/60})(e^{-t/60} \times 10^{-3}) dt = \int_0^{60} 2e^{-t/30} \times 10^{-3} dt = 51.8 \text{ mJ}$$

Por lo tanto, se ha verificado la solución, y se emite un comunicado registrando el requerimiento de una batería de 2 V.

## 1.9 RESUMEN

- La carga es la propiedad intrínseca de la sustancia que hace posibles los fenómenos eléctricos. La corriente en un elemento de circuito es la proporción del movimiento de la carga a través del elemento. El voltaje que pasa a través de un elemento indica la energía disponible para hacer que la carga se mueva a través del elemento.
- Dada la corriente  $i$ , y el voltaje  $v$ , de un elemento de circuito, la potencia  $p$  y la energía  $w$ , resultan de
- La tabla 1.5-1 resume la utilización de la convención pasiva al calcular la potencia alimentada o recibida por un elemento de circuito.
- Las unidades SI (tabla 1.3-1) son de uso común entre ingenieros y científicos. Al usar prefijos decimales (tabla 1.-3) podemos simplificar la expresión de las cantidades eléctricas con un amplio espectro de magnitudes.

$$p = v \cdot i \quad y \quad w = \int_0^t p d\tau$$

## PROBLEMAS

### Sección 1.2 Circuitos y corriente eléctricos

**P 1.2-1** La carga total que ha entrado a un elemento de circuito es  $q(t) = 1.25(1 - e^{-5t})$  cuando  $t \geq 0$  y  $q(t) = 0$  cuando  $t < 0$ . Determine la corriente en este elemento de circuito para  $t \geq 0$ .

**Respuesta:**  $i(t) = 6.25e^{-5t}$  A

**P 1.2-2** La corriente en un elemento de circuito es  $i(t) = 4(1 - e^{-5t})$  A cuando  $t \geq 0$  e  $i(t) = 0$  cuando  $t < 0$ . Determine la carga total que ha entrado en un elemento de circuito para  $t \geq 0$ .

**Sugerencia:**  $q(0) = \int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 0 d\tau = 0$

**Respuesta:**  $q(t) = 4t + 0.8e^{-5t} - 0.8$  para  $t \geq 0$

**P 1.2-3** La corriente en un elemento de circuito es  $i(t) = 4$  sen  $5t$  A cuando  $t \geq 0$  e  $i(t) = 0$  cuando  $t < 0$ . Determine la carga total que ha entrado en un elemento de circuito para  $t \geq 0$ .

**Sugerencia:**  $q(0) = \int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 0 d\tau = 0$

**P 1.2-4** La corriente en un elemento de circuito es

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ 2 & 2 < t < 4 \\ -1 & 4 < t < 8 \\ 0 & 8 < t \end{cases}$$

donde las unidades de corriente son A y las unidades de tiempo son s. Determine la carga total que ha entrado en un elemento de circuito para  $t \geq 0$ .

*Respuesta:*

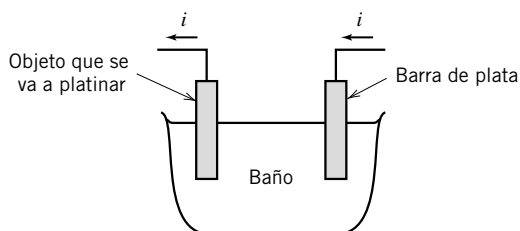
$$q(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ 2t - 4 & 2 < t < 4 \\ 8 - t & 4 < t < 8 \\ 0 & 8 < t \end{cases} \quad \text{donde las unidades de carga son C.}$$

**P 1.2-5** La carga total  $q(t)$ , en culombios, que entra en la terminal de un elemento es

$$q(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t & 0 \leq t \leq 2 \\ 3 + e^{-2(t-2)} & t > 2 \end{cases}$$

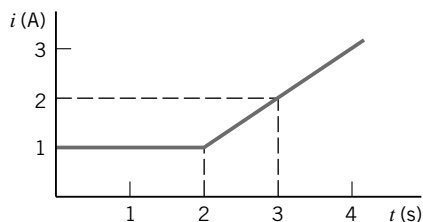
Obtenga la corriente  $i(t)$  y trace su forma de onda para  $t \geq 0$ .

**P 1.2-6** Una solución de electroplastia, como se muestra en la figura P 1.2-6, se utiliza para platar de manera uniforme objetos como utensilios de cocina y platos. Una corriente de 450 A fluye durante 20 minutos, y cada culombio transporta 1.118 mg de plata. ¿Cuál es el peso en gramos de la plata depositada?



**Figura P 1.2-6** Baño de electroplastia.

**P 1.2-7** Obtenga la carga,  $q(t)$ , y trace su forma de onda cuando la corriente que entra en una terminal de un elemento sea como se muestra en la figura P 1.2-7. Suponga que  $q(t) = 0$  para  $t < 0$ .



**Figura P 1.2-7**

### Sección 1.3 Sistemas de unidades

**P 1.3-1** Una corriente constante de  $3.2 \mu\text{A}$  fluye a través de un elemento. ¿Cuál es la carga que ha pasado a través del elemento en el primer milisegundo?

*Respuesta:* 3.2 nC

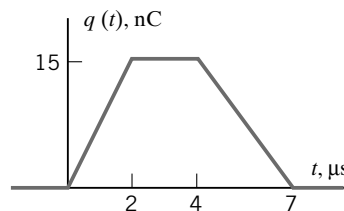
**P 1.3-2** Una carga de 45 nC pasa a través de un elemento de circuito durante un intervalo determinado cuya duración es de 5 ms. Determine la corriente promedio en este elemento de circuito durante ese intervalo.

*Respuesta:*  $i = 9 \mu\text{A}$ .

**P 1.3-3** A través de un elemento de circuito determinado pasan diez mil millones de electrones por segundo. ¿Cuál es la corriente promedio en ese elemento de circuito?

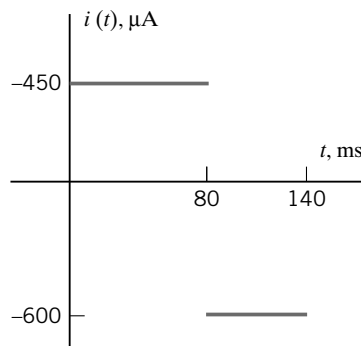
*Respuesta:*  $i = 1.602 \text{ nA}$

**P 1.3-4** La carga que fluye en un cable se ha diagramado en la figura P 1.3-4. Bosqueje la corriente correspondiente.



**Figura P 1.3-4**

**P 1.3-5** La corriente en un elemento de circuito está diagramada en la figura P 1.3-5. Bosqueje la carga correspondiente que fluye a través del elemento para  $t > 0$ .



**Figura P 1.3-5**

**P 1.3-6** La corriente en un circuito de elemento está diagramada en la figura P 1.3-6. Determine la carga total que fluye a través del elemento de circuito entre 300 y 1200  $\mu\text{s}$ .

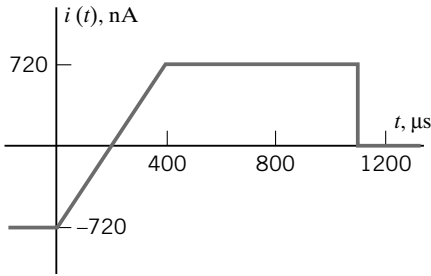


Figura P 1.3-6

**Sección 1.5 Potencia y energía**

**P 1.5-1** La figura 1.5-1 muestra cuatro elementos de circuito identificados por las letras *A*, *B*, *C* y *D*.

- (a) ¿Cuál de los dispositivos proporciona 30 mW?
- (b) ¿Cuál de los dispositivos absorbe 0.03W?
- (c) ¿Cuál es el valor de la potencia recibida por el dispositivo *B*?
- (d) ¿Cuál es el valor de la potencia entregada por el dispositivo *B*?
- (e) ¿Cuál es el valor de la potencia entregada por el dispositivo *C*?

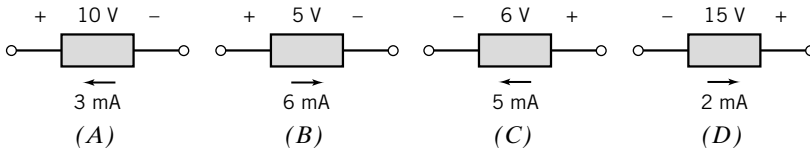


Figura P. 1.5-1

**P 1.5-2** Un hornillo eléctrico tiene una corriente constante de 10 A que entra por la terminal de voltaje positiva con un voltaje de 110 V. El hornillo funciona durante dos horas. (a) Encuentre la carga en culombios que pasa a través del hornillo. (b) Obtenga la potencia absorbida por el hornillo. (c) Si la energía eléctrica tiene un costo de 12 centavos por kilovatio-hora, determine el costo del funcionamiento del hornillo durante dos horas.

**P 1.5-3** Un reproductor portátil de sonido utiliza cuatro pilas AA en serie para proporcionar 6 V al circuito reproductor. Las cuatro celdas de pilas alcalinas almacenan un total de 200 watts por segundo de energía. Si el reproductor utiliza una constante de 10 mA del paquete de pilas, ¿cuánto tiempo funciona a una potencia normal?

**P 1.5-4** La corriente y el voltaje que pasan a través de un elemento varían al paso del tiempo como se muestra en la figura P 1.5-4. Bosquee la potencia entregada al elemento para  $t > 0$ . ¿Cuál es la energía total entregada al elemento entre  $t = 0$  y  $t = 25$  s? El voltaje y la corriente del elemento se apegan a la convención pasiva.

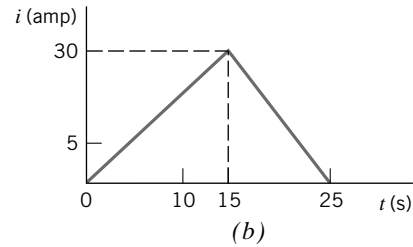
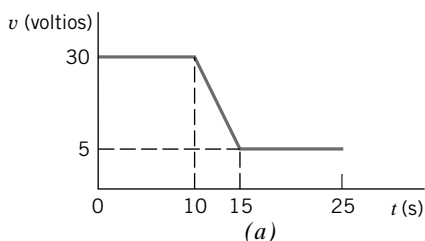


Figura P 1.5-4 (a) Voltaje  $v(t)$ , y (b) corriente  $i(t)$  para un elemento.

**P 1.5-5** Una batería de automóvil se carga con una corriente constante de 2 A durante cinco horas. El voltaje terminal de la batería es  $v = 11 + 0.5t$  V para  $t > 0$ , donde  $t$  son las horas. (a) Obtenga la energía entregada a la batería durante las cinco horas. (b) Si la energía eléctrica tiene un costo de 15 centavos/kWh, encuentre el costo de cargar la batería durante cinco horas.

**Respuesta:** (b) 1.84 centavos.

**P 1.5-6** Obtenga la potencia,  $p(t)$  alimentada por el elemento que se muestra en la figura P 1.5-6 cuando  $v(t) = 4 \cos 3t$  V e  $i(t) = \frac{\sin 3t}{12}$  A. Evalúe  $p(t)$  en  $t = 0.5$  s y en  $t = 1$  s. Observe que la potencia alimentada por estos elementos tiene un valor positivo en algunos momentos y negativo en otros.

**Sugerencia:**  $(\sin at)(\cos bt) = \frac{1}{2}(\sin(a + b)t + \sin(a - b)t)$

**Respuesta:**

$$p(t) = \frac{1}{6} \sin 6t \text{ W}, p(0.5) = 0.0235 \text{ W}, p(1) = -0.0466 \text{ W}$$

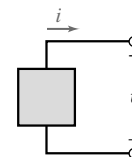


Figura P 1.5-6 Un elemento.

**P 1.5-7** Obtenga la potencia,  $p(t)$ , alimentada por el elemento mostrado en la figura P 1.5-6 cuando  $v(t) = 8 \sin 3t$  V, e  $i(t) = 2 \sin 3t$  A.

**Sugerencia:**  $(\sin at)(\sin bt) = \frac{1}{2}(\cos(a - b)t - \cos(a + b)t)$

**Respuesta:**  $p(t) = 8 - 8 \cos 6t$  W

**P 1.5-8** Obtenga la potencia,  $p(t)$ , alimentada por el elemento mostrado en la figura 1.5-6. El voltaje del elemento está

representado por  $v(t) = 4(1 - e^{-2t})V$  cuando  $t \geq 0$  y  $v(t) = 0$  cuando  $t < 0$ . La corriente del elemento está representada por  $i(t) = 2e^{-2t}A$  cuando  $t \geq 0$ , e  $i(t) = 0$  cuando  $t < 0$ .

**Respuesta:**  $p(t) = 8(1 - e^{-2t})e^{-2t}W$

**P 1.5-9** La batería de una luz intermitente desarrolla 3V y la corriente a través del bulbo es de 200 mA. ¿Cuánta potencia absorbe el bulbo? Obtenga la energía absorbida por el bulbo en un periodo de cinco minutos.

**P 1.5-10** Los investigadores médicos que estudian la hipertensión suelen emplear una técnica llamada “electroforesis de gel 2D” para analizar la proteína contenida en una muestra de tejido. La imagen de un “gel” típico se puede ver en la figura P 1.5-10a.

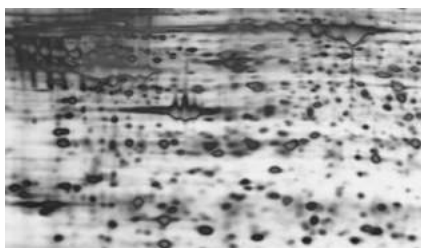
El procedimiento para la preparación del gel emplea el circuito eléctrico que se muestra en la figura P 1.5-10b. La muestra consta de un gel y un filtro de papel que contiene proteínas ionizadas. Una fuente de voltaje origina un voltaje largo y constante de 500 V que pasa a través de la muestra. Dicho voltaje mueve las proteínas ionizadas a través del filtro hacia el gel. La corriente en la muestra se da por

$$i(t) = 2 + 30e^{-at} \text{ mA}$$

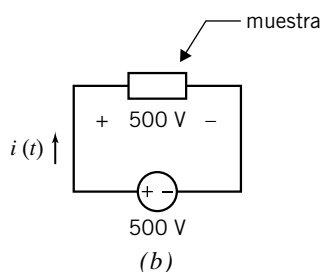
donde  $t$  es el tiempo consumido desde el inicio del procedimiento y el valor de la constante  $a$  es

$$a = 0.85 \frac{1}{\text{hr}}$$

Determine la energía alimentada por la fuente de voltaje cuando el procedimiento de la preparación del gel dura 3 horas.



(a)



(b)

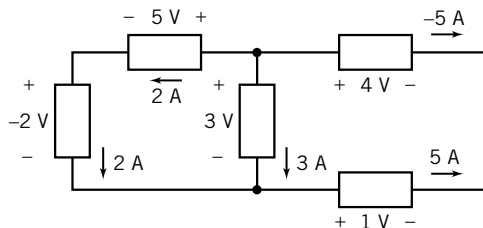
**Figura P 1.5-10** (a) Imagen de un gel, y (b) el circuito eléctrico que se usó en la preparación del gel.

**Sección 1.7 ¿Cómo lo podemos comprobar...?**

**P 1.7-1** La conservación de energía requiere que la suma de la potencia absorbida por todos los elementos en un circuito

sea cero. La figura P 1.7-1 muestra un circuito. Todos los voltajes y corrientes del elemento están especificados; pero, ¿están correctos? Justifique su respuesta.

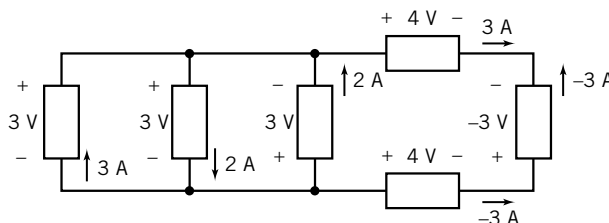
**Sugerencia:** Calcule la potencia absorbida por cada elemento. Conjunte todas estas potencias. Si la suma es cero, se cumple con la conservación de energía y probablemente los voltajes y corrientes estén correctos. Si la suma no es cero, es posible que los voltajes y corrientes del elemento no sean los correctos.



**Figura P 1.7-1**

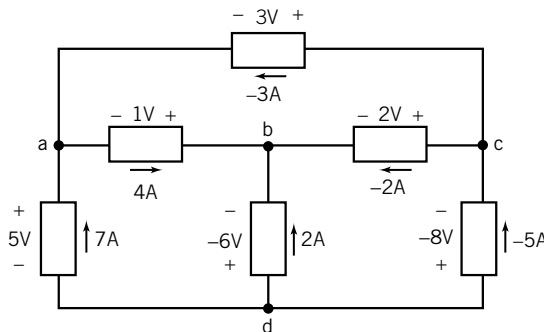
**P 1.7-2** La conservación de energía requiere que la suma de la potencia absorbida por todos los elementos en un circuito sea cero. La figura P 1.7-2 muestra un circuito. Todos los voltajes y corrientes del elemento están especificados; pero, ¿están correctos? Justifique su respuesta.

**Sugerencia:** Calcule la potencia absorbida por cada elemento. Conjunte todas estas potencias. Si la suma es cero, se cumple con la conservación de energía y probablemente los voltajes y corrientes estén correctos. Si la suma no es cero, es posible que los voltajes y corrientes del elemento no sean los correctos.



**Figura P 1.7-2**

**P 1.7-3** Excepto por uno, los voltajes y corrientes que se muestran en la figura P 1.7-3 son correctos: la dirección de referencia de exactamente una de las corrientes del elemento está invertida. Determine cuál dirección de referencia es la que se ha invertido.



**Figura P 1.7-3**

## Problemas de diseño

**PD 1-1** Un elemento de circuito en particular está disponible en tres grados. El grado A garantiza que el elemento puede absorber con seguridad  $1/2$  W de manera continua. Del mismo modo, el grado B asegura que se puede absorber  $1/4$  W sin problemas, y el grado C confirma que puede ser incluso  $1/8$  W. Por regla general, los elementos que pueden absorber más potencia son incluso más costosos y voluminosos.

Se espera que el voltaje que fluye a través de un elemento pueda ser de 20V y que la corriente sea de 8 mA. Ambas estimaciones tienen una certeza de 25%. La referencia de voltaje y corriente se apegan a la convención pasiva.

Especifique el grado de este elemento. La seguridad es la consideración más importante, pero no especifique un elemento que sea más costoso de lo necesario.

**PD 1-2** El voltaje que circula a través de un elemento de circuito es  $v(t) = 20(1 - e^{-8t})$  V cuando  $t \geq 0$  y  $v(t) = 0$  cuando  $t < 0$ . La corriente en este elemento es  $i(t) = 30e^{-8t}$  mA cuando  $t \geq 0$ , e  $i(t) = 0$  cuando  $t < 0$ . La corriente y el voltaje del elemento se apegan a la convención pasiva. Especifique la potencia que este dispositivo pueda ser capaz de absorber de manera segura.

*Sugerencia:* utilice MATLAB, o un programa similar, para diseñar el trazo de la potencia.

# Elementos de circuitos



# CAPÍTULO 2

## EN ESTE CAPÍTULO

2.1	Introducción	2.8	Transductores
2.2	Ingeniería y modelos lineales	2.9	Interruptores
2.3	Elementos de circuito activos y pasivos	2.10	¿Cómo lo podemos comprobar...?
2.4	Resistencias	2.11	<b>EJEMPLO DE DISEÑO</b> — Sensor de temperatura
2.5	Fuentes independientes	2.12	Resumen
2.6	Voltímetros y amperímetros		Problemas
2.7	Fuentes dependientes		Problemas de diseño

## 2.1 INTRODUCCIÓN

No es de sorprender que el comportamiento de un circuito eléctrico dependa del comportamiento individual de los elementos de circuito que comprenden el circuito. Desde luego, diferentes tipos de elementos de circuitos se comportan de manera diferente. Las ecuaciones que describen el comportamiento de los diversos tipos de elementos de circuito se denominan ecuaciones constitutivas. Con frecuencia las ecuaciones constitutivas describen una relación entre la corriente y el voltaje del elemento. La ley de Ohm es un ejemplo claro de una ecuación constitutiva.

En este capítulo investigaremos el comportamiento de varios tipos comunes de elementos de circuito:

- Resistencias
- Fuentes independientes de voltaje y corriente
- Circuitos abiertos y circuitos cerrados
- Voltímetros y amperímetros
- Fuentes dependientes
- Transductores
- Interruptores

## 2.2 INGENIERÍA Y MODELOS LINEALES

El arte de la ingeniería es tomar una idea brillante y, con dinero, material, personas expertas y una mirada al entorno, producir algo que el comprador quiere a un precio a su alcance.

Los ingenieros utilizan *modelos* para representar los elementos de un circuito eléctrico. Un modelo es una descripción de aquellas propiedades de un dispositivo que se consideran importantes. En ocasiones el modelo constará de una ecuación relacionada con el voltaje y la corriente del elemento. Aun cuando el modelo sea diferente del dispositivo eléctrico, se puede usar en los cálculos manuales que predecirán cómo funcionará un circuito compuesto de dispositivos reales. A veces los ingenieros se topan con un dilema al seleccionar un modelo para un dispositivo. Es fácil trabajar con modelos sencillos, pero pueden no ser precisos. Los modelos de precisión suelen ser

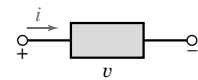
complicados y pesados de usar. El consenso general indica que primero se deben usar los modelos sencillos y comprobar sus resultados para constatar que el uso de estos modelos es adecuado. Los modelos más precisos se usarán cuando sea necesario.

Los modelos idealizados de dispositivos eléctricos se definen de manera muy precisa. Es de suma importancia hacer una clara distinción entre los dispositivos reales y sus modelos idealizados, a los cuales se les denomina elementos de circuitos. El objetivo del análisis de circuitos es pronosticar el comportamiento eléctrico cuantitativo de los circuitos físicos. Su propósito es prever y explicar los voltajes y las corrientes de las terminales de los elementos del circuito, y por consiguiente el funcionamiento total del circuito.

Los modelos de elementos de circuitos se pueden clasificar de distintas maneras. Por ejemplo, es importante distinguir los modelos lineales de los no lineales dado que los circuitos que constan por completo de elementos de circuitos lineales son más fáciles de analizar que los que contienen algunos elementos no lineales.

Un elemento o circuito es *lineal* si el estímulo y la respuesta del elemento cumplen con determinadas propiedades. Considere el elemento que se muestra en la figura 2.2-1. Suponga que el estímulo es la corriente  $i$  y la respuesta es el voltaje  $v$ . Cuando el elemento está sujeto a una corriente  $i_1$ , proporciona una respuesta  $v_1$ . Aún más, cuando el elemento está sujeto a una corriente  $i_2$ , da una respuesta  $v_2$ . En un elemento lineal es necesario que el impulso  $i_1 + i_2$  tenga como resultado una respuesta  $v_1 + v_2$ . A esto se le conoce comúnmente como *principio de superposición*.

Incluso, al multiplicar la entrada de un dispositivo lineal por una constante debe tener la consecuencia de multiplicar la salida por la misma constante. Por ejemplo, al duplicar el tamaño de la entrada se ocasiona que el de la salida también se duplique. A esto se le llama *propiedad de homogeneidad*. Un elemento es lineal si, y sólo si, se cumplen las propiedades de superposición y homogeneidad para todos los impulsos y respuestas.



**FIGURA 2.2-1**  
Elemento con el impulso de una corriente  $i$  y respuesta  $v$ .

Un **elemento lineal** satisface las propiedades de superposición y homogeneidad.

Declaremos de nuevo matemáticamente las dos propiedades requeridas de un circuito lineal, utilizando la flecha de notación para significar la transición del impulso a la respuesta:

$$i \rightarrow v$$

Podemos establecer de este modo las propiedades requeridas.

*Superposición:*

$$i_1 \rightarrow v_1$$

$$i_2 \rightarrow v_2$$

$$\text{entonces} \quad i_1 + i_2 \rightarrow v_1 + v_2 \quad (2.2-1)$$

*Homogeneidad:*

$$i \rightarrow v$$

$$\text{entonces} \quad ki \rightarrow kv \quad (2.2-2)$$

Un dispositivo que no satisface los principios de superposición ni de homogeneidad se considera no lineal.

### EJEMPLO 2.2-1 Un dispositivo lineal

Considere el elemento representado por la relación entre la corriente y el voltaje como

$$v = Ri$$

Determine si este dispositivo es lineal.



**Solución**

La respuesta a una corriente  $i_1$  es

$$v = Ri_1$$

La respuesta a una corriente  $i_2$  es

$$v = Ri_2$$

La suma de estas respuestas es

$$v_1 + v_2 = Ri_1 + Ri_2 = R(i_1 + i_2)$$

Dado que la suma de las respuestas a  $i_1$  e  $i_2$  es igual a la respuesta a  $i_1 + i_2$ , se satisface el principio de superposición. A continuación vemos el principio de homogeneidad. Dado que

$$v_1 = Ri_1$$

Tenemos para un impulso  $i_2 = ki_1$

$$v_2 = Ri_2 = Rki_1$$

Por consiguiente,

$$v_2 = kv_1$$

satisface el principio de homogeneidad. Dado que el elemento satisface las propiedades de superposición y homogeneidad, es lineal.

**EJEMPLO 2.2-2** Un dispositivo no lineal

Ahora veamos un elemento representado por la relación entre corriente y voltaje.

$$v = i^2$$

Determine si este dispositivo es lineal.

**Solución**

La respuesta a una corriente  $i_1$  es

$$v_1 = i_1^2$$

La respuesta a una corriente  $i_2$  es

$$v_2 = i_1^2$$

La suma de estas respuestas es

$$v_1 + v_2 = i_1^2 + i_1^2$$

La respuesta a  $i_1 + i_2$  es

$$(i_1 + i_2)^2 = i_1^2 + 2i_1i_2 + i_1^2$$

Debido a que

$$i_1^2 + i_1^2 \neq (i_1 + i_2)^2$$

no satisface el principio de superposición. Por lo tanto, el dispositivo no es lineal.

### EJEMPLO 2.2-3 Un modelo de dispositivo lineal

Un elemento lineal tiene un voltaje  $v$  y una corriente  $i$  como se muestra en la figura 2.2-2a. Los valores de la corriente  $i$  y del voltaje  $v$  correspondiente se han tabulado como se muestra en la figura 2.2-2b. Represente el elemento por una ecuación que exprese  $v$  como una función de  $i$ . Esta ecuación es un modelo del elemento. Utilice el modelo para pronosticar el valor de  $v$  correspondiente a una corriente de  $i = 100$  mA y el valor de  $i$  correspondiente a un voltaje de  $v = 18$  V.

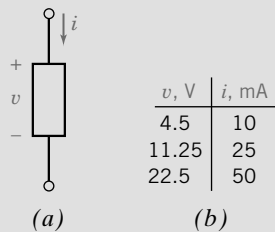


FIGURA 2.2-2 (a) Elemento de circuito lineal y (b) tabulación de los valores correspondientes a su voltaje y corriente.

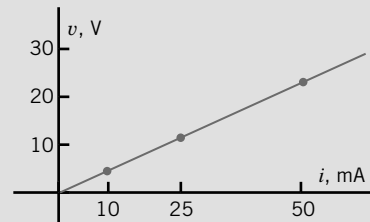


FIGURA 2.2-3 Diagrama del voltaje comparado con la corriente del elemento lineal de la figura 2.2-2.

### Solución

La figura 2.2-3 es un diagrama del voltaje  $v$  comparado con la corriente  $i$ . Los puntos etiquetados por balas representan los valores correspondientes a los valores de  $v$  e  $i$  a partir de los renglones de la tabla de la figura 2.2-2b. Como el elemento del circuito es lineal, se espera que esos puntos descansen en una línea recta, y de hecho lo hacen. La línea recta se puede representar por la ecuación

$$v = mi + b$$

donde  $m$  es la pendiente y  $b$  es la intersección en  $v$ . Observando que la línea recta pasa a través del origen,  $v = 0$  cuando  $i = 0$ , se ve que  $b = 0$ . El resultado es

$$v = mi$$

La pendiente  $m$  se puede calcular a partir de los datos de cualquiera de las dos filas de la tabla en la figura 2.2-2b. Por ejemplo:

$$\frac{11.25 - 4.5}{25 - 10} = 0.45 \frac{V}{mA}, \quad \frac{22.5 - 11.25}{50 - 25} = 0.45 \frac{V}{mA}, \quad \text{y} \quad \frac{22.5 - 4.5}{50 - 10} = 0.45 \frac{V}{mA}$$

En consecuencia,

$$m = 0.45 \frac{V}{mA} = 450 \frac{V}{A}$$

entonces

$$v = 450i$$

Esta ecuación es un modelo de un elemento lineal. Pronostica que el voltaje  $v = 450(0.1) = 45$  V corresponde a la corriente  $i = 100$  mA = 0.1 A y que la corriente  $i = 18/450 = 0.04$  A = 40 mA corresponde al voltaje  $v = 18$  V.

**EJERCICIO 2.2-1** Considere el elemento de circuito que se muestra en la figura E 2.2-1a. En la figura E 2.2-1b se muestra un diagrama del voltaje  $v$ , del elemento, comparado con la corriente  $i$  del elemento. El diagrama es una línea recta que pasa a través del origen y su pendiente tiene un valor  $m$ . En consecuencia,  $v$  e  $i$  se relacionan por

$$v = mi$$

Muestre que este dispositivo es lineal.

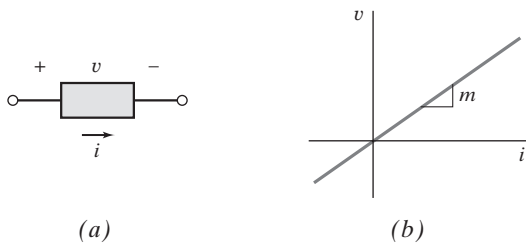


FIGURA E 2.2-1

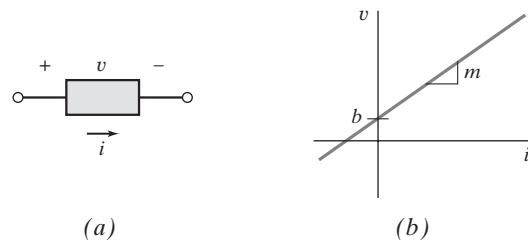


FIGURA E 2.2-2

**EJERCICIO 2.2-2** Considere el elemento de circuito que se muestra en la figura E 2.2-2a. Un diagrama del voltaje del elemento,  $v$ , comparado con la corriente del elemento,  $i$ , se muestra en la figura E 2.2-2b. El diagrama es una línea recta con una intersección en  $y$  de valor  $b$  y una pendiente con valor  $m$ . En consecuencia,  $v$  e  $i$  están relacionados por

$$v = mi + b$$

Muestre que este dispositivo es no lineal.

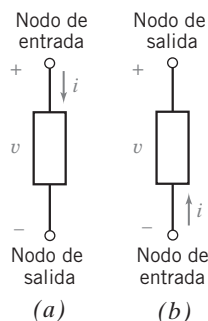
### 2.3 ELEMENTOS DE CIRCUITO ACTIVOS Y PASIVOS

Los elementos de circuito se pueden clasificar en dos categorías, *pasivos* y *activos*, al determinar si absorben o alimentan energía. Se dice que un elemento es pasivo si toda la energía que se le proporcionó por el resto del circuito siempre es no negativa (cero o positiva). Entonces, para un elemento pasivo con la corriente que fluye a la terminal  $+$  como se muestra en la figura 2.3-1a, esto significa que

$$w = \int_{-\infty}^t vi \, d\tau \geq 0 \quad (2.3-1)$$

para todos los valores de  $t$ .

Un **elemento pasivo** absorbe energía.



**FIGURA 2.3-1** (a) El nodo de entrada de la corriente  $i$  es el nodo positivo del voltaje  $v$ ; (b) el nodo de entrada de la corriente  $i$  es el nodo negativo del voltaje  $v$ . La corriente fluye desde el nodo de entrada hasta el nodo de salida.

Se dice que un elemento es *activo* si es capaz de proporcionar energía. Por consiguiente, un elemento activo no satisface la ecuación 2.3-1 cuando se representa por la figura 2.3-1a. En otras palabras, un elemento activo es aquel que es capaz de generar energía. Los elementos activos son fuentes potenciales de energía, mientras que los elementos pasivos son reductores o absorbedores de energía. Las baterías y los generadores son ejemplos de elementos activos. Considere el elemento que se muestra en la figura 2.3-1b. Observe que la corriente fluye hacia la terminal negativa y sale de la

terminal positiva. Se dice que este elemento es activo si

$$w = \int_{-\infty}^t v i d\tau \geq 0 \quad (2.3-2)$$

para al menos un valor de  $t$ .

Un **elemento activo** es capaz de alimentar energía.

### EJEMPLO 2.3-1 Un elemento de circuito activo

Un circuito tiene un elemento representado por la figura 2.3-1b donde la corriente es una constante de 5 A y el voltaje es una constante de 6 V. Obtenga la energía alimentada durante el intervalo de 0 a  $T$ .

#### Solución

Dado que la corriente entra por la terminal negativa, la energía *alimentada* por el elemento resulta de

$$w = \int_0^T (6)(5)d\tau = 30T \text{ J}$$

Por lo tanto, el dispositivo es un generador o un elemento activo; en este caso es una batería de cd.

## 2.4 RESISTENCIAS

La capacidad de un material de resistir el flujo de carga se denomina *resistividad*,  $\rho$ . Los materiales que son buenos aisladores eléctricos tienen un alto valor de resistividad. Los materiales que son buenos conductores de electricidad tienen bajos valores de resistividad. En la tabla 2.4-1 se registran los valores de resistividad de materiales selectos. Por lo común el cobre se utiliza en los cables porque permite que la corriente fluya relativamente sin problemas. El silicio se emplea para proporcionar resistencia en circuitos eléctricos semiconductores. Por su parte, el poliestireno se usa como aislante.

**Resistencia** es la propiedad física de un elemento o dispositivo de impedir el flujo de corriente; se representa con el símbolo  $R$ .

Georg Simon Ohm pudo demostrar que la corriente en un circuito compuesto de una batería y un cable conductor seccional uniforme se expresaría como

$$i = \frac{Av}{\rho L} \quad (2.4-1)$$

**Tabla 2.4-1 Resistividad de materiales selectos**

MATERIAL	RESISTIVIDAD $\rho$ (OHM·CM)
Poliestireno	$1 \times 10^{18}$
Silicio	$2.3 \times 10^5$
Carbono	$4 \times 10^{-3}$
Aluminio	$2.7 \times 10^{-6}$
Cobre	$1.7 \times 10^{-6}$



**FIGURA 2.4-1**  
Georg Simon Ohm (1787-1854) determinó la ley de Ohm en 1827. En su honor, el ohmio fue elegido como la unidad de resistencia eléctrica.

donde  $A$  es el área transversal,  $\rho$  la resistividad,  $L$  la longitud, y  $v$  el voltaje a través del elemento cable. Ohm, cuya imagen aparece en la figura 2.4-1, definió la resistencia constante  $R$  como

$$R = \frac{\rho L}{A} \quad (2.4-2)$$

La ley de Ohm, que relaciona el voltaje y la corriente, se publicó en 1827 como

$$v = Ri \quad (2.4-3)$$

La unidad de resistencia  $R$  se denominó ohmio en honor de Ohm y suele abreviarse con el símbolo  $\Omega$  (letra omega mayúscula), donde  $1 \Omega = 1 \text{ V/A}$ . La resistencia de un cable común de TV de 10 m de largo es de  $2 \text{ m}\Omega$ .

Un elemento con una resistencia  $R$  se denomina *resistor*. Un resistor se representa por el símbolo de dos terminales que se muestra en la figura 2.4-2. La ley de Ohm, ecuación 2.4-3, requiere que la relación de  $i$  comparada con  $v$  sea lineal. Como se muestra en la figura 2.4-3, un resistor puede llegar a convertirse en no lineal fuera de su rango proporcional de operación. Supondremos que un resistor es lineal si no se establece otra cosa. Por lo tanto, utilizaremos un modelo lineal de resistor como el que representa la ley de Ohm.

En la figura 2.4-4 se han etiquetado la corriente y el voltaje de un elemento de resistor. La relación entre las direcciones de esta corriente y el voltaje es importante. La dirección del voltaje indica una terminal de resistor  $+$  y la otra  $-$ . La corriente  $i_a$  fluye de la terminal etiquetada  $+$  a la terminal etiquetada  $-$ . Esta relación entre las direcciones de referencia de la corriente y el voltaje es una convención denominada convención pasiva. La ley de Ohm establece que cuando la corriente y el voltaje del elemento se apegan a la convención pasiva, entonces

$$v = Ri_a \quad (2.4-4)$$

Considere la figura 2.4-4. Las corrientes  $i_a$  e  $i_b$  en el elemento son las mismas excepto por la dirección asignada, por lo tanto,

$$i_a = i_b$$

La corriente  $i_a$  y el voltaje  $v$  del elemento se apegan a la convención pasiva,

$$v = Ri_a$$

Sustituyendo  $i_a$  por  $-i_b$  resulta

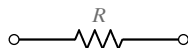
$$v = -Ri_b$$

En esta ecuación hay un signo de menos porque la corriente  $i_b$  y el voltaje  $v$  del elemento no se apegan a la convención pasiva. Hay que poner especial atención a la dirección de corriente de modo que no se pase por alto este signo menos.

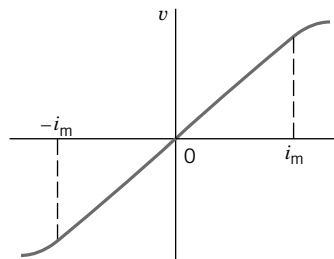
La ley de Ohm, ecuación 2.4-3, también se puede escribir

$$i = Gv \quad (2.4-5)$$

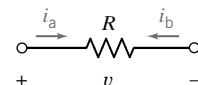
donde  $G$  indica la conductancia en siemens (S) y es la recíproca de  $R$ ; es decir,  $G = 1/R$ . Muchos ingenieros denotan las unidades de conductancia como mhos, con el símbolo  $\text{m}\Omega$  que es una omega invertida (mho es *ohm* al revés). Sin embargo, utilizaremos unidades del SI y se mantendrá el siemens como unidad de conductancia.



**FIGURA 2.4-2** Símbolo para un resistor que tenga una resistencia de  $R$  ohmios.



**FIGURA 2.4-3** Un resistor funcionando dentro de su rango de corriente especificado,  $\pm i_m$ , se puede modelar por la ley de Ohm.



**FIGURA 2.4-4** Un resistor con corriente y voltaje del elemento.



FIGURA 2.4-5 (a) Resistor embobinado con una tapa al centro ajustable. (b) Resistor embobinado con tapa fija. Cortesía de Dale Electronics.

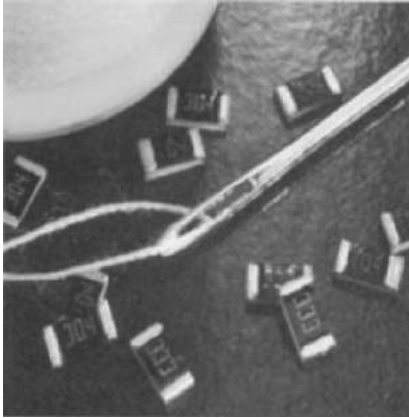


FIGURA 2.4-6 Pequeños chips resistores de película gruesa que se usan para circuitos miniaturizados. Cortesía de Corning Electronics.

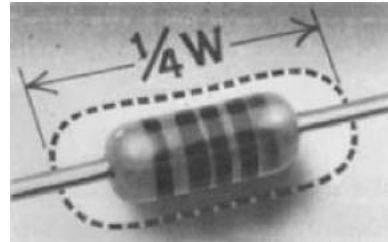


FIGURA 2.4-7 Resistor de película de metal de 1/4 de watt. El cuerpo del resistor tiene 6mm de largo. Cortesía de Dale Electronics.

La mayoría de resistores discretos caen en una de cuatro categorías básicas: compuesto de carbón, película de carbón, película de metal y embobinado. Los resistores de compuesto de carbón se han utilizado por más de 100 años y siguen siendo populares. Los resistores de película de carbón han desplazado a los de compuesto de carbón para muchos propósitos generales por su bajo costo y mejor tolerancia. En la figura 2.4-5 se muestran dos resistores de embobinado.

Los resistores de película gruesa, como los de la figura 2.4-6, se usan en circuitos por su bajo costo y tamaño pequeño. Los resistores de propósito general están disponibles en valores estándar para tolerancias de 2, 5, 10, y 20 por ciento. Los resistores de compuesto de carbón y algunos de embobinado tienen un código de color con tres a cinco bandas. El código de color es un sistema de colores estándar adoptado para identificar la resistencia de los resistores. La figura 2.4-7 muestra un resistor de película de metal con sus bandas de colores. Es un resistor de 1/4 de watt, lo que indica que debe funcionar a 1/4 de watt o por debajo de la energía que se le suministre. El rango normal de resistores va de menos de 1 ohmio a 10 megaohmios. En el Apéndice D se dan los valores comunes de algunos resistores disponibles comercialmente.

La potencia transmitida a un resistor (cuando se utiliza la convención pasiva) es

$$p = vi = v\left(\frac{v}{R}\right) = \frac{v^2}{R} \quad (2.4-6)$$

De manera alternativa, dado que  $v = iR$ , la ecuación de la potencia se puede escribir como

$$p = vi = (iR)i = i^2R \quad (2.4-7)$$

Por lo tanto, la potencia se expresa como una función no lineal de la corriente  $i$ , o del voltaje  $v$ , a través del resistor.

Recuerde la definición de elemento pasivo, según la cual es aquel cuya energía absorbida es siempre no negativa. La ecuación de la energía transmitida a un resistor es

$$w = \int_{-\infty}^t p d\tau = \int_{-\infty}^t i^2 R d\tau \quad (2.4-8)$$

Como  $i^2$  siempre es positiva, la energía siempre es positiva y el resistor es un elemento pasivo.

**Resistencia** es una medida de la capacidad de un elemento de disipar potencia de manera irreversible.

### EJEMPLO 2.4-1 Potencia disipada por un resistor

Inventemos un modelo para una batería de automóvil cuando las luces han quedado encendidas y se ha apagado el motor. Si el automóvil se deja así durante un tiempo, la batería seguirá funcionando hasta que se baje o se agote. La batería de un automóvil es una fuente constante de 12-V, y el bulbo puede estar modelado por un resistor de 6 ohmios. En la figura 2.4-8 se muestra el circuito. Encuentre la corriente  $i$ , la potencia  $p$ , y la energía alimentada por la batería para un periodo de una hora.

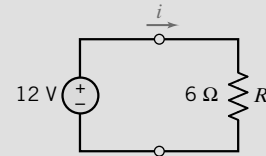


FIGURA 2.4-8 Modelo de una batería de automóvil y la lámpara.

#### Solución

Según la ley de Ohm, ecuación 2.4-3, tenemos

$$v = Ri$$

Puesto que  $v = 12 \text{ V}$  y  $R = 6 \Omega$ , tenemos que  $i = 2 \text{ A}$ .

Para encontrar la potencia transmitida por la batería, se utiliza

$$p = vi = 12(2) = 24 \text{ W}$$

Por último, la energía transmitida en un lapso de cuatro horas es

$$w = \int_0^t p d\tau = 24t = 24(60 \times 60 \times 4) = 3.46 \times 10^5 \text{ J}$$

Dado que la batería tiene una cantidad finita de energía almacenada, transmitirá esta energía y acabará por no poder hacerlo más si no se recarga. Se dice entonces que la batería se baja o muere hasta que se recargue. Una batería normal de automóvil puede almacenar  $10^6$  julios a carga plena.

**EJERCICIO 2.4-1** Obtenga la potencia absorbida por una resistencia de 100 ohmios cuando se conecta directamente a una fuente constante de 10-V.

*Respuesta:* 1-W

**EJERCICIO 2.4-2** Una fuente de voltaje  $v = 10 \cos t \text{ V}$  está conectada a través de una resistencia de 10 ohmios. Obtenga la potencia transmitida al resistor.

*Respuesta:*  $10 \cos^2 t \text{ W}$

## 2.5 FUENTES INDEPENDIENTES

Algunos dispositivos tienen como propósito suministrar energía a un circuito. A estos dispositivos se les llama *fuentes*. Están clasificados para funcionar en dos tipos, como fuentes de voltaje y como fuentes de corriente. La figura 2.5-1a muestra el símbolo con que se representa una fuente de voltaje.

El voltaje de una fuente de voltaje es específico, pero la corriente la determina el resto del circuito. Una fuente de voltaje se describe especificando la función  $v(t)$ , por ejemplo,

$$v(t) = 12 \cos 1000t \quad \text{o} \quad v(t) = 9 \quad \text{o} \quad v(t) = 12 - 2t$$

Un elemento activo de dos terminales que alimenta energía a un circuito es una *fente* de energía. Una fuente de voltaje independiente proporciona un voltaje específico independiente de la corriente que fluye a través de él y es independiente de cualquier otra variable de circuito.

Una **fente** es un generador de corriente o voltaje capaz de suministrar energía a un circuito.

Una *fente de corriente independiente* proporciona una corriente independiente del voltaje que fluye a través del elemento de fuente y es independiente de cualquier otra variable de circuito. Por lo tanto, cuando se dice que una fuente es independiente, significa que es independiente de cualquier otra corriente o voltaje en el circuito.

Una **fente independiente** es un generador de voltaje o de corriente que no depende de otras variables del circuito.

Supongamos que la fuente de voltaje es una batería y

$$v(t) = 9 \text{ voltios}$$

Se sabe que el voltaje de esta batería es de 9 voltios independientemente del circuito en que se use la batería. Por el contrario, la corriente de la fuente de voltaje no se conoce y depende del circuito en que se use la fuente. La corriente podría ser de 6 amperios cuando la fuente de voltaje está conectada a un circuito y de 6 miliamperios cuando está conectada a otro circuito.

La figura 2.5-1b muestra con qué símbolo se representa una fuente de corriente. La corriente de una fuente de corriente se especifica, pero el voltaje lo determina el resto del circuito. Una fuente de corriente se describe especificando la función  $i(t)$ , por ejemplo,

$$i(t) = 6 \sin 500t \quad \text{o} \quad i(t) = -0.25 \quad \text{o} \quad i(t) = t + 8$$

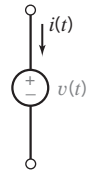
Una fuente de corriente especificada por  $i(t) = -0.25$  miliamperios tendrá una corriente de  $-0.25$  miliamperios en cualquier circuito que se use. El voltaje que fluye a través de esa fuente de corriente dependerá del circuito en particular.

En los párrafos anteriores se han dejado de lado algunas complejidades para presentar una descripción sencilla de la manera como funcionan las fuentes. El voltaje a través de una batería de 9 voltios puede no ser en realidad de 9 voltios. Este voltaje depende del tiempo de vida de la batería, la temperatura, las variaciones en su fabricación, y la corriente de la batería. Aquí conviene hacer una distinción entre las fuentes reales, como las baterías, y las fuentes sencillas de voltaje y corriente descritas anteriormente. Sería *ideal* que las fuentes reales funcionaran como estas fuentes sencillas. En verdad, la palabra *ideal* se usa para hacer esta distinción. A las fuentes sencillas descritas en los párrafos anteriores se les denomina *fuentes de voltaje ideales* y *fuentes de corriente ideales*.

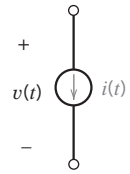
El voltaje de una **fente de voltaje ideal** se proporciona para una función específica, digamos  $v(t)$ . La corriente la determina el resto del circuito.

La corriente de una **fente de corriente ideal** se proporciona para una función específica, digamos  $i(t)$ . El voltaje lo determina el resto del circuito.

Una **fente ideal** es un generador de voltaje o de corriente independiente de la corriente a través de la fuente de voltaje o del voltaje a través de la fuente de corriente.



(a)



(b)

FIGURA 2.5-1  
(a) Fuente de voltaje.  
(b) Fuente de corriente.



### EJEMPLO 2.5-1 Una batería modelada como fuente de voltaje

Veamos lo que hace un ingeniero que necesita analizar un circuito que contiene una batería de 9 voltios. ¿En realidad es necesario que este ingeniero incluya la dependencia del voltaje de la batería en el tiempo de vida de la batería, la temperatura, las variaciones en su fabricación, y la corriente de la batería en este análisis? Es de esperarse que no. La expectativa es que la batería funcione lo bastante parecido a una fuente de voltaje ideal de 9 voltios de modo que las diferencias se puedan pasar por alto. En este caso se dice que la batería está modelada como una fuente de voltaje ideal.

Para ser concretos, considere una batería especificada por el diagrama de voltaje comparado con la corriente que se muestra en la figura 2.5-2a. Este diagrama indica que el voltaje de la batería será  $v = 9$  voltios cuando  $i \leq 10$  miliamperios. Conforme la corriente se incrementa por arriba de 10 miliamperios, el voltaje baja de 9 voltios. Cuando  $i \leq 10$  miliamperios, la dependencia del voltaje de la batería en la corriente de la batería se puede obviar y la batería se puede modelar como una fuente de voltaje ideal.

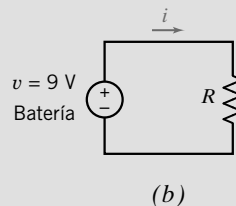
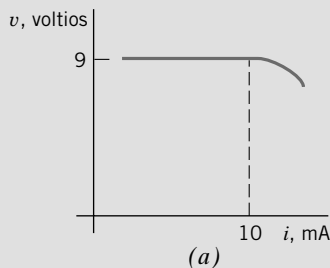


FIGURA 2.5-2 (a) Diagrama de un voltaje de batería comparado con la corriente de la batería. (b) La batería está modelada como una fuente de voltaje independiente.

Suponga que hay una resistencia conectada a través de las terminales de la batería, como se muestra en la figura 2.5-2b. La corriente de la batería será

$$i = \frac{v}{R} \quad (2.5-1)$$

La relación entre  $v$  e  $i$  que se muestra en la figura 2.5-2a complica esta ecuación. Tal complicación se puede pasar por alto sin problema cuando  $i \leq 10$  miliamperios. Cuando la batería se modela como una fuente de voltaje ideal de 9 voltios, la corriente de la fuente de voltaje resulta de

$$i = \frac{9}{R} \quad (2.5-2)$$

La distinción entre estas dos ecuaciones es importante. La ecuación 2.5-1, que implica la relación  $v - i$  que se muestra en la figura 2.5-2a, es más exacta pero también más complicada. La ecuación 2.5-2 es más sencilla pero puede ser errónea.

Suponga que  $R = 1000$  ohmios. La ecuación 2.5-2 da la corriente de la fuente de voltaje ideal:

$$i = \frac{9}{1000} = 9 \text{ mA} \quad (2.5-3)$$

Como esta corriente es menor que 10 miliamperios, la fuente de voltaje ideal es un buen modelo para la batería, y es razonable esperar que la corriente de la batería sea de 9 miliamperios.

Suponga, por el contrario, que  $R = 600$  ohmios. Una vez más, la ecuación 2.5-2 da la corriente de la fuente de voltaje ideal:

$$i = \frac{9}{600} = 15 \text{ mA} \quad (2.5-4)$$

Dado que esta corriente es mayor que 10 miliamperios, la fuente de voltaje ideal no es un buen modelo para la batería. En este caso, es razonable esperar que la corriente de la batería sea diferente de la corriente de la fuente de voltaje ideal.

Suele suceder que los ingenieros se enfrenten a un dilema cuando tienen que seleccionar un modelo para un dispositivo. Los modelos sencillos son fáciles de trabajar pero pueden no ser exactos. Los modelos precisos son por lo común más complicados y difíciles de usar. El sentido común sugiere que primero se usen los modelos sencillos. Los resultados obtenidos al usar estos modelos se deben

comprobar para cerciorarse que es adecuado utilizar estos modelos sencillos. Los modelos más precisos se usarán cuando sea necesario.

El cortocircuito y el circuito abierto son casos especiales de fuentes ideales. Un *cortocircuito* es una fuente de voltaje ideal que tiene  $v(t) = 0$ . La corriente en un cortocircuito está determinada por el resto del circuito. Un circuito abierto es una fuente de corriente ideal que tiene  $i(t) = 0$ . El voltaje a través de un circuito abierto está determinado por el resto del circuito. La figura 2.5-3 muestra los símbolos con que se representan el cortocircuito y el circuito abierto. Observe que la potencia absorbida por cada uno de estos dispositivos es cero.

Los circuitos abierto y corto se pueden agregar a un circuito sin alterar las corrientes y los voltajes de las derivaciones de todos los demás dispositivos en el circuito. La figura 2.6-3 muestra cómo se puede hacer esto. La figura 2.6-3a presenta un circuito de ejemplo. En la figura 2.6-3b se han agregado un cortocircuito y un circuito abierto a este circuito de ejemplo. El circuito abierto se conectó entre dos nodos del circuito original. Por el contrario, el cortocircuito se agregó al cortar un cable e insertar el cortocircuito. Agregar cortocircuitos y circuitos abiertos a una red de esta manera no modifica la red.

Los cortocircuitos y los circuitos abiertos también se pueden describir como casos especiales de resistores. Un resistor con una resistencia  $R = 0 (G = \infty)$  es un cortocircuito. Un resistor con conductancia  $G = 0 (R = \infty)$  es un circuito abierto.

## 2.6 VOLTÍMETROS Y AMPERÍMETROS

Las mediciones de corriente y voltaje se hacen con lectores directos (análogos) o medidores digitales, como se muestra en la figura 2.6-1. Un medidor de lectura directa tiene un apuntador cuya desviación angular depende de la magnitud de la variable que está midiendo. Un medidor digital despliega un conjunto de dígitos que indican el valor de la variable medida.

Para medir un voltaje o corriente se conecta un medidor a un circuito mediante unas terminales llamadas probadores. Estos probadores tienen colores codificados para indicar la dirección de referencia de la variable que se va a medir. Los probadores métricos suelen presentar los colores rojo y negro. Un voltímetro ideal mide los voltajes del probador rojo al negro. La terminal roja es positiva, y la negra es negativa (ver figura 2.6-2b).

Un amperímetro ideal mide la corriente que fluye a través de sus terminales, como se muestra en la figura 2.6-2a y tiene voltaje cero,  $v_m = 0$ , a través de sus terminales. Un voltímetro ideal mide el voltaje a través de sus terminales, como se muestra en la figura 2.6-2b y tiene una corriente de terminal,  $i_m$ , igual a cero. Los instrumentos de medición útiles sólo se aproximan a las condiciones ideales. Para un amperímetro útil el voltaje a través de sus terminales suele ser insignificante de tan pequeño. Del mismo modo, la corriente en un voltímetro suele ser ínfima.

Los voltímetros ideales actúan como circuitos abiertos, y los amperímetros ideales actúan como cortocircuitos. Es decir, el modelo de un voltímetro ideal es un circuito abierto, y el de un amperímetro ideal es un cortocircuito. Considere el circuito de la figura 2.6-3a y luego agregue un circuito abierto con un voltaje  $v$  y un cortocircuito con una corriente  $i$  como se muestra en la figura 2.6-3b. En la figura 2.6-3c, el circuito abierto ha sido reemplazado por un voltímetro y el cortocircuito lo ha sido por un

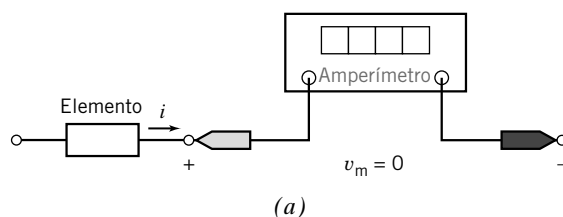


FIGURA 2.6-2 (a) Amperímetro ideal. (b) Voltímetro ideal.

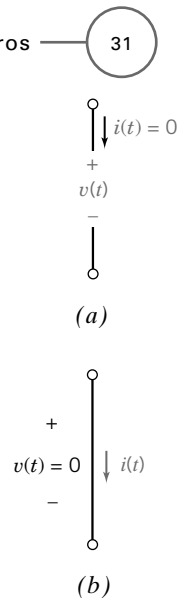


FIGURA 2.5-3 (a) Circuito abierto. (b) Cortocircuito.

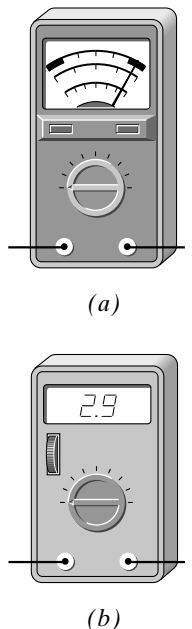


FIGURA 2.6-1 (a) Medidor de lectura directa (análogo). (b) Medidor digital.

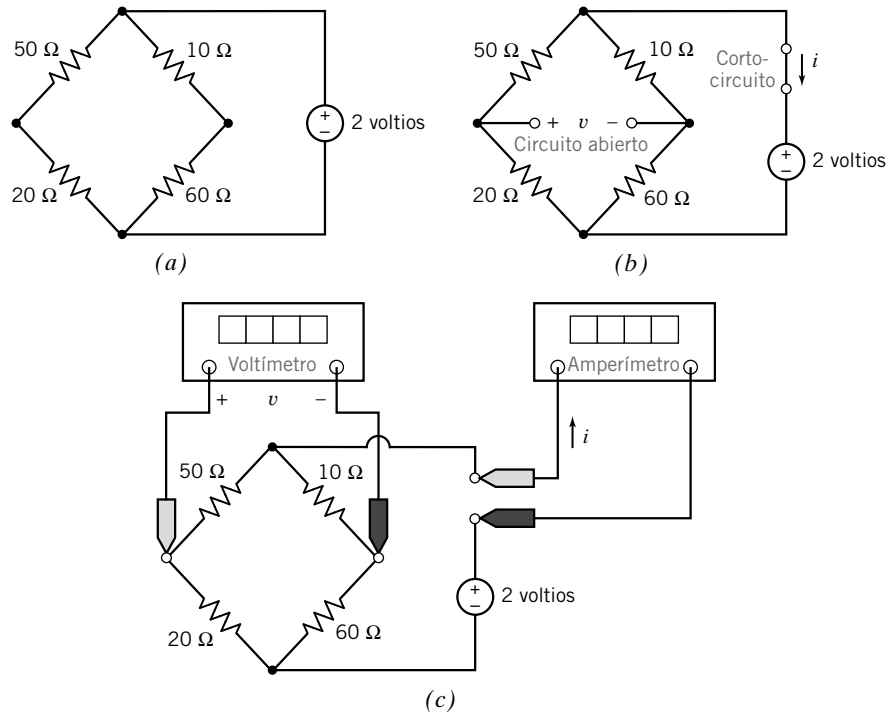


FIGURA 2.6-3 (a) Un circuito de ejemplo, (b) con un circuito abierto y un cortocircuito agregados. (c) El circuito abierto ha sido reemplazado por un voltímetro y el cortocircuito por un amperímetro.

amperímetro. El voltímetro medirá el voltaje etiquetado  $v$  en la figura 2.6-3b en tanto que el amperímetro medirá la corriente etiquetada  $i$ . Observe que la figura 2.6-3c podría obtenerse de la figura 2.6-3a al agregar un voltímetro y un amperímetro. Idealmente, agregar el voltímetro y el amperímetro de esta manera no debe alterar el circuito. Una interpretación más de la figura 2.6-3 es útil. La figura 2.6-3b podría formarse con la figura 2.6-3c si se reemplazan el voltímetro y el amperímetro por sus modelos (ideales).

La dirección de referencia es una parte importante del voltaje o la corriente de un elemento. Las figuras 2.6-4 y 2.6-5 indican que se debe poner bastante atención a las direcciones de referencia cuando se mide un voltaje o la corriente de un elemento. La figura 2.6-4a muestra un voltímetro. Los voltímetros tienen probadores bicolores. Este color indica la dirección de referencia del voltaje que se ha de medir. En las figuras 2.6-4b y la figura 2.6-4c se ha utilizado un voltímetro para medir el voltaje a través de la resistencia de 6 kΩ. Cuando el voltímetro se conecta al circuito, como se muestra en la

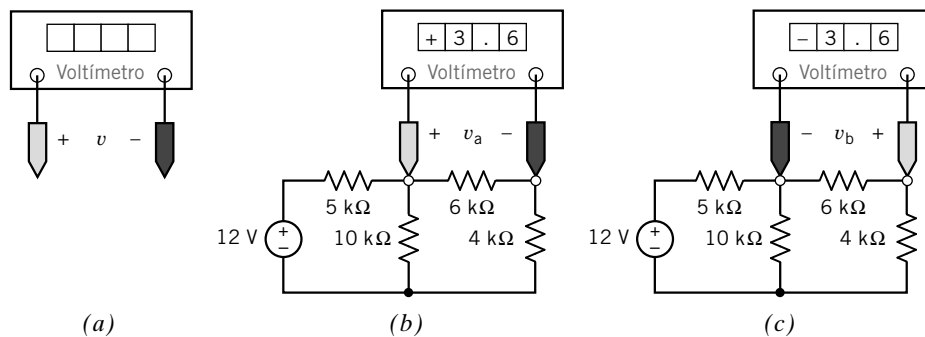


FIGURA 2.6-4 (a) Correspondencia entre los probadores del código de color del voltímetro y la dirección de referencia del voltaje medido. En (b), el signo + de  $v_a$  está a la izquierda, en tanto que en (c), el signo + de  $v_b$  está a la derecha. El probador coloreado se muestra en gris. En el laboratorio este probador será rojo. Al referirnos al probador de color se dirá que es el "probador rojo".

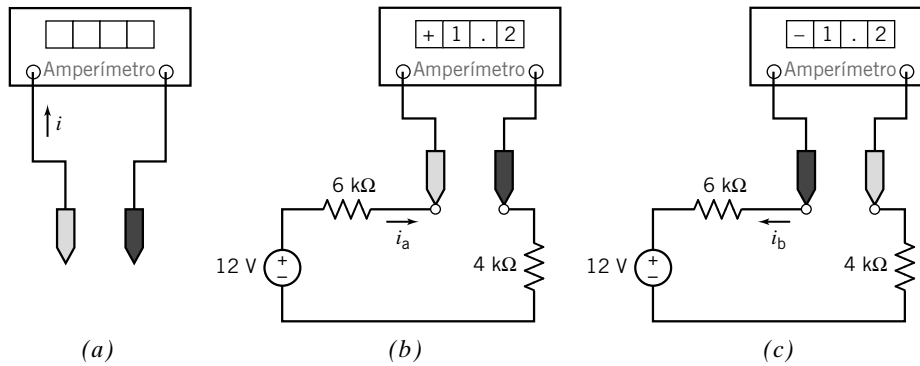


FIGURA 2.6-5 (a) Correspondencia entre los probadores del código de color del amperímetro y la dirección de referencia de la corriente medida. En (b) la corriente  $i_a$  está dirigida a la derecha, en tanto que en (c) la corriente  $i_b$  está dirigida a la izquierda. El probador coloreado se muestra aquí en gris. En el laboratorio será rojo. Nos referiremos al probador de color como el “probador rojo”.

figura 2.6-4b, el voltímetro mide  $v_a$ , con + a la izquierda, en el probador rojo. Cuando se intercambian las pruebas del voltímetro como se muestra en la figura 2.6-4c, el voltímetro mide  $v_b$ , con el signo + a la derecha, de nuevo en el probador rojo. Observe que  $v_b = -v_a$ .

La figura 2.6-5a muestra un amperímetro. Los amperímetros tienen probadores de código de dos colores. Esta codificación de color indica la dirección de referencia de la corriente que se va a medir. En las figura 2.6-5b y c, el amperímetro se utiliza para medir la corriente en el resistor de  $6\text{ k}\Omega$ . Cuando se conecta el amperímetro al circuito como se muestra en la figura 2.6-5b, el amperímetro mide  $i_a$ , direccionada del probador rojo al probador negro. Cuando los probadores del amperímetro están intercambiados como se muestra en la figura 2.6-5c, el amperímetro mide  $i_b$ , de nuevo direccionado del probador rojo al negro. Observe  $i_b = -i_a$ .

## 2.7 FUENTES DEPENDIENTES

Las fuentes dependientes modelan la situación en la cual el voltaje o la corriente de un elemento de circuito es proporcional al voltaje o corriente del segundo elemento de circuito. (En contraste, un resistor es un elemento de circuito en el cual el voltaje del elemento es proporcional a la corriente del *mismo* elemento.) Las fuentes dependientes se emplean para modelar dispositivos electrónicos como transistores o amplificadores. Por ejemplo, el voltaje de salida de un amplificador es proporcional al voltaje de entrada de ese amplificador, de modo que un amplificador puede ser modelado por una fuente dependiente.

La figura 2.7-1a muestra un circuito que incluye una fuente dependiente. El símbolo de diamante representa una fuente dependiente. Los signos más y menos dentro del diamante identifican la fuente dependiente como una fuente de voltaje e indican la polaridad de referencia del voltaje del elemento. La etiqueta “ $5i$ ” representa el voltaje de esta fuente dependiente. Este voltaje es un producto de dos factores,  $5$  e  $i$ . El segundo factor,  $i$ , indica que el voltaje de esta fuente dependiente es controlado por la corriente,  $i$ , en el resistor de  $18\ \Omega$ . El primer factor,  $5$ , es la ganancia de esta fuente dependiente, la cual es la proporción del voltaje controlado,  $5i$ , para la corriente predominante,  $i$ . Esta ganancia tiene unidades de  $\text{V/A}$  u  $\Omega$ . Dado que esta fuente dependiente es una fuente de voltaje y como una corriente controla el voltaje, la fuente dependiente se denomina fuente de voltaje de corriente controlada (CCVS, por sus siglas en inglés).

La figura 2.7-2b muestra el circuito de 2.7-1a, desde un punto de vista diferente. En la figura 2.7-1b, se ha insertado un cortocircuito en serie con el resistor de  $18\ \Omega$ . Ante esto se considera la corriente predominante  $i$  como la corriente en un cortocircuito más que como la corriente en el resistor de  $18\ \Omega$  en sí. De este modo, se puede tratar siempre la corriente predominante de una fuente dependiente como la corriente en un cortocircuito. En esta sección usaremos este segundo punto de vista para clasificar las fuentes dependientes.

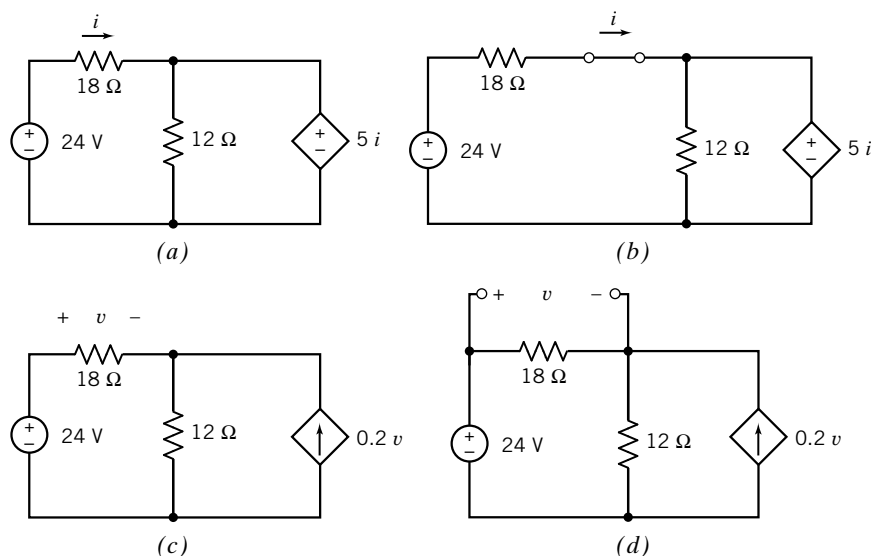


FIGURA 2.7-1 La corriente predominante de una fuente dependiente mostrada como (a) la corriente en un elemento, y (b) la corriente en un cortocircuito en serie con ese elemento. El voltaje predominante de una fuente dependiente se muestra como (c) el voltaje a través de un elemento y (d) el voltaje a través de un circuito abierto en paralelo con ese elemento.

La figura 2.7-1c muestra un circuito que incluye una fuente dependiente, representada por el símbolo del diamante. La flecha dentro del diamante identifica la fuente dependiente como una fuente de corriente e indica la dirección de referencia de la corriente del elemento. La etiqueta “0.2 v” representa la corriente de esta fuente dependiente. Esta corriente es producto de dos factores, 0.2 y  $v$ . El segundo factor,  $v$ , indica que la corriente de esta fuente dependiente está controlada por el voltaje,  $v$ , a través del resistor de  $18\ \Omega$ . El primer factor, 0.2, es la ganancia de esta fuente dependiente, la cual es a su vez la proporción de fuente controlada,  $0.2\ v$ , para el voltaje predominante,  $v$ . Esta ganancia tiene unidades de A/V. Dado que esta fuente dependiente es una fuente de corriente y como un voltaje controla la corriente, la fuente dependiente se denomina fuente de corriente de voltaje controlado (VCCS por sus siglas en inglés).

La figura 2.7-1d muestra el circuito de la figura 2.7-1c, desde un punto de vista diferente. En la figura 2.7-1d, se ha agregado un circuito abierto en paralelo con el resistor de  $18\ \Omega$ . Ahora consideramos el voltaje predominante  $v$  como el voltaje a través de un circuito abierto de la figura 2.7-1, en vez del voltaje a través del mismo resistor de  $18\ \Omega$ . De este modo, se puede tratar siempre el voltaje predominante de una fuente dependiente como el voltaje a través de un circuito abierto.

Estamos listos para clasificar las fuentes dependientes. Cada fuente dependiente consta de dos partes: la parte predominante y la parte controlada. La parte predominante es o bien un circuito abierto o un cortocircuito. La parte controlada puede ser una fuente de voltaje o una fuente de corriente. Hay cuatro tipos de fuente dependiente que corresponden a las cuatro formas de seleccionar una parte controladora y una parte controlada. Estas cuatro fuentes dependientes se denominan (\* por sus siglas en inglés) fuente de voltaje controlada por voltaje (VCVS\*), fuente de voltaje controlada por corriente (CCVS\*), fuente de corriente controlada por voltaje (VCCS\*), y fuente de corriente controlada por corriente (CCCS\*). En la tabla 2.7-1 se muestran los símbolos que representan las fuentes dependientes.

Considere la CCVS de la tabla 2.7-1. El elemento predominante es un cortocircuito. La corriente y el voltaje del elemento que predomina están indicados como  $i_c$  y  $v_c$ . El voltaje a través de un cortocircuito es cero, por lo tanto,  $v_c = 0$ . La corriente de cortocircuito,  $i_c$  es la señal de control de esa fuente dependiente. El elemento controlado es una fuente de voltaje. La corriente y el voltaje del elemento controlado se representan por  $i_d$  y  $v_d$ , respectivamente. El voltaje controlado  $v_d$  es controlado por  $i_c$ :

$$v_d = r i_c$$

La constante  $r$  se denomina la ganancia de CCVS. La corriente  $i_d$ , como la corriente de toda fuente de voltaje, está determinada por el resto del circuito.

Tabla 2.7-1 Fuentes dependientes

DESCRIPCIÓN	SÍMBOLO
Fuente de voltaje controlada por corriente (CCVS) $r$ es la ganancia de la CCVS. $r$ tiene unidades de voltios/amperios	
Fuente de voltaje controlada por voltaje (VCCS) $b$ es la ganancia de la VCCS. $b$ tiene unidades de voltios/voltios	
Fuente de corriente controlada por voltaje (VCCS) $g$ es la ganancia de la VCCS. $g$ tiene unidades de amperios/voltios	
Fuente de corriente controlada por corriente (CCCS) $d$ es la ganancia de la CCCS $d$ tiene unidades de amperios/amperios	

A continuación, considere la VCCS de la tabla 2-7-1. El elemento predominante es un circuito abierto. La corriente en un circuito abierto es cero, por lo tanto,  $i_c = 0$ . El voltaje del circuito abierto,  $v_c$ , es la señal controladora de esta fuente dependiente. El elemento controlado es una fuente de voltaje. El voltaje  $v_d$  es controlado por  $v_c$ :

$$v_d = b v_c$$

La constante  $b$  se denomina ganancia de VCCS. La corriente  $i_d$  está determinada por el resto del circuito.

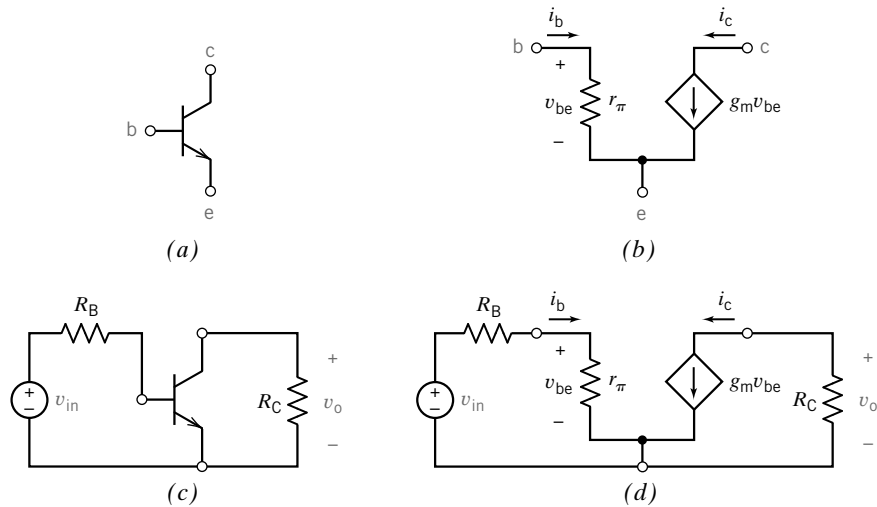
El elemento controlador de la VCCS que se muestra en la tabla 2.7-1 es un circuito abierto. La corriente en este circuito abierto es  $i_c = 0$ . El voltaje del circuito abierto,  $v_c$ , es la señal controladora de esta fuente dependiente. El elemento controlado es una fuente de corriente. La corriente  $i_d$  está controlada por  $v_c$ :

$$i_d = g v_c$$

La constante  $g$  se denomina ganancia de VCCS. El voltaje  $v_d$ , como el voltaje a través de toda fuente de corriente, está determinado por el resto del circuito.

El elemento controlador de la CCCS que se muestra en la tabla 2.7-1 es un cortocircuito. El voltaje a través de este circuito abierto es  $v_c = 0$ . La corriente del cortocircuito,  $i_c$ , es la señal controladora de esta fuente dependiente. El elemento controlado es una fuente de corriente. La corriente  $i_d$  está controlada por  $i_c$ :

$$i_d = d i_c$$



**FIGURA 2.7-2** (a) Símbolo para un transistor. (b) Modelo del transistor. (c) Amplificador de transistor. (d) Modelo del amplificador de transistor.

La constante  $d$  se denomina ganancia de CCCS. El voltaje,  $v_d$  como el voltaje a través de toda fuente de corriente, está determinado por el resto del circuito.

La figura 2.7-2 ilustra el uso de las fuentes dependientes para modelar dispositivos electrónicos. En ciertas circunstancias, el comportamiento del transistor que se muestra en la figura 2.7-2a se puede representar utilizando el modelo que se muestra en la figura 2.7-2b. Este modelo consta de una fuente dependiente y un resistor. El elemento controlador de la fuente dependiente es un circuito abierto a través del resistor. El voltaje controlador es  $v_{be}$ . La ganancia de la fuente dependiente es  $g_m$ . La fuente dependiente se utiliza en este modelo para representar una propiedad del transistor, específicamente, que la corriente  $i_c$  es proporcional al voltaje  $v_{be}$ , es decir,

$$i_c = g_m v_{be}$$

donde  $g_m$  tiene unidades de amperios/voltios. Las figuras 2.7-2c y d ilustran la utilidad de este modelo. La figura 2.7-2d se obtiene de la figura 2.7-2c al reemplazar el transistor por el modelo de transistor.

### EJEMPLO 2.7-1 Fuentes de poder y dependientes

Determine la potencia absorbida por la VCVS de la figura 2.7-3.

#### Solución

La VCVS consta de un circuito abierto y una fuente de voltaje controlado. En un circuito abierto no hay corriente, por lo tanto, no hay absorción de potencia en un circuito abierto.

El voltaje,  $v_c$ , a través del circuito abierto es la señal controladora de la VCVS. El voltímetro mide  $v_c$  para que

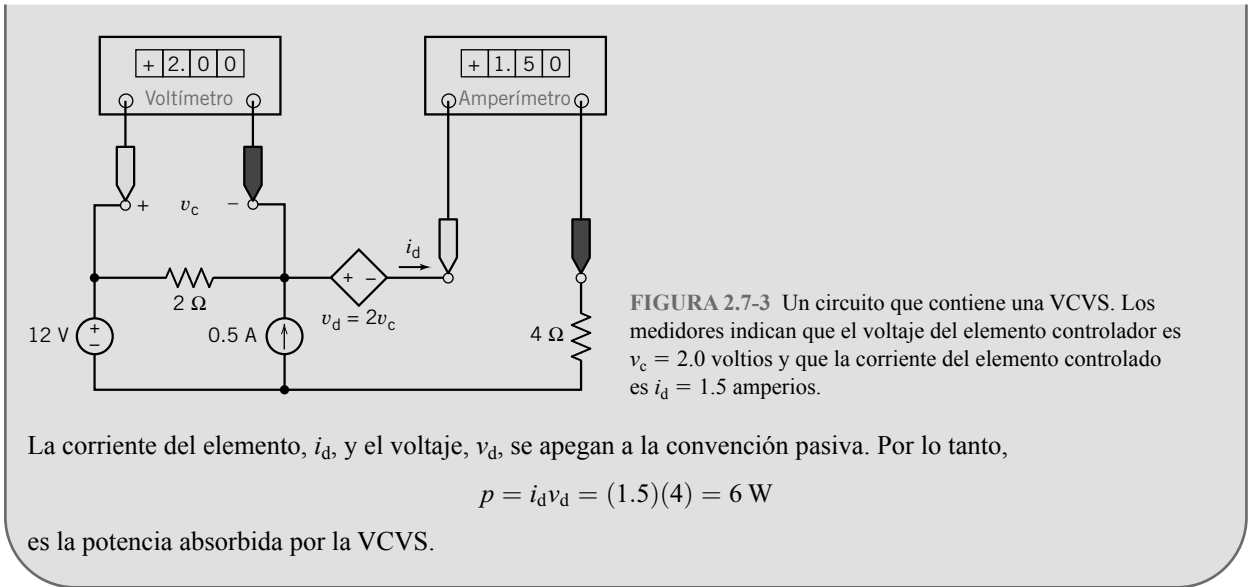
$$v_c = 2 \text{ V}$$

El voltaje de la fuente de voltaje controlado es

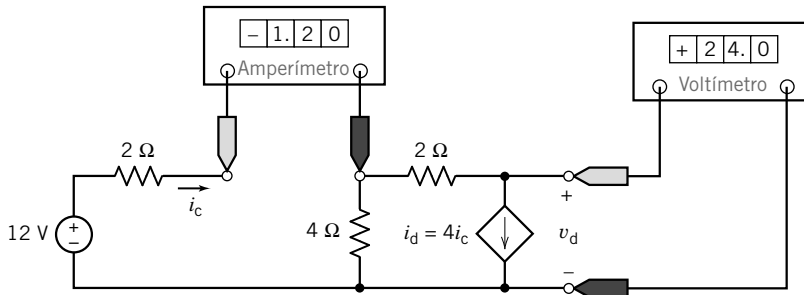
$$v_d = 2 v_c = 4 \text{ V}$$

El amperímetro mide la corriente en la fuente de voltaje controlado para que

$$i_d = 1.5 \text{ A}$$



**EJERCICIO 2.7-1** Obtenga la potencia absorbida por la CCCS en la figura E 2.7-1.



**FIGURA E 2.7-1** Un circuito que contiene una CCCS. Los medidores indican que la corriente del elemento controlador es  $i_c = -1.2$  amperios y que el voltaje del elemento controlado es  $v_d = 24$  voltios.

**Sugerencia:** El elemento controlador de esta fuente dependiente es un cortocircuito. El voltaje a través de un cortocircuito es cero. Por consiguiente, la potencia absorbida por el elemento controlador es cero. ¿Cuánta potencia absorbe el elemento controlado?

**Respuesta:** La CCCS absorbe  $-115.2$  watts (la CCCS entrega  $+115.2$  watts al resto del circuito).

**2.8 TRANSDUCTORES**

Los transductores son dispositivos que convierten cantidades físicas en cantidades eléctricas. Esta sección describe dos transductores: potenciómetros y sensores de temperatura. Los potenciómetros convierten la posición en resistencia y los sensores de temperatura convierten la temperatura en corriente.



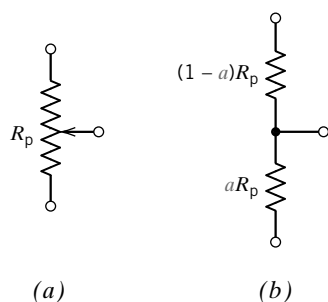


FIGURA 2.8-1 (a) Símbolo y (b) modelo del potenciómetro.

La figura 2.8-1a muestra el símbolo para el potenciómetro. El potenciómetro es un resistor que tiene un tercer contacto, llamado cursor, que se desliza a lo largo del resistor. Se necesitan dos parámetros,  $R_p$  y  $a$ , para describir el potenciómetro. El parámetro  $R_p$  especifica la resistencia del potenciómetro ( $R_p > 0$ ). El parámetro  $a$  representa la posición del cursor y toma valores en el rango  $0 \leq a \leq 1$ . Los valores  $a = 0$  y  $a = 1$  corresponden a las posiciones extremas del cursor.

La figura 2.8-1b muestra un modelo para el potenciómetro que consta de dos resistores. Las resistencias de estos resistores dependen de los parámetros  $R_p$  y  $a$  del potenciómetro.

En ocasiones, la posición del cursor corresponde a la posición angular del eje conectado al potenciómetro. Suponga que  $\theta$  es el ángulo en grados y que  $0 \leq \theta \leq 360$ . Entonces,

$$a = \frac{\theta}{360}$$

### EJEMPLO 2.8-1 Circuito del potenciómetro

La figura 2.8-2a muestra un circuito en el cual el voltaje medido por el instrumento medidor muestra una indicación de la posición angular del eje. En la figura 2.8-2b, la fuente de corriente, el potenciómetro y el voltímetro han sido reemplazados por modelos de estos dispositivos. El análisis de la figura da como resultado

$$v_m = R_p I a = \frac{R_p I}{360} \theta$$

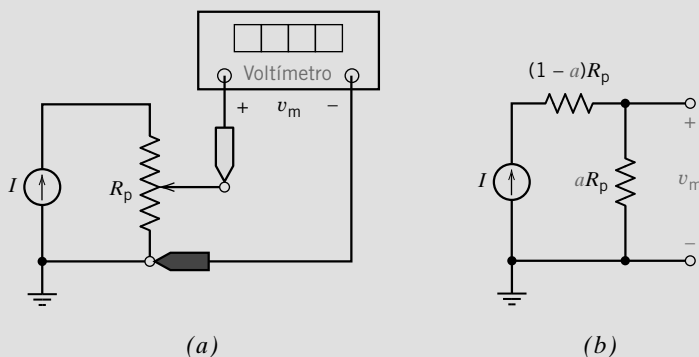


FIGURA 2.8-2 (a) Circuito que contiene un potenciómetro. (b) Circuito equivalente que contiene un modelo del potenciómetro.

Despejando el ángulo se obtiene

$$\theta = \frac{360}{R_p I} v_m$$

Suponga que  $R_p = 10 \text{ k}\Omega$  y que  $I = 1 \text{ mA}$ . Un ángulo de  $163^\circ$  podría ocasionar una salida de  $v_m = 4.53 \text{ V}$ . Una lectura de medidor de  $7.83 \text{ V}$  indicaría que  $\theta = 282^\circ$ .

Los sensores de temperatura, como el AD590 manufacturado por Analog Devices, son fuentes de corriente que tienen una corriente proporcional con la temperatura absoluta. La figura 2.8-3a muestra el símbolo con el que se representa un sensor de temperatura. La figura 2.8-3b muestra el modelo del circuito del sensor de temperatura. Para que el sensor de temperatura funcione adecuadamente, el voltaje de derivación  $v$  debe satisfacer la condición

$$4 \text{ voltios} \leq v \leq 30 \text{ voltios}$$

Cuando se satisface esta condición, la corriente,  $i$ , en microamperios, es numéricamente igual a la temperatura  $T$ , en grados Kelvin. La frase *numéricamente igual* indica que la corriente y la temperatura tienen el mismo valor pero diferentes unidades. Esta relación se puede expresar como

$$i = k \cdot T$$

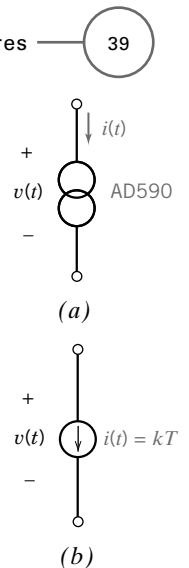
donde  $k = 1 \frac{\mu\text{A}}{\text{°K}}$ , una constante asociada con el sensor.

**EJERCICIO 2.8-1** Para el circuito del potenciómetro de la figura 2.8-2, calcule la medición de voltaje  $v_m$ , cuando  $\theta = 45^\circ$ .  $R_p = 20 \text{ k}\Omega$ , e  $I = 2 \text{ mA}$ .

**Respuesta:**  $v_m = 5 \text{ V}$

**EJERCICIO 2.8.2** El voltaje y la corriente de un sensor de temperatura AD590 de la figura 2.8-3 son  $10 \text{ V}$  y  $280 \mu\text{A}$ , respectivamente. Determine la temperatura medida.

**Respuesta:**  $T = 280 \text{ °K}$ , o aproximadamente  $6.85 \text{ °C}$ .



**FIGURA 2.8-3** (a) Símbolo y (b) modelo del potenciómetro.

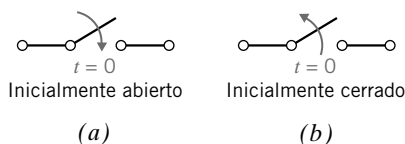
## 2.9 INTERRUPTORES

Los interruptores tienen dos estados distintos: abierto y cerrado. Idealmente, un interruptor actúa como un cortocircuito cuando está cerrado y como circuito abierto cuando está abierto.

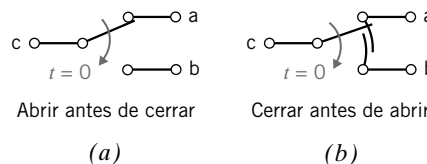
Las figuras 2.9-1 y 2.9-2 muestran varios tipos de interruptor. En cada caso se indica el tiempo cuando el interruptor cambia de estado. Veamos primero los interruptores unipolares de una acción (SPST, por sus siglas en inglés) que se muestran en la figura 2.9-1. El interruptor de la figura 2.9-1a está abierto inicialmente. Este interruptor cambia de estado, a cerrado, en el tiempo  $t = 0 \text{ s}$ . Cuando este interruptor se modela como un interruptor ideal, se le trata como un circuito abierto cuando  $t < 0 \text{ s}$  y como cortocircuito cuando  $t > 0 \text{ s}$ . El circuito ideal cambia de estado de manera instantánea. El interruptor de la figura 2.9-1b está cerrado inicialmente. Este interruptor cambia de estado, a abierto, en el tiempo  $t = 0 \text{ s}$ .

A continuación, veremos el interruptor unipolar de doble acción (SPDT, por sus siglas en inglés) que se muestra en la figura 2.9-2. Este interruptor SPDT funciona como dos interruptores SPST, uno entre las terminales c y a, y otro entre las terminales c y b. Antes de  $t = 0 \text{ s}$ , el interruptor que está entre c y a está cerrado y el que está entre c y b está abierto. En  $t = 0 \text{ s}$ , ambos interruptores cambian de estado, es decir, el que está entre a y c está abierto, y el que está entre c y b está cerrado. Una vez más, los interruptores ideales se modelan como circuitos abiertos cuando están abiertos y como cortocircuitos cuando están cerrados.

En algunas aplicaciones es importante si el interruptor entre c y b cierra antes o después, y que el interruptor entre c y a abra. Se utilizan diferentes símbolos para representar estos dos tipos de interruptor unipolares, de doble acción. El interruptor abrir antes de cerrar está fabricado de tal manera



**FIGURA 2.9-1** Interruptores SPST. (a) Inicialmente abierto y (b) Inicialmente cerrado.

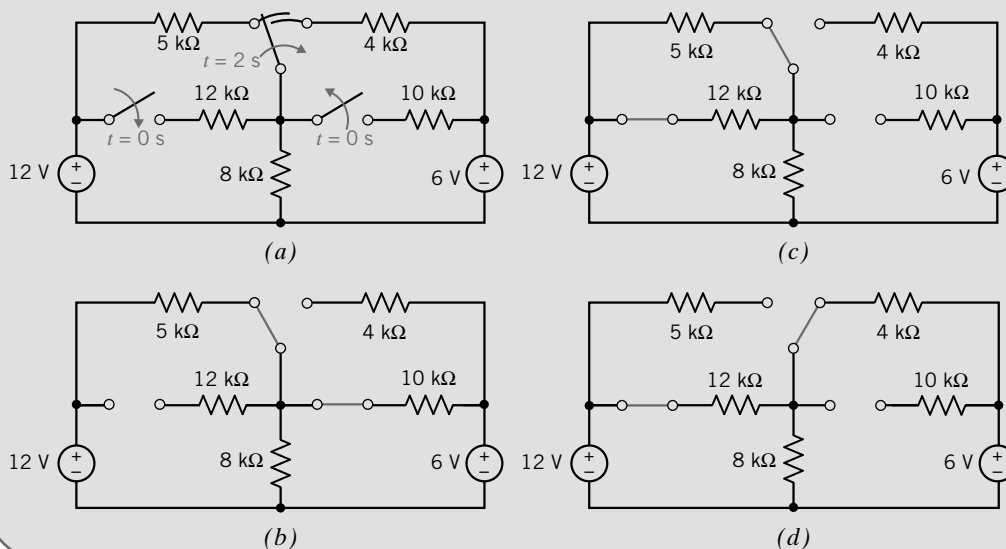


**FIGURA 2.9-2** Interruptores SPDT. (a) Abrir antes de cerrar y (b) Cerrar antes de abrir

que entre c y b cierre después de que el interruptor entre c y a se abra. En la figura 2.9-2a se muestra el símbolo del interruptor de abrir antes de cerrar. El interruptor de abrir antes de cerrar está fabricado de tal manera que el interruptor entre c y b cierre antes de que el interruptor entre c y a abra. El símbolo del interruptor cerrar antes de abrir se muestra en la figura 2.9-2b. Recuerde que la transición del interruptor de la terminal a a la b se supone que se efectúa de manera instantánea. Esta transición instantánea es un modelo preciso cuando la transición real de abrir antes de cerrar es muy rápida comparada con la respuesta del tiempo del circuito.

### EJEMPLO 2.9-1 Interruptores

La figura 2.9-3 ilustra el uso de circuitos abiertos y cortos para modelar interruptores ideales. En la figura 2.9-3a se muestra un circuito con tres interruptores. En la figura 2.9-3b se muestra el circuito como si hubiera sido modelado antes de  $t = 0$  s. Los dos interruptores unipolares de una acción cambian de estado en el tiempo  $t = 0$  s. La figura 2.9-3c muestra el circuito como si hubiera sido modelado cuando el tiempo está entre 0 s y 2 s. El interruptor unipolar de doble acción cambia de estado en el tiempo  $t = 2$  s. La figura 2.9-3d muestra el circuito como si hubiera sido modelado después de 2 s.



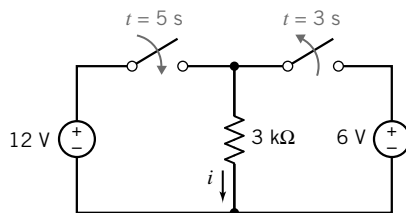
**FIGURA 2.9-3** (a) Un circuito con varios interruptores. (b) El circuito equivalente para  $t \leq 0$  s. (c) El circuito equivalente para  $0 < t < 2$  s. (d) El circuito equivalente para  $t > 2$  s.

**EJERCICIO 2.9-1** ¿Cuál es el valor de la corriente  $i$  en la figura E 2.9-a en el tiempo  $t = 4$  s?

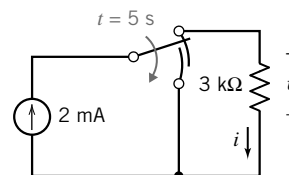
**Respuesta:**  $i = 0$  amperios en  $t = 4$  s (ambos interruptores están abiertos).

**EJERCICIO 2.9-2** ¿Cuál es el valor del voltaje  $v$  en la figura E 2.9-2 en el tiempo  $t = 4$  s?  
¿En  $t = 6$  s?

**Respuesta:**  $v = 6$  voltios en  $t = 4$  s, y  $v = 0$  voltios en  $t = 6$  s.



**FIGURA E 2.9-1** Circuito con dos interruptores SPST.



**FIGURA E. 2.9-2** Circuito con un interruptor SPST cerrar antes de abrir.

## 2.10 ¿CÓMO LO PODEMOS COMPROBAR...?

Frecuentemente a los ingenieros se les solicita comprobar que la solución de un problema sea la correcta. Por ejemplo, las soluciones propuestas para problemas de diseño se deben comprobar para confirmar que se ha cumplido con todas las especificaciones. Además, se deben revisar los resultados de la computadora para protegerse contra errores de captura de datos, así como las exigencias de los comerciantes, las cuales se deben analizar a fondo.

También a los estudiantes de ingeniería se les pide que verifiquen la exactitud de sus trabajos. Por ejemplo, tomarse un breve lapso antes de terminar un examen permitiría dar una vista rápida e identificar esas soluciones que podrían requerir un poco más de aplicación.

El ejemplo siguiente ilustra técnicas útiles para comprobar las soluciones a los diversos problemas analizados en este capítulo.

### EJEMPLO 2.10-1 ¿Cómo comprobar los valores de voltajes y corrientes?

Los medidores del circuito de la figura 2.10-1 indican que  $v_1 = -4$  V,  $v_2 = 8$  V y que  $i = 1$  A. ¿Cómo podemos comprobar que los valores de  $v_1$ ,  $v_2$  e  $i$  se han medido correctamente? Verifiquemos los valores de  $v_1$ ,  $v_2$  e  $i$  de dos maneras:

- Verifique que los valores dados para ambos resistores cumplan con la ley de Ohm.
- Verifique que la potencia alimentada por la fuente de voltaje sea igual a la potencia absorbida por los resistores.

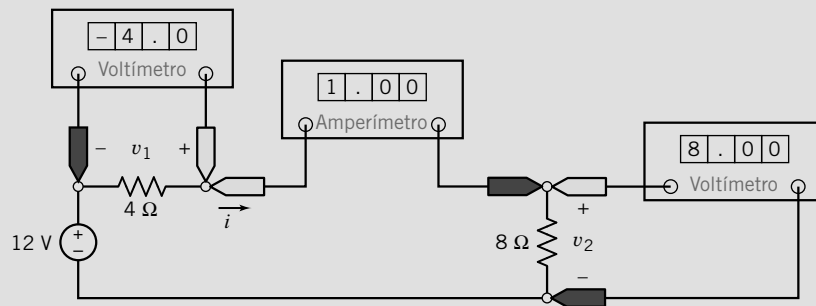


FIGURA 2.10-1 Circuito con medidores.

### Solución

- Considere el resistor de  $8 \Omega$ . La corriente  $i$  fluye a través de este resistor de arriba hacia abajo. Por lo tanto, la corriente  $i$  y el voltaje  $v_2$  se apegan a la convención pasiva. Además, la ley de Ohm requiere que  $v_2 = 8i$ . Los valores  $v_2 = 8$  V e  $i = 1$  A satisfacen esta ecuación.

A continuación, considere el resistor  $4 \Omega$ . La corriente  $i$  fluye de izquierda a derecha a través de este resistor. Por lo tanto, la corriente  $i$  y el voltaje  $v_1$  se apegan a la convención pasiva. Además, la ley de Ohm requiere que  $v_1 = 4(-i)$ . Los valores  $v_1 = -4$  V e  $i = 1$  A satisfacen esta ecuación.

Por lo tanto, se satisface la ley de Ohm.

- La corriente  $i$  fluye de arriba hacia abajo a través de la fuente de voltaje. Por lo tanto, la corriente  $i$  y el voltaje de 12 V no se apegan a la convención pasiva. En consecuencia,  $12i = 12(1) = 12$  W es la potencia alimentada por la fuente de voltaje. La potencia absorbida por el resistor de  $4 \Omega$  es  $4i^2 = 4(1^2) = 4$  W, y la potencia absorbida por el resistor de  $8 \Omega$  es  $8i^2 = 8(1^2) = 8$  W. La potencia alimentada por la fuente de voltaje es en realidad igual a la potencia absorbida por los resistores.

## 2.11 EJEMPLO DE DISEÑO

## SENSOR DE TEMPERATURA

Las corrientes se pueden medir fácilmente utilizando amperímetros. Un sensor de temperatura, como el AD590 de Analog Devices, se puede usar para medir la temperatura al convertir la temperatura en corriente. La figura 2.11-1 muestra un símbolo para representar un sensor de temperatura. Para que este sensor funcione adecuadamente, el voltaje  $v$  debe cumplir satisfactoriamente la condición

$$4 \text{ voltios} \leq v \leq 30 \text{ voltios}$$

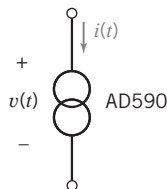


FIGURA 2.11-1  
Un sensor de temperatura.

Cumplida esta condición, la corriente  $i$ , en  $\mu\text{A}$ , es numéricamente igual a la temperatura  $T$ , en  $^{\circ}\text{K}$ . La frase *numéricamente igual* indica que las dos variables tienen el mismo valor pero unidades diferentes.

$$i = k \cdot T \quad \text{donde} \quad k = 1 \frac{\mu\text{A}}{^{\circ}\text{K}}$$

El objetivo es diseñar un circuito utilizando el AD590 para medir la temperatura de un depósito de agua. Además del AD590 y un amperímetro, hay varios proveedores de energía disponibles y algunos resistores estándar de 2%. Los proveedores de energía son fuentes de voltaje. También se cuenta con alimentadores de energía con voltajes de 10, 12, 15, 18 o 24 voltios.

**Describa la situación y los supuestos**

Para que el transductor de temperatura funcione adecuadamente, su voltaje del elemento debe estar entre 4 y 30 voltios. Para establecer este voltaje se utilizarán los alimentadores de energía y los resistores. Se usará un amperímetro para medir la corriente en el transductor de temperatura.

El circuito debe poder medir temperaturas en el rango de los  $0^{\circ}\text{C}$  a  $100^{\circ}\text{C}$  porque a estas temperaturas el estado del agua es líquido. Recuerde que la temperatura en  $^{\circ}\text{C}$  equivale a la temperatura en  $^{\circ}\text{K}$  menos  $273^{\circ}$ .

**Establezca el objetivo**

Utilice los alimentadores de energía y los resistores para hacer que el voltaje,  $v$ , del transductor de temperatura esté entre los 4 y los 30 voltios.

Utilice un amperímetro para medir la corriente,  $i$ , en el transductor de temperatura.

**Genere un plan**

Modele el alimentador de energía como una fuente de voltaje ideal y el transductor de temperatura como una fuente de corriente ideal. El circuito que se muestra en la figura 2.11-2a hace que el voltaje a través del transductor de temperatura sea igual al voltaje del alimento de energía. Dado que todos los alimentadores de energía disponibles tienen voltajes entre 4 y 30 voltios, se puede usar cualquiera de ellos. Observe que no se necesitan los resistores.

En la figura 2.11-2b se ha agregado un cortocircuito de manera que no altere la red. En la figura 2.11-2c, este cortocircuito ha sido reemplazado con un amperímetro (ideal). Como el amperímetro medirá la corriente en el transductor de temperatura, la lectura del amperímetro será numéricamente igual a la temperatura en  $^{\circ}\text{K}$ .

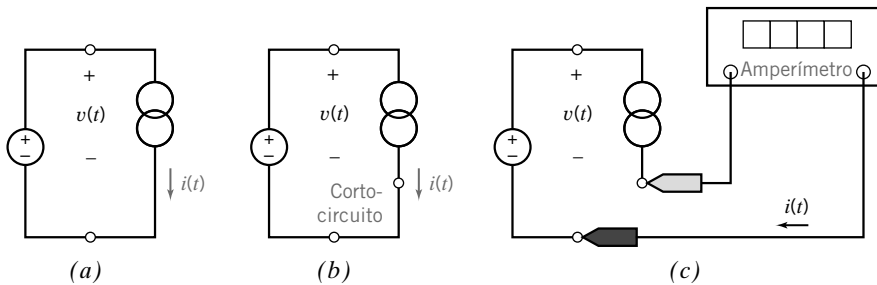


FIGURA 2.11-2 (a) Medición de la temperatura con un sensor de temperatura. (b) Agregando un cortocircuito. (c) El cortocircuito ha sido reemplazado por un amperímetro.

Aun cuando cualquiera de los alimentadores de energía es adecuado para satisfacer las especificaciones, una ventaja podría ser la elección de un alimentador de energía en particular. Por ejemplo, es razonable seleccionar el alimentador de energía que haga que el transductor absorba la menor cantidad posible de potencia.

### Actúe sobre el plan

La potencia absorbida por el transductor es

$$p = v \cdot i$$

donde  $v$  es el voltaje del alimentador de energía. Elegir un  $v$  lo más pequeño posible, en este caso de 10 voltios, hace que la potencia absorbida por el transductor de temperatura sea lo más pequeña posible. La figura 2.11-3a muestra el diseño final. La figura 2.11-3b muestra una gráfica que se puede utilizar para encontrar la temperatura que corresponda a cualquier corriente del amperímetro.

### Verifique la solución propuesta

Hagamos la prueba con un ejemplo. Suponga que la temperatura del agua es 80.6 °F. Esta temperatura es igual a 27 °C o 300 °K. La corriente en el sensor de temperatura será

$$i = \left(1 \frac{\mu\text{A}}{^\circ\text{K}}\right) 300 \text{ } ^\circ\text{K} = 300 \mu\text{A}$$

A continuación, suponga que el amperímetro de la figura 2.11-3a lee 300  $\mu\text{A}$ . Una corriente en el sensor de 300  $\mu\text{A}$  corresponde a una temperatura de

$$T = \frac{300 \mu\text{A}}{1 \frac{\mu\text{A}}{^\circ\text{K}}} = 300 \text{ } ^\circ\text{K} = 27 \text{ } ^\circ\text{C} = 80.6 \text{ } ^\circ\text{F}$$

La gráfica de la figura 2.11-3b indica que la corriente de un sensor de 300  $\mu\text{A}$  corresponde a una temperatura de 27 °C.

Este ejemplo muestra que el circuito está funcionando de manera adecuada.

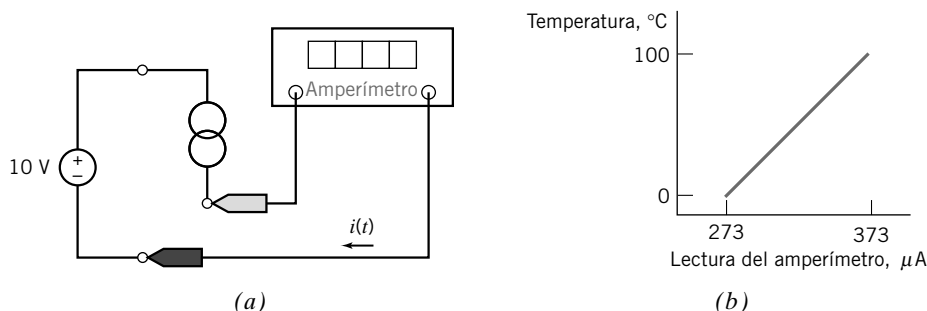


FIGURA 2.11-3 (a) Diseño final de un circuito que mide la temperatura con un sensor de temperatura. (b) Gráfica de la temperatura comparada con la corriente del amperímetro.

## 2.12 RESUMEN

- El ingeniero utiliza modelos, llamados elementos de circuito, para representar el dispositivo que integra un circuito. En este libro sólo se consideran elementos lineales o modelos lineales de dispositivos. Un dispositivo es lineal si satisface las propiedades de la superposición y la homogeneidad.
- La relación entre las direcciones de referencia de la corriente y el voltaje de un elemento de circuito es importante. La polaridad del voltaje marca una terminal + y la otra -. El voltaje y la corriente del elemento se apegan a la convención pasiva si la corriente se dirige de la terminal marcada como + a la terminal marcada como -.
- Con gran frecuencia se utilizan resistores (o resistencias) como elementos de circuito. Cuando el voltaje y la resistencia del resistor se apegan a la convención pasiva, los resistores obedecen a la ley de Ohm; el voltaje a través de las terminales del resistor se relaciona con la corriente en la terminal positiva como  $v = Ri$ . La potencia transmitida a una resistencia es  $p = i^2R = v^2/R$  watts.
- Una fuente independiente proporciona una corriente o un voltaje independiente de otras variables de circuito. El voltaje de una fuente de voltaje independiente es específico, pero la corriente no lo es. Por el contrario, la corriente de una fuente de corriente independiente es específica aun cuando el voltaje no lo sea. Los voltajes de fuentes de voltaje independientes y las corrientes de fuentes de corriente independientes se suelen utilizar como las entradas a circuitos eléctricos.

- Una fuente dependiente proporciona una corriente (o un voltaje) que es dependiente de otra variable en cualquier punto del circuito. En la tabla 2.7-1 se resumen las ecuaciones constitutivas de fuentes dependientes.
- El **cortocircuito** y el **circuito abierto** son casos especiales de fuentes independientes. Un **cortocircuito** es una fuente de voltaje ideal que tiene  $v(t) = 0$ . La corriente en un cortocircuito está determinada por el resto del circuito. Un **circuito abierto** es una fuente de corriente ideal que tiene  $i(t) = 0$ . El voltaje a través de un circuito abierto está determinado por el resto del circuito. Los circuitos abiertos y los cortocircuitos también se pueden considerar casos especiales de resistores. Un resistor con una resistencia  $R = 0$  ( $G = \infty$ ) es un cortocircuito. Un resistor con una conductancia  $G = 0$  ( $R = \infty$ ) es un circuito abierto.
- Un amperímetro ideal mide la corriente que fluye a través de sus terminales y tiene cero voltaje a través de sus terminales. Un voltímetro ideal mide el voltaje a través de sus terminales y tiene una corriente terminal igual a cero. Los voltímetros ideales funcionan como circuitos abiertos, y los amperímetros ideales como cortocircuitos.
- Los transductores son dispositivos que convierten cantidades físicas, como la posición de rotación, en cantidad eléctrica, como un voltaje. En este capítulo se describen dos transductores: los potenciómetros y los sensores de temperatura.
- Los interruptores se utilizan ampliamente en los circuitos para conectar y desconectar elementos y circuitos. También se pueden utilizar para crear voltajes o corrientes discontinuos.

## PROBLEMAS

### Sección 2.2 Ingeniería y modelos lineales

**P 2.2-1** Un elemento tiene un voltaje  $v$  y una corriente  $i$  como se muestra en la figura P 2.2-1a. Los valores de la corriente  $i$  y el correspondiente voltaje  $v$  se han tabulado como se muestra en la figura P 2.2-1b. Determine si el elemento es lineal.

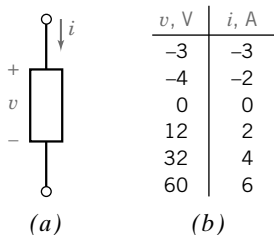


Figura P 2.2-1

**P 2.2-2** Un elemento lineal tiene un voltaje  $v$  y una corriente  $i$  como se muestra en la figura P 2.2-2a. Los valores de la corriente  $i$  y el correspondiente voltaje  $v$  se han tabulado como se muestra en la figura 2.2-2b. Represente el elemento con una ecuación que exprese  $v$  como una función de  $i$ . Esta ecuación es un modelo del elemento. (a) Verifique que el modelo es lineal.

(b) Utilice el modelo para pronosticar el valor de  $v$  que corresponda a la corriente de  $i = 40$  mA. (c) Utilice el modelo para pronosticar el valor de  $i$  que corresponda a un voltaje de  $v = 3$  V.

**Sugerencia:** Diagrame los datos. Se espera que los puntos de datos se ubiquen en una línea recta. Obtenga un modelo lineal del elemento al representar la línea recta por una ecuación.

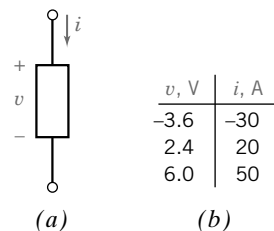


Figura P 2.2-2

**P 2.2-3** Un elemento lineal tiene un voltaje  $v$  y una corriente  $i$  como se muestra en la figura 2.2-3a. Los valores de la corriente  $i$  y el correspondiente voltaje  $v$  se han tabulado como se muestra en la figura P 2.2-3b. Represente el elemento por una ecuación que exprese  $v$  como una función de  $i$ . Esta ecuación es un modelo del elemento. (a) Verifique que el modelo sea lineal.

(b) Use el modelo para pronosticar el valor de  $v$  que corresponda a una corriente de  $i = 6$  mA. (c) Utilice el modelo para pronosticar el valor de  $i$  que corresponda a un voltaje de  $v = 12$  V.

**Sugerencia:** Diagrame los datos. Se espera que los puntos de datos se ubiquen en una línea recta. Obtenga un modelo lineal del elemento al representar la línea recta por una ecuación.

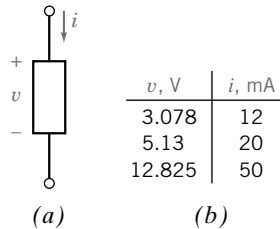


Figura P 2.2-3

**P 2.2-4** Un elemento está representado por la relación entre la corriente y el voltaje como

$$v = 3i + 5$$

Determine si el elemento es lineal.

**P 2.2-5** El circuito que se muestra en la figura P 2.2-5 consta de una fuente de corriente, un resistor y un elemento A. Considere tres casos.

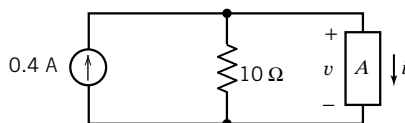


Figura P 2.2-5

(a) Cuando el elemento A es un resistor de  $40 \Omega$ , descrito por  $i = v/40$ , entonces el circuito se representa por

$$0.4 = \frac{v}{10} + \frac{v}{40}$$

Determine los valores de  $v$  e  $i$ . Observe que la ecuación anterior tiene una solución única.

(b) Cuando el elemento A es un resistor no lineal descrito por  $i = v^2/2$ , entonces el circuito se representa por

$$0.4 = \frac{v}{10} + \frac{v^2}{2}$$

Determine los valores de  $v$  e  $i$ . En este caso, hay dos soluciones de la ecuación anterior. Los circuitos no lineales presentan un comportamiento más complejo que los circuitos lineales.

(c) Cuando un elemento A es un resistor no lineal, descrito por  $i = 0.8 + \frac{v^2}{2}$ , entonces el circuito lo describe por

$$0.4 = \frac{v}{10} + 0.8 + \frac{v^2}{2}$$

Muestre que esta ecuación no tiene solución. Este resultado suele indicar un problema de modelado. Al menos uno de los tres elementos en el circuito no ha sido modelado con certeza.

## Sección 2.4 Resistencias

**P 2.4-1** Una fuente de corriente y un resistor están conectados en serie en el circuito que se muestra en la figura P 2.4-1. Los elementos conectados en serie tienen la misma corriente, por lo tanto, en este circuito  $i = i_s$ . Suponga que  $i_s = 3$  A y  $R = 7 \Omega$ . Calcule el voltaje  $v$  a través del resistor y la potencia absorbida por el resistor.

**Respuesta:**  $v = 21$  V y el resistor absorbe 63 W.

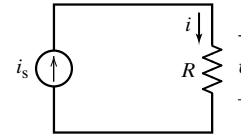


Figura P 2.4-1

**P 2.4-2** Una fuente de corriente y un resistor están conectados en serie en el circuito que se muestra en la figura P 2.4-1. Los elementos conectados en serie tienen la misma corriente, por lo tanto, en este circuito  $i = i_s$ . Suponga que  $i = 3$  mA y  $v = 48$  V. Calcule la resistencia  $R$  y la potencia absorbida por el resistor.

**P 2.4-3** Una fuente de voltaje y un resistor están conectados en paralelo en el circuito que se muestra en la figura P 2.4-3. Los elementos conectados en paralelo tienen el mismo voltaje, por lo tanto, en este circuito  $v = v_s$ . Suponga que  $v_s = 10$  V y  $R = 5 \Omega$ . Calcule la corriente  $i$  en el resistor y la potencia absorbida por el resistor.

**Respuesta:**  $i = 2$  A y el resistor absorbe 20 W.

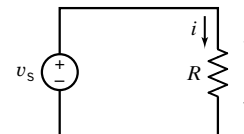


Figura P 2.4-3

**P 2.4-4** Una fuente de voltaje y un resistor están conectados en paralelo en el circuito que se muestra en la figura P 2.4-3. Los elementos conectados en paralelo tienen el mismo voltaje, por lo tanto, en este circuito  $v = v_s$ . Suponga que  $v_s = 24$  V e  $i = 3$  A. Calcule la resistencia  $R$  y la potencia absorbida por el resistor.

**P 2.4-5** Una fuente de voltaje y dos resistores están conectados en paralelo en el circuito que se muestra en la figura P 2.4-5. Los elementos conectados en paralelo tienen el mismo voltaje, por lo tanto, en este circuito  $v_1 = v_s$  y  $v_2 = v_s$ . Suponga que  $v_s = 150$  V,  $R_1 = 50 \Omega$ , y  $R_2 = 25 \Omega$ . Calcule la corriente en cada resistor y la potencia absorbida por cada resistor.

**Sugerencia:** Observe las direcciones de referencia de las corrientes de los resistores.

**Respuesta:**  $i_1 = 3$  e  $i_2 = -6$  A.  $R_1$  absorbe 450 W y  $R_2$  absorbe 900 W.

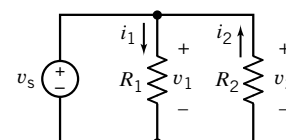


Figura P 2.4-5



**P 2.4-6** Una fuente de corriente y dos resistores están conectados en serie en el circuito que se muestra en la figura P 2.4-6. Los elementos conectados en serie tienen la misma corriente, por lo tanto, en este circuito  $i_1 = i_s$  e  $i_2 = i_f$ . Suponga que  $i_f = 25$  mA,  $R_1 = 4$   $\Omega$ , y  $R_2 = 8$   $\Omega$ . Calcule el voltaje a través de cada resistor y la potencia absorbida por cada resistor.

**Sugerencia:** Observe las direcciones de referencia de los voltajes de los resistores.

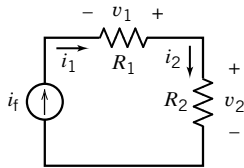


Figura P 2.4-6

**P 2.4-7** Un calentador eléctrico está conectado a una fuente de 250 V constante y absorbe 1 000 W. Luego, este calentador se conecta a una fuente de 220 V constante. ¿Qué potencia absorbe de la fuente de 220 V? ¿Cuál es la resistencia del calentador?

**Sugerencia:** Modele el calentador como una resistencia.

**P 2.4-8** El equipo portátil de alumbrado para una mina se localiza a 100 metros de la fuente de alimento de cd. Las luces de la mina usan un total de 5 kW y funcionan a 120 V cd. Determine el área seccional requerida de cables de cobre que se usaron para conectar la fuente de las luces de la mina si se requiere que la potencia perdida en el cableado sea menor a o igual a 5% de la potencia requerida por las luces de la mina.

**Sugerencia:** Modele el equipo de iluminación y el cableado como resistencias.

**P 2.4-9** La resistencia de un resistor útil depende de la resistencia nominal y de la tolerancia de la resistencia como sigue:

$$R_{\text{nom}} \left( 1 - \frac{t}{100} \right) \leq R \leq R_{\text{nom}} \left( 1 + \frac{t}{100} \right)$$

donde  $R_{\text{nom}}$  es la resistencia nominal y  $t$  es la tolerancia de la resistencia expresada en un porcentaje. Por ejemplo, un resistor de 2% de resistencia de 100  $\Omega$ , tendrá una resistencia dada por

$$98 \Omega \leq R \leq 102 \Omega$$

El circuito que se muestra en la figura P 2.4-9 tiene una entrada,  $v_s$ , y una salida,  $v_o$ . La ganancia de este circuito la da

$$\text{ganancia} = \frac{v_o}{v_s} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Determine el rango de los valores posibles de la ganancia cuando  $R_1$  es la resistencia de 2% de un resistor de 100  $\Omega$  y  $R_2$  es la resistencia de 5% de un resistor de 400  $\Omega$ . Expresé la ganancia en términos de una ganancia nominal y de una tolerancia de ganancia.

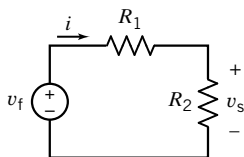


Figura P 2.4-9

**P 2.4-10** La fuente de voltaje que se muestra en la figura P 2.4-10 es una fuente de voltaje ajustable de cd. En otras palabras, el voltaje  $v_s$  es un voltaje constante, pero el valor de esa constante se puede ajustar. La tabulación de los datos capturados es como sigue. Se dio algún tipo de valor al voltaje,  $v_s$ , y a los voltajes a través del resistor,  $v_a$  y  $v_b$ , se les midió y registró. A continuación, el valor de  $v_s$  se cambió, y los voltajes a través de los resistores se midieron de nuevo y se registraron. Este procedimiento se repitió varias veces. (No se registraron los valores de  $v_s$ .) Determine el valor de la resistencia,  $R$ .

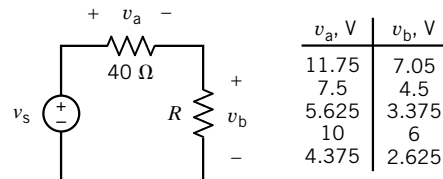


Figura P 2.4-10

## Sección 2.5 Fuentes independientes

**P 2.5-1** Una fuente de corriente y una fuente de voltaje están conectados en paralelo con un resistor, como se muestra en la figura P 2.5-1. En este circuito todos los elementos conectados en paralelo tienen el mismo voltaje,  $v_s$ . Suponga que  $v_s = 15$  V,  $i_f = 3$  A, y  $R = 5$   $\Omega$ . (a) Calcule la corriente  $i$  en el resistor y la potencia absorbida por el resistor. (b) Cambie la corriente de la fuente de corriente a  $i_s = 5$  A y calcule de nuevo la corriente,  $i$ , en el resistor y la potencia absorbida por el resistor.

**Respuesta:**  $i = 3$  A y el resistor absorbe 45 W cuando  $i_s = 3$  A cuando  $i_s = 5$  A.

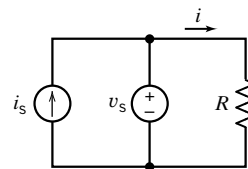


Figura P 2.5-1

**P 2.5-2** Una fuente de corriente y una fuente de voltaje están conectados en serie con un resistor, como se muestra en la figura P 2.5-2. Todos los elementos conectados en serie tienen la misma corriente,  $i_s$ , en este circuito. Suponga que  $v_s = 10$  V,  $i_s = 3$  A, y  $R = 5$   $\Omega$ . (a) Calcule el voltaje  $v$  a través del resistor y la potencia absorbida por el resistor. (b) Cambie la corriente de la fuente de voltaje a  $v_s = 5$  V y calcule de nuevo el voltaje,  $v$ , a través del resistor y la potencia absorbida por el resistor.

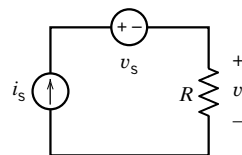


Figura P 2.5-2

**P 2.5-3** La fuente de corriente y la fuente de voltaje en el circuito que se muestra en la figura P 2.5-3 están conectadas en paralelo, por lo que tienen el mismo voltaje,  $v_s$ . La fuente de corriente y la fuente de voltaje también están conectadas en serie, de modo que tienen la misma corriente,  $i_s$ . Suponga que  $v_s = 12$  V, e  $i = 3$  A. Calcule la energía alimentada por cada fuente.

**Respuesta:** La fuente de voltaje alimenta  $-36$  W, y la fuente de corriente alimenta  $36$  W.

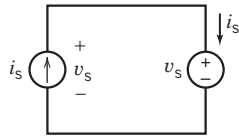


Figura P 2.5-3

**P 2.5-4** La fuente de corriente y la fuente de voltaje en el circuito que se muestra en la figura P 2.5-4 están conectadas en paralelo por lo que tienen el mismo voltaje,  $v_s$ . La fuente de corriente y la fuente de voltaje también están conectadas en serie de modo que tiene la misma corriente  $i_s$ . Suponga que  $v_s = 12$  V, e  $i = 2$  A. Calcule la energía alimentada por cada fuente.

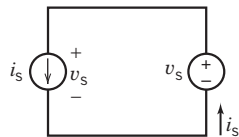


Figura P 2.5-4

**P .2.5-5**

(a) Encuentre la potencia alimentada por la fuente de voltaje que se muestra en la figura P 2.5-5 cuando para  $t \geq 0$  tenemos

$$v = 2 \cos t \text{ V}$$

y

$$i = 10 \cos t \text{ mA}$$

(b) Determine la energía alimentada por esta fuente de voltaje para el periodo  $0 \leq t \leq 1$  s.

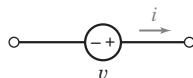


Figura P 2.5-5

**P 2.5-6** La figura 2.5-6 muestra una batería conectada a una carga. La carga en la figura 2.5-6 podría representar las luces de un automóvil, una cámara digital o un teléfono celular. La energía alimentada por la batería a la carga está dada por

$$w = \int_{t_1}^{t_2} vi \, dt$$

Cuando el voltaje de la batería es constante y la resistencia de la carga es fija, la corriente de la batería será constante y

$$w = vi(t_2 - t_1)$$

La capacidad de la batería es el producto de la corriente de la batería y el tiempo requerido para que la batería se descargue. En consecuencia, la energía almacenada en la batería es igual

al producto del voltaje de la batería y la capacidad de la batería. Por lo común la capacidad se da con las unidades de amperios hora (Ah). Una batería nueva de 12 V con una capacidad de 800 mAh está conectada a la carga que jala una corriente de 25 mA. (a) ¿Cuánto tiempo le tomará a la carga descargar la batería? (b) ¿Cuánta energía se alimentará a la carga durante el tiempo requerido para descargar la batería?

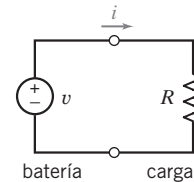


Figura P 2.5-6

**Sección 2.6 Voltímetros y amperímetros**

**P 2.6-1** Para el circuito de la figura P 2.6-1:

- (a) ¿Cuál es el valor de la resistencia  $R$ ?
- (b) ¿Cuánta energía transmite la fuente de voltaje?

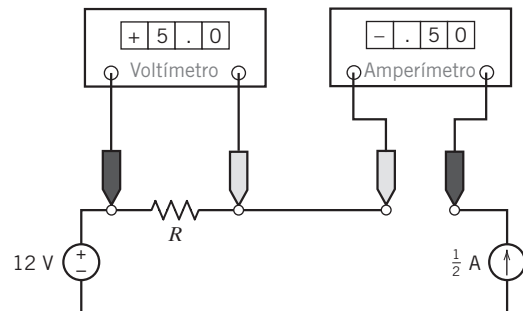


Figura P 2.6-1

**P 2.6-2** La fuente de corriente en la figura P 2.6-2 alimenta 40 W. ¿Qué valores leen los medidores de la figura P 2.6-2?

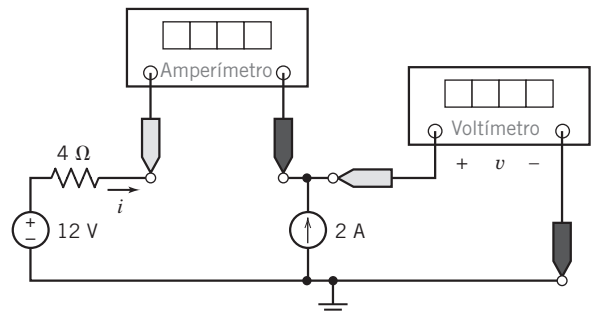


Figura P 2.6-2

**P 2.6-3** Se ha modelado un voltímetro ideal como un circuito abierto. Un modelo más real de un voltímetro es una resistencia grande. La figura P 2.6-3a muestra un circuito con un voltímetro que mide el voltaje  $v_m$ . En la figura P 2.6-3b, el voltímetro ha sido reemplazado por el modelo de un voltímetro ideal, un circuito abierto. Idealmente, en el resistor de 100  $\Omega$  no hay corriente y el voltímetro mide  $v_{mi} = 12$  V, el valor ideal

de  $v_m$ . En la figura P 2.6-3c, el voltímetro está modelado por la resistencia  $R_m$ . Ahora el voltaje medido por el voltímetro es

$$v_m = \left( \frac{R_m}{R_m + 100} \right) 12$$

Dado que  $R_m \rightarrow \infty$ , el voltímetro se convierte en un voltímetro ideal, y  $v_m \rightarrow v_{mi} = 12$  V. Cuando  $R_m < \infty$ , el voltímetro no es ideal, y  $v_m < v_{mi}$ . La diferencia entre  $v_m$  y  $v_{mi}$  es un error de medición causado por el hecho de que el voltímetro sea no ideal.

- (a) Exprese el error de medición que ocurre cuando  $R_m = 900 \Omega$  como un porcentaje de  $v_{mi}$ .  
 (b) Determine el valor mínimo de  $R_m$  requerido para asegurarse de que el error de medición es menor de 2% de  $v_{mi}$ .

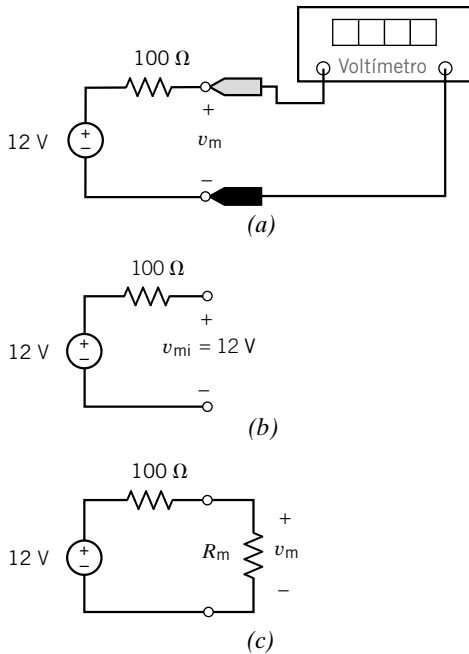


Figura P 2.6-3

**P 2.6-4** Un amperímetro ideal está modelado como un cortocircuito. Un modelo más real de un amperímetro es una resistencia pequeña. La figura P 2.6-4a muestra un circuito con un amperímetro que mide la corriente  $i_m$ . En la figura 2.6-4b, el amperímetro ha sido reemplazado por el modelo de un amperímetro ideal, un cortocircuito. Idealmente, a través del resistor  $1 \text{ k}\Omega$  no hay voltaje, y el amperímetro mide  $i_{mi} = 2 \text{ A}$ , el valor ideal de  $i_m$ . En la figura P 2.6-4c, el amperímetro está modelado por la resistencia  $R_m$ . Ahora, la corriente medida por el amperímetro es

$$i_m = \left( \frac{1000}{1000 + R_m} \right) 2$$

Como  $R_m \rightarrow 0$ , el amperímetro se convierte en un ideal, e  $i_m \rightarrow i_{mi} = 2 \text{ A}$ . Cuando  $R_m > 0$ , el amperímetro no es ideal, e  $i_m < i_{mi}$ . La diferencia entre  $i_m$  e  $i_{mi}$  es un error de medición causado por el hecho de que el amperímetro sea no ideal.

- (a) Exprese el error de medición que ocurre cuando  $R_m = 10 \Omega$  como un porcentaje de  $i_{mi}$ .  
 (b) Determine el valor máximo de  $R_m$  requerido para asegurarse de que el error de medición es menor de 5 por ciento.

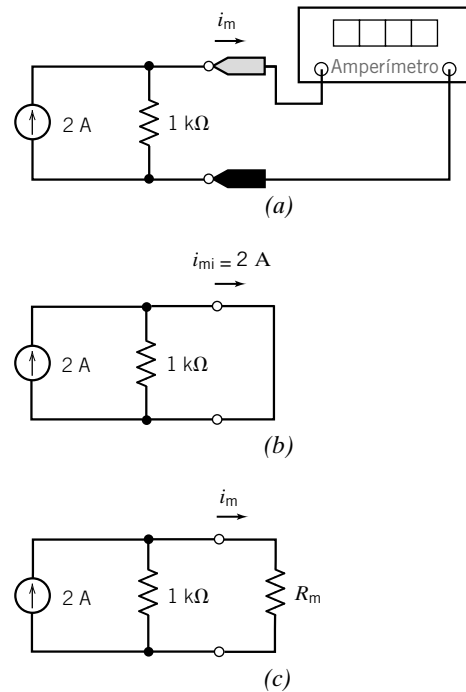


Figura P 2.6-4

**P 2.6-5** El voltímetro de la figura P 2.6-5a mide el voltaje a través de la fuente de corriente. La figura P 2.6-5b muestra el circuito después de eliminar el voltímetro y etiquetar el voltaje medido por el voltímetro como  $v_m$ . Incluso, los demás voltajes y corrientes del elemento están etiquetados en la figura P 2.6-5b.

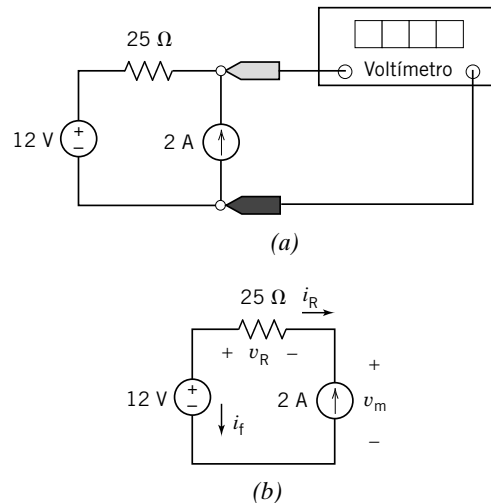


Figura 2.6-5

Dado que

$$12 = v_R + v_m \text{ y } -i_R = i_s = 2 \text{ A}$$

y que

$$v_R = 25i_R$$

- (a) Determine el valor del voltaje medido por el medidor.
- (b) Determine la potencia alimentada por cada elemento.

**P 2.6-6** El amperímetro de la figura P2.6-6a mide la corriente en la fuente de voltaje. La figura 2.6-6b muestra el circuito luego de eliminar el amperímetro y etiquetar la corriente medida por el amperímetro como  $i_m$ . Incluso, los demás voltajes y corrientes del elemento están etiquetados en la figura P 2.6-6b. Dado que

$$2 + i_m = i_R \text{ y } v_R = v_s = 12 \text{ V}$$

y que

$$v_R = 25i_R$$

- (a) Determine el valor de la corriente medida por el medidor.
- (b) Determine la potencia alimentada por cada elemento.

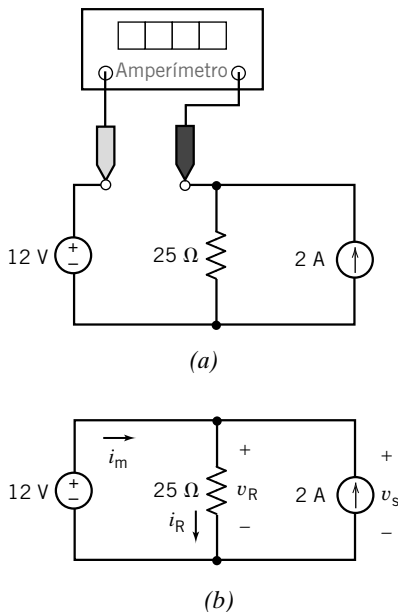


Figura P 2.6-6

**Sección 2.7 Fuentes dependientes**

**P 2.7-1** El amperímetro en el circuito que se muestra en la figura P 2.7-1 indica que  $i_a = 2 \text{ A}$ , y el voltímetro indica que  $v_b = 8 \text{ V}$ . Determine el valor de  $r$ , la ganancia de la CCVS.

*Respuesta:*  $r = 4 \text{ V/A}$

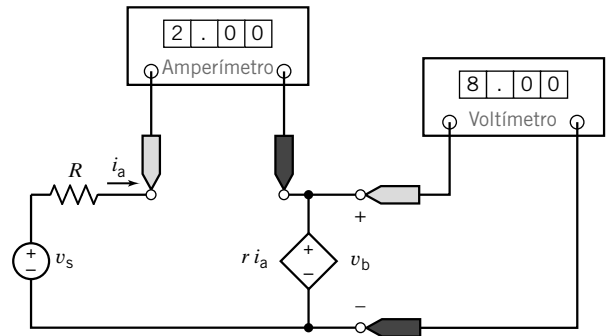


Figura P 2.7-1

**P 2.7-2** El amperímetro en el circuito que se muestra en la figura P 2.7-2 indica que  $i_a = 2 \text{ A}$ , y el voltímetro indica que  $v_b = 8 \text{ V}$ . Determine el valor de  $g$ , la ganancia de la VCCS.

*Respuesta:*  $g = 0.25 \text{ A/V}$

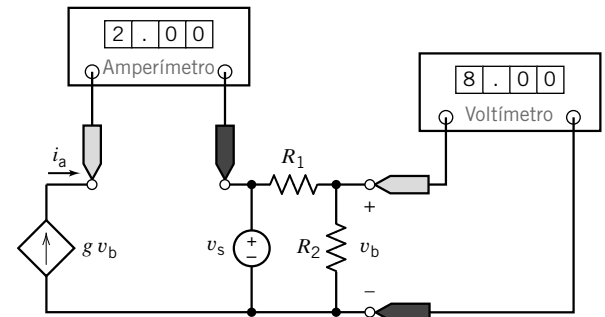


Figura P 2.7-2

**P 2.7-3** El amperímetro en el circuito que se muestra en la figura P 2.7-3 indica que  $i_a = 32 \text{ A}$  e  $i_b = 8 \text{ A}$ . Determine el valor de  $d$ , la ganancia de CCCS.

*Respuesta:*  $d = 4 \text{ A/A}$

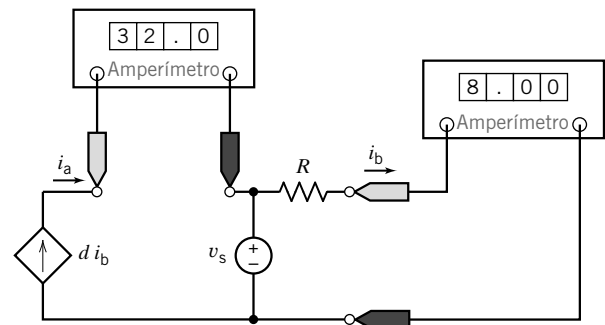


Figura P 2.7-3

**P 2.7-4** Los voltímetros en el circuito que se muestra en la figura P 2.7-4 indican que  $v_a = 2 \text{ V}$  y que  $v_b = 8 \text{ V}$ . Determine el valor de  $b$ , la ganancia de la VCVS.

*Respuesta:*  $b = 4 \text{ V/V}$

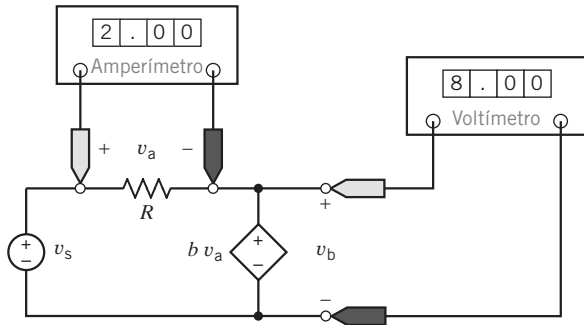


Figura P 2.7-4

**P 2.7-5** En la figura 2.7-5 se muestran los valores de la corriente y el voltaje de cada elemento del circuito.

Determine los valores de la resistencia,  $R$ , y de la ganancia de la fuente dependiente,  $A$ .

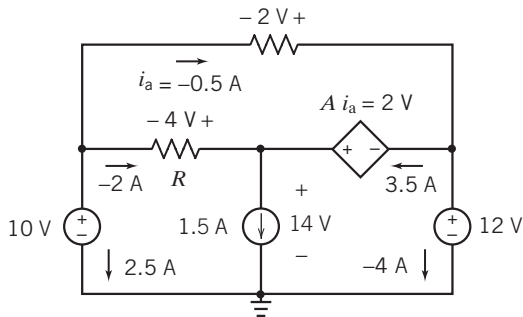


Figura P 2.7-5

**P 2.7-6** Encuentre la potencia alimentada por la VCCS en la figura P 2.7-6.

**Respuesta:** La VCCS alimentó 17.6 watts (pero absorbió -17.6 watts).

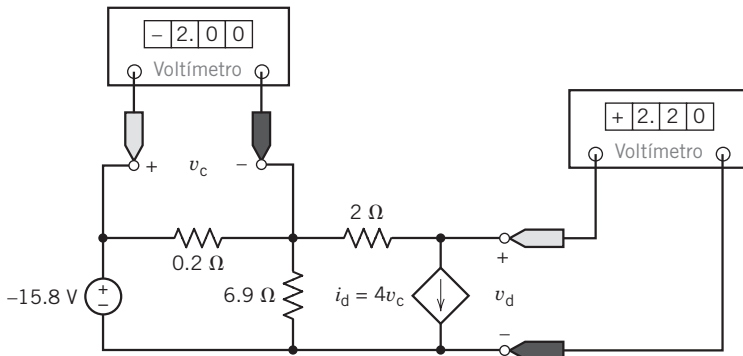


Figura P 2.7-6

**P 2.7-7** El circuito que se muestra en la figura P 2.7-7 contiene una fuente dependiente. Determine el valor de la ganancia  $k$  de esa fuente dependiente.

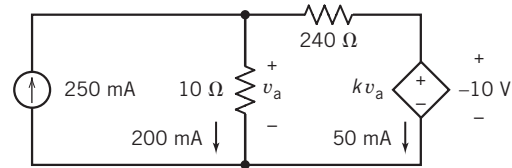


Figura P 2.7-7

**P 2.7-8** El circuito que se muestra en la figura 2.7-8 contiene una fuente dependiente. Determine el valor de la ganancia  $k$  de esa fuente dependiente.

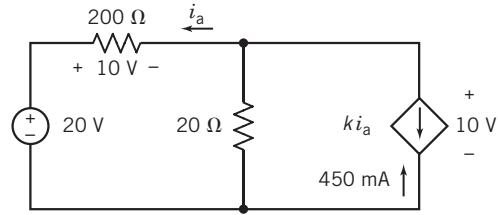


Figura P 2.7-8

**P 2.7-9** El circuito que se muestra en la figura 2.7-9 contiene una fuente dependiente. La ganancia de esa fuente dependiente es

$$k = 25 \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

Determine el valor del voltaje  $v_b$ .

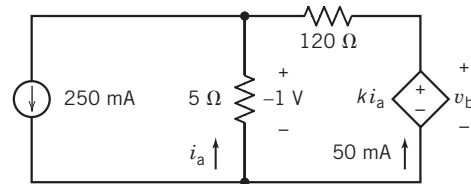


Figura P 2.7-9

**P 2.7-10** El circuito que se muestra en la figura P 2.7-10 contiene una fuente dependiente. La ganancia de esa fuente dependiente es

$$k = 90 \frac{\text{mA}}{\text{V}} = 0.09 \frac{\text{A}}{\text{V}}$$

Determine el valor de la corriente  $i_b$ .

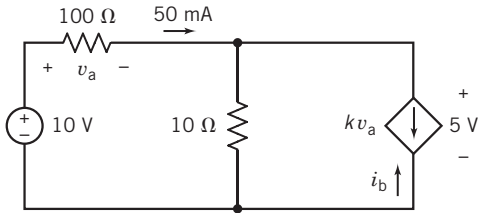


Figura P 2.7-10

**Sección 2.8 Transductores**

**P 2.8-1** Para el circuito del potenciómetro de la figura 2.8-2, la corriente de la fuente de corriente y la resistencia del potenciómetro son 1.1 mA y 100 kΩ, respectivamente. Calcule el ángulo requerido,  $\theta$ , de modo que el voltaje medido sea de 23 V.

**P 2.8-2** Un sensor AD590 tiene una constante asociada  $k = 1 \frac{\mu A}{K}$ . El sensor tiene un voltaje  $v = 20$  V. La corriente medida,  $i(t)$ , como se muestra en la figura 2.8-3, es  $4 \mu A < i < 13 \mu A$  en una fijación en laboratorio. Encuentre el rango de la temperatura medida.

**Sección 2.9 Interruptores**

**P 2.9-1** Determine la corriente,  $i$ , en  $t = 1$  s y en  $t = 4$  s para el circuito de la figura P 2.9-1.

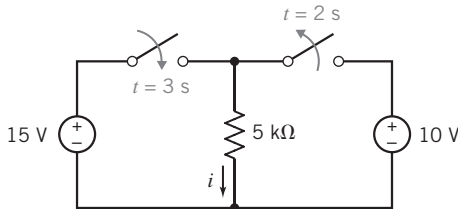


Figura P 2.9-1

**P 2.9-2** Determine el voltaje,  $v$ , en  $t = 1$  s y en  $t = 4$  s para el circuito que se muestra en la figura P 2.9-1.

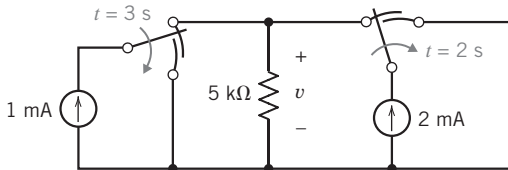


Figura P 2.9-2

**P 2.9-3** Idealmente, un interruptor abierto se modela como un circuito abierto y un interruptor cerrado se modela como un circuito cerrado. En la realidad, un interruptor abierto se modela como una resistencia grande, y un interruptor cerrado se modela como una resistencia pequeña.

La figura P 2.9-3a muestra un circuito con un interruptor. En la figura 2.9-3b, el interruptor ha sido reemplazado por una resistencia. En la figura P 2.9-3b, el voltaje  $v$  lo da

$$v = \left( \frac{100}{R_s + 100} \right) 12$$

Determine el valor de  $v$  para cada uno de los casos siguientes.

- (a) El interruptor está cerrado y  $R_s = 0$  (un cortocircuito).
- (b) El interruptor está cerrado y  $R_s = 5 \Omega$ .
- (c) El interruptor está cerrado y  $R_s = \infty$  (un cortocircuito)
- (d) El interruptor está cerrado y  $R_s = 10 \text{ k}\Omega$ .

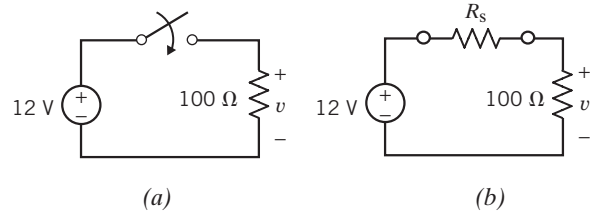


Figura P 2.9-3

**Sección 2.10 ¿Cómo lo podemos comprobar...?**

**P 2.10-1** El circuito que se muestra en la figura P 2.10-1 se utiliza para probar la CCVS. Su compañero de laboratorio argumenta que esta medición muestra que la ganancia de la CCVS es  $-20 \text{ V/A}$  en vez de  $+20 \text{ V/A}$ . ¿Está de acuerdo? Justifique su respuesta.

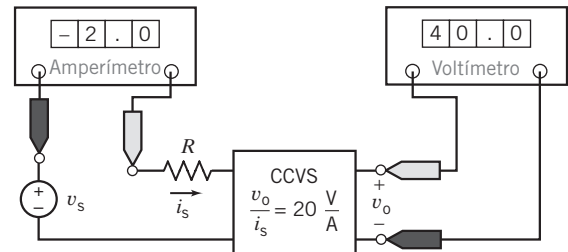


Figura P 2.10-1

**P 2.10-2** El circuito de la figura P 2.10-2 se utiliza para medir la corriente en el resistor. Una vez conocida esta corriente, se puede calcular la resistencia como  $R = \frac{v_o}{i}$ . El circuito se construye utilizando una fuente de voltaje con  $v_s = 12$  V y un resistor de  $1/2$  W de  $25 \Omega$ . Luego de una voluta de humo y un olor desagradable, el amperímetro indica que  $i = 0$  A. El resistor debe estar mal. Se tienen más resistores de  $1/2$  W de  $25 \Omega$ . ¿Debería probar con otro resistor? Justifique su respuesta.

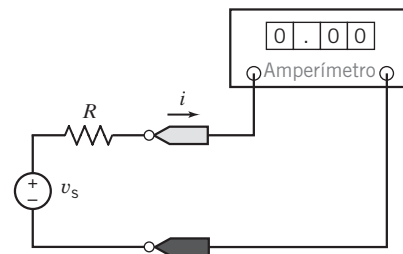


Figura P 2.10-2

**Sugerencia:** Los resistores de  $1/2$  W son capaces de disipar una potencia de  $1/2$  W. Pero pueden fallar si se requiere que disipen más de  $1/2$  W de potencia.

## Problemas de diseño

**PD 2-1** Especifique la resistencia  $R$  en la figura PD 2-1 de modo que se cumpla con las dos siguientes condiciones:

1.  $i > 40$  mA.
2. La potencia absorbida por el resistor es menor de 0.5 W.

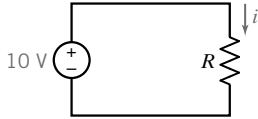


Figura PD 2-1

**PD 2-2** Especifique la resistencia  $R$  en la figura PD 2-2 de modo que se cumpla con las dos siguientes condiciones:

1.  $v > 40$  V.
2. La potencia absorbida por el resistor es menor de 15 W.

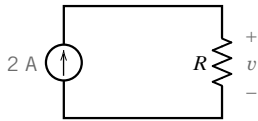


Figura PD 2-2

**Sugerencia:** No hay una garantía de que siempre se cumpla con esas especificaciones.

**PD 2-3** A los resistores se les da una potencia nominal. Por ejemplo, hay resistores de 1/8 W, 1/4 W, 1/2 W, y de 1 W. Un resistor de 1/2 W es capaz de disipar indefinidamente con seguridad 1/2 W de potencia. Los resistores con potencia nominal más grande son más costosos y voluminosos que los de menor potencia nominal. Una buena práctica de ingeniería requiere que las potencias nominales de los resistores se especifiquen lo más grande posible, pero no más de lo necesario.

Considere el circuito que se muestra en la figura PD 2-3. Los valores de las resistencias son

$$R_1 = 1\,000\ \Omega, R_2 = 2\,000\ \Omega, \text{ y } R_3 = 4\,000\ \Omega$$

El valor de la corriente de la fuente de corriente es

$$i_s = 30\ \text{mA}$$

Especifique la potencia nominal para cada resistor.

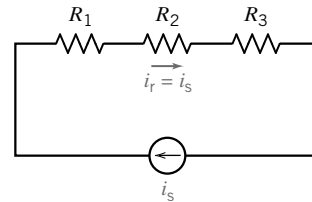


Figura DP 2-3

# Circuitos resistivos



## CAPÍTULO

# 3

### EN ESTE CAPÍTULO

- |     |  |      |  |
|-----|--|------|--|
| 3.1 | Introducción   | 3.7  | Análisis de circuitos resistivos utilizando MATLAB     |
| 3.2 | Leyes de Kirchhoff   | 3.8  | ¿Cómo lo podemos comprobar...?                         |
| 3.3 | Resistores en serie y división de voltaje                      | 3.9  | <b>EJEMPLO DE DISEÑO</b> — Fuente de voltaje ajustable |
| 3.4 | Resistores en paralelo y división de corriente                 | 3.10 | Resumen  |
| 3.5 | Fuentes de voltaje en serie y fuentes de corriente en paralelo |      | Problemas  |
| 3.6 | Análisis de circuitos  |      | Problemas de diseño                                    |

## 3.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo haremos lo siguiente:

- Escribir ecuaciones utilizando las leyes de Kirchhoff.  
No es de sorprender que el comportamiento de un circuito eléctrico esté determinado por los tipos de elementos que comprenden el circuito y por aquellos elementos con los que está conectado. Las ecuaciones constitutivas describen los elementos en sí mismos, y las leyes de Kirchhoff describen la manera en que los elementos están conectados entre sí para conformar el circuito.
- Analizar circuitos eléctricos sencillos, utilizando solamente las leyes de Kirchhoff y las ecuaciones constitutivas de los elementos del circuito.
- Analizar dos configuraciones de circuito muy comunes: los resistores en serie y los resistores en paralelo.

Veremos que los resistores en serie actúan como un “divisor de voltaje”, y los resistores en serie lo hacen como un “divisor de corriente”. Además, los resistores en serie y los resistores en paralelo nos proporcionan nuestros primeros ejemplos de un “circuito equivalente”. La figura 3.1-1 ilustra este importante concepto. En este punto, un circuito se ha dividido en dos partes,  $A$  y  $B$ . El reemplazo de  $B$  por un circuito equivalente,  $B_{eq}$ , no modifica la corriente o el voltaje de ningún elemento del circuito en la parte  $A$ . En este sentido,  $B_{eq}$  es equivalente a  $B$ . Veremos cómo obtener un circuito equivalente cuando la parte  $B$  consta de resistores en serie y resistores en paralelo.

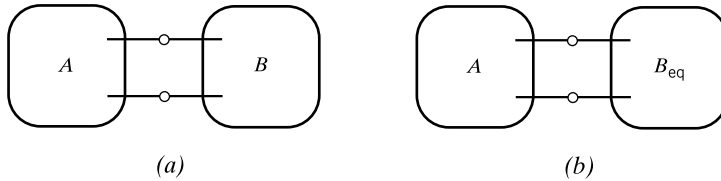
- Determinar circuitos equivalentes para fuentes de voltaje en serie y fuentes de corriente en paralelo.
- Determinar la resistencia equivalente a un circuito resistivo.

A veces, los circuitos que están constituidos totalmente por resistores se pueden reducir a un resistor equivalente único al reemplazar repetidamente resistores en serie y/o en paralelo por resistores equivalentes.



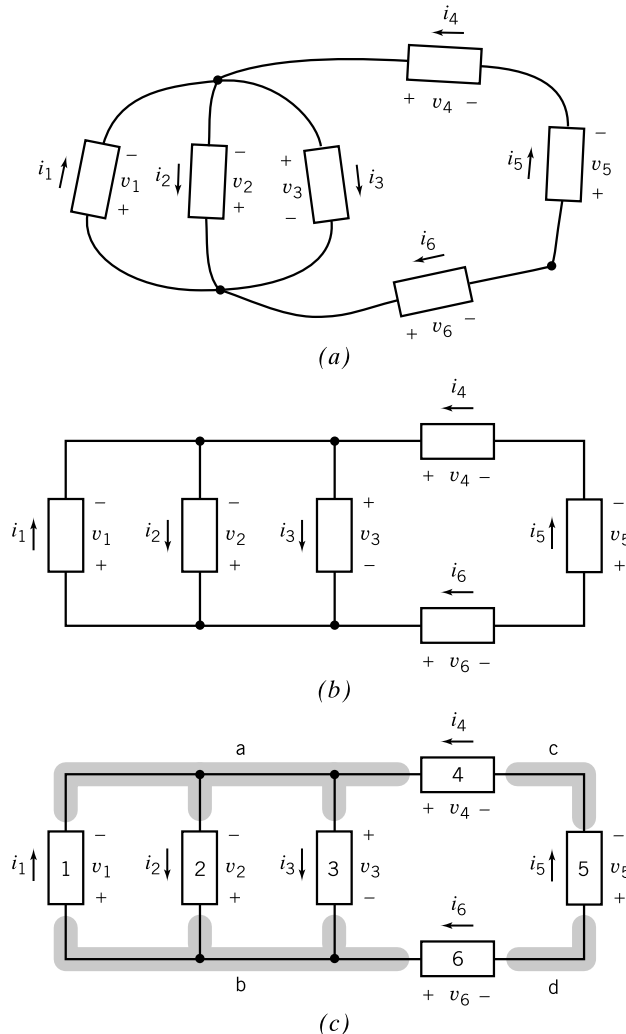
### 3.2 LEYES DE KIRCHHOFF

Un circuito eléctrico consta de elementos de circuito que están conectados entre sí. Los lugares en que los elementos están conectados entre sí se llaman nodos. La figura 3.2-1a muestra un circuito eléctrico que consta de seis elementos conectados entre sí en cuatro nodos. Es una práctica muy común trazar circuitos utilizando líneas rectas y posicionar los elementos horizontal o verticalmente, como se muestra en la figura 3.2-1b.



**FIGURA 3.1-1** Reemplazar  $B$  por un circuito equivalente  $B_{eq}$  no modifica la corriente ni el voltaje de ningún elemento de circuito en  $A$ .

El circuito se muestra de nuevo en la figura 3.2-1c, esta vez remarcando los nodos. Observe que al trazar de nuevo el circuito, mediante líneas rectas y elementos horizontales y verticales, ha cambiado la forma de representar los nodos. En la figura 3.2-1a los nodos están representados como puntos. En las figuras 3.2-1b,c, los nodos están representados tanto por puntos como por segmentos de línea.



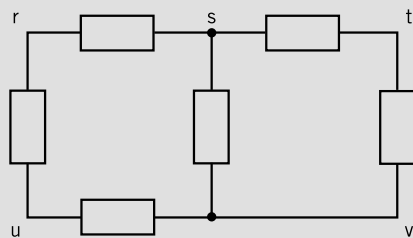
**FIGURA 3.2-1** (a) Un circuito eléctrico. (b) El mismo circuito, pero con un trazo nuevo, utilizando líneas rectas y elementos horizontales y verticales. (c) El circuito después de etiquetar los nodos y los elementos.

El mismo circuito puede trazarse de varias formas. Un dibujo de un circuito puede verse muy diferente de otro trazo del mismo circuito. ¿Cómo podemos discernir cuándo dos trazos de circuitos representan el mismo circuito? De manera informal, decimos que dos trazos de circuitos representan el mismo circuito si los elementos correspondientes están conectados a sus nodos correspondientes. De manera más formal, decimos que los trazos de los circuitos  $A$  y  $B$  representan el mismo circuito cuando se cumplen las tres condiciones siguientes.

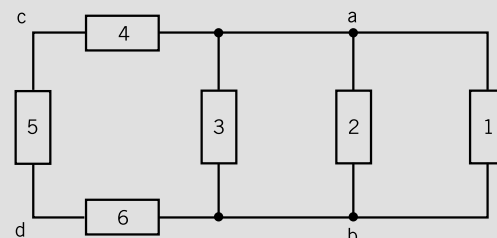
1. Hay una correspondencia de uno a uno entre los nodos del trazo  $A$  y los nodos del trazo  $B$ . (Una correspondencia de uno a uno es igual a un emparejamiento. En esta correspondencia de uno a uno, cada nodo en el trazo  $A$  empaata exactamente con un nodo del trazo  $B$  y viceversa. La posición de los nodos no es importante.).
2. Hay una correspondencia uno a uno entre los elementos del trazo  $A$  y los del  $B$ .
3. Los elementos correspondientes están conectados a los nodos correspondientes.

### EJEMPLO 3.2-1 Trazos diferentes del mismo circuito

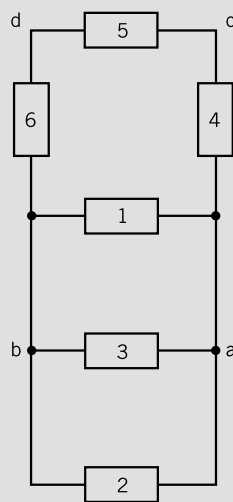
La figura 3.2-2 muestra cuatro trazos de circuitos. ¿Cuál de éstos representa el mismo circuito trazado en la figura 3.2-1c?



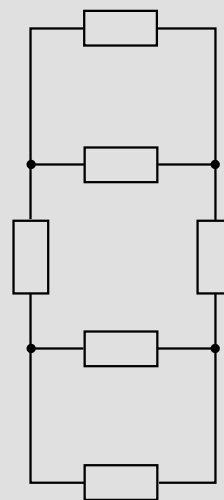
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 3.2-2 Cuatro trazos de circuitos.

## Solución

El trazo de circuito mostrado en la figura 3.2-2a tiene cinco nodos, etiquetados r, s, t, u y v. El trazo de circuito de la figura 3.2-1c tiene cuatro nodos. Dado que los dos trazos tienen diferente cantidad de nodos, no puede haber una correspondencia de uno a uno entre los nodos de los dos trazos. Por consiguiente, los trazos representan circuitos diferentes.

El trazo de circuito mostrado en la figura 3.2-2b, tiene cuatro nodos y seis elementos, el mismo número de nodos y de elementos que el trazo del circuito de la figura 3.2-1c. Los nodos de la figura 3.2-2b se han etiquetado de la misma manera que los nodos correspondientes de la figura 3.2-1c. Por ejemplo, el nodo c en la figura 3.2-2b corresponde al nodo c de la figura 3.2-1c. Los elementos de la figura 3.2-2b se han etiquetado de la misma manera que los elementos correspondientes de la figura 3.2-1c. Por ejemplo, el elemento 5 en la figura 3.2-2b corresponde al elemento 5 de la figura 3.2-1c. Los elementos correspondientes, pues, están conectados a los nodos correspondientes. Por ejemplo, el elemento 2 está conectado a los nodos a y b, en ambas figuras 3.2-2b y 3.2-1c. En consecuencia, las figuras 3.2-2b y 3.2-1c representan el mismo circuito.

El trazo del circuito que se muestra en la figura 3.2-2c tiene cuatro nodos y seis elementos, el mismo número de nodos y elementos que el trazo del circuito de la figura 3.2-1c. Los nodos y elementos de la figura 3.2-2c se han etiquetado de la misma manera que los nodos y los elementos de la figura 3.2-1c. Los elementos correspondientes, pues, están conectados a los nodos correspondientes. En consecuencia, las figuras 3.2-2c y 3.2-1c representan el mismo circuito.

El trazo del circuito que se muestra en la figura 3.2-2d tiene cuatro nodos y seis elementos, el mismo número de nodos y elementos que el trazo del circuito de la figura 3.2-1c. Sin embargo, los nodos y los elementos de la figura 3.2-2d no se han podido etiquetar de modo que los elementos correspondientes de la figura 3.2-1c estén conectados a los nodos correspondientes. (Por ejemplo, en la figura 3.2-1c, tres elementos están conectados entre el mismo par de nodos, a y b, lo que no sucede en la figura 3.2-2d.) En consecuencia, las figuras 3.2-2d y 3.2-1c representan circuitos diferentes.



**FIGURA 3.2-3** Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887). En 1847, Kirchhoff estableció dos leyes respecto de la corriente y el voltaje en un circuito eléctrico. Cortesía de la Institución Smithsonian.

En 1847, Gustav Robert Kirchhoff, profesor de la universidad de Berlín, formuló dos importantes leyes que constituyen los fundamentos del análisis de los circuitos eléctricos. Estas leyes se refieren en su honor como *ley de la corriente de Kirchhoff* (KCL, por sus siglas en inglés), y *ley del voltaje de Kirchhoff* (KVL). Las leyes de Kirchhoff son consecuencia de la carga y la conservación de la energía. La imagen de Gustav Robert Kirchhoff aparece en la figura 3.2-3.

La ley de la corriente de Kirchhoff establece que la suma algebraica de las corrientes que entran en cualquier nodo es idéntica a cero en todo momento.

**Ley de la corriente de Kirchhoff (KCL):** La suma algebraica de las corrientes en un nodo es cero en todo instante.

La frase *suma algebraica* indica que se deben tomar en cuenta las direcciones de referencia al agregar las corrientes de los elementos conectados a un nodo en particular. Una manera de tomar en cuenta las direcciones de referencia es utilizar un signo más cuando la corriente se dirige hacia fuera del nodo, y un signo menos cuando la corriente se dirige hacia el nodo. Por ejemplo, considere el circuito mostrado en la figura 3.2-1c. Cuatro elementos de este circuito —los elementos 1, 2, 3 y 4— están conectados al nodo a. Según la ley de la corriente de Kirchhoff, la suma algebraica de las corrientes de los elementos  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  e  $i_4$  debe ser cero. Las corrientes  $i_2$  e  $i_3$  se dirigen hacia fuera del nodo a, por lo cual usaremos un signo más para  $i_2$  e  $i_3$ . Por el contrario, las corrientes  $i_1$  e  $i_4$  se dirigen al nodo a, por lo que usaremos el signo menos para  $i_1$  e  $i_4$ . La ecuación de la KCL para el nodo a de la figura 3.2-1c es

$$-i_1 + i_2 + i_3 - i_4 = 0 \quad (3.2-1)$$

Otra alternativa para obtener la suma algebraica de las corrientes en un nodo es establecer que la suma de todas las corrientes que se alejan del nodo es igual a la suma de todas las corrientes que se dirigen a ese nodo. Con esta técnica encontramos que la ecuación de la KCL para el nodo de la figura 3.2-1c es

$$i_2 + i_3 = i_1 + i_4 \quad (3.2-2)$$

Desde luego, las ecuaciones 3.2-1 y 3.2-2 son equivalentes.

Del mismo modo, la ecuación de la ley de la corriente de Kirchhoff para el nodo b de la figura 3.2-1c es

$$i_1 = i_2 + i_3 + i_6$$

Antes de que podamos establecer la ley del voltaje de Kirchhoff, necesitamos la definición de un circuito cerrado (*loop*). Un *circuito cerrado* es una ruta cerrada a través de un circuito que no encuentra ningún nodo intermedio más de una vez. Por ejemplo, si empezamos en el nodo a de la figura 3.2-1c, nos podemos mover a través del elemento 4 al nodo c, luego proseguimos a través del elemento 5 hasta el nodo d, continuamos por el elemento 6 al nodo b y, finalmente, por el elemento 3 de vuelta al nodo a. Tenemos una ruta cerrada, y no nos encontramos con ninguno de los nodos intermedios (b, c o d) más de una vez. Por consiguiente, los elementos 3, 4, 5 y 6 comprenden un circuito cerrado. Del mismo modo, los elementos 1, 4, 5 y 6 comprenden un circuito cerrado del circuito que se muestra en la figura 3.2-1c. Los elementos 1 y 3 conforman otro circuito cerrado más de este circuito. El circuito tiene otros tres circuitos cerrados: los elementos 1 y 2, los elementos 2 y 3 y los elementos 2, 4, 5 y 6.

Ya estamos preparados para establecer la ley del voltaje de Kirchhoff.

**Ley del voltaje de Kirchhoff (KVL):** la suma algebraica de los voltajes en torno a cualquier circuito cerrado en un circuito es idéntica a cero en todo momento.

La frase *suma algebraica* indica que se debe tener en cuenta la polaridad al agregar los voltajes de los elementos que comprenden un circuito cerrado. Una forma de tomar en cuenta la polaridad es moverse en torno al circuito cerrado en el sentido de las manecillas del reloj mientras se observan las polaridades de los voltajes del elemento. El voltaje se escribe con un signo más cuando encontramos el signo  $-$  de la polaridad del voltaje antes del signo  $+$ . Por el contrario, el voltaje se escribe con un signo menos cuando encontramos el signo  $-$  de la polaridad del voltaje antes del signo  $+$ . Por ejemplo, considere el circuito que se muestra en la figura 3.2-1c. Los elementos 3, 4, 5 y 6, comprenden un circuito cerrado del circuito. Según la ley del voltaje de Kirchhoff, la suma algebraica de los voltajes de los elementos  $v_3$ ,  $v_4$ ,  $v_5$  y  $v_6$  debe ser cero. Al movernos en torno al circuito cerrado en el sentido de las manecillas del reloj, encontramos el signo  $+$  de  $v_4$  antes del signo  $-$ ; el signo  $-$  de  $v_5$  antes del signo  $+$ ; el signo  $-$  de  $v_6$  antes del signo  $+$  y el signo  $-$  de  $v_3$  antes del signo  $+$ . En consecuencia, utilizamos un signo menos para  $v_3$ ,  $v_5$  y  $v_6$ , y un signo más para  $v_4$ . La ecuación de la KCL para este circuito cerrado de la figura 3.2-1c es

$$v_4 - v_5 - v_6 - v_3 = 0$$

Del mismo modo, la ecuación de la ley del voltaje de Kirchhoff para el circuito cerrado que consta de los elementos 1, 4, 5 y 6 es

$$v_4 - v_5 - v_6 + v_1 = 0$$

La ecuación de la ley del voltaje de Kirchhoff para el circuito cerrado que consta de los elementos 1 y 2 es

$$-v_2 + v_1 = 0$$

### EJEMPLO 3.2-2 Leyes de Kirchhoff

### EJEMPLO INTERACTIVO

Considere el circuito que se muestra en la figura 3.2-4a. Determine la energía alimentada por el elemento C y la energía recibida por el elemento D.

#### Solución

La figura 3.2-4a proporciona un valor para la corriente en el elemento C pero no para el voltaje,  $v$ , a través del elemento C. El voltaje y la corriente del elemento C dados en la figura 3.2-4a se apegan a la convención pasiva, por lo tanto, el producto del voltaje y la corriente es la potencia recibida por el elemento C. La figura 3.2-4a proporciona un valor para el voltaje a través del elemento D, pero no para la corriente,  $i$ , en el elemento D. El voltaje y la corriente del elemento D dados en la figura 3.2-4a no se apegan a la convención pasiva, por lo tanto, el producto del voltaje y la corriente es la potencia *alimentada* por el elemento D.

Necesitamos determinar el voltaje,  $v$ , a través del elemento C y la corriente,  $i$ , en el elemento D. Usaremos las leyes de Kirchhoff para determinar los valores  $v$  e  $i$ . Primero, identificamos y etiquetamos los nodos del circuito como se muestra en la figura 3.2-4b.

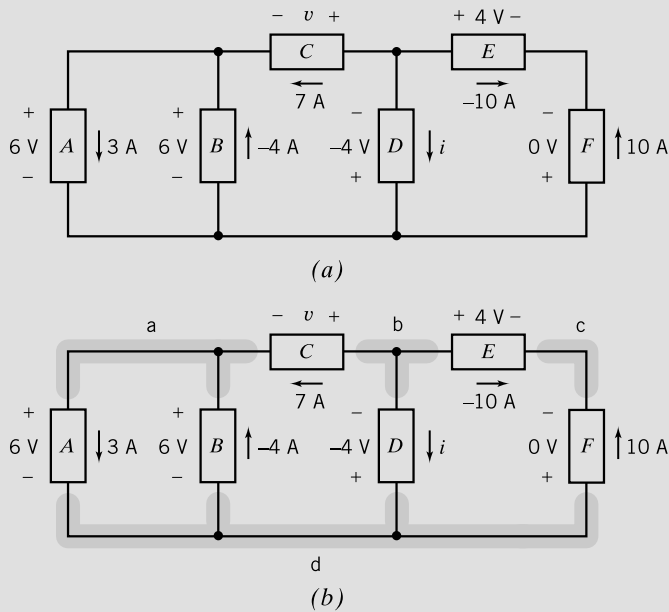


FIGURA 3.2-4 (a) El circuito considerado en el ejemplo 3.2-2, y (b) el circuito trazado de nuevo para destacar los nodos.

Aplice la ley del voltaje de Kirchhoff (KVL) al circuito cerrado que consta de los elementos  $C$ ,  $D$  y  $B$  para obtener

$$-v - (-4) - 6 = 0 \Rightarrow v = -2 \text{ V}$$

El valor de la corriente en el elemento  $C$  en la figura 3.2-4b es 7 A. El voltaje y la corriente del elemento  $C$  dados en la figura 3.2-4b se apegan a la convención pasiva, por lo tanto,

$$p_C = v(7) = (-2)(7) = -14 \text{ W}$$

es la potencia *recibida* por el elemento  $C$ . Por consiguiente, el elemento  $C$  alimenta 14 W.

A continuación, aplique la ley de la corriente de Kirchhoff (KCL) al nodo  $b$  para obtener

$$7 + (-10) + i = 0 \Rightarrow i = 3 \text{ A}$$

El valor del voltaje a través del elemento  $D$  en la figura 3.2-4b es  $-4$  V. El voltaje y la corriente del elemento  $D$  dado en la figura 3.2-4b no se apegan a la convención pasiva, por lo tanto, la energía *alimentada* por el elemento  $D$  es dada por

$$p_D = (-4)i = (-4)(3) = -12 \text{ W}$$

Por consiguiente, el elemento  $D$  recibe 12 W.

### EJEMPLO 3.2-3 Leyes de Ohm y Kirchhoff

Considere el circuito de la figura 3.2-5. Observe que la convención pasiva se utilizó para asignar direcciones de referencia a los voltajes y las corrientes de los resistores. Esto se anticipa al uso de las leyes de Ohm. Encuentre cada corriente y cada voltaje cuando  $R_1 = 8 \Omega$ ,  $v_2 = -10 \text{ V}$ ,  $i_3 = 2 \text{ A}$  y  $R_3 = 1 \Omega$ . Además, determine la resistencia  $R_2$ .

#### Solución

La suma de las corrientes que entran al nodo  $a$  es

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

Utilizando la ley de Ohm para  $R_3$ , encontramos que

$$v_3 = R_3 i_3 = 1(2) = 2 \text{ V}$$

La ley del voltaje de Kirchhoff para el circuito cerrado inferior que incorpora  $v_1$ ,  $v_3$  y la fuente de 10 V es

$$-10 + v_1 + v_3 = 0$$

Por consiguiente,

$$v_1 = 10 - v_3 = 8 \text{ V}$$

La ley de Ohm para el resistor  $R_1$  es

$$v_1 = R_1 i_1$$

o bien

$$i_1 = v_1 / R_1 = 8 / 8 = 1 \text{ A}$$

A continuación, aplique la ley de la corriente de Kirchhoff al nodo a para obtener

$$i_2 = i_1 - i_3 = 1 - 2 = -1 \text{ A}$$

Ahora ya podemos encontrar la resistencia  $R_2$  por

$$v_2 = R_2 i_2$$

o bien

$$R_2 = v_2 / i_2 = -10 / -1 = 10 \Omega$$

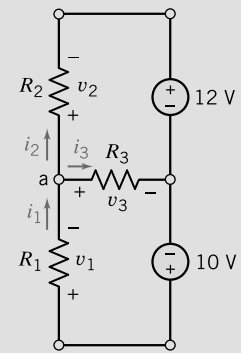


FIGURA 3.2-5 Circuito con dos fuentes de voltaje constante.

### EJEMPLO 3.2-4 Leyes de Ohm y Kirchhoff

### EJEMPLO INTERACTIVO

Determine el valor de la corriente, en amperios, medido por el amperímetro en la figura 3.2-6a.

#### Solución

Un amperímetro ideal es equivalente a un cortocircuito. La corriente medida por el amperímetro es la corriente en el cortocircuito. La figura 3.2-6b muestra el circuito después de reemplazar el amperímetro por el cortocircuito equivalente.

El circuito se ha trazado de nuevo en la figura 3.2-7 para etiquetar los nodos del circuito. El circuito consta de una fuente de voltaje, una fuente de corriente dependiente, dos resistores y dos cortocircuitos. Uno de los cortocircuitos es el elemento predominante de la CCCS y el otro es un modelo del amperímetro.

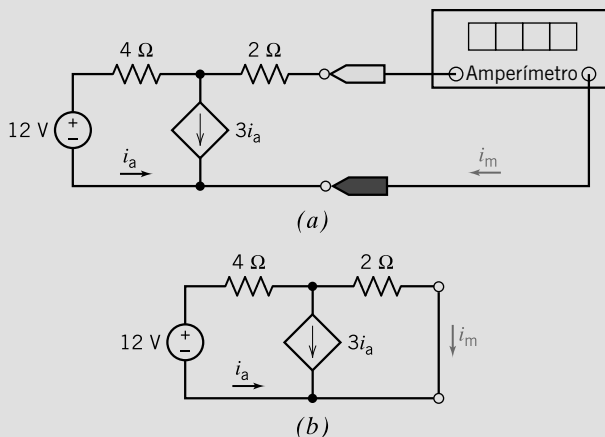


FIGURA 3.2-6 (a) Circuito con fuente dependiente y un amperímetro. (b) El circuito equivalente después de sustituir el amperímetro por un cortocircuito.

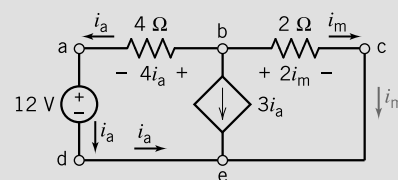


FIGURA 3.2.7 El circuito de la figura 3.2-6 después de etiquetar los nodos y algunas corrientes y voltajes del elemento.

Aplicando dos veces la KCL, una en el nodo d y otra en el nodo a, se muestra que la corriente en la fuente de voltaje y la corriente en el resistor de  $4\ \Omega$  equivalen ambas a  $i_a$ . Estas corrientes están etiquetadas en la figura 3.2-7. Aplicando una vez más la KCL en el nodo c, se muestra que la corriente en el resistor de  $2\ \Omega$  es igual a  $i_m$ . Esta corriente está etiquetada en la figura 3.2-7.

A continuación, la ley de Ohm nos dice que el voltaje a través del resistor de  $4\ \Omega$  es igual a  $4i_a$  y que el voltaje a través del resistor de  $2\ \Omega$  es igual a  $2i_m$ . Ambas tensiones están etiquetadas en la figura 3.2-7.

Aplicando la KCL en el nodo b, da

$$-i_a - 3i_a - i_m = 0$$

Aplicando la KVL a la ruta cerrada a-b-c-e-d-a resulta en

$$0 = -4i_a + 2i_m - 12 = -4\left(-\frac{1}{4}i_m\right) + 2i_m - 12 = 3i_m - 12$$

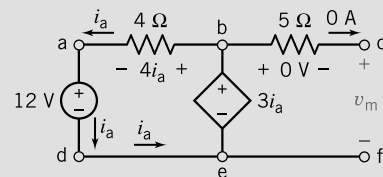
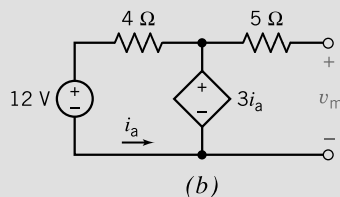
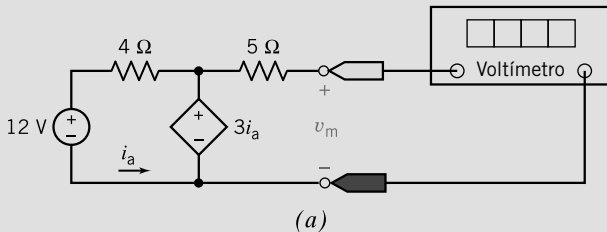
Finalmente, al resolver esta ecuación da por resultado

$$i_m = 4\ \text{A}$$

### EJEMPLO 3.2-5 Leyes de Ohm y Kirchhoff

### EJEMPLO INTERACTIVO

Determine el valor del voltaje, en voltios, medido por el voltímetro en la figura 3.2-8a.



**FIGURA 3.2-8** (a) Un circuito con fuente dependiente y un voltímetro. (b) El circuito equivalente después de reemplazar el voltímetro por un circuito abierto.

**FIGURA 3.2-9** Circuito de la figura 3.2-8b después de etiquetar los nodos y algunas corrientes y voltajes del elemento.

### Solución

Un voltímetro ideal equivale a un circuito abierto. El voltaje medido por el voltímetro es el voltaje a través del circuito abierto. La figura 3.2-8b muestra el circuito después de reemplazar el voltímetro por el circuito abierto equivalente.

En la figura 3.2-9 aparece el circuito vuelto a trazar para etiquetar los nodos del circuito. Este circuito consta de una fuente de voltaje, una fuente de voltaje dependiente, dos resistores, un cortocircuito y un circuito abierto. El cortocircuito es el elemento predominante de la CCVS y el circuito abierto es un modelo del voltímetro.

Aplicando la KCL dos veces, una en el nodo d y otra en el nodo a, se muestra que la corriente en la fuente de voltaje y la corriente en el resistor de  $4\ \Omega$  son iguales a  $i_a$ . Estas corrientes están etiquetadas en la figura 3.2-9. Aplicando la KCL una vez más, en el nodo c, se muestra que la corriente en el resistor de  $5\ \Omega$  es igual a la corriente

en el circuito abierto, es decir, cero. Esta corriente se etiquetó en la figura 3.2-9. La ley de Ohm nos dice que el voltaje a través del resistor de  $5\ \Omega$  también es igual a cero. A continuación, aplicando la KVL a la ruta cerrada b-c-f-e-b resulta  $v_m = 3i_a$ .

Aplicando la KVL a la ruta cerrada a-b-e-d-a resulta

$$-4i_a + 3i_a - 12 = 0$$

por lo que

$$i_a = -12\ \text{A}$$

Finalmente

$$v_m = 3i_a = 3(-12) = -36\ \text{V}$$

**EJERCICIO 3.2-1** Determine los valores de  $i_3$ ,  $i_4$ ,  $i_6$ ,  $v_2$ ,  $v_4$  y  $v_6$  en la figura E 3.2-1.

**Respuesta:**  $i_3 = -3\ \text{A}$ ,  $i_4 = 3\ \text{A}$ ,  $i_6 = 4\ \text{A}$ ,  $v_2 = -3\ \text{V}$ ,  $v_4 = -6\ \text{V}$ ,  $v_6 = 6\ \text{V}$

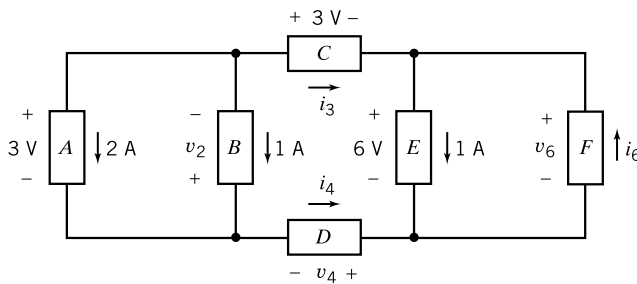


FIGURA E 3.2-1

### 3.3 RESISTORES EN SERIE Y DIVISIÓN DE VOLTAJE

Consideremos ahora un circuito de circuito cerrado único como se muestra en la figura 3.3-1. Anticipándonos al uso de la ley de Ohm, la convención pasiva se ha utilizado para asignar direcciones de referencia a voltajes y corrientes.

Se dice que la conexión de resistores en la figura 3.3-1 es una conexión *en serie* porque todos los elementos transportan la misma corriente. Para identificar un par de elementos en serie, buscamos dos elementos conectados a un nodo único que no tenga otros elementos conectados a sí. Observe, por ejemplo, que los resistores  $R_1$  y  $R_2$  están conectados al nodo b y que ningún otro elemento del circuito lo está. En consecuencia,  $i_1 = i_2$ , de modo que ambos resistores tienen la misma corriente. Un argumento parecido muestra que los resistores  $R_2$  y  $R_3$  también están conectados en serie. Al observar que  $R_2$  está conectado en serie con  $R_1$  y  $R_3$ , decimos que los tres resistores están conectados en serie. El orden de los resistores en serie no es significativo. Por ejemplo, los voltajes y corrientes de los tres resistores en la figura 3.3-1 no se modificarán si intercambiamos las posiciones de  $R_2$  y  $R_3$ .

Al aplicar la KCL en cada nodo del circuito de la figura 3.3-1 obtenemos

$$\text{a: } i_s = i_1$$

$$\text{b: } i_1 = i_2$$

$$\text{c: } i_2 = i_3$$

$$\text{d: } i_3 = i_s$$

En consecuencia,

$$i_s = i_1 = i_2 = i_3$$

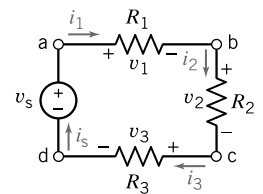


FIGURA 3.3-1

Circuito de circuito cerrado único con una fuente de voltaje  $v_s$ .



Para determinar  $i_1$ , nos valemos de la KVL en torno al circuito cerrado para obtener

$$v_1 + v_2 + v_3 - v_s = 0$$

donde, por ejemplo,  $v_1$  es el voltaje a través del resistor  $R_1$ . Aplicando la ley de Ohm para cada resistor,

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_3 i_3 - v_s = 0 \Rightarrow R_1 i_1 + R_2 i_1 + R_3 i_1 = v_s$$

Despejando  $i_1$  tenemos

$$i_1 = \frac{v_s}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Por lo tanto, el voltaje a través del  $n$ -ésimo resistor  $R_n$  es  $v_n$  y se puede obtener como

$$v_n = i_1 R_n = \frac{v_s R_n}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Por ejemplo, el voltaje a través del resistor  $R_2$  es

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} v_s$$

Por lo tanto, el voltaje a través de la combinación de resistores en serie se divide entre los resistores individuales de una manera predecible. El circuito demuestra el principio de la *división de voltaje*, y al circuito se le denomina *divisor de voltaje*.

En general, podemos representar el principio del divisor de voltaje por la ecuación

$$v_n = \frac{R_n}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} v_s$$

donde  $v_n$  es el voltaje a través del  $n$ -ésimo resistor de resistores  $N$  conectados en serie.

Podemos reemplazar los resistores en serie por un resistor equivalente, el cual se ilustra en la figura 3.3-2. Los resistores  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  en la figura 3.3-2a están reemplazados por un único resistor  $R_s$  equivalente, en la figura 3.3-2b. Se dice que  $R_s$  debe ser equivalente para los resistores en serie  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ , cuando al reemplazarlos por  $R_s$  no se modifica la corriente o el voltaje de ningún elemento del circuito. En este caso sólo hay un elemento en el circuito, que es la fuente de voltaje. Debemos elegir el valor de la resistencia  $R_s$  para que al reemplazar  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  por  $R_s$  no se modifique la corriente de la fuente de voltaje. En la figura 3.3-2a tenemos

$$i_s = \frac{v_s}{R_1 + R_2 + R_3}$$

En la figura 3.3-2b tenemos

$$i_s = \frac{v_s}{R_s}$$

Dado que la corriente de la fuente de voltaje debe ser la misma en ambos circuitos, se requiere que

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3$$

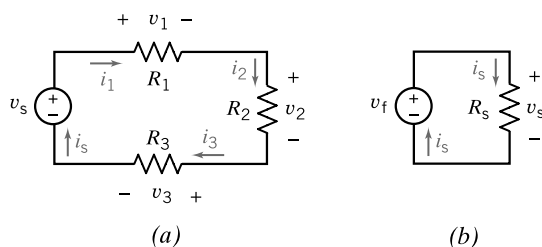


FIGURA 3.3-2

En general, la conexión en serie de  $N$  resistores con resistencias  $R_1, R_2 \dots R_N$  es equivalente al resistor único cuya resistencia es

$$R_s = R_1 + R_2 + \dots + R_N$$

Reemplazar resistores en serie por un resistor equivalente no modifica la corriente de la fuente de voltaje de ningún otro elemento del circuito.

A continuación, calculemos la potencia absorbida por los resistores en serie de la figura 3.3-2a:

$$p = i_s^2 R_1 + i_s^2 R_2 + i_s^2 R_3$$

Con un poco de álgebra resulta

$$p = i_s^2 (R_1 + R_2 + R_3) = i_s^2 R_s$$

lo cual es igual a la potencia absorbida por el resistor equivalente de la figura 3.3-2b. Concluiremos que la potencia absorbida por los resistores en serie es igual a la potencia absorbida por el resistor equivalente.

### EJEMPLO 3.3-1 Divisor de voltaje

Consideremos el circuito que se muestra en la figura 3.3-3 y determine la resistencia  $R_2$  requerida para que el voltaje a través de  $R_s$  sea de  $1/4$  de la fuente de voltaje cuando  $R_1 = 9 \Omega$ . Determine la corriente  $i$  cuando  $v_s = 12 \text{ V}$ .

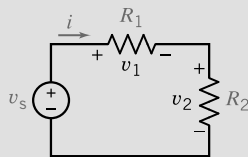


FIGURA 3.3-3 Circuito de divisor de voltaje con  $R_1 = 9 \Omega$ .

#### Solución

El voltaje a través del resistor  $R_2$  será

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s$$

Porque se desea que  $v_2/v_s = 1/4$ , tenemos

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{4}$$

o bien

$$R_1 = 3R_2$$

Dado que  $R_1 = 9 \Omega$ , se requiere que  $R_2 = 3 \Omega$ . Utilizando la KVL en torno al circuito cerrado, tenemos

$$-v_s + v_1 + v_2 = 0$$

o bien

$$v_s = iR_1 + iR_2$$

Por lo tanto,

$$i = \frac{v_s}{R_1 + R_2} = \frac{12}{9 + 3} = 1 \text{ A} \quad (3.3-1)$$

### EJEMPLO 3.3-2 Resistores en serie

Para el circuito de la figura 3.3-4a, encuentre la corriente medida por el amperímetro. Luego muestre que la potencia absorbida por los dos resistores es igual a la alimentada por la fuente.

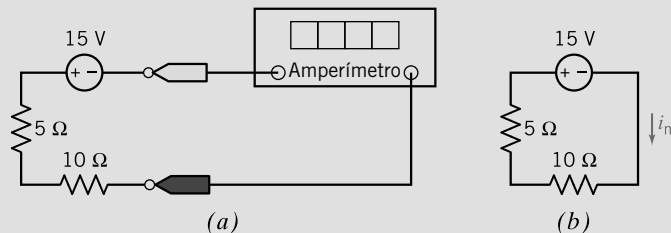


FIGURA 3.3-4 (a) Un circuito con resistores en serie. (b) El circuito, luego de que el amperímetro ideal ha sido reemplazado por el cortocircuito equivalente, y se le ha agregado una etiqueta para indicar la corriente medida por el amperímetro,  $i_m$ .

#### Solución

La figura 3.3-4b muestra el circuito después de que el amperímetro ideal ha sido reemplazado por el cortocircuito equivalente y se le ha agregado una etiqueta para indicar la corriente medida por el amperímetro,  $i_m$ . Aplicando la KVL resulta

$$15 + 5i_m + 10i_m = 0$$

La corriente medida por el amperímetro es

$$i_m = -\frac{15}{5 + 10} = -1 \text{ A}$$

(¿Por qué  $i_m$  es negativa? ¿Por qué no se puede sólo dividir el voltaje de la fuente entre la resistencia equivalente? Recuerde que cuando se utiliza la ley de Ohm, el voltaje y la corriente se deben apegar a la convención pasiva. En este caso, la corriente calculada al dividir el voltaje de la fuente entre la resistencia equivalente no tiene la misma dirección de referencia que  $i_m$ , por lo que se necesita un signo menos.)

La potencia total absorbida por los dos resistores es

$$p_R = 5i_m^2 + 10i_m^2 = 15(1^2) = 15 \text{ W}$$

La potencia alimentada por la fuente es

$$p_s = -v_s i_m = -15(-1) = 15 \text{ W}$$

Por lo tanto, la potencia alimentada por la fuente es igual a la absorbida por la conexión en serie de resistores.

### EJEMPLO 3.3-3 Diseño del divisor de voltaje

La entrada al divisor de voltaje de la figura 3.3-5 es el voltaje,  $v_s$ , de la fuente de voltaje. La salida es *el voltaje*  $v_o$ , medido por el voltímetro. Diseñe el divisor de voltaje; es decir, especifique los valores de las resistencias,  $R_1$  y  $R_2$  para satisfacer las siguientes especificaciones.

**Especificación 1** Los voltajes de entrada y salida están relacionados por  $v_o = 0.8 v_s$ .

**Especificación 2** Se requiere la fuente de voltaje para alimentar no más de 1 mW de potencia cuando la entrada al divisor de voltaje sea  $v_s = 20 \text{ V}$ .

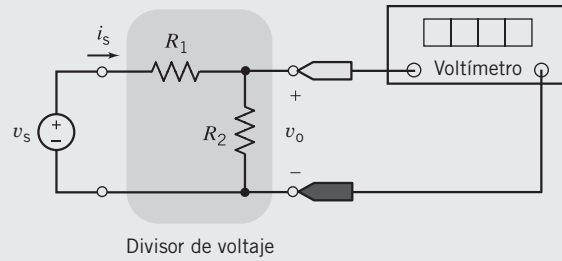


FIGURA 3.3-5 Divisor de voltaje.

**Solución**

Analizaremos cada especificación para ver a qué se refiere respecto de los valores del resistor.

**Especificación 1:** Los voltajes de entrada y salida del divisor de voltaje se relacionan por

$$v_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s$$

Por lo que la especificación 1 requiere

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0.8 \Rightarrow R_2 = 4R_1$$

**Especificación 2:** La potencia alimentada por la fuente de voltaje es resultado de

$$P_s = i_s v_s = \left( \frac{v_s}{R_1 + R_2} \right) v_s = \frac{v_s^2}{R_1 + R_2}$$

Por lo que la especificación 2 requiere

$$0.001 \geq \frac{20^2}{R_1 + R_2} \Rightarrow R_1 + R_2 \geq 400 \times 10^3 = 400 \text{ k}\Omega$$

La combinación de estos resultados da

$$5R_1 \geq 400 \text{ k}\Omega$$

La solución no es única. Una solución es

$$R_1 = 100 \text{ k}\Omega \text{ y } R_2 = 400 \text{ k}\Omega$$

**EJERCICIO 3.3-1** Determine el voltaje medido por el voltímetro en el circuito mostrado en la figura E 3.3-1a.

**Sugerencia:** La figura E 3.3-1b muestra el circuito luego de que el voltímetro ideal ha sido reemplazado por el circuito abierto equivalente y se ha agregado una etiqueta para indicar el voltaje medido por el voltímetro,  $v_m$ .

**Respuesta:**  $v_m = 2 \text{ V}$ .

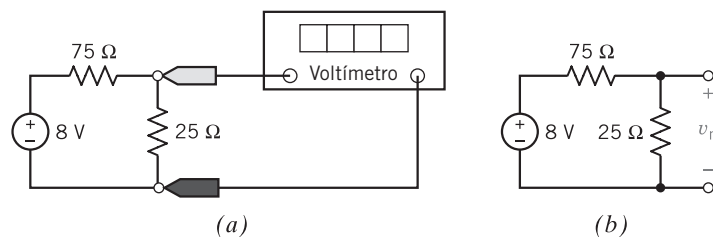
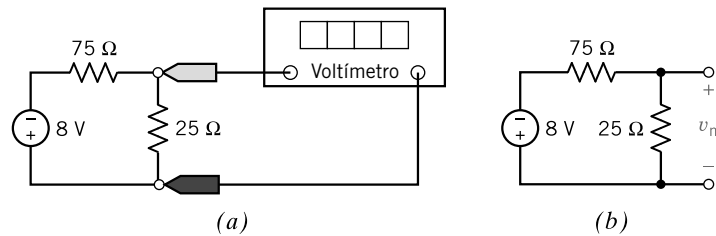


FIGURA E 3.3-1 (a) Divisor de voltaje. (b) El divisor de voltaje después de que el voltímetro ideal ha sido reemplazado por el circuito abierto equivalente y se ha agregado una etiqueta para indicar el voltaje medido por el voltímetro,  $v_m$ .

**EJERCICIO 3.3-2** Determine el voltaje medido por el voltímetro en el circuito que se muestra en la figura E 3.3.2a.



**FIGURA E 3.3-2** (a) Un divisor de voltaje. (b) El divisor de voltaje luego de que el voltímetro ideal ha sido reemplazado por el circuito abierto equivalente y se ha agregado una etiqueta para indicar el voltaje medido por el voltímetro,  $v_m$ .

**Sugerencia:** La figura E 3.3-2b muestra el circuito después de que el voltímetro ideal ha sido reemplazado por el circuito abierto equivalente y se ha agregado una etiqueta para indicar el voltaje medido por el voltímetro,  $v_m$ .

**Respuesta:**  $v_m = -2 \text{ V}$

### 3.4 RESISTORES EN PARALELO Y DIVISIÓN DE LA CORRIENTE

Los elementos de circuito, como los resistores, están conectados en *paralelo* cuando el voltaje a través de cada elemento es idéntico. Los resistores de la figura 3.4-1 están conectados en *paralelo*. Observe, por ejemplo, que los resistores  $R_1$  y  $R_2$  están conectados cada uno al nodo a y al nodo b. En consecuencia,  $v_1 = v_2$ , de modo que ambos resistores tienen el mismo voltaje. Un argumento semejante muestra que los resistores  $R_2$  y  $R_3$  también están conectados en paralelo. Observando que  $R_2$  está conectado en paralelo con los resistores  $R_1$  y  $R_3$ , decimos que estos tres resistores están conectados en paralelo. El orden de los resistores en paralelo no es importante. Por ejemplo, los voltajes y las corrientes de los tres resistores de la figura 3.4-1 no se modificarán si se intercambian las posiciones de los resistores  $R_2$  y  $R_3$ .

La característica determinante de los elementos en paralelo es que tienen el mismo voltaje. Para identificar un par de elementos en paralelo se deben buscar dos elementos entre el mismo par de nodos.

Considere el circuito con dos resistores y una fuente de corriente que se muestra en la figura 3.4-2. Observe que ambos resistores están conectados a las terminales a y b y que el voltaje  $v$  aparece a través de cada elemento en paralelo. Antes de utilizar la ley de Ohm, se aplica la convención pasiva para asignar direcciones de referencia a los voltajes y corrientes de resistores. Podríamos escribir la KCL en el nodo a (o en el b, inclusive) para obtener

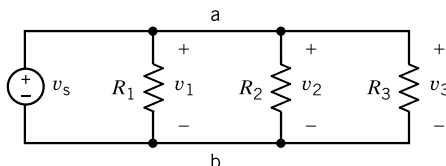
$$i_s - i_1 - i_2 = 0$$

o bien

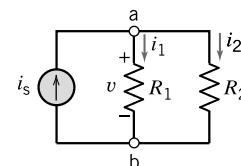
$$i_s = i_1 + i_2$$

Sin embargo, por la ley de Ohm

$$i_1 = \frac{v}{R_1} \quad \text{e} \quad i_2 = \frac{v}{R_2}$$



**FIGURA 3.4-1** Un circuito con resistores en paralelo



**FIGURA 3.4-2** Circuito en paralelo con una fuente de corriente.

Entonces

$$i_s = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} \quad (3.4-1)$$

Recuerde que ya se definió la conductancia  $G$  como la inversa de la resistencia  $R$ . Por lo tanto, podemos escribir la ecuación 3.4-1 como

$$i_s = G_1 v + G_2 v = (G_1 + G_2)v \quad (3.4-2)$$

Por tanto, el circuito equivalente para este circuito en paralelo es una conductancia  $G_p$ , como se muestra en la figura 3.4-3, donde

$$G_p = G_1 + G_2$$

La resistencia equivalente para el circuito de doble resistor se encuentra en

$$G_p = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Dado que  $G_p = 1/R_p$ , tenemos

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

o bien

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.4-3)$$

Observe que la conductancia total,  $G_p$ , se incrementa conforme se agregan los elementos adicionales en paralelo, y que la resistencia total,  $R_p$ , disminuye a cada resistor que se agrega.

El circuito que se muestra en la figura 3.4-2 se denomina circuito *divisor de corriente* porque divide la corriente de la fuente. Observe que

$$i_1 = G_1 v \quad (3.4-4)$$

Además, dado que  $i_s = (G_1 + G_2)v$ , se obtiene para  $v$

$$v = \frac{i_s}{G_1 + G_2} \quad (3.4-5)$$

Al sustituir  $v$  desde la ecuación 3.4-5, obtenemos

$$i_1 = \frac{G_1 i_s}{G_1 + G_2} \quad (3.4-6)$$

$$i_2 = \frac{G_2 i_s}{G_1 + G_2}$$

Del mismo modo,

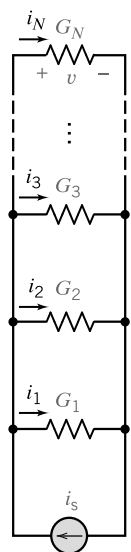
Observe que la manera de utilizar  $G_2 = 1/R_2$  y  $G_1 = 1/R_1$ , para obtener la corriente  $i_2$  en términos de dos resistencias como sigue:

$$i_2 = \frac{R_1 i_s}{R_1 + R_2}$$

La corriente de la fuente se divide entre las conductancias  $G_1$  y  $G_2$  en proporción con sus valores de conductancia.



**FIGURA 3.4-3**  
Circuito equivalente para un circuito en paralelo.



**FIGURA 3.4-4**  
Conjunto de  $N$  conductancias paralelas con una fuente de corriente  $i_s$ .

Consideremos el caso más común de división de corriente con un conjunto de conductores  $N$  en paralelo como se muestra en la figura 3.4-4. La KCL da

$$i_s = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_N \quad (3.4-7)$$

para la cual

$$i_n = G_n v \quad (3.4-8)$$

para que  $n = 1, \dots, N$ . Podemos escribir la ecuación 3.4-7 como

$$i_s = (G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_N)v \quad (3.4-9)$$

Por consiguiente,

$$i_s = v \sum_{n=1}^N G_n \quad (3.4-10)$$

Dado que  $i_n = G_n v$ , podríamos obtener  $v$  por la ecuación 3.4-10 y sustituirla en la ecuación 3.4-8, obteniendo

$$i_n = \frac{G_n i_s}{\sum_{n=1}^N G_n} \quad (3.4-11)$$

Recuerde que el circuito equivalente, figura 3.4-12, tiene una conductancia equivalente  $G_p$ , casi como

$$G_p = \sum_{n=1}^N G_n \quad (3.4-12)$$

Por consiguiente,

$$i_n = \frac{G_n i_s}{G_p} \quad (3.4-13)$$

la cual es la ecuación básica para las conductancias del divisor de corriente con  $N$  conductancias. Desde luego, la ecuación 3.4-12 se puede reescribir como

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{R_n} \quad (3.4-14)$$

### EJEMPLO 3.4-1 Resistores en paralelo

Para el circuito en la figura 3.4-5, encuentre (a) la corriente en cada extensión, (b) el circuito equivalente y (c) el voltaje  $v$ . Los resistores son

$$R_1 = \frac{1}{2} \Omega, \quad R_2 = \frac{1}{4} \Omega, \quad R_3 = \frac{1}{8} \Omega$$

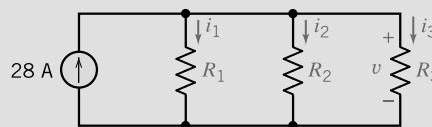
#### Solución

El divisor de corriente sigue la ecuación

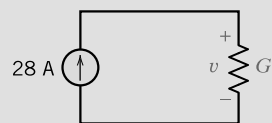
$$i_n = \frac{G_n i_s}{G_p}$$

por lo que es sensato encontrar el circuito equivalente, como se muestra en la figura 3.4-6, con su conductancia equivalente  $G_p$ . Tenemos

$$G_p = \sum_{n=1}^N G_n = G_1 + G_2 + G_3 = 2 + 4 + 8 = 14 \text{ S}$$



**FIGURA 3.4-5** Circuito en paralelo para el ejemplo 3.3-2.



**FIGURA 3.4-6** Circuito equivalente para el circuito en paralelo de la figura 3.4-5.

Recuerde que las unidades para la conductancia son siemens (S). Entonces

$$i_1 = \frac{G_1 i_s}{G_p} = \frac{2}{14}(28) = 4 \text{ A}$$

Del mismo modo,

$$i_2 = \frac{G_2 i_s}{G_p} = \frac{4(28)}{14} = 8 \text{ A}$$

y

$$i_3 = \frac{G_3 i_s}{G_p} = 16 \text{ A}$$

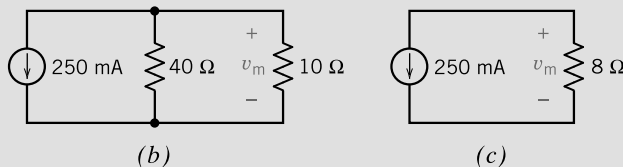
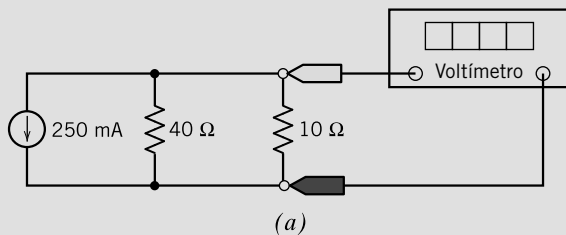
Dado que  $i_n = G_n v$ , tenemos

$$v = \frac{i_1}{G_1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ V}$$

### EJEMPLO 3.4-2 Resistores en paralelo

### EJEMPLO INTERACTIVO

Para el circuito de la figura 3.4-7a, encuentre el voltaje medido por el voltímetro. Luego muestre que la potencia absorbida por los dos resistores es igual a la alimentada por la fuente.



**FIGURA 3.4-7** (a) Un circuito que contiene resistores en paralelo. (b) El circuito después de que el voltímetro ideal ha sido reemplazado por el circuito abierto equivalente y se ha agregado una etiqueta para indicar el voltaje medido por el voltímetro,  $v_m$ . (c) El circuito después de que los resistores en paralelo han sido reemplazados por una resistencia equivalente.

### Solución

La figura 3.4-7b muestra el circuito después de que el voltímetro ideal ha sido reemplazado por el circuito abierto equivalente, y se ha agregado una etiqueta para indicar el voltaje medido por el voltímetro,  $v_m$ . Los dos resistores están conectados en paralelo y pueden ser sustituidos por un resistor equivalente único. La resistencia de este resistor equivalente se calcula como

$$\frac{40 \cdot 10}{40 + 10} = 8 \Omega$$

La figura 3.4-7c muestra el circuito luego que los resistores en paralelo han sido reemplazados por el resistor equivalente. La corriente en el resistor equivalente es de 250 mA, en dirección ascendente. Esta corriente y el voltaje  $v_m$  no se apegan a la convención pasiva. La corriente en la resistencia equivalente se puede expresar como  $-250 \text{ mA}$ ,



con dirección descendente. Esta corriente y el voltaje  $v_m$  se apegan a la convención pasiva. De la ley de Ohm surge

$$v_m = 8(-0.25) = -2 \text{ V}$$

El voltaje  $v_m$  en la figura 3.4-7b es igual al voltaje  $v_m$  en la figura 3.4-7c. Esto es consecuencia de la equivalencia del resistor de  $8 \Omega$  para la combinación en paralelo de los resistores de  $40\text{-}\Omega$  y  $10\text{-}\Omega$ . Si vemos la figura 3.4-7b observaremos que la potencia absorbida por los resistores es

$$p_R = \frac{v_m^2}{40} + \frac{v_m^2}{10} = \frac{2^2}{40} + \frac{2^2}{10} = 0.1 + 0.4 = 0.5 \text{ W}$$

El voltaje  $v_m$  y la corriente de la fuente de corriente se apegan a la convención pasiva, por lo que

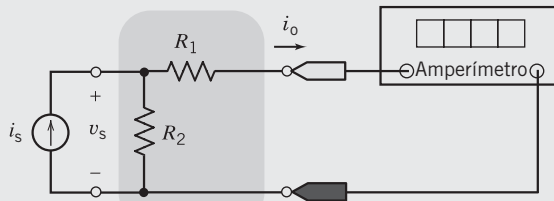
$$p_s = v_m(0.25) = (-2)(0.25) = -0.5 \text{ W}$$

es la potencia recibida por la fuente de corriente. La fuente de corriente alimenta  $0.5 \text{ W}$ .

Entonces, la potencia absorbida por los dos resistores es igual a la alimentada por la fuente.

### EJEMPLO 3.4-3 Diseño del divisor de corriente

La entrada a la corriente del divisor de corriente en la figura 3.4-8 es la corriente,  $i_s$ , de la fuente de corriente. La salida es la corriente,  $i_o$ , medida por el amperímetro. Especifique los valores de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  para satisfacer las dos siguientes especificaciones:



Divisor de corriente

FIGURA 3.4-8 Circuito de divisor de corriente.

**Especificación 1:** Las corrientes de entrada y salida se relacionan por  $i_o = 0.8 i_s$ .

**Especificación 2:** La fuente de corriente se requiere para alimentar no más de  $10 \text{ mW}$  de potencia cuando la entrada al divisor de corriente es  $i_s = 2 \text{ mA}$ .

### Solución

Analicemos cada especificación para ver a qué se refiere respecto de los valores del resistor.

**Especificación 1:** Las corrientes de entrada y salida del divisor de corriente se relacionan por

$$i_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_s$$

Por lo que la especificación 1 requiere

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0.8 \Rightarrow R_2 = 4R_1$$

**Especificación 2:** La potencia alimentada por la fuente de corriente resulta de

$$p_s = i_s v_s = i_s \left( i_s \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) \right) = i_s^2 \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

Por lo que la especificación 2 requiere

$$0.01 \geq (0.002)^2 \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) \Rightarrow \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \leq 2\,500$$

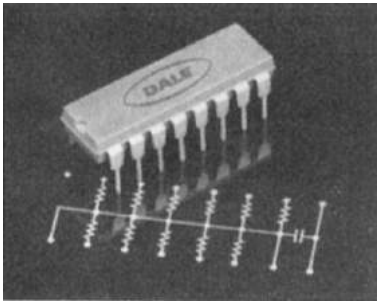
La combinación de estos resultados es

$$\frac{R_1(4R_2)}{R_1 + 4R_2} \leq 2\,500 \Rightarrow \frac{4}{5}R_1 \leq 2\,500 \Rightarrow R_1 \leq 3\,125\ \Omega$$

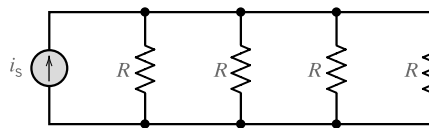
La solución no es la única. Una solución es

$$R_1 = 3\ \text{k}\Omega \quad \text{y} \quad R_2 = 12\ \text{k}\Omega$$

**EJERCICIO 3.4-1** En la figura E 3.4-1a se muestra una red de resistores que consta de resistores paralelos en un paquete utilizado para circuitos impresos de tableros electrónicos. Este paquete mide sólo  $2 \times 0.7\ \text{cm}$ , y cada resistor es de  $1\ \text{k}\Omega$ . El circuito está conectado para utilizar cuatro resistores, como se muestra en la figura E 3.4-1b. Encuentre el circuito equivalente para esta red. Determine la corriente en cada resistor cuando  $i_s = 1\ \text{mA}$ .



(a)



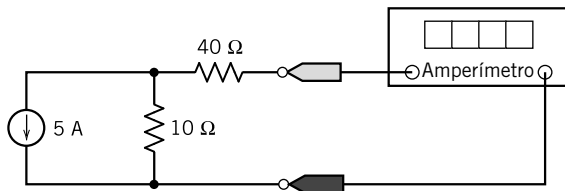
(b)

FIGURA E 3.4-1

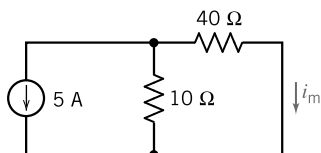
(a) Red de resistores en paralelo. Cortesía de Dale Electronics. (b) El circuito conectado utiliza cuatro resistores cuando  $R = 1\ \text{k}\Omega$ .

**Respuesta:**  $R_p = 250\ \Omega$

**EJERCICIO 3.4-2** Determine la corriente medida por el amperímetro en el circuito que se muestra en la figura E 3.4-2a.



(a)



(b)

FIGURA E 3.4-2 (a) Divisor de corriente. (b) El divisor de corriente después de que el amperímetro ideal ha sido reemplazado por el cortocircuito equivalente y se ha agregado una etiqueta para indicar la corriente medida por el amperímetro,  $i_m$ .

**Sugerencia:** La figura E 3.4-2b muestra el circuito después de que el amperímetro ideal ha sido reemplazado por el cortocircuito equivalente, y se ha agregado una etiqueta para indicar la corriente medida por el amperímetro,  $i_m$ .

**Respuesta:**  $i_m = -1 \text{ A}$

### 3.5 FUENTES DE VOLTAJE EN SERIE Y FUENTES DE CORRIENTE EN PARALELO

Las fuentes de voltaje conectadas en serie equivalen a una fuente de voltaje única. El voltaje de la fuente de voltaje equivalente es igual a la suma algebraica de los voltajes de las fuentes de voltaje en serie.

Considere el circuito mostrado en la figura 3.5-1a. Observe que las corrientes de ambas fuentes de voltaje son iguales. En consecuencia, defina que la corriente,  $i_s$ , sea

$$i_s = i_a = i_b \quad (3.5-1)$$

A continuación, defina que el voltaje,  $v_s$ , sea

$$v_s = v_a + v_b \quad (3.5-2)$$

Con las leyes KCL, KVL y de Ohm, podemos representar el circuito de la figura 3.5-1a por las ecuaciones

$$i_c = \frac{v_1}{R_1} + i_s \quad (3.5-3)$$

$$i_s = \frac{v_2}{R_2} + i_3 \quad (3.5-4)$$

$$v_c = v_1 \quad (3.5-5)$$

$$v_1 = v_s + v_2 \quad (3.5-6)$$

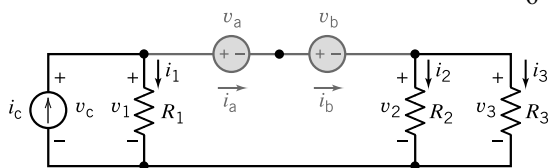
$$v_2 = i_3 R_3 \quad (3.5-7)$$

donde  $i_s = i_a = i_b$  y  $v_s = v_a + v_b$ . Estas mismas ecuaciones son el resultado de la aplicación de las leyes KCL, KVL y de Ohm al circuito de la figura 3.5-1b. Si  $i_s = i_a = i_b$  y  $v_s = v_a + v_b$ , entonces los circuitos que se muestran en las figuras 3.5-1a y 3.5-1b son equivalentes porque ambos están representados por las mismas ecuaciones.

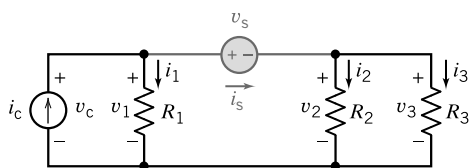
Por ejemplo, suponga que  $i_c = 4 \text{ A}$ ,  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 6 \Omega$ ,  $R_3 = 3 \Omega$ ,  $v_a = 1 \text{ V}$  y  $v_b = 3 \text{ V}$ . Las ecuaciones que describen el circuito de la figura 3.5-1a son

$$4 = \frac{v_1}{2} + i_s \quad (3.5-8)$$

$$i_s = \frac{v_2}{6} + i_3 \quad (3.5-9)$$



(a)



(b)

FIGURA 3.5-1 (a) Circuito con fuentes de voltaje conectadas en serie y (b) circuito equivalente.

**Tabla 3.5-1 Fuentes de voltaje y corriente en paralelo y en serie**

CIRCUITO	CIRCUITO EQUIVALENTE	CIRCUITO	CIRCUITO EQUIVALENTE
	No permitido		No permitido

$$v_c = v_1 \tag{3.5-10}$$

$$v_1 = 4 + v_2 \tag{3.5-11}$$

$$v_2 = 3i_3 \tag{3.5-12}$$

La solución para este conjunto de ecuaciones es  $v_1 = 6 \text{ V}$ ,  $i_s = 1 \text{ A}$ ,  $i_3 = 0.66 \text{ A}$ ,  $v_2 = 2 \text{ V}$  y  $v_c = 6 \text{ V}$ . Las ecuaciones 3.5-8 a 3.5-12 también describen el circuito de la figura 3.5-1b. Por lo tanto,  $v_1 = 6 \text{ V}$ ,  $i_s = 1 \text{ A}$ ,  $i_3 = 0.66 \text{ A}$ ,  $v_2 = 2 \text{ V}$  y  $v_c = 6 \text{ V}$  en ambos circuitos. Al reemplazar las fuentes de voltaje en serie por una única, la fuente de voltaje equivalente no modifica el voltaje o la corriente de otros elementos del circuito.

La figura 3.5-2a muestra un circuito con fuentes de corriente en paralelo. El circuito de la figura 3.5-2b se obtiene reemplazando estas fuentes de corriente en paralelo por una fuente de corriente equivalente única. La corriente de la fuente de corriente equivalente es igual a la suma algebraica de las corrientes de las fuentes de corriente en paralelo.

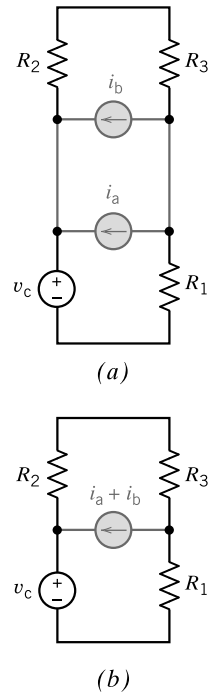
No nos está permitido conectar fuentes de corriente independientes en serie. Los elementos en serie tienen la misma corriente. Esta restricción evita que las fuentes de corriente en serie se tornen independientes. Del mismo modo, tampoco se nos permite conectar fuentes de voltaje independientes en paralelo.

La tabla 3.5-1 resume las conexiones en paralelo y en serie de las fuentes de corriente y de voltaje.

### 3.6 ANÁLISIS DE CIRCUITOS

En esta sección consideramos el análisis de un circuito mediante el reemplazo de un conjunto de resistores con una resistencia equivalente, con lo que se reduce la red para tener así una forma más fácil de analizar.

Considere el circuito que se muestra en la figura 3.6-1. Observe que incluye un conjunto de resistores que está en serie y otro que está en paralelo. Como lo que se pretende es encontrar el voltaje de salida  $v_o$ , habrá que reducir el circuito al circuito equivalente que se muestra en la figura 3.6-2.



**FIGURA 3.5-2**  
(a) Circuito con fuentes de corriente en paralelo y (b) circuito equivalente.

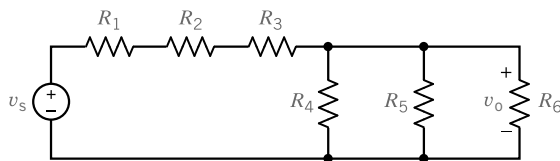


FIGURA 3.6-1 Circuito con un conjunto de resistores en serie y otro de resistores en paralelo.

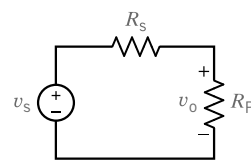


FIGURA 3.6-2 Circuito equivalente para el circuito de la figura 3.6-1.

Observamos que la resistencia equivalente en serie es

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3$$

y que la resistencia equivalente en paralelo es

$$R_p = \frac{1}{G_p}$$

donde

$$G_p = G_4 + G_5 + G_6$$

Entonces, utilizando el principio del divisor de voltaje, con la figura 3.6-2, tenemos

$$v_o = \frac{R_p}{R_s + R_p} v_s$$

Reemplazar los resistores en serie por el resistor equivalente  $R_s$  no modifica la corriente o el voltaje de ningún otro elemento del circuito. En particular, el voltaje  $v_o$  no cambia. Además, el voltaje  $v_o$  a través del resistor equivalente  $R_p$  es igual al voltaje que pasa por cada uno de los resistores en paralelo. En consecuencia, el voltaje  $v_o$  de la figura 3.6-2 es igual al voltaje  $v_o$  de la figura 3.6-1. Podemos analizar el circuito sencillo de la figura 3.6-2 para encontrar el valor del voltaje  $v_o$  y saber que el voltaje  $v_o$  en el circuito más complejo de la figura 3.6-1 tiene el mismo valor.

### EJEMPLO 3.6-1 Resistores en serie y en paralelo

Considere el circuito mostrado en la figura 3.6-3. Encuentre la corriente  $i_1$  cuando

$$R_4 = 2 \Omega \quad \text{y} \quad R_2 = R_3 = 8 \Omega$$

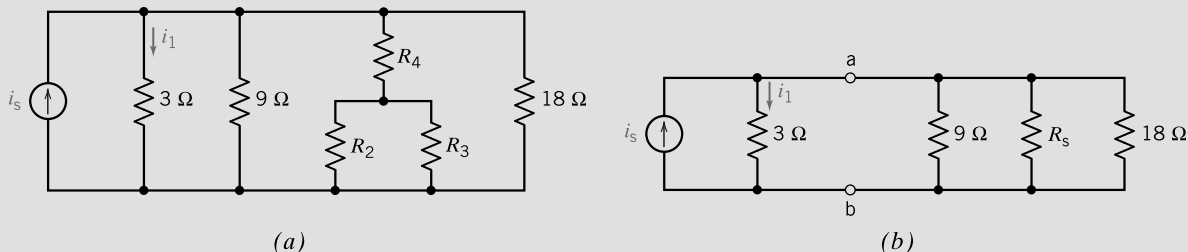


FIGURA 3.6-3 (a) Circuito para el ejemplo 3.6-1. (b) Circuito reducido parcialmente para el ejemplo 3.6-1.

### Solución

Como el objetivo es encontrar  $i_1$ , intentaremos reducir el circuito de manera que el resistor de  $3\text{-}\Omega$  esté en paralelo con un resistor y la fuente de corriente  $i_s$ . Luego podemos aplicar el principio del divisor de corriente para obtener  $i_1$ . Puesto que  $R_2$  y  $R_3$  están en paralelo, encontramos una resistencia equivalente como

$$R_{p1} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 4 \Omega$$

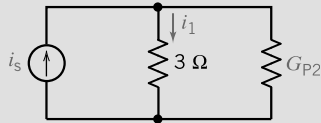


FIGURA 3.6-4 Circuito equivalente para la figura 3.6-3.

Este resistor equivalente está conectado en serie con  $R_4$ . Al agregar  $R_{p1}$  a  $R_4$ , tenemos un resistor equivalente en serie

$$R_s = R_4 + R_{p1} = 2 + 4 = 6 \Omega$$

Ahora el resistor  $R_s$  está en paralelo con los tres resistores como se muestra en la figura 3.6-3b. Sin embargo, el objetivo es obtener el circuito equivalente que se muestra en la figura 3.6-4 para que podamos encontrar  $i_1$ . Por consiguiente, combinamos el resistor de  $9 \Omega$ , el de  $18\text{-}\Omega$  y el  $R_s$  que aparece a la derecha de las terminales a-b en la figura 3.6-3b en una conductancia equivalente en paralelo,  $G_{p2}$ . Entonces, encontramos

$$G_{p2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{R_s} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \text{ S} \Rightarrow R_{p2} = \frac{1}{G_{p2}} = 3 \Omega$$

Luego, aplicando el principio del divisor de corriente,

$$i_1 = \frac{G_1 i_s}{G_p}$$

$$G_p = G_1 + G_{p2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

donde

Por consiguiente,

$$i_1 = \frac{1/3}{2/3} i_s = \frac{1}{2} i_s$$

### EJEMPLO 3.6-2 Resistencia equivalente

El circuito de la figura 3.6-5a contiene un ohmímetro. Éste es un instrumento que mide en ohmios la resistencia. El ohmímetro medirá la resistencia equivalente del circuito de resistores conectado a sus terminales. Determine la resistencia medida por el ohmímetro en la figura 3.6-5a.

#### Solución

Funcionando de izquierda a derecha, el resistor de  $30\text{-}\Omega$  está en paralelo con el resistor de  $60\text{-}\Omega$ . La resistencia equivalente es

$$\frac{60 \cdot 30}{60 + 30} = 20 \Omega$$

En la figura 3.6-5b, la combinación en paralelo de los resistores de  $30\text{-}\Omega$  y de  $60 \Omega$  ha sido reemplazada por el resistor de  $20\text{-}\Omega$ . Ahora los dos resistores de  $20\text{-}\Omega$  están en serie.

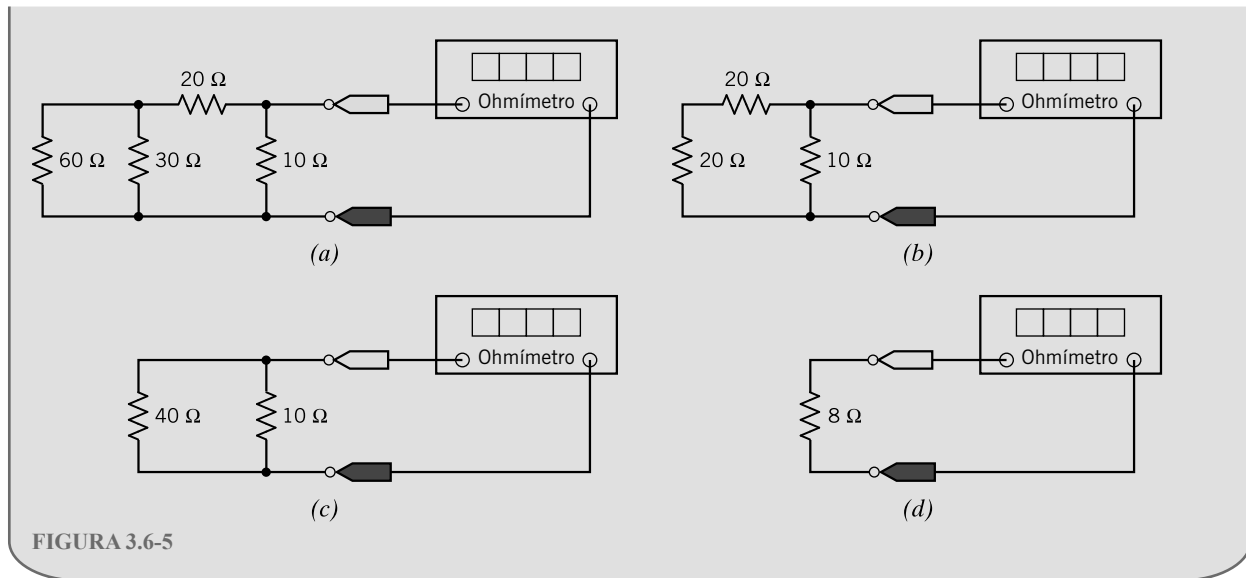
La resistencia equivalente es

$$20 + 20 = 40 \Omega$$

En la figura 3.6-5c, la combinación en serie de los dos resistores de  $20\text{-}\Omega$  ha sido reemplazada por el resistor equivalente de  $40\text{-}\Omega$ . Ahora, el resistor de  $40\text{-}\Omega$  está en paralelo con el resistor de  $10\text{-}\Omega$ . La resistencia equivalente es

$$\frac{40 \cdot 10}{40 + 10} = 8 \Omega$$

En la figura 3.6-5d la combinación en paralelo de los resistores de  $40\text{-}\Omega$  y  $20\text{-}\Omega$  ha sido reemplazada por el resistor equivalente de  $8\text{-}\Omega$ . Por consiguiente, el ohmímetro mide una resistencia igual a  $8 \Omega$ .



### EJEMPLO 3.6.3 Análisis de circuitos utilizando resistencias equivalentes

Determine los valores de  $i_3$ ,  $v_4$ ,  $i_5$  y  $v_6$  en el circuito que se muestra en la figura 3.6-6.

#### Solución

El circuito de la figura 3.6-7 se obtuvo a partir del circuito que se muestra en la figura 3.6-6 al reemplazar las combinaciones en serie y en paralelo de las resistencias por resistencias equivalentes. Podemos utilizar el circuito equivalente para resolver este problema en tres pasos:

1. Determine los valores de las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  de la figura 3.6-7 que conforman el circuito de la figura 3.6-7 equivalente al circuito de la figura 3.6-6.

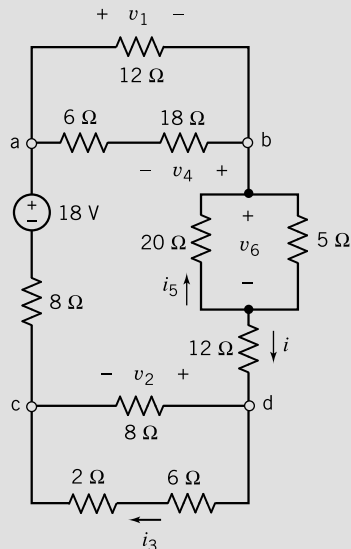


FIGURA 3.6-6 El circuito considerado en el ejemplo 3.6-3.

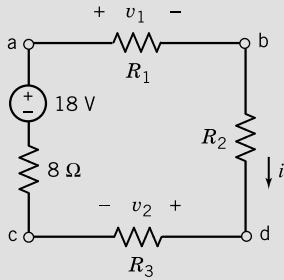


FIGURA 3.6-7 Circuito equivalente para el circuito de la figura 3.3-6.

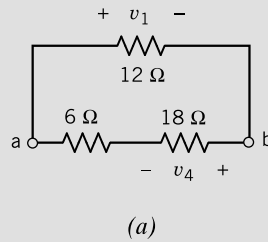
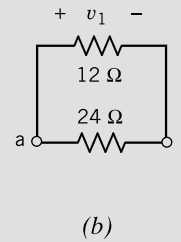
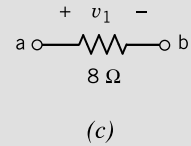


FIGURA 3.6-8



(b)



(c)

- Determine los valores de  $v_1$ ,  $v_2$  e  $i$  en la figura 3.6-7.
- Como los circuitos son equivalentes, los valores de  $v_1$ ,  $v_2$  e  $i$  de la figura 3.6-6 son iguales a los valores de  $v_1$ ,  $v_2$  e  $i$  de la figura 3.6-7. Utilice la división de voltaje y de corriente para determinar los valores de  $i_3$ ,  $v_4$ ,  $i_5$  y  $v_6$  de la figura 3.6-6.

**Paso 1:** La figura 3.6-8a muestra los tres resistores en la parte alta del circuito de la figura 3.6-6. Vemos que el resistor de  $6\text{-}\Omega$  está conectado en serie con el resistor de  $18\text{-}\Omega$ . En la figura 3.6-8b, estos resistores en serie han sido reemplazados por el resistor equivalente de  $24\text{-}\Omega$ . Ahora el resistor de  $24\text{-}\Omega$  está conectado en paralelo con el resistor de  $12\text{-}\Omega$ . Reemplazar los resistores en serie por una resistencia equivalente no modifica el voltaje o la corriente en ningún otro elemento del circuito. En particular,  $v_1$ , el voltaje a través del resistor de  $12\text{-}\Omega$ , no cambia cuando los resistores en serie son reemplazados por el resistor equivalente. Por el contrario,  $v_4$  no es un voltaje del elemento del circuito mostrado en la figura 3.6-8b.

En la figura 3.6-8c, los resistores en paralelo han sido reemplazados por el resistor equivalente de  $8\text{-}\Omega$ . El voltaje a través del resistor equivalente es igual al voltaje a través de cada uno de los resistores en paralelo,  $v_1$  en este caso. En resumen, la resistencia  $R_1$  de la figura 3.6-7 resulta de

$$R_1 = 12 \parallel (6 + 18) = 8 \Omega$$

Del mismo modo, las resistencias  $R_2$  y  $R_3$  de la figura 3.6-7 resultan de

$$R_2 = 12 + (20 \parallel 5) = 16 \Omega$$

$$R_3 = 8 \parallel (2 + 6) = 4 \Omega$$

**Paso 2:** Aplique la KVL al circuito de la figura 3.6-7 para obtener

$$R_1 i + R_2 i + R_3 i + 8i - 18 = 0 \Rightarrow i = \frac{18}{R_1 + R_2 + R_3 + 8} = \frac{18}{8 + 16 + 4 + 8} = 0.5 \text{ A}$$

A continuación la ley de Ohm proporciona

$$v_1 = R_1 i = 8(0.5) = 4 \text{ V} \quad \text{y} \quad v_2 = R_3 i = 4(0.5) = 2 \text{ V}$$

**Paso 3:** Los valores de  $v_1$ ,  $v_2$  e  $i$  de la figura 3.6-6 son iguales a los valores de  $v_1$ ,  $v_2$  e  $i$  de la figura 3.6-7. Si volvemos la atención a la figura 3.6-6 y vemos con más detenimiento las direcciones de referencia, podemos determinar los valores de  $i_3$ ,  $v_4$ ,  $i_5$  y  $v_6$  mediante la división de voltajes, la división de la corriente y la ley de Ohm:

$$i_3 = \frac{8}{8 + (2 + 6)} i = \frac{1}{2} (0.5) = 0.25 \text{ A}$$

$$v_4 = -\frac{18}{6 + 18} v_1 = -\frac{3}{4} (4) = -3 \text{ V}$$

$$i_5 = -\frac{5}{20 + 5} i = -\left(\frac{1}{5}\right) (0.5) = -0.1 \text{ A}$$

$$v_6 = (20 \parallel 5) i = 4(0.5) = 2 \text{ V}$$



En general, podemos encontrar la resistencia equivalente para una parte de un circuito que sólo conste de resistores y luego reemplazar esa parte del circuito con la resistencia equivalente. Por ejemplo, considere el circuito que se muestra en la figura 3.6-9. El circuito resistivo en (a) es equivalente al resistor de  $56\ \Omega$  único en (b). Indiquemos ahora la resistencia equivalente como  $R_{eq}$ . Decimos que  $R_{eq}$  es “la resistencia equivalente que aparece dentro del circuito de la figura 3.6-9(a) a partir de las terminales  $a$ - $b$ ”. La figura 3.6-9(c) muestra una notación que se usa para indicar la resistencia equivalente. La resistencia equivalente es un concepto importante que se presenta en diversas situaciones y tiene varios nombres. “Resistencia de entrada”, “resistencia de salida”, “resistencia de Thevenin”, y “resistencia de Norton”, son algunos de los nombres con que se conoce la resistencia equivalente.

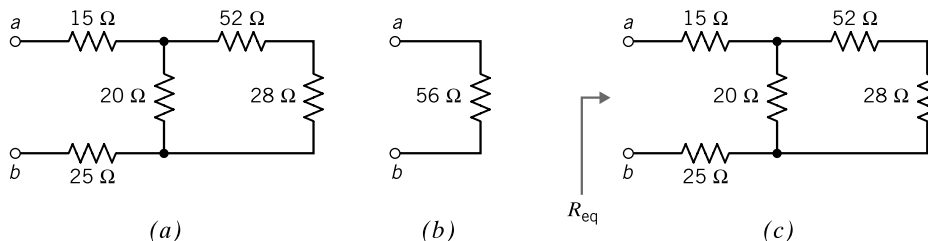


FIGURA 3.6-9 El circuito resistivo en (a) es equivalente al resistor único de (b). La notación utilizada para indicar la resistencia equivalente se muestra en (c).

**EJERCICIO 3.6-1** Determine la resistencia medida por el ohmímetro en la figura E 3.6-1.

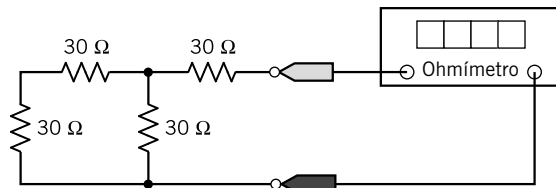


FIGURA E 3.6-1

**Respuesta:** 
$$\frac{(30 + 30) \cdot 30}{(30 + 30) + 30} + 30 = 50\ \Omega$$

### 3.7 ANÁLISIS DE CIRCUITOS RESISTIVOS UTILIZANDO MATLAB

Podemos analizar circuitos sencillos mediante la escritura y despeje de un conjunto de ecuaciones. Empleamos la ley de Kirchhoff y las ecuaciones de elementos, por ejemplo, la ley de Ohm, para escribir estas ecuaciones. Como ilustra el ejemplo siguiente, MATLAB proporciona una manera más cómoda de despejar las ecuaciones que describen un circuito eléctrico.

#### EJEMPLO 3.7-1 MATLAB para circuitos sencillos

Determine los valores de los voltajes y corrientes de los resistores para el circuito mostrado en la figura 3.7-1.

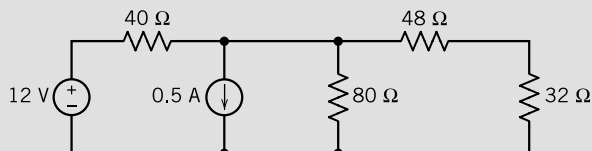


FIGURA 3.7-1 Circuito considerado en el ejemplo 3.7-1.

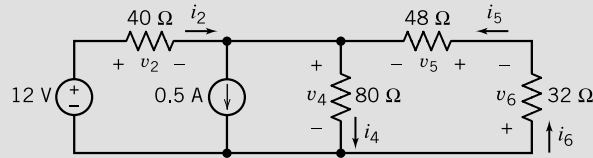


FIGURA 3.7-2 El circuito de la figura 3.7-1 después del etiquetado de los voltajes y las corrientes.

## Solución

Etiquetemos, entonces, los voltajes y corrientes de los resistores. Antes de utilizar la ley de Ohm, etiquetaremos el voltaje y la corriente de cada resistor para que se apeguen a la convención pasiva. (Seleccione una de las variables, ya sea la corriente o el voltaje del resistor, y etiquete la dirección de referencia como desee. Etiquete la dirección de referencia de la otra variable para que se apegue a la convención pasiva con la primera variable.) La figura 3.7-2 muestra el circuito etiquetado.

A continuación, aplicaremos las leyes de Kirchhoff. Primero aplicamos la KCL al nodo al cual están conectados la fuente de corriente y los resistores de 40-Ω, 48-Ω y 80-Ω entre sí, para escribir

$$i_2 + i_5 = 0.5 + i_4 \quad (3.7-1)$$

Luego aplicamos la KCL al nodo en el que los resistores de 48-Ω y 32-Ω están conectados entre sí para escribir

$$i_5 = i_6 \quad (3.7-2)$$

Aplicamos la KVL al circuito cerrado que consta de la fuente de voltaje y los resistores de 40-Ω y 80-Ω para escribir

$$12 = v_2 + v_4 \quad (3.7-3)$$

Aplicamos la KVL al circuito cerrado que consta de los resistores de 48-Ω, 32-Ω, y 80-Ω para escribir

$$v_4 + v_5 + v_6 = 0 \quad (3.7-4)$$

Aplicamos la ley de Ohm a los resistores.

$$v_2 = 40 i_2, v_4 = 80 i_4, v_5 = 48 i_5, v_6 = 32 i_6 \quad (3.7-5)$$

Podemos utilizar las ecuaciones de la ley de Ohm para eliminar las variables que representen a los voltajes del resistor. Hacerlo nos permite reescribir la ecuación 3.7-3 como

$$12 = 40 i_2 + 80 i_4 \quad (3.7-6)$$

Del mismo modo, podemos reescribir la ecuación 3.7-4 como

$$80 i_4 + 48 i_5 + 32 i_6 = 0 \quad (3.7-7)$$

A continuación, usamos la ecuación 3.7-2 para eliminar  $i_6$  de la ecuación 3.7-6 como sigue

$$80 i_4 + 48 i_5 + 32 i_5 = 0 \Rightarrow 80 i_4 + 80 i_5 = 0 \Rightarrow i_4 = -i_5 \quad (3.7-8)$$

Usamos la ecuación 3.7-8 para eliminar  $i_5$  de la ecuación 3.7-1.

$$i_2 - i_4 = 0.5 + i_4 \Rightarrow i_2 = 0.5 + 2 i_4 \quad (3.7-9)$$

Usamos la ecuación 3.7-9 para eliminar  $i_4$  de la ecuación 3.7-6. Despejamos la ecuación resultante para determinar el valor de  $i_2$ .

$$12 = 40 i_2 + 80 \left( \frac{i_2 - 0.5}{2} \right) = 80 i_2 - 20 \Rightarrow i_2 = \frac{12 + 20}{80} = 0.4 \text{ A} \quad (3.7-10)$$

Ya estamos listos para calcular los valores del resto de los voltajes y corrientes de los resistores como sigue

$$i_4 = \frac{i_2 - 0.5}{2} = \frac{0.4 - 0.5}{2} = -0.05 \text{ A},$$

$$i_6 = i_5 = -i_4 = 0.05 \text{ A},$$

$$v_2 = 40 i_2 = 40(0.4) = 1.6 \text{ V},$$

$$v_4 = 80 i_4 = 80(-0.05) = -4 \text{ V},$$

$$v_5 = 48 i_5 = 48(0.05) = 2.4 \text{ V}$$

y

$$v_6 = 32 i_6 = 32(0.05) = 1.6 \text{ V}.$$

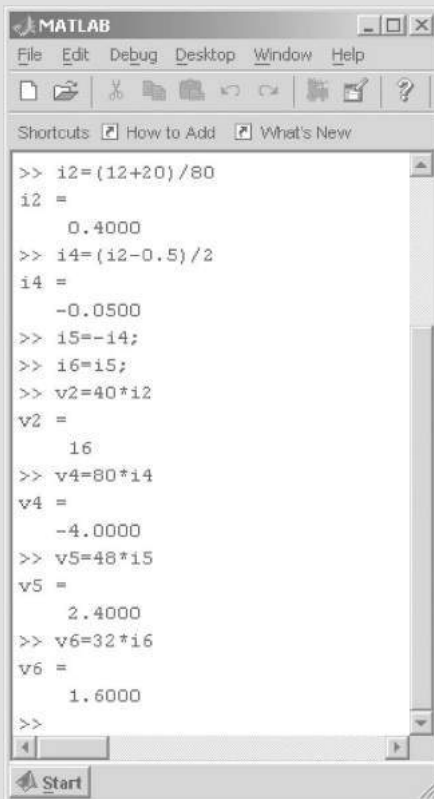
### Solución 1 con MATLAB

El álgebra anterior muestra que este circuito se puede representar por estas ecuaciones:

$$12 = 80 i_2 - 20, i_4 = \frac{i_2 - 0.5}{2}, i_6 = i_5 = -i_4, v_2 = 40 i_2, v_4 = 80 i_4,$$

$$v_5 = 48 i_5, \text{ y } v_6 = 32 i_6$$

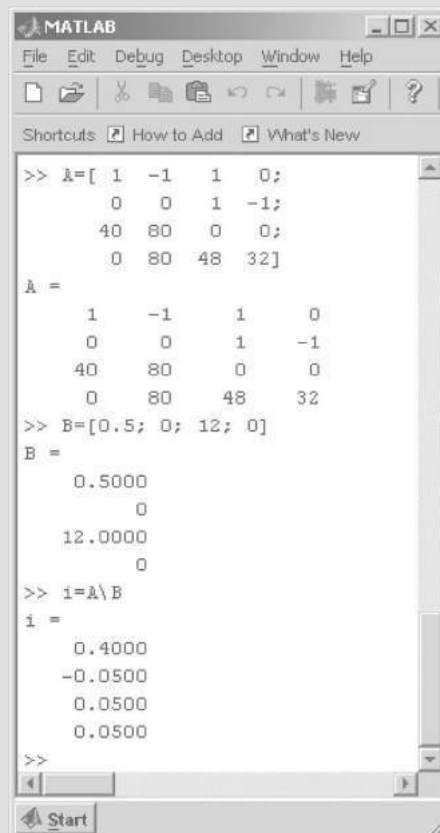
Estas ecuaciones se pueden despejar de manera consecutiva utilizando MATLAB como muestra la figura 3.7-3.



```

MATLAB
File Edit Debug Desktop Window Help
Shortcuts How to Add What's New
>> i2=(12+20)/80
i2 =
    0.4000
>> i4=(i2-0.5)/2
i4 =
   -0.0500
>> i5=-i4;
>> i6=i5;
>> v2=40*i2
v2 =
    16
>> v4=80*i4
v4 =
   -4.0000
>> v5=48*i5
v5 =
    2.4000
>> v6=32*i6
v6 =
    1.6000
>>
  
```

FIGURA 3.7-3 Ecuaciones consecutivas.



```

MATLAB
File Edit Debug Desktop Window Help
Shortcuts How to Add What's New
>> A=[ 1 -1 1 0;
      0 0 1 -1;
      40 80 0 0;
      0 80 48 32]
A =
    1   -1    1    0
    0    0    1   -1
   40   80    0    0
    0   80   48   32
>> B=[0.5; 0; 12; 0]
B =
    0.5000
     0
   12.0000
     0
>> i=A\B
i =
    0.4000
   -0.0500
    0.0500
    0.0500
>>
  
```

FIGURA 3.7-4 Ecuaciones simultáneas.

**Solución 2 con MATLAB**

Podemos pasar por alto algo de álgebra si nos inclinamos a despejar las ecuaciones simultáneas.

Después de aplicar las leyes de Kirchhoff y luego de utilizar las ecuaciones de la ley de Ohm para eliminar las variables que representan los voltajes de los resistores, tenemos las ecuaciones 3.7-1, 2, 6 y 7:

$$i_2 + i_5 = 0.5 + i_4, \quad i_5 = i_6, \quad 12 = 40 i_2 + 80 i_4$$

y

$$80 i_4 + 48 i_5 + 32 i_6 = 0$$

Este conjunto de cuatro ecuaciones simultáneas en  $i_2, i_4, i_5$  e  $i_6$  se puede escribir como una ecuación de matriz única.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 40 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 48 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.7-11)$$

Podemos escribir esta ecuación como

$$Ai = B \quad (3.7-12)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 40 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 48 & 32 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} i_2 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta ecuación de matriz se puede despejar utilizando MATLAB como se muestra en la figura 3.7-4. Después de introducir las matrices A y B, la expresión

$$i = A/B$$

indica a MATLAB que calcule  $i$  despejando la ecuación 3.7-12.

Un circuito con  $n$  elementos tiene  $n$  corrientes y  $n$  voltajes. Un conjunto de ecuaciones que representen ese circuito podría tener incógnitas de hasta  $2n$  enésimas. Podemos reducir la cantidad de incógnitas si etiquetamos con gran cuidado las corrientes y los voltajes. Por ejemplo, suponga que dos de los elementos del circuito están conectados en serie. Elegimos las direcciones de referencia para las corrientes en esos elementos de modo que sean iguales y utilicen una variable para representar ambas corrientes. La tabla 3.7-1 presenta algunos lineamientos que nos ayudarán a reducir el número de incógnitas en el conjunto de ecuaciones que describen un circuito dado.

**Tabla 3.7-1 Lineamientos para el etiquetado de variables de circuito**

CARACTERÍSTICA DEL CIRCUITO	LINEAMIENTO
Resistores	Etiquete el voltaje y la corriente de cada resistor para que se apeguen a la convención pasiva. Use la ley de Ohm para eliminar la variable ya sea de la corriente o el voltaje.
Elementos en serie	Etiquete las direcciones de referencia para elementos en serie de modo que sus corrientes sean iguales. Utilice una variable para representar las corrientes de los elementos en serie.
Elementos en paralelo	Etiquete las direcciones de referencia para elementos en paralelo de modo que sus voltajes sean iguales. Utilice una variable para representar las corrientes de los elementos en paralelo.
Voltímetro ideal	Reemplace cada voltímetro (ideal) por un circuito abierto. Etiquete el voltaje a través del circuito abierto para que sea igual al voltaje del voltímetro.
Amperímetro ideal	Reemplace cada amperímetro (ideal) por un cortocircuito. Etiquete la corriente en el cortocircuito para que sea igual a la corriente del amperímetro.

### 3.8 ¿CÓMO LO PODEMOS COMPROBAR...?

A los ingenieros se les suele solicitar comprobar que la solución de un problema sea la correcta. Por ejemplo, las soluciones propuestas para problemas de diseño se deben comprobar para confirmar que se ha cumplido con todas las especificaciones. Además, se deben revisar los resultados de la computadora para protegerse contra errores de captura de datos, así como las exigencias de los comerciantes, las cuales se deben analizar a fondo.

También a los estudiantes de ingeniería se les pide que verifiquen la exactitud de sus trabajos. Por ejemplo, tomarse un breve lapso antes de terminar un examen permitiría dar una vista rápida e identificar esas soluciones que podrían requerir un poco más de aplicación.

El ejemplo siguiente ilustra técnicas útiles para comprobar las soluciones a los diversos problemas analizados en este capítulo.

#### EJEMPLO 3.8-1 ¿Cómo podemos comprobar los valores del voltaje y la corriente?

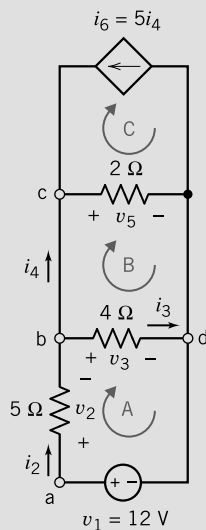
El circuito que se muestra en la figura 3.8-1a se analizó escribiendo y despejando un conjunto de ecuaciones simultáneas:

$$12 = v_2 + 4i_3, i_4 = \frac{v_2}{5} + i_3, v_5 = 4i_3 \text{ y } \frac{v_5}{2} = i_4 + 5i_4$$

Para resolver las ecuaciones que se muestran en la figura 3.8-1b se empleó la computadora Mathcad (*Mathcad User's Guide*, 1991). Se determinó que

$$v_2 = -60 \text{ V}, i_3 = 18 \text{ A}, i_4 = 6 \text{ A y } v_5 = 72 \text{ V}.$$

¿Cómo podemos comprobar que estas corrientes y voltajes son correctos?



(a)

$$v_2 := 0 \quad i_3 := 0 \quad i_4 := 0 \quad v_5 := 0$$

Given

$$12 \approx v_2 + 4 \cdot i_3 \quad \text{Apply KVL to loop A.}$$

$$i_4 \approx \frac{v_2}{5} + i_3 \quad \text{Apply KCL at node b.}$$

$$v_5 \approx 4 \cdot i_3 \quad \text{Apply KVL to loop B.}$$

$$\frac{v_5}{2} \approx i_4 + 5 \cdot i_4 \quad \text{Apply KCL at node c.}$$

$$\text{Find } (v_2, i_3, i_4, v_5) = \begin{bmatrix} -60 \\ 18 \\ 6 \\ 72 \end{bmatrix}$$

(b)

FIGURA 3.8-1 (a) Circuito de ejemplo y (b) análisis por computadora utilizando Mathcad.

## Solución

La corriente  $i_2$  se puede calcular desde  $v_2$ ,  $i_3$ ,  $i_4$  y  $v_5$  en un par de maneras distintas. Primero, la ley de Ohm da

$$i_2 = \frac{v_2}{5} = \frac{-60}{5} = -12 \text{ A}$$

A continuación, aplicando la KCL en el nodo b resulta

$$i_2 = i_3 + i_4 = 18 + 6 = 24 \text{ A}$$

Desde luego,  $i_2$  no puede ser ni de  $-12$  ni de  $24$  A, por lo que los valores calculados para  $v_2$ ,  $i_3$ ,  $i_4$  y  $v_5$  no pueden ser correctos. Al verificar las ecuaciones que se usaron para calcular  $v_2$ ,  $i_3$ ,  $i_4$  y  $v_5$ , encontramos un error de signo en la ecuación de la KCL correspondiente al nodo b. Esta ecuación debería ser

$$i_4 = \frac{v_2}{5} - i_3$$

Luego de haber hecho esta corrección, se calcula que  $v_2$ ,  $i_3$ ,  $i_4$  y  $v_5$  sean

$$v_2 = 7.5 \text{ V}, i_3 = 1.125 \text{ A}, i_4 = 0.375 \text{ A}, v_5 = 4.5 \text{ V}$$

Ahora

$$i_2 = \frac{v_2}{5} = \frac{7.5}{5} = 1.5 \text{ A}$$

y

$$i_2 = i_3 + i_4 = 1.125 + 0.375 = 1.5 \text{ A}$$

Como se esperaba, esto ya concuerda.

Como una comprobación adicional, considere  $v_3$ . Primero, la ley de Ohm da

$$v_3 = 4i_3 = 4(1.125) = 4.5 \text{ V}$$

A continuación, aplicando la KVL al circuito cerrado que consta de la fuente de voltaje y los resistores de  $4\text{-}\Omega$  y  $5\text{-}\Omega$ , nos da

$$v_3 = 12 - v_2 = 12 - 7.5 = 4.5 \text{ V}$$

Finalmente, aplicando la KVL al circuito cerrado que consta de los resistores de  $2\text{-}\Omega$  y  $4\text{-}\Omega$ , resulta

$$v_3 = v_5 = 4.5 \text{ V}$$

Los resultados de estos cálculos concuerdan entre sí, lo que indica que

$$v_2 = 7.5 \text{ V}, i_3 = 1.125 \text{ A}, i_4 = 0.375 \text{ A}, v_5 = 4.5 \text{ V}$$

son los valores correctos.

### 3.9 EJEMPLO DE DISEÑO

#### FUENTE DE VOLTAJE AJUSTABLE

Se requiere que un circuito proporcione un voltaje ajustable. Las especificaciones para este circuito son que:

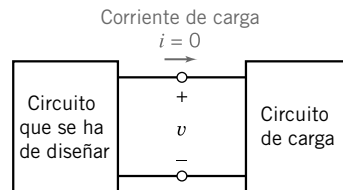
1. El voltaje debe poderse ajustar a cualquier valor entre  $-5\text{ V}$  y  $+5\text{ V}$ . No deberá haber posibilidad de que se obtenga de manera accidental un voltaje fuera de ese margen.
2. La corriente de carga debe ser insignificante.
3. El circuito debe utilizar la menor potencia posible.

Los componentes disponibles son:

1. Potenciómetros: hay en existencia valores de resistencia de  $10\ \Omega$ ,  $20\ \Omega$  y  $50\ \Omega$ .
2. Un gran surtido de resistores estándar de 2% con valores entre  $10\ \Omega$  y  $1\ \Omega$  (vea apéndice D).
3. Dos alimentadores de potencia (fuentes de voltaje): uno de  $12\text{ V}$  y otro de  $-12\text{ V}$ , ambos clasificados a  $100\text{ mA}$  (máximo).

#### Describe la situación y los supuestos

La figura 3.9-1 muestra la situación. El voltaje  $v$  es el voltaje ajustable. Al circuito que utiliza la salida del circuito que se va a diseñar se le llama a veces la carga. En este caso, la corriente de carga no es significativa: por lo tanto,  $i = 0$ .



**FIGURA 3.9.1** El circuito que se va a diseñar proporciona un voltaje ajustable,  $v$ , a la carga del circuito.

#### Establezca el objetivo

Un circuito que proporciona el voltaje ajustable

$$-5\text{V} \leq v \leq +5\text{V}$$

se debe diseñar utilizando los componentes disponibles.

#### Genere un plan

Haga las siguientes observaciones:

1. La adaptabilidad de un potenciómetro se puede utilizar para obtener un voltaje  $v$  ajustable.
2. Se deben utilizar los dos alimentadores de energía de modo que el voltaje ajustable pueda contar con los dos valores, positivo y negativo.
3. Las terminales del potenciómetro no se deben conectar directamente a los suministros de energía porque no se permite que el voltaje  $v$  sea tanto de  $12\text{ V}$  o de  $-12\text{ V}$ .

Estas observaciones nos recuerdan el circuito que se muestra en la figura 3.9-2a. El circuito de la figura 3.9-2b se obtiene utilizando el modelo más sencillo para cada componente de la figura 3.9-2a.

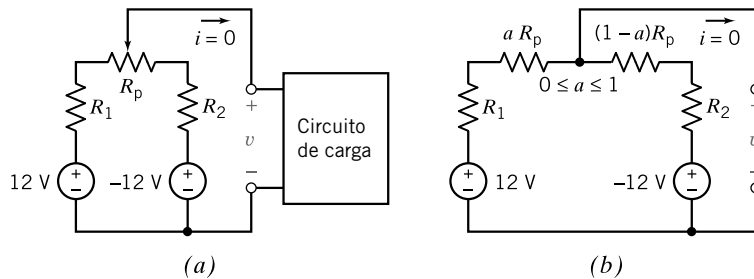


FIGURA 3.9-2 (a) Propuesta de un circuito para producir el voltaje variable,  $v$ , y (b) el circuito equivalente después de que el potenciómetro ha sido modelado.

Para completar el diseño se necesitan especificar los valores de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_p$ . Después, se requiere que cada resultado se compruebe y se le hagan los ajustes que fueren necesarios.

1. ¿El voltaje  $v$  se puede ajustar a cualquier valor en el rango de  $-5\text{ V}$  a  $+5\text{ V}$ ?
2. ¿Las corrientes de la fuente de voltaje son menores de  $100\text{ mA}$ ? Se debe satisfacer esta condición si se han de modelar los alimentadores de potencia como fuentes de voltaje ideales.
3. ¿Se puede reducir la potencia absorbida por  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_p$ ?

### Actúe sobre el plan

Pareciera que  $R_1$  y  $R_2$  tuvieran el mismo valor, por lo que  $R_1 = R_2 = R_p$ . Entonces es conveniente hacer un nuevo dibujo de la figura 3.9-2b como se muestra en la figura 3.9-3.

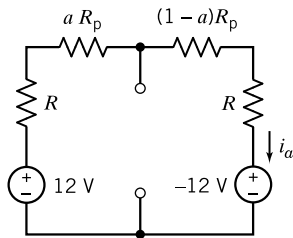


FIGURA 3.9-3 El circuito, después de haber establecido  $R_1 = R_2 = R$ .

Aplicar la KVL al circuito cerrado exterior da como resultado

$$-12 + Ri_a + aR_p i_a + (1 - a)R_p i_a + Ri_a - 12 = 0$$

por lo que

$$i_a = \frac{24}{2R + R_p}$$

A continuación, aplicando la KVL al circuito cerrado de la izquierda resulta

$$v = 12 - (R + aR_p)i_a$$

Sustituyendo  $i_a$  nos da

$$v = 12 - \frac{24(R + aR_p)}{2R + R_p}$$



Cuando  $a = 0$ ,  $v$  debe ser 5 V, por lo tanto,

$$5 = 12 - \frac{24R}{2R + R_p}$$

Despejando  $R$  resulta

$$R = 0.7R_p$$

Suponga que la resistencia del potenciómetro se ha seleccionado como  $R_p = 20 \text{ k}\Omega$ , el valor intermedio de los tres valores disponibles.

Entonces,

$$R = 14 \text{ k}\Omega$$

### Verifique la solución propuesta

A guisa de comprobación, observe que cuando  $a = 1$ ,

$$v = 12 - \left( \frac{14,000 + 20,000}{28,000 + 20,000} \right) 24 = -5$$

Como se requería. La especificación de que

$$-5 \text{ V} \leq v \leq 5 \text{ V}$$

se ha satisfecho. La potencia absorbida por las tres resistencias es

$$p = i_a^2(2R + R_p) = \frac{24^2}{2R + R_p}$$

por lo tanto,

$$p = 12 \text{ mW}$$

Observe que esta potencia se puede reducir si se elige que  $R_p$  sea lo más grande posible,  $50 \Omega$  en este caso. Cambiar  $R_p$  a  $50 \Omega$  requiere un nuevo valor de  $R$ :

$$R = 0.7 \times R_p = 35 \text{ k}\Omega$$

Porque

$$-5 \text{ V} = 12 - \left( \frac{35\,000 + 50\,000}{70\,000 + 50\,000} \right) 24 \leq v \leq 12 - \left( \frac{35\,000}{70\,000 + 50\,000} \right) 24 = 5 \text{ V}$$

la especificación de que

$$-5 \text{ V} \leq v \leq 5 \text{ V}$$

se ha satisfecho. Ahora la potencia absorbida por las tres resistencias es

$$p = \frac{24^2}{50\,000 + 70\,000} = 5 \text{ mW}$$

Finalmente, la corriente del suministro de energía es

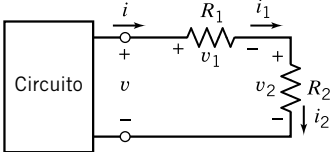
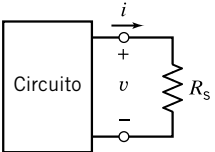
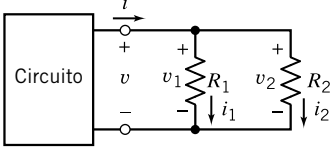
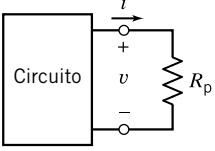
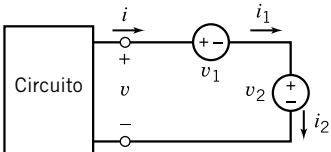
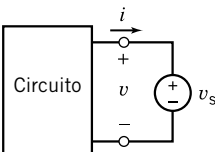
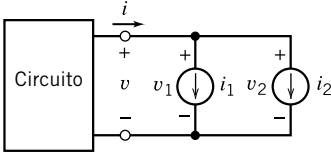
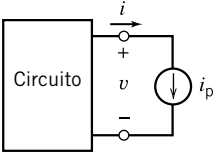
$$i_a = \frac{24}{50\,000 + 70\,000} = 0.2 \text{ mA}$$

la cual está bien por debajo de los 100 mA que las fuentes de voltaje son capaces de alimentar. El diseño está completo.

### 3.10 RESUMEN

- La ley de la corriente de Kirchhoff (KCL) establece que la suma algebraica de las corrientes que entran en un nodo es cero. La ley del voltaje de Kirchhoff (KVL) establece que la suma algebraica de los voltajes en torno a un circuito cerrado (*loop*) es cero.
- Se pueden analizar circuitos eléctricos sencillos utilizando solamente las leyes de Kirchhoff y las ecuaciones constitutivas de los elementos del circuito.
- Los resistores en serie actúan como un “divisor de voltaje”, los resistores en paralelo funcionan como un “divisor de corriente”. Las primeras dos hileras de la tabla 3.10-1 resumen estas ecuaciones tan importantes.
- Los resistores en serie equivalen a un “resistor equivalente” único. Del mismo modo, los resistores en paralelo equivalen a un “resistor equivalente” único. Las dos primeras hileras de la tabla 3.10-1 resumen tan importantes ecuaciones.
- Las fuentes de voltaje en serie equivalen a una “fuente de voltaje equivalente” única. Del mismo modo, las fuentes de corriente en paralelo equivalen a una “corriente equivalente” única. Las dos últimas hileras de la tabla 3.10-1 resumen tan importantes ecuaciones.
- En ocasiones, los circuitos que constan por completo de resistores se pueden reducir a un resistor equivalente único al reemplazar de manera repetida los resistores en serie o en paralelo por resistores equivalentes.

Tabla 3.10-1 Circuitos equivalentes para elementos en serie y en paralelo

Resistores en serie		
	$i = i_1 = i_2, v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v \quad \text{y} \quad v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v$	$R_s = R_1 + R_2 \quad \text{y} \quad v = R_s i$
Resistores en paralelo		
	$v = v_1 = v_2, i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i \quad \text{e} \quad i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$	$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{y} \quad v = R_p i$
Fuentes de voltaje en serie		
	$i = i_1 = i_2 \quad \text{y} \quad v = v_1 + v_2$	$v_s = v_1 + v_2$
Fuentes de corriente en paralelo		
	$v = v_1 = v_2 \quad \text{e} \quad i = i_1 + i_2$	$i_p = i_1 + i_2$

## PROBLEMAS

## Sección 3.2 Leyes de Kirchoff

**P 3.2-1** Considere el circuito que se muestra en la figura 3.2-1. Determine los valores de la potencia alimentada por la extensión  $B$  y la potencia alimentada por la extensión  $F$ .

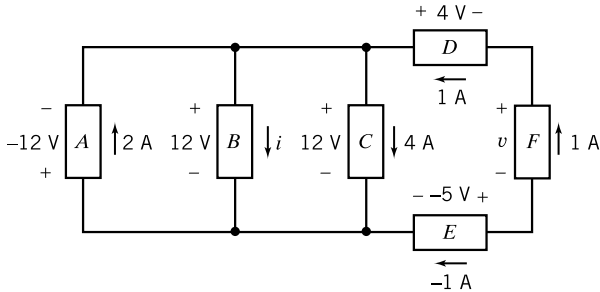


Figura P 3.2-1

**P 3.2-2** Determine los valores de  $i_2$ ,  $i_4$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  y  $v_6$  en la figura P 3.3-2.

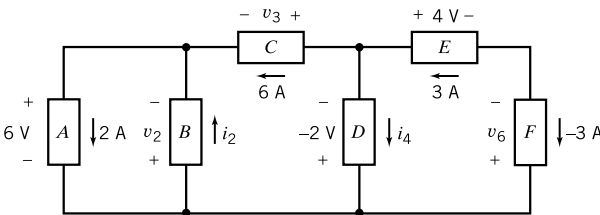


Figura P 3.2-2

**P 3.2-3** Considere el circuito que se muestra en la figura P 3.2-3.

- Suponga que  $R_1 = 8 \Omega$  y  $R_2 = 4 \Omega$ . Encuentre la corriente  $i$  y el voltaje  $v$ .
- Suponga, en cambio, que  $i = 2.25 \text{ A}$  y  $v = 42 \text{ V}$ . Determine las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ .
- Suponga, en cambio, que la fuente de voltaje alimenta  $24 \text{ W}$  de potencia y que la fuente de corriente alimenta  $9 \text{ W}$  de potencia. Determine la corriente  $i$ , el voltaje  $v$  y las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ .

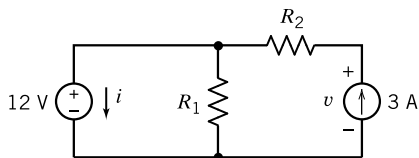


Figura P 3.2-3

**P 3.2-4** Determine la potencia absorbida por cada resistor en el circuito que se muestra en la figura P 3.2-4.

**Respuesta:** El resistor de  $4\text{-}\Omega$  absorbe  $100 \text{ W}$ , el de  $6\text{-}\Omega$  absorbe  $24 \text{ W}$  y el de  $8\text{-}\Omega$  absorbe  $72 \text{ W}$ .

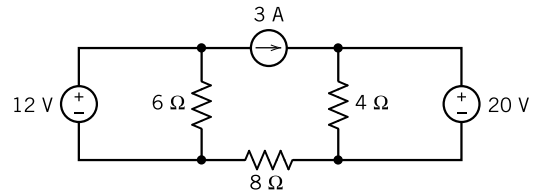


Figura P 3.2-4

**P 3.2-5** Determine la potencia absorbida por cada resistor en el circuito que se muestra en la figura P 3.2-5.

**Respuesta:** El resistor de  $4 \Omega$  absorbe  $16 \text{ W}$ , el de  $6 \Omega$  absorbe  $24 \text{ W}$  y el de  $8 \Omega$  absorbe  $8 \text{ W}$ .

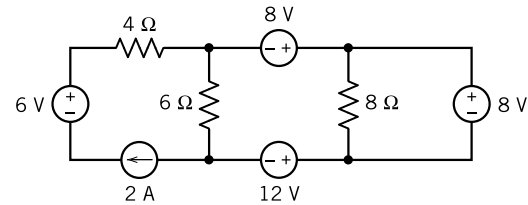


Figura P 3.2-5

**P 3.2-6** Determine la potencia alimentada por cada fuente de corriente en el circuito de la figura P 3.2-6.

**Respuesta:** La fuente de corriente de  $2\text{-mA}$  alimenta  $6 \text{ mW}$  y la fuente de corriente de  $1\text{-mA}$  alimenta  $-7 \text{ mW}$ .

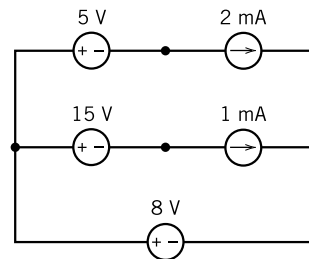


Figura P 3.2-6

**P 3.2-7** Determine la potencia alimentada por cada fuente de voltaje en el circuito de la figura P 3.2-7.

**Respuesta:** La fuente de voltaje de  $2 \text{ V}$  alimenta  $2 \text{ mW}$  y la fuente de voltaje de  $3\text{-V}$  alimenta  $-6 \text{ mW}$ .

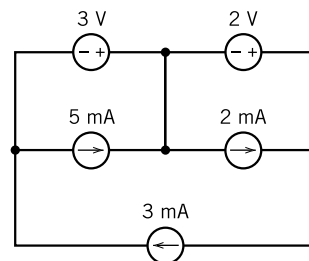


Figura P 3.2-7

**P 3.2-8** ¿Cuál es el valor de la resistencia  $R$  en la figura P 3.2-8?

**Sugerencia:** Suponga un amperímetro ideal, pues equivale a un cortocircuito.

**Respuesta:**  $R = 4 \Omega$

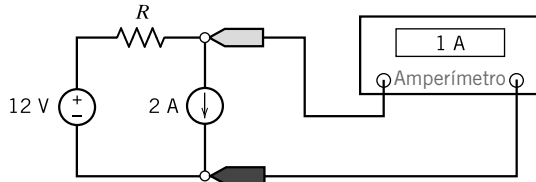


Figura P 3.2-8

**P 3.2-9** El voltímetro de la figura P 3.2-9 mide el valor del voltaje a través de la fuente de corriente a 56 V. ¿Cuál es el valor de la resistencia  $R$ ?

**Sugerencia:** Suponga un voltímetro ideal, el cual es equivalente a un circuito abierto.

**Respuesta:**  $R = 10 \Omega$

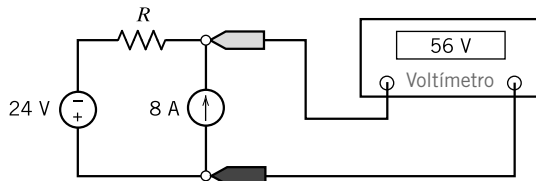


Figura P 3.2-9

**P 3.2-10** Determine los valores de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  en la figura P 3.2-10.

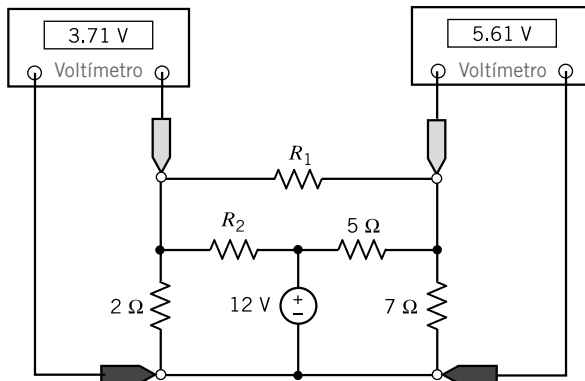


Figura P 3.2-10

**P 3.2-11** El circuito que se muestra en la figura P 3.2-11 consta de cinco fuentes de voltaje y cuatro fuentes de corriente. Exprese la potencia alimentada por cada fuente en términos de los voltajes de las fuentes de voltaje y de las corrientes de las fuentes de corriente.

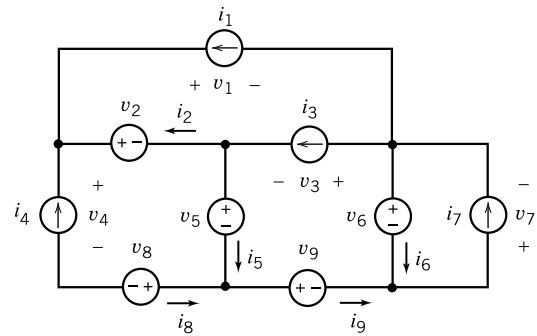


Figura P 3.2-11

**P 3.2-12** Determine la potencia recibida por cada resistor en el circuito mostrado en la figura P 3.2-12.

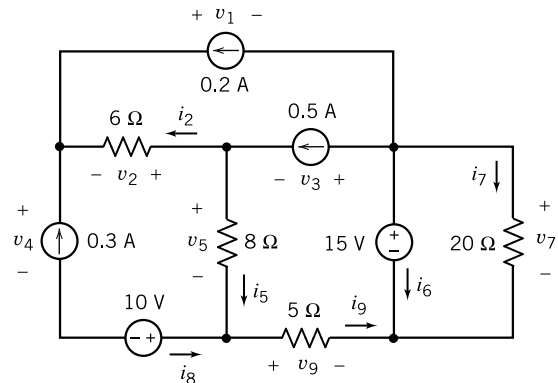


Figura P 3.2-12

**P 3.2-13** Determine el voltaje y la corriente de cada uno de los elementos de circuito en el circuito que se muestra en la figura P 3.2-13

**Sugerencia:** Necesitará especificar las direcciones de referencia para los voltajes y las corrientes. Hay más de una manera de hacerlo, y sus respuestas dependerán de las direcciones de referencia que elija.

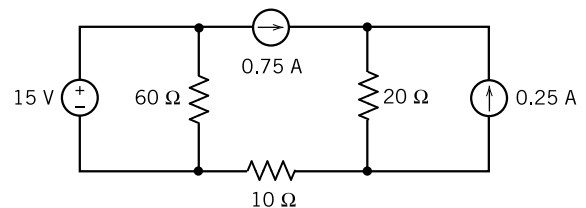


Figura P 3.2-13

**P 3.2-14** Determine el voltaje y la corriente de cada uno de los elementos de circuito en el circuito de la figura P 3.2-14.

**Sugerencia:** Necesitará especificar las direcciones de referencia para los voltajes y corrientes de los elementos. Hay más de una manera de hacerlo, y sus respuestas dependerán de las direcciones de referencia que elija.

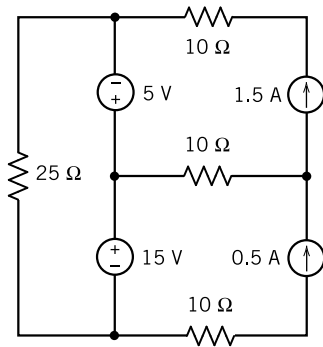


Figura P 3.2-14

**P 3.2-15** Determine el valor de la corriente medida por el contador en la figura P 3.2-15.

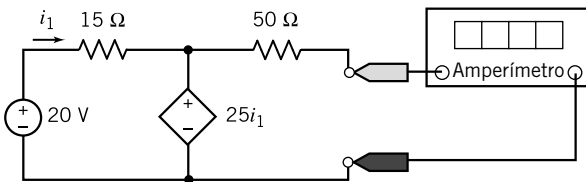


Figura P 3.2-15

**P 3.2-16** Determine el valor de la corriente medida por el contador en la figura P 3.2-16.

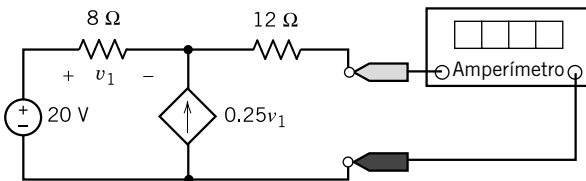


Figura P 3.2-16

**P 3.2-17** Determine el valor del voltaje medido por el contador en la figura P 3.2-17.

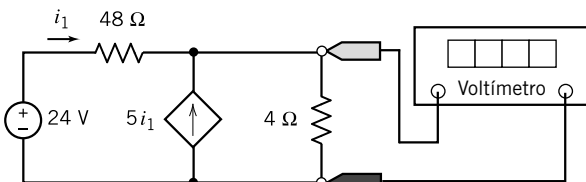


Figura P 3.2-17

**P 3.2-18** Determine el valor de la corriente medida por el contador en la figura P 3.2-18.

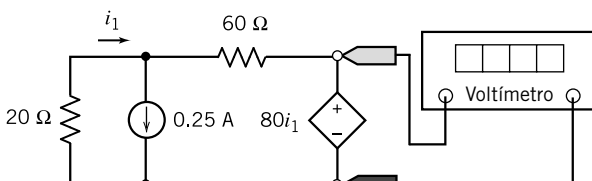


Figura P 3.2-18

**P 3.2-19** La fuente de voltaje en la figura P 3.2-19 alimenta 3.6 W de potencia. La fuente de corriente alimenta 4.8 W. Determine los valores de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ .

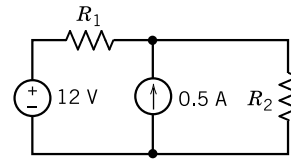


Figura P 3.2-19

**P 3.2-20** Determine la corriente  $i$  en la figura 3.2-20.

*Respuesta:*  $i = 4$  A

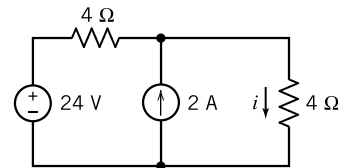
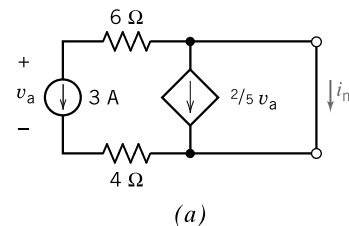
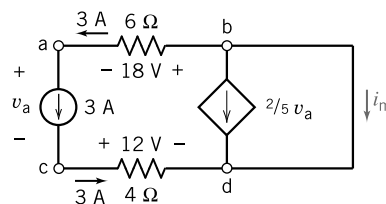


Figura P 3.2-20

**P 3.2-21** Determine el valor de la corriente  $i_m$  en la figura P 3.2-21a.



(a)



(b)

**Figura P 3.2-21** (a) Un circuito que contiene una VCCS. (b) El circuito después de haber etiquetado los nodos y algunas corrientes y voltajes de elementos.

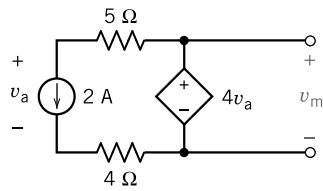
*Sugerencia:* Aplicar la KVL a la ruta cerrada a-b-d-c-a en la figura P 3.2-21a para determinar  $v_a$ . Luego aplique la KCL en el nodo b para encontrar  $i_m$ .

*Respuesta:*  $i_m = 9$  A

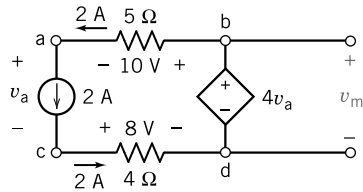
**P 3.2-22** Determine el valor del voltaje  $v_m$  en la figura P 3.2-22a.

*Sugerencia:* Aplicar la KVL a la ruta cerrada a-b-d-c-a en la figura P 3.2-22b para determinar  $v_a$ .

*Respuesta:*  $v_m = 24$  V



(a)



(b)

Figura P 3.2-22 (a) Un circuito que contiene una VCVS. (b) El circuito después de haber etiquetado los nodos y algunas corrientes y voltajes de los elementos.

P 3.2-23 Determine el valor del voltaje  $v_6$  para el circuito que se muestra en la figura P 3.2-23.

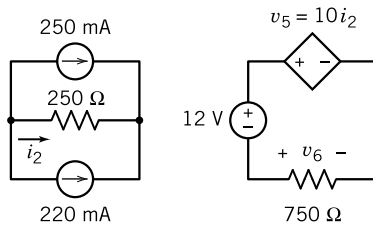


Figura P 3.2-23

P 3.2-24 Determine el valor del voltaje  $v_6$  para el circuito que se muestra en la figura P 3.2-24.

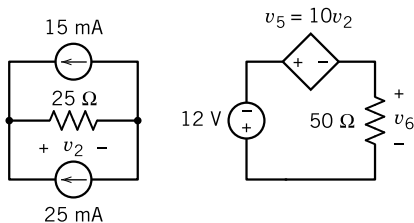


Figura P 3.2-24

P 3.2-25 Determine el valor del voltaje  $v_5$  para el circuito que se muestra en la figura P 3.2-25.

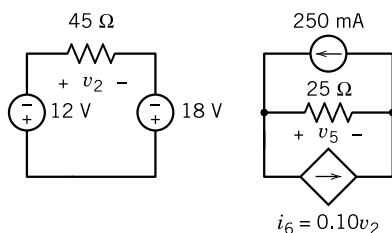


Figura P 3.2-25

P 3.2-26 Determine el valor del voltaje  $v_5$  para el circuito que se muestra en la figura P 3.2-26.

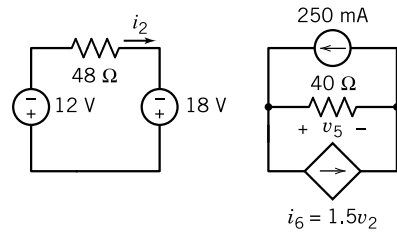


Figura P 3.2-26

P 3.2-27 Determine el valor del voltaje  $v_6$  para el circuito que se muestra en la figura P 3.2-27.

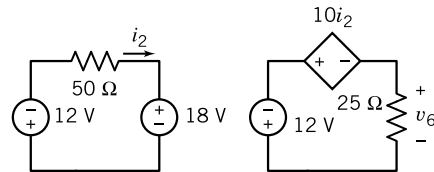


Figura P 3.2-27

P 3.2-28 Determine el valor del voltaje  $v_5$  para el circuito que se muestra en la figura P 3.2-28.

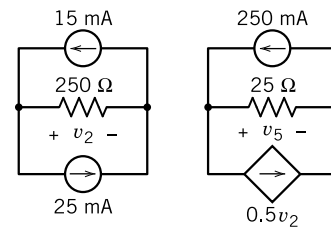


Figura P 3.2-28

P 3.2-29 La fuente de voltaje en el circuito que se muestra en la figura P 3.2-29 alimenta 2 W de potencia. El valor del voltaje a través del resistor de 25-Ω es  $v_2 = 4$  V. Determine los valores de la resistencia  $R_1$  y de la ganancia,  $G$ , de las VCCS.

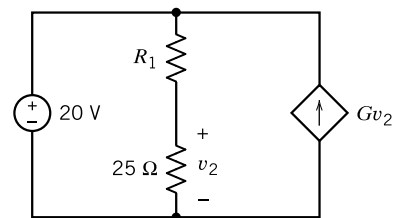


Figura P 3.2-29

P 3.2-30 Considere el circuito que se muestra en la figura P 3.2-30. Determine los valores de

- (a) La corriente  $i_a$  en el resistor de 20-Ω.
- (b) El voltaje  $v_b$  a través del resistor de 10-Ω.
- (c) La corriente  $i_c$  en la fuente de voltaje independiente.

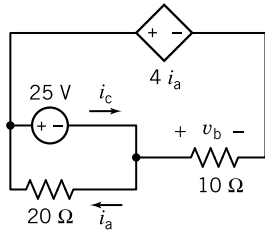


Figura P 3.2-30

### Sección 3.3 Resistores en serie y división de voltaje

**P 3.3-1** Utilice la división de voltaje para determinar los voltajes  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  y  $v_4$  en el circuito que se muestra en la figura P 3.3-1.

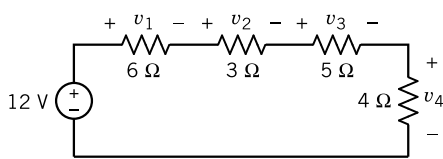
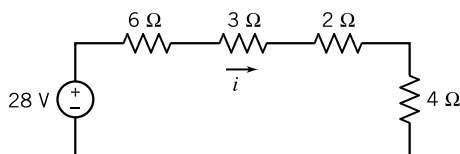


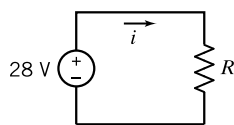
Figura P 3.3-1

**P 3.3-2** Considere los circuitos que se muestran en la figura P 3.3-2.

- Determine el valor de la resistencia  $R$  en la figura P 3.3-2b que hace que el circuito de la figura P 3.3-2a sea equivalente al circuito de la figura P 3.3-2a.
- Determine la corriente  $i$  en la figura P 3.3-2b. Dado que los circuitos son equivalentes, la corriente  $i$  de la figura P 3.3-2a es igual a la corriente  $i$  en la figura P 3.3-2b.
- Determine la potencia alimentada por la fuente de voltaje.



(a)



(b)

Figura P 3.3-2

**P 3.3-3** El voltímetro ideal en el circuito que se muestra en la figura P 3.3-3 mide el voltaje  $v$ .

- Suponga que  $R_2 = 50 \Omega$ . Determine el valor de  $R_1$ .
- Suponga, en cambio, que  $R_1 = 50 \Omega$ . Determine el valor de  $R_2$ .
- Suponga, en cambio, que la fuente de voltaje alimenta 1.2 W de potencia. Determine los valores de  $R_1$  y  $R_2$ .

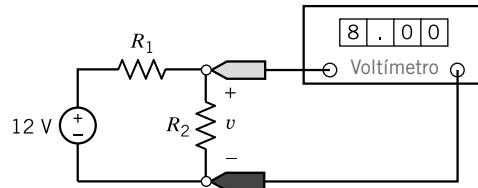


Figura P 3.3-3

**P 3.3-4** Determine el voltaje  $v$  en el circuito que se muestra en la figura 3.3-4.

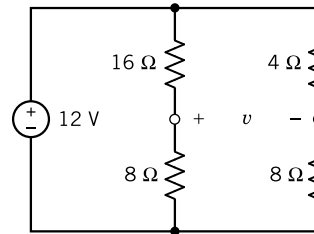


Figura P 3.3-4

**P 3.3-5** En la figura P 3.3-5 se muestra el modelo de un cable y resistor de carga conectado a una fuente. Determine la resistencia apropiada del cable,  $R$ , de modo que el voltaje de salida,  $v_o$ , se mantenga entre 9 V y 13 V cuando la fuente de voltaje,  $v_s$ , tenga una variación entre 20 V y 28 V. La resistencia del cable puede asumir valores enteros sólo en el rango de  $20 < R < 100 \Omega$ .

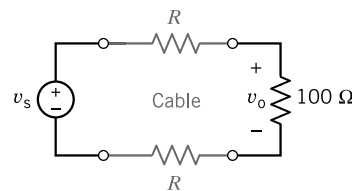


Figura P 3.3-5 Circuito con un cable.

**P 3.3-6** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 3.3-6 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_a$ . La salida de este circuito es el voltaje medido por el voltímetro  $v_b$ . El circuito produce una salida que es proporcional a la entrada, es decir,

$$v_b = k v_a$$

donde  $k$  es la constante de proporcionalidad.

- Determine el valor de la salida,  $v_b$ , cuando  $R = 180 \Omega$  y  $v_a = 18 \text{ V}$ .
- Determine el valor de la potencia alimentada por la fuente de voltaje cuando  $R = 180 \Omega$  y  $v_a = 18 \text{ V}$ .
- Determine el valor de la resistencia,  $R$ , requerida para que la salida sea  $v_b = 2 \text{ V}$  cuando la entrada  $v_a = 18 \text{ V}$ .
- Determine el valor de la resistencia,  $R$ , requerida para que  $v_b = 0.2 v_a$  (es decir, que el valor de la constante de proporcionalidad sea  $k = \frac{2}{10}$ ).

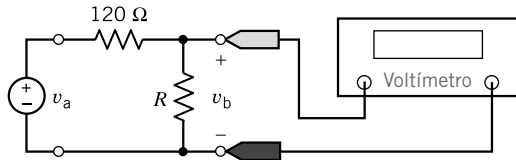


Figura P 3.3-6

**P 3.3-7** Determine el valor del voltaje  $v$  en el circuito que se muestra en la figura P 3.3-7.

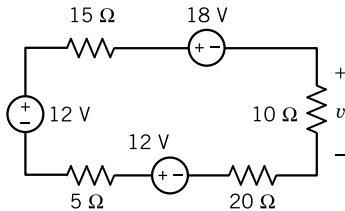


Figura P 3.3-7

**P 3.3-8** Determine la potencia alimentada por la fuente dependiente en el circuito que se muestra en la figura P 3.3-8.

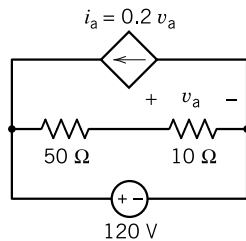
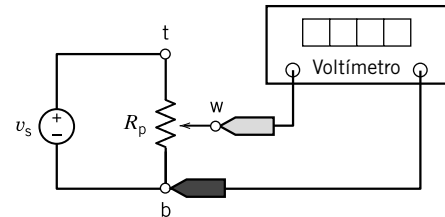


Figura P 3.3-8

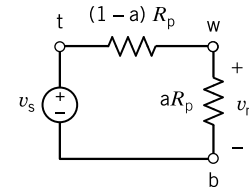
**P 3.3-9** Se puede utilizar un potenciómetro a manera de transductor para convertir la posición de rotación de un cuadrante a una cantidad eléctrica. La figura P 3.3-9 ilustra esta situación. La figura 3.3-9a muestra un potenciómetro cuya resistencia  $R_p$  está conectada a una fuente de voltaje. El potenciómetro tiene tres terminales, una en cada terminal y otra más conectada a un contacto deslizante llamado *wiper*. Un voltímetro mide el voltaje entre el *wiper* y una de las terminales del potenciómetro.

La figura 3.3-9b muestra el circuito después de que el potenciómetro es reemplazado por un modelo del potenciómetro, que consta de dos resistores. El parámetro  $a$  depende del ángulo,  $\theta$ , del dial. Aquí  $a = \frac{\theta}{360^\circ}$ , y  $\theta$  están dados en grados. Además, en la figura P 3.3-9b, el voltímetro ha sido reemplazado por un circuito abierto, a la vez que se ha etiquetado el voltaje medido por el voltímetro,  $v_m$ . La entrada al circuito es el ángulo  $\theta$ , y la salida es el voltaje medido por el contador,  $v_m$ .

- (a) Muestre que la salida es proporcional a la entrada.
- (b) Sean  $R_p = 1 \text{ k}\Omega$  y  $v_s = 24 \text{ V}$ . Expresé la salida como una función de la entrada. ¿Cuál es el valor de la salida cuando  $\theta = 45^\circ$ ? ¿Cuál es el ángulo cuando  $v_m = 10 \text{ V}$ ?



(a)



(b)

Figura P 3.3-9

**P 3.3-10** Determine el valor del voltaje medido por el contador en la figura 3.3-10.

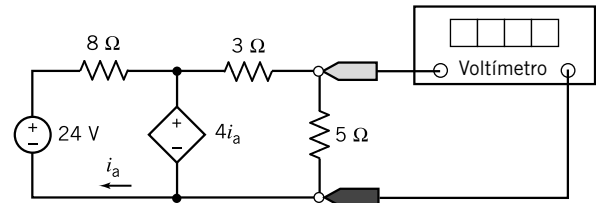


Figura P 3.3-10

**P 3.3-11** Para el circuito de la figura P 3.3-11, encuentre el voltaje  $v_3$  y la corriente  $i$  y muestre que la potencia entregada a los tres resistores es igual a la alimentada por la fuente.

**Respuesta:**  $v_3 = 3\text{V}$ ,  $i = 1 \text{ A}$

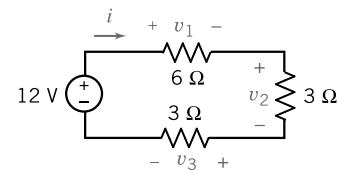


Figura P 3.3-11

**P 3.3-12** Considere el divisor de voltaje que se muestra en la figura P 3.3-12 cuando  $R_1 = 8 \Omega$ . Lo deseable es que la potencia de salida absorbida por  $R_1$  sea de  $4.5 \text{ W}$ . Encuentre el voltaje  $v_o$  y la fuente requerida  $v_s$ .

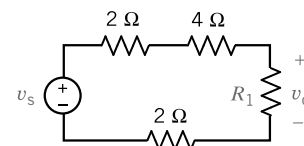


Figura P 3.3-12



**P 3.3-13** Considere el circuito divisor de voltaje que se muestra en la figura P 3.3-13. El resistor  $R$  representa un sensor de temperatura. La resistencia  $R$ , en  $\Omega$ , está relacionada con la temperatura  $T$ , en  $^{\circ}\text{C}$  mediante la ecuación

$$R = 50 + \frac{1}{2}T$$

- Determine el voltaje medido,  $v_m$ , que corresponde a las temperaturas  $0^{\circ}\text{C}$ ,  $75^{\circ}\text{C}$  y  $100^{\circ}\text{C}$ .
- Determine el valor de la temperatura,  $T$ , que corresponda a los voltajes medidos 8 V, 10 V y 15 V.

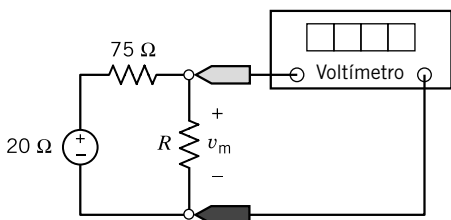


Figura P 3.3-13

**P 3.3-14** Considere el circuito que se muestra en la figura P 3.3-14.

- Determine el valor de la resistencia  $R$  requerida para que  $v_o = 17.07\text{ V}$ .
- Determine el valor del voltaje  $v_o$  cuando  $R = 14\ \Omega$ .
- Determine la potencia alimentada por la fuente de voltaje cuando  $v_o = 14.22\text{ V}$ .

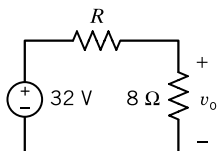


Figura P 3.3-14

### Sección 3.4 Resistores en paralelo y división de corriente

**P 3.4-1** Utilice la división de corriente para determinar las corrientes  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  e  $i_4$  en el circuito que se muestra en la figura P 3.4-1.

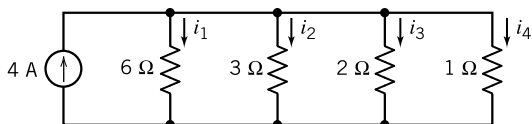


Figura P 3.4-1

**P 3.4-2** Considere los circuitos que se muestran en la figura P 3.4-2.

- Determine el valor de la resistencia  $R$  de la figura P 3.4-2b que hace que el circuito de la figura P 3.4-2b sea equivalente al circuito de la figura P 3.4-2a.
- Determine el voltaje  $v$  de la figura P 3.4-2b. Dado que los circuitos son equivalentes, el voltaje  $v$  de la figura P 3.2-4a es igual al voltaje  $v$  de la figura P 3.4-2b.
- Determine la potencia alimentada por la fuente de corriente.

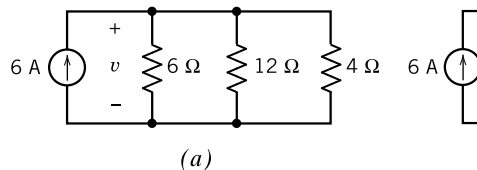


Figura P 3.4-2

**P 3.4-3** El voltímetro ideal en el circuito que se muestra en la figura P 3.4-3 mide el voltaje  $v$ .

- Suponga  $R_2 = 6\ \Omega$ . Determine el valor de  $R_1$  y de la corriente  $i$ .
- Suponga, en cambio,  $R_1 = 6\ \Omega$ . Determine el valor de  $R_2$  y de la corriente  $i$ .
- En cambio, elija  $R_1$  y  $R_2$  para minimizar la potencia absorbida por algún resistor.

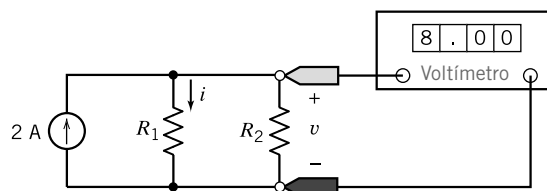


Figura P 3.4-3

**P 3.4-4** Determine la corriente  $i$  en el circuito que se muestra en la figura P 3.4-4.

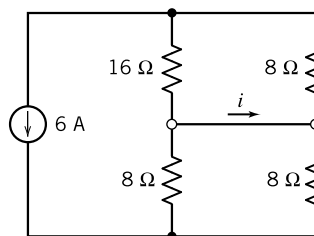


Figura P 3.4-4

**P 3.4-5** Considere el circuito que se muestra en la figura P 3.4-5 cuando  $4\ \Omega \leq R_1 \leq 6\ \Omega$  y  $R_2 = 10\ \Omega$ . Seleccione la fuente  $i_s$  de modo que  $v_o$  se mantenga entre 9 V y 13 V.

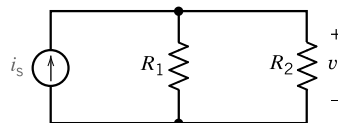


Figura P 3.4-5

**P 3.4-6** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 3.4-6 es la corriente de la fuente de corriente,  $i_a$ . La salida de este circuito es la corriente medida por el amperímetro,  $i_b$ . Este circuito produce una salida que es proporcional a la entrada, es decir,

$$i_b = k i_a$$

donde  $k$  es la constante de proporcionalidad.

- Determine el valor de la salida,  $i_b$ , cuando  $R = 24\ \Omega$  e  $i_a = 2.1\text{ A}$ .

- (b) Determine el valor de la resistencia,  $R$ , requerida para que la salida sea  $i_b = 1.5 \text{ A}$  cuando la salida sea  $i_a = 2 \text{ A}$ .
- (c) Determine el valor de la resistencia,  $R$ , requerida para que  $i_b = 0.4 i_a$  (es decir, el valor de la constante de proporcionalidad es  $k = \frac{4}{10}$ ).

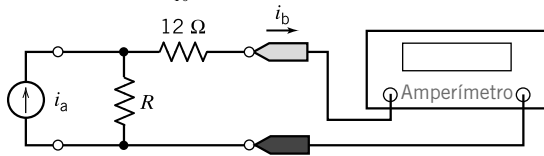


Figura P 3.4-6

**P 3.4-7** Figura P 3.4-7 muestra un amplificador de transistor. Hay que seleccionar los valores de  $R_1$  y  $R_2$ . Las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  se utilizan para polarizar el transistor, es decir, para constituir las condiciones operativas útiles. En este problema queremos seleccionar  $R_1$  y  $R_2$  para que  $v_b = 5 \text{ V}$ . Esperamos que el valor de  $i_b$  sea aproximadamente de  $10 \mu\text{A}$ . Cuando  $i_1 \leq 10i_b$ , lo habitual es tratar que  $i_b$  sea insignificante, es decir, suponer que  $i_b = 0$ . En ese caso,  $R_1$  incluye un divisor de voltaje.

- (a) Seleccione los valores para  $R_1$  y  $R_2$  de modo que  $v_b = 5 \text{ V}$ , y la potencia total absorbida por  $R_1$  y  $R_2$  no sea de más de  $5 \text{ mW}$ .
- (b) Un transistor inferior podría hacer que  $i_b$  fuera más grande de lo esperado. Utilizando los valores de  $R_1$  y  $R_2$  desde la parte (a), determine el valor de  $v_b$  que podría resultar de  $i_b = 15 \mu\text{A}$ .

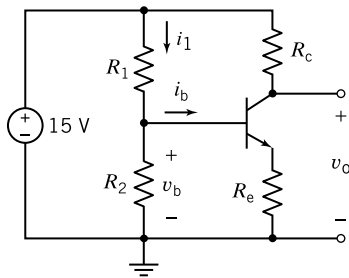


Figura P 3.4-7

**P 3.4-8** Determine el valor de la corriente  $i$  en el circuito que se muestra en la figura P 3.4-8.

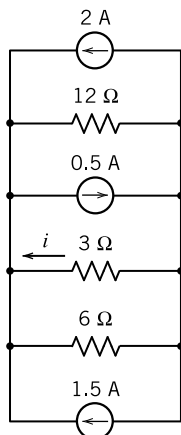


Figura P 3.4-8

**P 3.4-9** Determine el valor del voltaje  $v$  en la figura P 3.4-9.

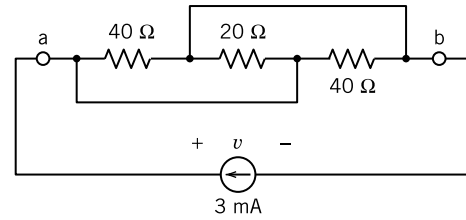


Figura P 3.4-9

**P 3.4-10** Un panel solar fotovoltaico se puede representar por el modelo de circuito que se muestra en la figura P 3.4-10, donde  $R_L$  es el resistor de carga. Determine los valores de las resistencias  $R_1$  y  $R_L$ .

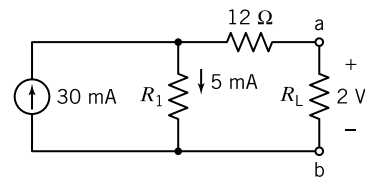


Figura P 3.4-10

**P 3.4-11** Determine la potencia alimentada por la fuente dependiente en la figura P 3.4-11.

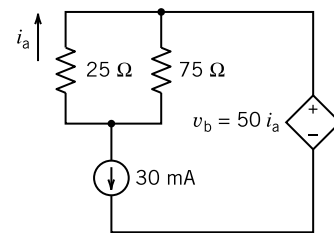


Figura P 3.4-11

**P 3.4-12** El voltímetro en la figura P 3.4-12 mide el valor del voltaje  $v_m$ .

- (a) Determine el valor de la resistencia  $R$ .
- (b) Determine el valor de la potencia alimentada por la fuente de corriente.

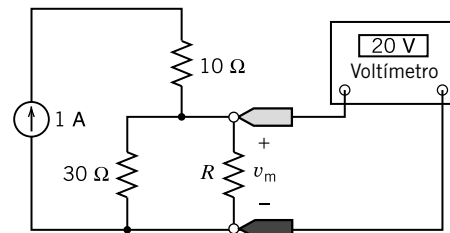


Figura P 3.4-12

**P 3.4-13** Determine los valores de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  para el circuito que se muestra en la figura P 3.4-13.

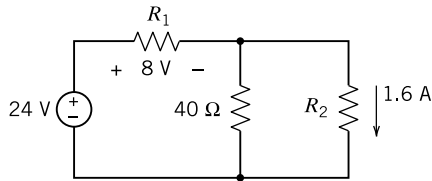


Figura P 3.4-13

**P 3.4-14** Determine los valores de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  para el circuito que se muestra en la figura P 3.4-14.

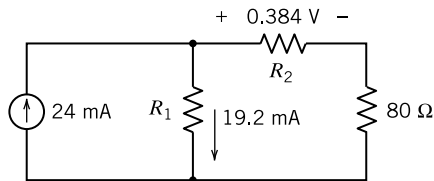


Figura P 3.4-14

**P 3.4-15** Determine el valor de la corriente medida por el contador en la figura P 3.4-15.

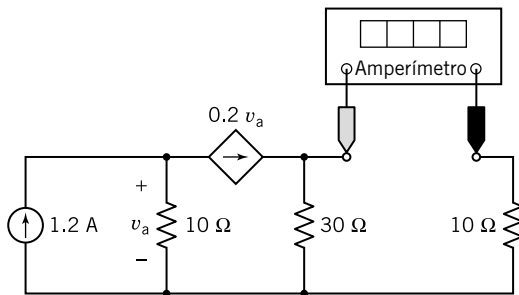


Figura P 3.4-15

**P 3.4-16** Considere la combinación de los resistores que se muestran en la figura P 3.4-16.  $R_p$  denotará la resistencia equivalente.

- Suponga que  $20 \leq R \leq 320 \Omega$ . Determine el rango correspondiente de valores de  $R_p$ .
- Suponga, en cambio,  $R = 0$  (un cortocircuito). Determine el valor de  $R_p$ .
- Suponga, en cambio,  $R = \infty$  (un circuito abierto). Determine el valor de  $R_p$ .
- Suponga, en cambio, que la resistencia equivalente es  $R_p = 40 \Omega$ . Determine el valor de  $R$ .

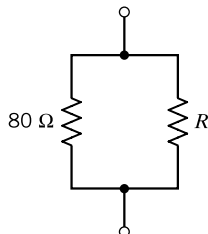


Figura P 3.4-16

**P 3.4-17** Considere la combinación de los resistores que se muestran en la figura P 3.4-17.  $R_p$  denotará la resistencia equivalente.

- Suponga que  $40 \leq R \leq 400 \Omega$ . Determine el rango correspondiente de valores de  $R_p$ .
- Suponga, en cambio,  $R = 0$  (un cortocircuito). Determine el valor de  $R_p$ .
- Suponga, en cambio,  $R = \infty$  (un circuito abierto). Determine el valor de  $R_p$ .
- Suponga, en cambio, que la resistencia equivalente es  $R_p = 80 \Omega$ . Determine el valor de  $R$ .

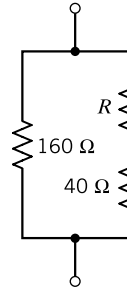


Figura P 3.4-17

**P 3.4-18** Considere la combinación de los resistores que se muestran en la figura P 3.4-18.  $R_p$  denotará la resistencia equivalente.

- Suponga que  $50 \Omega \leq R \leq 800 \Omega$ . Determine el rango correspondiente de valores de  $R_p$ .
- Suponga, en cambio,  $R = 0$  (un cortocircuito). Determine el valor de  $R_p$ .
- Suponga, en cambio,  $R = \infty$  (un circuito abierto). Determine el valor de  $R_p$ .
- Suponga, en cambio, la resistencia equivalente es  $R_p = 150 \Omega$ . Determine el valor de  $R$ .

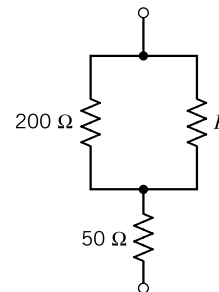


Figura P 3.4-18

**P 3.4-19** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 3.4-19 es la corriente de la fuente,  $i_s$ . La salida es la corriente medida por el contador,  $i_o$ . Un divisor de corriente conecta la fuente al medidor. Dadas las observaciones siguientes:

- La entrada  $i_s = 5 \text{ A}$  hace que la salida sea  $i_o = 2 \text{ A}$ .
- Cuando  $i_s = 2 \text{ A}$ , la fuente alimenta  $48 \text{ W}$ .

Determine los valores de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ .

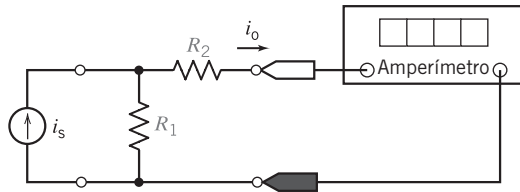


Figura P 3.4-19

**Sección 3.5 Fuentes de voltaje en serie y fuentes de voltaje en paralelo**

**P 3.5-1** Determine la potencia alimentada por cada fuente en el circuito que se muestra en la figura P 3.5-1.

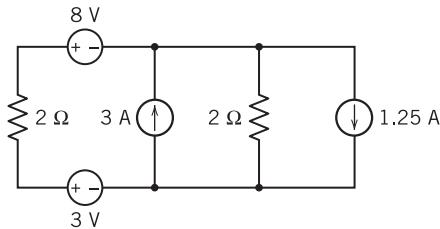


Figura P 3.5-1

**P 3.5-2** Determine la potencia alimentada por cada fuente en el circuito que se muestra en la figura P 3.5-2.

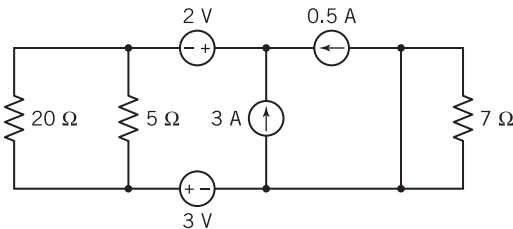


Figura P 3.5-2

**P 3.5-3** Determine la potencia recibida por cada resistor en el circuito que se muestra en la figura P 3.5-3.

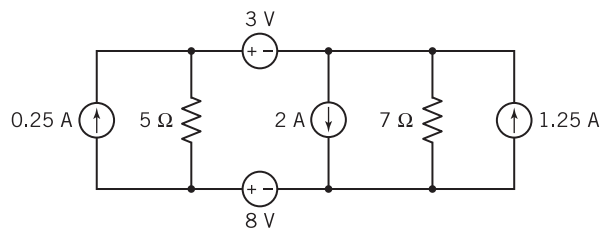
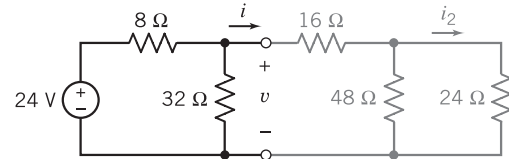


Figura P 3.5-3

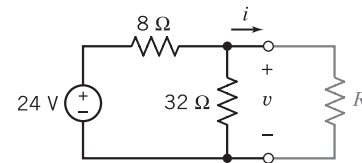
**Sección 3.6 Análisis de circuitos**

**P 3.6-1** El circuito que se muestra en la figura P 3.6-1a ha sido dividido en dos partes. En la figura P 3.6-1b, la parte del lado derecho ha sido reemplazada con un circuito equivalente. La parte izquierda del circuito no ha sido modificada.

- (a) Determine el valor de la resistencia  $R$  en la figura P 3.6-1b que hace que el circuito en la figura P 3.6-1b sea equivalente al circuito de la figura P 3.6-1a.
- (b) Encuentre la corriente  $i$  y el voltaje  $v$  que se muestran en la figura P 3.6-1b. Por la equivalencia, la corriente  $i$  y el voltaje  $v$  que se muestran en la figura P 3.6-1a son iguales a la corriente  $i$  y al voltaje  $v$  que se muestran en la figura P 3.6-1b.
- (c) Encuentre la corriente  $i_2$  que se muestra en la figura P 3.6-1a, utilizando la división de corrientes.



(a)



(b)

Figura P 3.6-1

**P 3.6-2** El circuito que se muestra en la figura P 3.6-2a ha sido dividido en tres partes. En la figura P 3.6-2b, la parte extrema derecha ha sido reemplazada con un circuito equivalente. El resto del circuito no se ha modificado. El circuito se ha modificado más en la figura 3.6-2c. Ahora las partes intermedia y extrema derecha han sido reemplazadas por una resistencia equivalente única. La parte extrema izquierda permanece sin sufrir modificaciones.

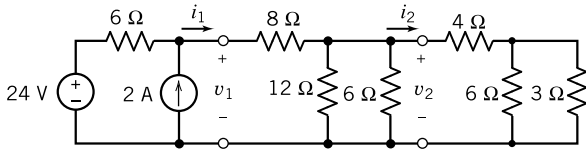
- (a) Determine el valor de la resistencia  $R_1$  en la figura P 3.6-2b que hace que el circuito en la figura p 3.6-2b sea equivalente al circuito de la figura P 3.6-2a.
- (b) Determine el valor de la resistencia  $R_2$  en la figura P 3.6-2c que hace que el circuito de la figura P 3.6-2c sea equivalente al circuito en la figura P 3.6-2b.
- (c) Encuentre la corriente  $i_1$  y el voltaje  $v_1$  que se muestran en la figura P 3.6-2c. Por la equivalencia, la corriente  $i_1$  y el voltaje  $v_1$  que se muestran en la figura P 3.6-2b son iguales a la corriente  $i_1$  y al voltaje  $v_1$  que se muestran en la figura P 3.6-2c.

*Sugerencia:*  $24 = 6(i_1 - 2) + i_1 R_2$

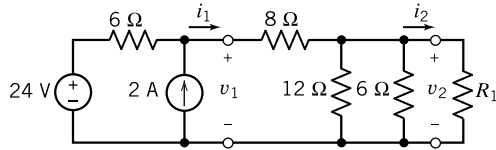
- (d) Encuentre la corriente  $i_2$  y el voltaje  $v_2$  que se muestran en la figura P 3.6-2b. Por la equivalencia, la corriente  $i_2$  y el voltaje  $v$  que se muestran en la figura P 3.6-2a son iguales a la corriente  $i_2$  y el voltaje  $v_2$  que se muestran en la figura P 3.6-2b.

*Sugerencia:* Utilice la división de corrientes para calcular  $i_2$  a partir de  $i_1$ .

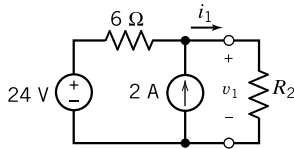
- (e) Determine la potencia absorbida por la resistencia de 3-Ω que se muestra a la derecha de la figura P 3.6-2a.



(a)



(b)



(c)

Figura P 3.6-2

**P 3.6-3** Encuentre  $i$ , utilizando las reducciones de circuito apropiadas y el principio del divisor de corriente para el circuito de la figura P 3.6-3.

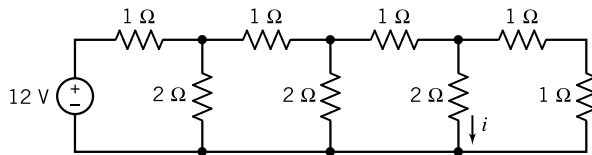
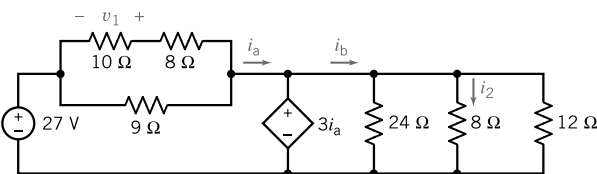


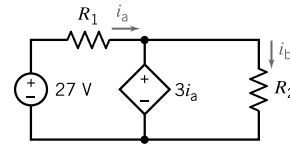
Figura P 3.6-3

**P 3.6-4**

- (a) Determine los valores de  $R_1$  y  $R_2$  en la figura P 3.6-4b que hacen que el circuito en la figura P 3.6-4b sea equivalente al circuito de la figura P 3.6-4a.
- (b) Analice el circuito en la figura P 3.6-4b para determinar los valores de las corrientes  $i_a$  e  $i_b$ .
- (c) Puesto que los circuitos son equivalentes, las corrientes  $i_a$  e  $i_b$  que se muestran en la figura P 3.6-4b son iguales a las corrientes  $i_a$  e  $i_b$  que se muestran en la figura P 3.6-4a. Con base en este hecho, determine los valores del voltaje  $v_1$  y la corriente  $i_2$  que se muestran en la figura P 3.6-4a.



(a)



(b)

Figura P 3.6-4

**P 3.6-5** El voltímetro en el circuito que se muestra en la figura P 3.6-5 muestra que el voltaje a través del resistor de 30-Ω es de 6 voltios. Determine el valor de la resistencia  $R_1$ .

*Sugerencia:* Utilice la división de voltaje dos veces.

*Respuesta:*  $R_1 = 40 \Omega$

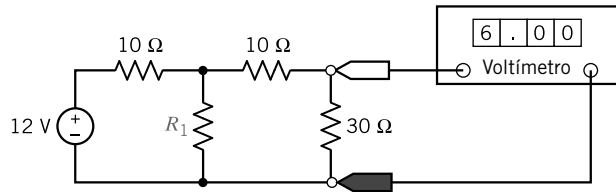


Figura P 3.6-5

**P 3.6-6** Determine los voltajes  $v_a$  y  $v_c$  y las corrientes  $i_b$  e  $i_d$  para el circuito que se muestra en la figura P 3.6-6.

*Respuesta:*  $v_a = -2 \text{ V}$ ,  $v_c = 6 \text{ V}$ ,  $i_b = -16 \text{ mA}$  e  $i_d = 2 \text{ mA}$

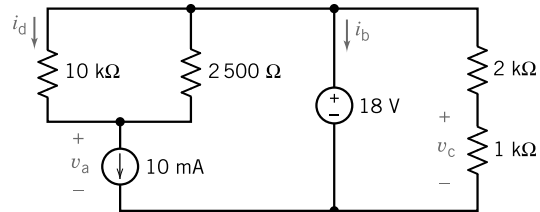


Figura P 3.6-6

**P 3.6-7** Determine el valor de la resistencia  $R$  en la figura P 3.6-7.

*Respuesta:*  $R = 28 \text{ k}\Omega$

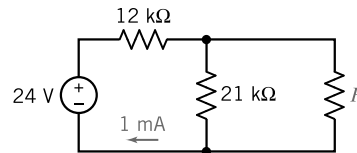


Figura P 3.6-7

**P 3.6-8** La mayoría hemos experimentado los efectos de un suave choque eléctrico. Pero los efectos de un choque eléctrico fuerte pueden ser devastadores e incluso fatales. El choque es el resultado del paso de la corriente a través del cuerpo. Una persona puede ser modelada como una red de resistencias. Considere el circuito modelo que se muestra en la figura P 3.6-8. Determine el voltaje desarrollado a través del corazón y la corriente que fluye a través del corazón de la persona que

sostiene con firmeza una terminal de una fuente de voltaje y la otra terminal está conectada al suelo. El corazón está representado por  $R_h$ . El suelo tiene una resistencia al flujo de la corriente igual a  $R_f$ , y la persona está de pie, descalza sobre el suelo. Este tipo de accidente podría ocurrir en una alberca o en un desembarcadero. La resistencia  $R_u$  de la parte superior del cuerpo y la resistencia  $R_L$  de la parte inferior varían de una persona a otra.

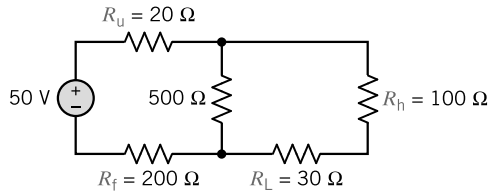


Figura P 3.6-8

**P 3.6-9** Determine el valor de la corriente  $i$  en la figura 3.6-9.

*Respuesta:*  $i = 0.5 \text{ mA}$

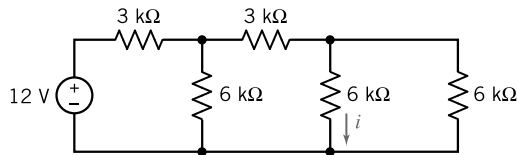


Figura P 3.6-9

**P 3.6-10** Determine los valores de  $i_a$ ,  $i_b$  y  $v_c$  en la figura P 3.6-10.

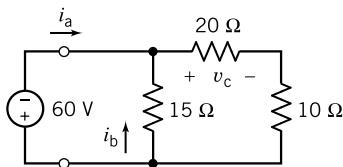


Figura P 3.6-10

**P 3.6-11** Encuentre  $i$  y  $R_{eq \text{ a-b}}$  si  $v_{ab} = 40 \text{ V}$  en el circuito de la figura P 3.6-11.

*Respuesta:*  $R_{eq \text{ a-b}} = 8 \Omega$ ,  $i = 5/6 \text{ A}$

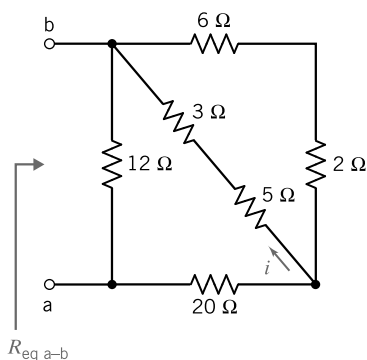


Figura P 3.6-11

**P 3.6-12** El ohmímetro de la figura P 3.6-12 mide la resistencia equivalente,  $R_{eq}$ , del circuito del resistor. El valor de la resistencia equivalente,  $R_{eq}$ , depende del valor de la resistencia  $R$ .

- (a) Determine el valor de la resistencia equivalente,  $R_{eq}$ , cuando  $R = 9 \Omega$ .
- (b) Determine el valor de la resistencia  $R$  requerida para hacer que la resistencia equivalente sea  $R_{eq} = 12 \Omega$ .

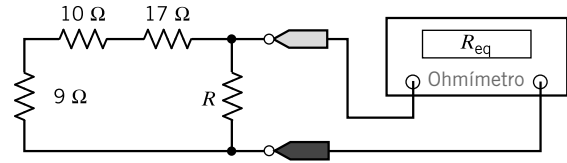


Figura P 3.6-12

**P 3.6-13** Encuentre la  $R_{eq}$  en las terminales a-b en la figura P 3.6-13. También determine  $i_1$  e  $i_2$ .

*Respuesta:*  $R_{eq} = 8 \Omega$ ,  $i = 5 \text{ A}$ ,  $i_1 = 5/3 \text{ A}$ ,  $i_2 = 5/2 \text{ A}$

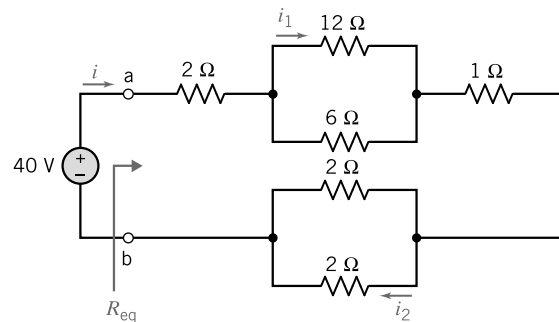


Figura P 3.6-13

**P 3.6-14** Todas las resistencias en el circuito que se muestra en la figura P 3.6-14 son múltiplos de  $R$ . Determine el valor de  $R$ .

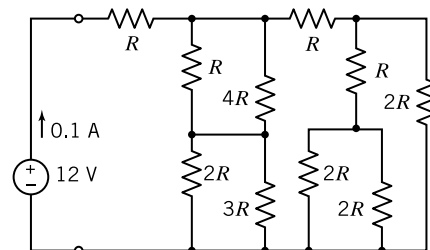


Figura P 3.6-14

**P 3.6-15** El circuito que se muestra en la figura P 3.6-15 contiene siete resistores, cada uno con una resistencia  $R$ . La entrada a este circuito es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . El circuito tiene dos salidas,  $v_a$  y  $v_b$ . Expresar cada salida como una función de la entrada.

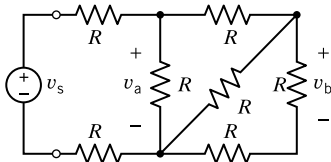


Figura P 3.6-15

**P 3.6-16** El circuito que se muestra en la figura P 3.6-16 contiene tres resistores  $10\text{-}\Omega$ ,  $1/4\text{ W}$ . (Los resistores de  $1/4$  de watt pueden disipar  $1/4$  de watt con toda seguridad.) Determine el rango de los voltajes de la fuente de voltaje,  $v_s$ , de modo que ninguno de los resistores absorba más de  $1/4\text{ w}$  de potencia.

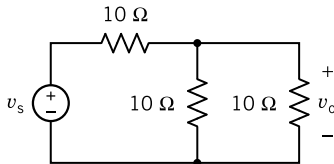


Figura P 3.6-16

**P 3.6-17** Los cuatro resistores que se muestran en la figura P 3.6-17 representan indicadores de tensión. Los indicadores de tensión son transductores que miden la tensión resultante cuando un resistor es estirado o comprimido. Los indicadores de tensión se emplean para medir fuerzas, desplazamientos o presiones. Los cuatro indicadores de tensión en la figura P 3.6-17 tienen cada uno una resistencia nominal (sin tensiones) de  $200\text{ }\Omega$  y cada uno absorbe sin peligro  $0.5\text{ mW}$ . Determine el rango de los voltajes de la fuente de voltaje,  $v_s$ , de modo que ningún indicador de tensión absorba más de  $0.5\text{ mW}$  de potencia.

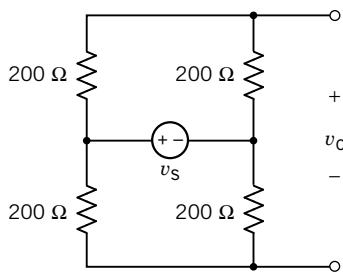


Figura P 3.6-17

**P 3.6-18** El circuito que se muestra en la figura P 3.6-18b se ha obtenido del circuito que se muestra en la figura P 3.6-18a por el reemplazo de las combinaciones de resistencias en serie y en paralelo por resistencias equivalentes.

- Determine los valores de las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  en la figura P 3.6-18b de modo que el circuito en la figura P 3.6-18b sea equivalente al circuito que se muestra en la figura P 3.6-18a.
- Determine los valores de  $v_1$ ,  $v_2$  e  $i$  en la figura P 3.6-18b.
- Como los circuitos son equivalentes, los valores de  $v_1$ ,  $v_2$  e  $i$  en la figura P 3.6-18a son iguales a los valores de  $v_1$ ,  $v_2$  e  $i$  en la figura P 3.6-18b. Determine los valores de  $v_4$ ,  $i_5$ ,  $i_6$  y  $v_7$  en la figura P 3.6-18a.

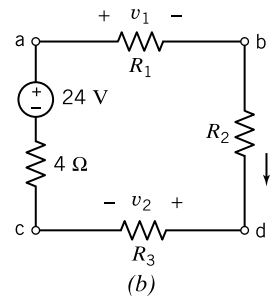
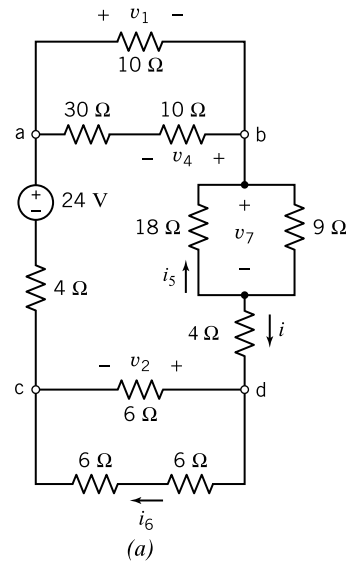


Figura P 3.6-18

**P 3.6-19** Determine los valores de  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $i_3$ ,  $v_4$ ,  $v_5$  e  $i_6$  en la figura P 3.6-19.

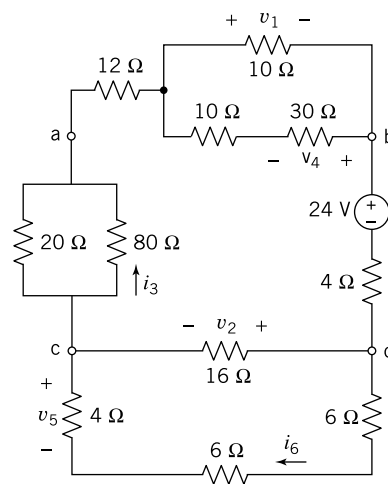


Figura P 3.6-19

**P 3.6-20** Determine los valores de  $i$ ,  $v$  y  $R_{eq}$  para el circuito que se muestra en la figura 3.6-20, dado que  $v_{ab} = 18\text{ V}$ .

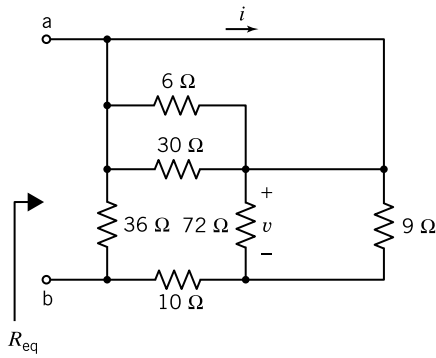


Figura P 3.6-20

**P 3.6-21** Determine el valor de la resistencia  $R$  en el circuito que se muestra en la figura P 3.6-21, dado que  $R_{eq} = 9 \Omega$ .

**Respuesta:**  $R = 15 \Omega$

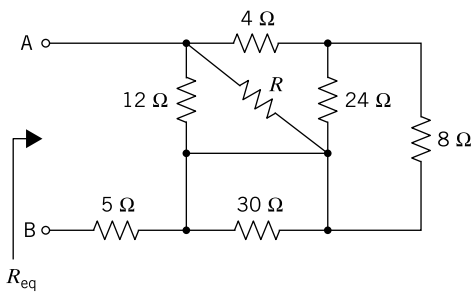


Figura P 3.6-21

**P 3.6-22** Determine el valor de la resistencia  $R$  en el circuito que se muestra en la figura P 3.6-22, dado que  $R_{eq} = 40 \Omega$ .

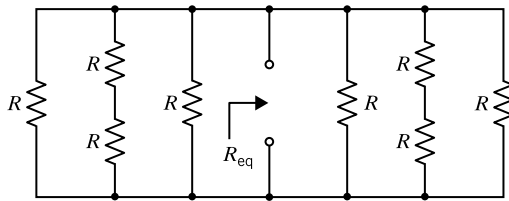


Figura P 3.6-22

**P 3.6-23** Determine los valores de  $r$ , la ganancia de la CCVS, y de  $g$ , la ganancia de la VCCS, para el circuito que se muestra en la figura P 3.6-23.

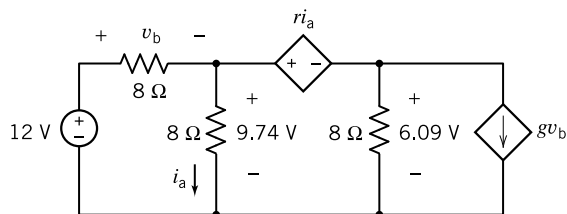


Figura P 3.6-23

**P 3.6-24** La entrada al circuito en la figura P 3.6-24 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . La salida es el voltaje medido por el contador,  $v_o$ . Muestre que la salida de este circuito es proporcional a la entrada. Determine el valor de la constante de proporcionalidad.

por el contador,  $v_o$ . Muestre que la salida de este circuito es proporcional a la entrada. Determine el valor de la constante de proporcionalidad.

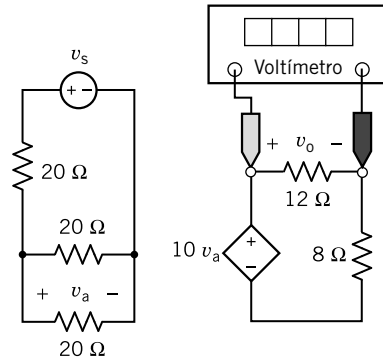


Figura P 3.6-24

**P 3.6-25** La entrada al circuito en la figura P 3.6-25 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_f$ . La salida es la corriente medida por el contador,  $i_o$ . Muestre que la salida de este circuito es proporcional a la entrada. Determine el valor de la constante de proporcionalidad.

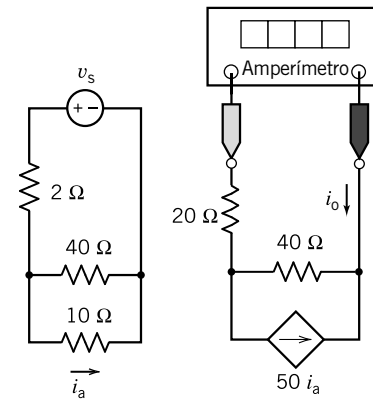


Figura P 3.6-25

**P 3.6-26** Determine el voltaje medido por el voltímetro en el circuito que se muestra en la figura P 3.6-26.

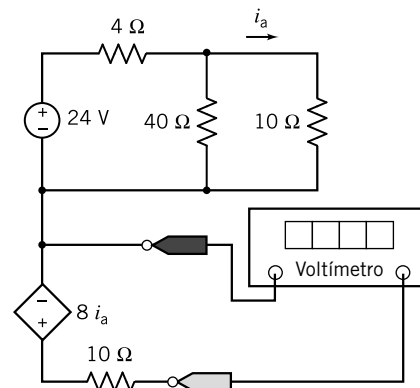


Figura P 3.6-26



**P 3.6-27** Determine la corriente medida por el amperímetro en el circuito que se muestra en la figura P 3.6-27.

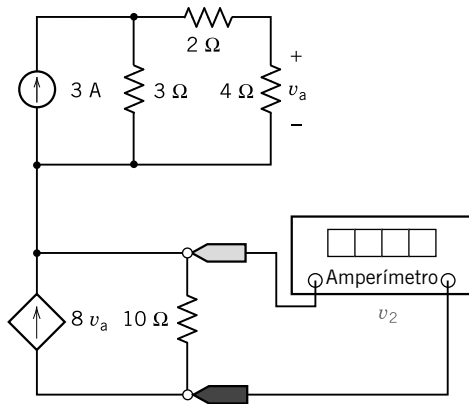


Figura P 3.6-27

**P 3.6-28** Determine el valor de la resistencia  $R$  que hace que el voltaje medido por el voltímetro en el circuito que se muestra en la figura P 3.6-28 sea 6 V.

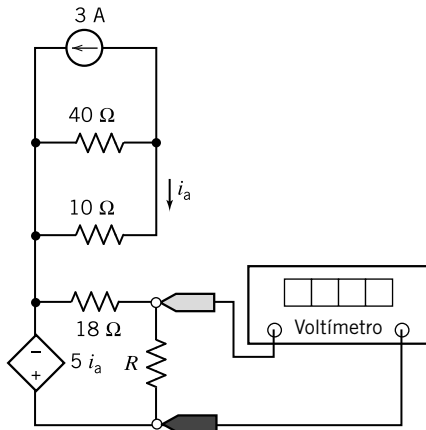


Figura P 3.6-28

**P 3.6-29** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 3.6-29 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . La salida es la corriente medida por el contador,  $i_m$ .

- Suponga que  $v_s = 15$  V. Determine el valor de la resistencia  $R$  que hace que el valor de la corriente medida por el contador sea  $i_m = 12$  A.
- Suponga que  $v_s = 15$  V y  $R = 80$  Ω. Determine la corriente medida por el amperímetro.
- Suponga que  $R = 24$  Ω. Determine el valor del voltaje de entrada,  $v_s$ , que hace que el valor de la corriente medida por el contador sea  $i_m = 3$  A.

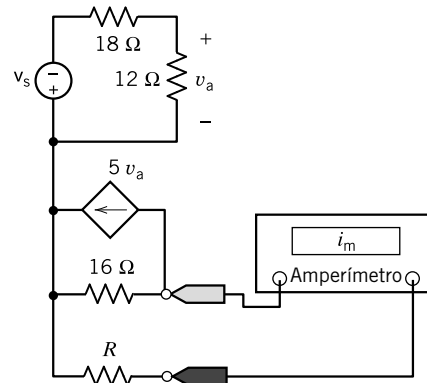


Figura P 3.6-29

**P 3.6-30** El ohmímetro de la figura P 3.6-30 mide la resistencia equivalente del circuito de resistores conectado a los probadores del medidor.

- Determine el valor de la resistencia  $R$  requerido para que la resistencia equivalente sea  $R_{eq} = 12$  Ω.
- Determine el valor de la resistencia equivalente cuando  $R = 14$  Ω.

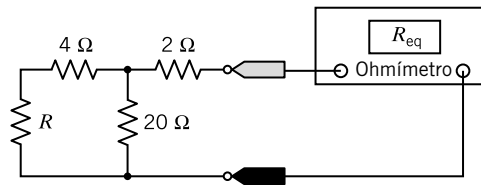


Figura P 3.6-30

**P 3.6-31** El voltímetro en la figura P 3.6-31 mide el voltaje a través de la fuente de corriente.

- Determine el valor del voltaje medido por el contador.
- Determine la potencia alimentada por cada elemento del circuito.

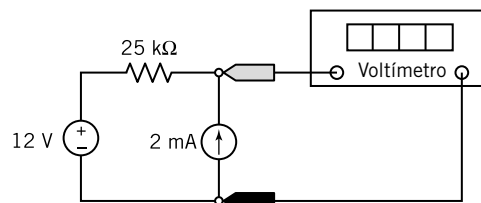


Figura P 3.6-31

**P 3.6-32** Determine la resistencia medida por el ohmímetro en la figura P 3.6-32.

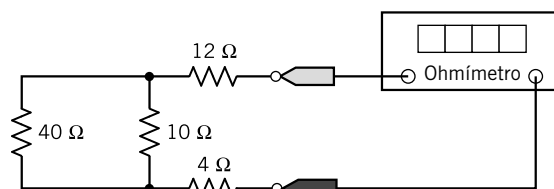


Figura P 3.6-32

**P 3.6-33** Determine la resistencia medida por el ohmímetro en la figura 3.6-33.

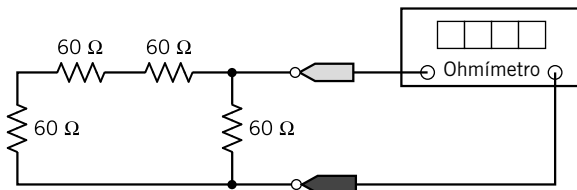


Figura P 3.6-33

**P 3.6-34** Considere el circuito que se muestra en la figura P 3.6-23. Dados los valores de las corrientes y voltajes siguientes:

$$i_1 = 0.625 \text{ A}, v_2 = -25 \text{ V}, i_3 = -1.25 \text{ A},$$

$$\text{y } v_4 = -18.75 \text{ V},$$

determine los valores de  $R_1, R_2, R_3$  y  $R_4$ .

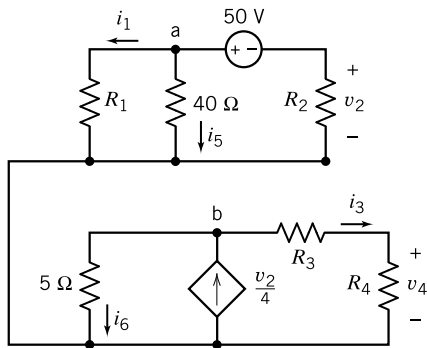


Figura P 3.6-34

**P 3.6-35** Considere los circuitos que se muestran en la figura P 3.6-35. El circuito equivalente se obtuvo a partir del circuito original por el reemplazo de las combinaciones de resistores en serie y en paralelo con resistores equivalentes. El valor de la corriente en el circuito equivalente es  $i_s = 0.8 \text{ A}$ . Determine los valores de  $R_1, R_2, R_5, v_2$  e  $i_3$ .

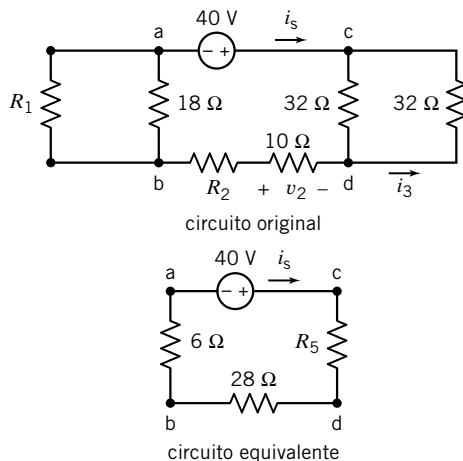


Figura P 3.6-35

**P 3.6-36** Considere el circuito que se muestra en la figura P 3.6-36. Dado

$$v_2 = \frac{2}{3} v_s, i_3 = \frac{1}{5} i_1, \text{ y } v_4 = \frac{3}{8} v_2,$$

determine los valores de  $R_1, R_2$  y  $R_4$ .

*Sugerencia:* Interprete  $v_2 = \frac{2}{3} v_s, i_3 = \frac{1}{5} i_1$  y  $v_4 = \frac{3}{8} v_2$  como divisiones de corriente y voltaje.

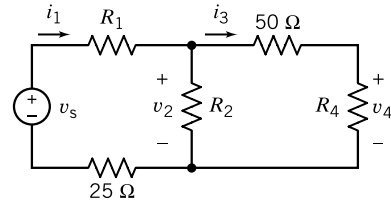


Figura P 3.6-36

**P 3.6-37** Considere el circuito que se muestra en la figura P 3.6-37. Dado

$$i_2 = \frac{2}{5} i_s, v_3 = \frac{2}{3} v_1 \text{ e } i_4 = \frac{4}{5} i_2,$$

determine los valores de  $R_1, R_2$  y  $R_4$ .

*Sugerencia:* Interprete  $i_2 = \frac{2}{5} i_s, v_3 = \frac{2}{3} v_1$  e  $i_4 = \frac{4}{5} i_2$  como divisiones de corriente y de voltaje.

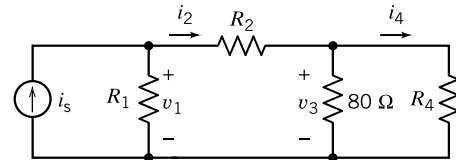


Figura P 3.6-37

**P 3.6-38** Considere el circuito que se muestra en la figura P 3.6-38.

- (a) Suponga que  $i_3 = \frac{1}{3} i_1$ . ¿Cuál es el valor de la resistencia  $R$ ?
- (b) Suponga, en cambio,  $v_2 = 4.8 \text{ V}$ . ¿Cuál es el valor de la resistencia equivalente de los resistores en paralelo?
- (c) Suponga, en cambio,  $R = 20 \Omega$ . ¿Cuál es el valor de la corriente en el resistor de  $40\text{-}\Omega$ ?

*Sugerencia:* Interprete  $i_3 = \frac{1}{3} i_1$  como división de corriente.

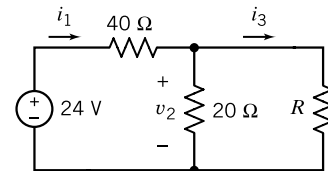


Figura P 3.6-38

**P 3.6-39** Considere el circuito que se muestra en la figura P 3.6-39.

- (a) Suponga que  $v_3 = \frac{1}{4} v_1$ . ¿Cuál es el valor de la resistencia  $R$ ?
- (b) Suponga que  $i_2 = 1.2 \text{ A}$ . ¿Cuál es el valor de la resistencia  $R$ ?
- (c) Suponga que  $R = 70 \Omega$ . ¿Cuál es el voltaje a través del resistor de  $20\text{-}\Omega$ ?

(d) Suponga que  $R = 30 \Omega$ . ¿Cuál es el valor de la corriente en este resistor de  $30\text{-}\Omega$ ?

*Sugerencia:* Interprete  $v_3 = \frac{1}{4}v_1$  como división de corriente.

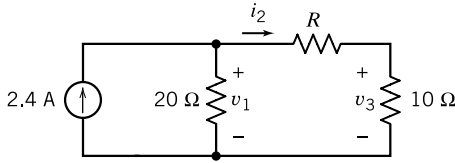


Figura P 3.6-39

**P 3.6-40** Considere el circuito que se muestra en la figura P 3.6-40. Dado que el voltaje de la fuente de voltaje dependiente es  $v_a = 8 \text{ V}$ , determine los valores de  $R_1$  y  $v_o$ .

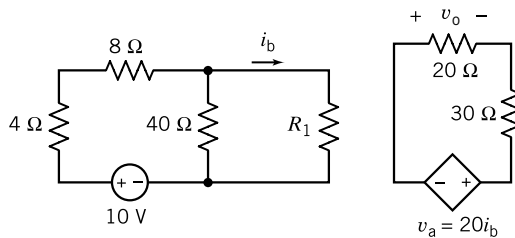


Figura P 3.6-40

**P 3.6-41** Considere el circuito que se muestra en la figura P 3.6-41. Dado que la corriente de la fuente de corriente dependiente es  $i_a = 2 \text{ A}$ , determine los valores de  $R_1$  e  $i_o$ .

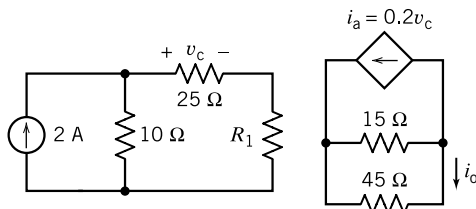


Figura P 3.6-41

**P 3.6-42** Determine los valores de  $i_a$ ,  $i_b$ ,  $i_2$  y  $v_1$  en el circuito que se muestra en la figura P 3.6-42.

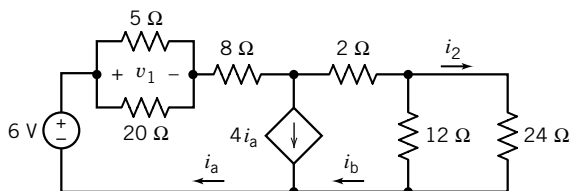


Figura P 3.6-42

### Sección 3.7 Análisis de circuitos resistivos utilizando MATLAB

**P 3.7-1** Determine la potencia alimentada por cada una de las fuentes, independientes y dependientes, en el circuito que se muestra en la figura P 3.7-1.

*Sugerencia:* Utilice los lineamientos dados en la sección 3.7 para etiquetar el diagrama del circuito. Utilice MATLAB para resolver las ecuaciones que representan el circuito.

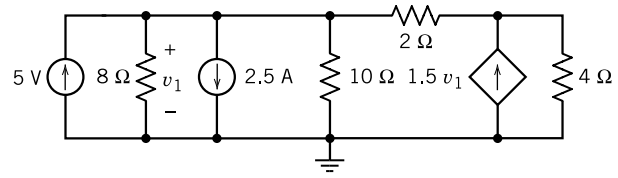


Figura P 3.7-1

**P 3.7-2** Determine la potencia alimentada por cada fuente, independiente y dependiente, en el circuito que se muestra en la figura P 3.7-2.

*Sugerencia:* Utilice los lineamientos dados en la sección 3.7 para etiquetar el diagrama de circuito. Utilice MATLAB para resolver las ecuaciones que representan el circuito.

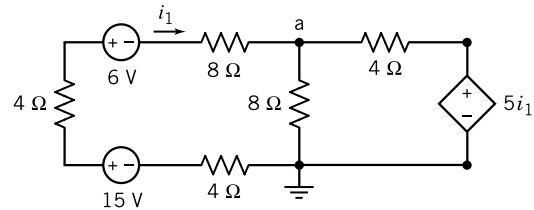


Figura P 3.7-2

### Sección 3.8 ¿Cómo lo podemos comprobar...?

**P 3.8-1** Un programa de análisis por computadora, utilizado para el circuito de la figura P 3.8-1, proporciona los siguientes voltajes y corrientes de la derivación:  $i_1 = -0.833 \text{ A}$ ,  $i_2 = -0.333 \text{ A}$ ,  $i_3 = -1.167 \text{ A}$  y  $v = -20 \text{ V}$ . ¿Estas respuestas son correctas?

*Sugerencia:* Verifique que se satisfaga la KCL en el nodo central, y que se satisfaga la KVL en torno al circuito cerrado exterior que consta de dos resistores de  $6\text{-}\Omega$  y la fuente de voltaje.

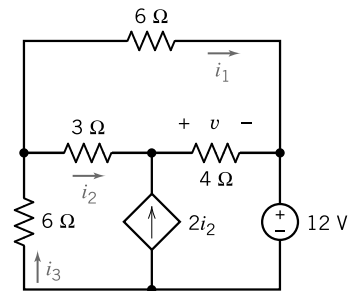


Figura P 3.8-1

**P 3.8-2** El circuito de la figura P 3.8-2 se asignó como un problema de tarea. La respuesta en la parte posterior del libro dice que la corriente,  $i$ , es  $1.25 \text{ A}$ . Verifique esta respuesta, utilizando la división de corrientes.

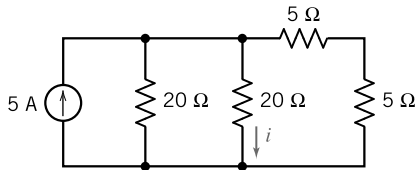


Figura P 3.8-2

**P 3.8-3** El circuito de la figura P 3.8-3 se construyó en el laboratorio, y se midió que  $v_o$  fuera de 6.25 V. Verifique esta medición, utilizando el principio del divisor de voltaje.

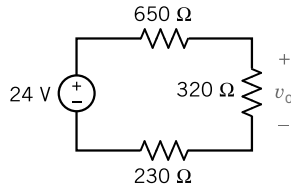


Figura P 3.8-3

**P 3.8-4** El circuito de la figura P 3.8-4 representa un sistema eléctrico de un automóvil. Un reporte establece que  $i_H = 9$  A,  $i_B = -9$  A e  $i_A = 19.1$  A. Verifique que este resultado sea el correcto.

*Sugerencia:* Compruebe que en cada nodo la KCL se haya satisfecho y que en torno a cada circuito cerrado se satisfaga la KVL.

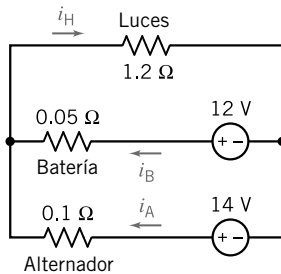


Figura P 3.8-4 Modelo de circuito eléctrico del sistema eléctrico de un automóvil.

**P 3.8-5** El análisis por computadora del circuito en la figura P 3.8-5 muestra que  $i_a = -0.5$  mA e  $i_b = -2$  mA. ¿Estuvo correcto el análisis hecho por computadora?

*Sugerencia:* Verifique que se satisfagan las ecuaciones de la KVL para los tres enlaces cuando  $i_a = -0.5$  mA e  $i_b = -2$  mA.

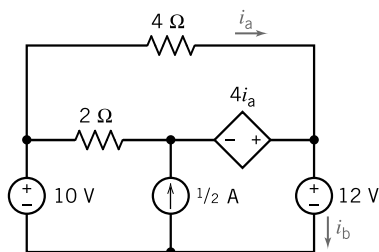


Figura P 3.8-5

**P 3.8-6** El análisis por computadora del circuito en la figura P 3.8-6 muestra que  $i_a = -0.5$  mA e  $i_b = 4.5$  mA. ¿Estuvo correcto el análisis hecho por computadora?

*Sugerencia:* Primero, verifique que se cumpla con las ecuaciones de la KVL para los cinco nodos cuando  $i_a = 0.5$  mA e  $i_b = 4.5$  mA. Luego, verifique que se cumpla con la ecuación de la KVL para el enlace inferior izquierdo (a-e-d-a). (Las ecuaciones de la KVL para el resto de enlaces no son útiles porque cada una implica un voltaje desconocido.)

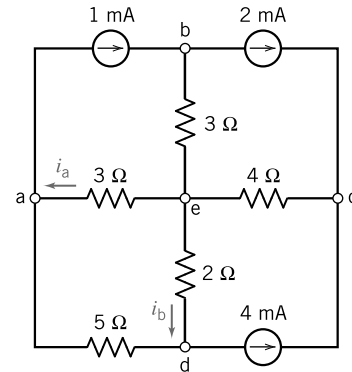


Figura P 3.8-6

**P 3.8-7** Verifique que las corrientes y voltajes del elemento que se muestran en la figura P 3.8-7 cumplen con las leyes de Kirchhoff:

- (a) Compruebe que las corrientes dadas satisfacen las ecuaciones de la KCL que corresponden a los nodos a, b y c.
- (b) Compruebe que los voltajes dados satisfacen las ecuaciones de la KVL que corresponden a los circuitos cerrados a-b-d-c-a y a-b-c-d-a.

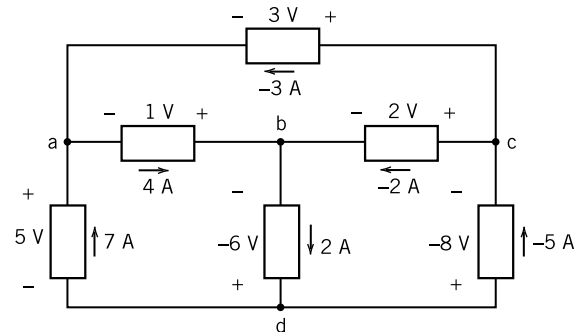
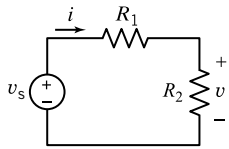


Figura P 3.8-7

**\*P 3.8-8** La figura P 3.8-8 muestra un circuito y algunos datos que se corresponden. Los datos tabulados proporcionan valores de la corriente,  $i$ , y el voltaje,  $v$ , que corresponden a diversos valores de la resistencia  $R_2$ .

- (a) Utilice los datos de las filas 1 y 2 de la tabla para encontrar los valores de  $v_s$  y  $R_1$ .
- (b) Utilice los resultados de la parte (a) para verificar que los datos tabulados son consistentes.
- (c) Llene las entradas faltantes en la tabla.



(a)

$R_2, \Omega$	$i, A$	$v, V$
0	2.4	0
10	1.2	12
20	0.8	16
30	?	18
40	0.48	?

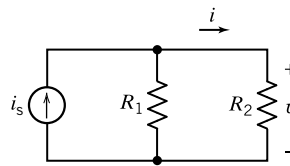
(b)

Figura P 3.8-8

\*P 3.8-9 La figura 3.8-9 muestra un circuito y algunos datos correspondientes. Los datos tabulados proporcionan valores

de la corriente,  $i$ , el voltaje,  $v$ , que corresponden a diversos valores de la resistencia  $R_2$ .

- Utilice los datos de las filas 1 y 2 de la tabla para encontrar los valores de  $i_s$  y  $R_1$ .
- Utilice los resultados de la parte (a) para verificar que los datos tabulados son consistentes.
- Llene las entradas faltantes en la tabla.



(a)

$R_2, \Omega$	$i, A$	$v, V$
10	4/3	40/3
20	6/7	120/7
40	1/2	20
80	?	?

(b)

Figura P 3.8-9

## Problemas de diseño

**PD 3-1** El circuito que se muestra en la figura PD 3-1 utiliza un potenciómetro para producir un voltaje variable. El voltaje  $v_m$  varía al girar un botón conectado al contacto deslizante del potenciómetro. Especifique las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  de modo que se cumpla con los tres requerimientos siguientes:

- El voltaje  $v_m$  varía de 8 a 12 V al moverse el control deslizante de uno a otro lado del potenciómetro.
- La fuente de voltaje alimenta menos de 0.5 W de potencia.
- Cada resistencia  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_p$  disipa menos de 0.25 W.

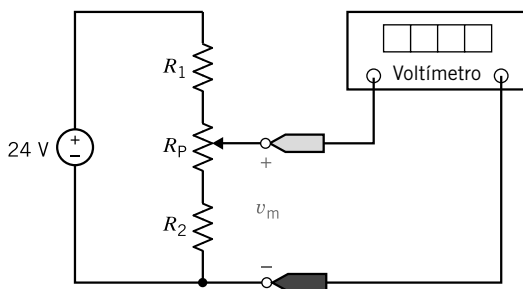


Figura PD 3-1

**PD 3-2** La resistencia  $R_L$  en la figura PD 3-2 es la resistencia equivalente de un transductor de presiones. Se ha especificado que esta resistencia sea de  $200 \Omega \pm 5\%$ . Es decir,  $190 \Omega \leq R_L \leq 210 \Omega$ . La fuente de voltaje es una fuente de  $12 V \pm 1\%$

capaz de alimentar 5 W. Diseñe este circuito utilizando resistores de 1/8 de watt de 5% para  $R_1$  y  $R_2$ , de modo que el voltaje a través de  $R_L$  sea

$$v_o = 4 V \pm 10\%$$

(Un resistor de  $100 \Omega$  de 1/8 de watt de 5%, tiene una resistencia de entre  $95$  y  $105 \Omega$  y puede disipar con toda seguridad  $1/8$  W de manera continua.)

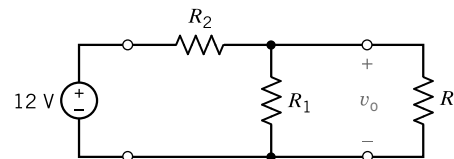
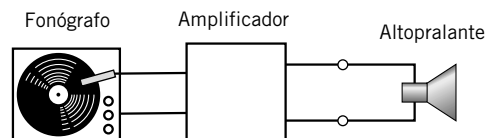


Figura PD 3-2

**PD 3-3** En la figura PD 3-3a se muestran un fonocaptor de fonógrafo, un amplificador de estéreo y altoparlantes, y vueltos a trazar como un modelo de circuito como el que se muestra en la figura PD 3-3b. Determine la resistencia  $R$  de modo que el voltaje  $v$  a través del altoparlante sea de 16 V. Determine la potencia transmitida al altoparlante.



(a)

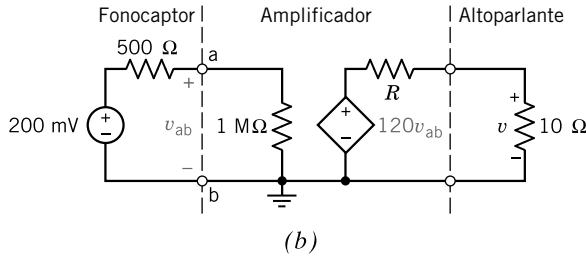


Figura PD 3-3 Un sistema de fonógrafo estereofónico.

**PD 3-4** Se requiere que un conjunto de luces para arbolitos de Navidad funcione con una batería de 6 V en un árbol de un parque ciudadano. La batería de trabajo pesado puede proveer 9 A durante un periodo de cuatro horas de operación cada noche. Diseñe un conjunto de luces en paralelo (seleccione el número máximo de luces) cuando la resistencia de cada bombillo sea de 12 Ω.

**PD 3-5** La entrada al circuito que se muestra en la figura PD 3-5 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . La salida es el voltaje  $v_o$ . La salida se relaciona con la entrada por

$$v_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s = g v_s$$

La salida del divisor de voltaje es proporcional a la entrada. La constante de proporcionalidad,  $g$ , se denomina ganancia del divisor de voltaje y la da

$$g = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

La potencia alimentada por la fuente de voltaje es

$$p = v_s i_s = v_s \left( \frac{v_s}{R_1 + R_2} \right) = \frac{v_s^2}{R_1 + R_2} = \frac{v_s^2}{R_{ent}}$$

donde

$$R_{ent} = R_1 + R_2$$

se denomina la resistencia de entrada del divisor de voltaje.

- (a) Diseñe un divisor de voltaje que tenga una ganancia,  $g = 0.65$ .
- (b) Diseñe un divisor de voltaje que tenga una ganancia,  $g = 0.65$ , y una resistencia de entrada,  $R_{ent} = 2\,500\ \Omega$ .

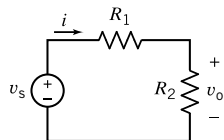


Figura PD 3-5

**PD 3-6** La entrada al circuito que se muestra en la figura PD 3-6 es la corriente de la fuente de corriente,  $i_s$ . La salida es la corriente  $i_o$ . La salida se relaciona con la entrada por

$$i_o = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_s = g i_s$$

La salida del divisor de corriente es proporcional a la entrada. La constante de proporcionalidad,  $g$ , se denomina la ganancia del divisor de corriente y la da

$$g = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

La potencia alimentada por la fuente de corriente es

$$p = v_s i_s = \left[ i_s \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) \right] i_s = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_s^2 = R_{ent} i_s^2$$

donde

$$R_{ent} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

se denomina la resistencia de entrada del divisor de corriente.

- (a) Diseñe un divisor de corriente que tenga una ganancia,  $g = 0.65$ .
- (b) Diseñe un divisor de corriente que tenga una ganancia,  $g = 0.65$  y una resistencia de entrada,  $R_{ent} = 10\,000\ \Omega$ .

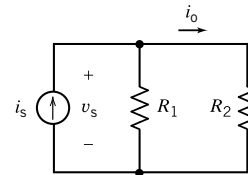


Figura PD 3-6

**PD 3-7** Diseñe el circuito que se muestra en la figura PD 3-7 que tenga una salida  $v_o = 8.5\ \text{V}$  cuando la entrada sea  $v_s = 12\ \text{V}$ . El circuito podría requerir no más de 1 mW desde la fuente de voltaje.

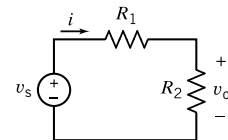


Figura PD 3-7

**PD 3-8** Diseñe el circuito que se muestra en la figura PD 3-8 que tenga una salida  $i_o = 1.8\ \text{mA}$  cuando la entrada sea  $i_s = 5\ \text{mA}$ . El circuito debería requerir no más de 1 mW desde la fuente de corriente.

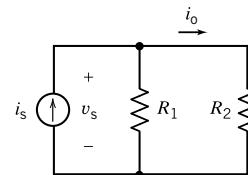


Figura PD 3-8

# Métodos de análisis de circuitos resistivos

## CAPÍTULO

# 4

### EN ESTE CAPÍTULO

- |     |  |      |   |
|-----|--|------|---|
| 4.1 | Introducción   | 4.8  | Comparación entre el método de voltajes de nodos y el método de corrientes de enlaces |
| 4.2 | Análisis de voltajes de nodos de circuitos con fuentes de corriente              | 4.9  | Análisis de corrientes de enlaces utilizando MATLAB                                   |
| 4.3 | Análisis de voltajes de nodos de circuitos con fuentes de corriente y de voltaje | 4.10 | Uso de PSpice para determinar los voltajes de nodos y las corrientes de enlaces       |
| 4.4 | Análisis de voltajes de nodos con fuentes dependientes                           | 4.11 | ¿Cómo lo podemos comprobar...?  |
| 4.5 | Análisis de corrientes de enlaces con fuentes de voltaje independientes          | 4.12 | <b>EJEMPLO DE DISEÑO</b> — Despliegue angular del potenciómetro                       |
| 4.6 | Análisis de corrientes de enlaces con fuentes de corriente y de voltaje          | 4.13 | Resumen   |
| 4.7 | Análisis de corrientes de enlaces con fuentes dependientes                       |      | Problemas   |
|     |  |      | Problemas de PSpice   |
|     |  |      | Problemas de diseño   |

## 4.1 INTRODUCCIÓN

Para analizar un circuito eléctrico se requiere escribir y despejar un conjunto de ecuaciones. Aplicamos las leyes de la corriente y el voltaje de Kirchhoff para obtener algunas ecuaciones. Las ecuaciones constitutivas de los elementos del circuito, como la ley de Ohm, proporcionan las ecuaciones restantes. Las variables desconocidas son las corrientes y voltajes de los elementos. El despeje de las ecuaciones proporciona los valores de las corrientes y los voltajes de los elementos.

Este método funciona bien con circuitos pequeños, pero el conjunto de ecuaciones puede ser muy extenso, incluso en circuitos de dimensiones moderadas. Un circuito con sólo 6 elementos tiene 6 corrientes del elemento y 6 voltajes del elemento. Podríamos tener 12 ecuaciones en 12 incógnitas. En este capítulo consideramos dos métodos para escribir un conjunto más pequeño de ecuaciones simultáneas:

- El método de los voltajes de nodos
- El método de las corrientes de enlaces

El método de los voltaje de nodos utiliza un nuevo tipo de variable llamado voltaje de nodos. Las “ecuaciones de voltaje de nodos” o, más sencillo, las “ecuaciones nodales” son un conjunto de ecuaciones simultáneas que representan un circuito eléctrico dado. Las variables desconocidas de las ecuaciones de voltajes de nodos son los voltajes del nodo. Después de resolver las ecuaciones de los voltajes de nodos, determinamos los valores de las corrientes y los voltajes de los elementos para los valores de los voltajes de nodos.

Es más fácil escribir ecuaciones de voltajes de nodos para algunos tipos de circuitos que para otros. Empezando con el caso más fácil, aprenderemos cómo escribir ecuaciones de voltaje de nodos para circuitos que constan de:

- Resistores y fuentes de corriente independientes
- Resistores y fuentes de corriente y de voltaje independientes
- Resistores y fuentes de corriente y de voltaje independientes y dependientes

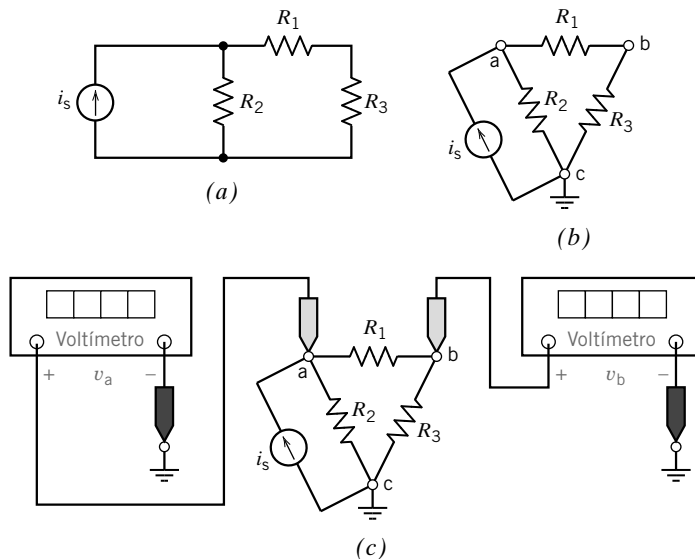
El método de corrientes de enlaces utiliza un nuevo tipo de variable denominado corriente de enlace. Las “ecuaciones de corrientes de enlaces” o, más sencillo, las “ecuaciones de enlaces” son un conjunto de ecuaciones simultáneas que representan un circuito eléctrico dado. Las variables desconocidas de las ecuaciones de corrientes de enlaces son las corrientes de enlaces. Después de despejar las ecuaciones de corrientes de enlaces, determinamos los valores de las corrientes y voltajes de los elementos a partir de los valores de las corrientes de enlaces.

Es más fácil escribir ecuaciones de corrientes de enlaces para algunos tipos de circuitos que para otros. Empezando con el caso más fácil, aprenderemos cómo escribir ecuaciones de corrientes de enlaces para circuitos que constan de:

- Resistores y fuentes de voltaje independientes
- Resistores y fuentes de corriente y de voltaje independientes
- Resistores y fuentes de corriente y de voltaje independientes y dependientes

## 4.2 ANÁLISIS DE VOLTAJES DE NODOS DE CIRCUITOS CON FUENTES DE CORRIENTE

Considere el circuito que se muestra en la figura 4.2-1a. El circuito contiene cuatro elementos: tres resistores y una fuente de corriente. Los *nodos* de un circuito son los lugares en que los elementos están conectados entre sí. El circuito que se muestra en la figura 4.2-1a tiene tres nodos. Lo común es trazar los elementos horizontal o verticalmente y conectar estos elementos con líneas horizontales y verticales que representan los cables. En otras palabras, los nodos se dibujan como puntos o bien utilizando líneas horizontales o verticales. La figura 4.21b muestra el mismo circuito, pero trazado de nuevo de modo que los tres nodos están dibujados como puntos en vez de líneas. En la figura 4.2-1b, los nodos están etiquetados como nodo a, nodo b, y nodo c.



**FIGURA 4.2-1** (a) Circuito con tres nodos. (b) El circuito después de que se han etiquetado los tres nodos y se ha seleccionado y marcado un nodo de referencia. (c) Utilizando voltímetros para medir los voltajes de los nodos.



La KCL no se aplica si se llama al nodo de referencia. Cualquier nodo del circuito puede ser seleccionado como nodo de referencia. Con frecuencia elegiremos el nodo al final del circuito para que sea el nodo de referencia. (Cuando el circuito contiene un alimentador de energía aterrizado, el nodo de tierra del alimentador de energía es el que se suele seleccionar como nodo de referencia.) En la figura 4.21b, el nodo c es el seccionado como nodo de referencia y marcado con el símbolo que lo identifica como tal.

El voltaje en cualquier nodo del circuito, respecto del nodo de referencia, se denomina **voltaje de nodos**. En la figura 4.2-1b hay dos nodos de voltaje: el voltaje en el nodo a respecto del nodo de referencia, el nodo c, y el voltaje en el nodo b, de nuevo con respecto al nodo de referencia, el nodo c. En la figura 4.2-1c, se han agregado voltímetros para medir los voltajes en los nodos. Para medir el voltaje de nodos en el nodo a, conecte el probador rojo del voltímetro en el nodo a y conecte el probador negro en el nodo c, que es el de referencia. Para medir el voltaje de nodos en el nodo b, conecte el probador rojo del voltímetro en el nodo b, y el probador negro en el nodo c, que es el nodo de referencia.

Los voltajes de nodos en la figura 4.2-1c se pueden representar como  $v_{ac}$  y  $v_{bc}$ , pero es convencional excluir el subíndice c y referirse a ellos como  $v_a$  y  $v_b$ . Observe que el voltaje de nodos en el nodo de referencia es  $v_{cc} = v_c = 0$  V porque un voltímetro que mide el voltaje de nodos en el nodo de referencia podría tener ambos probadores conectados en el mismo punto.

Uno de los métodos comunes de analizar un circuito eléctrico es escribir y despejar un conjunto de ecuaciones simultáneas denominado ecuaciones nodales. Las variables desconocidas en las ecuaciones de nodos son los voltajes de nodos del circuito. Determinamos los valores de los voltajes del nodo despejando las ecuaciones nodales.

Para escribir un conjunto de ecuaciones nodales, se hacen dos cosas:

1. Expresar las corrientes del elemento como funciones de los voltajes de nodos.
2. Aplicar la ley de la corriente de Kirchoff (KCL) en cada uno de los nodos del circuito, excepto en el nodo de referencia.

Considere el problema de expresar corrientes de elementos como funciones de voltajes de nodos. Aun cuando nuestro objetivo es expresar *corrientes* de elementos como funciones, empezaremos por expresar *voltajes* de elementos como funciones de los voltajes de nodos. La figura 4.2-2 muestra cómo se hace. Los voltímetros en la figura 4.2-2 miden los voltajes de nodos,  $v_1$  y  $v_2$ , en los nodos del elemento de circuito. El voltaje del elemento se ha etiquetado como  $v_a$ . Aplicando la ley del voltaje de Kirchoff al circuito cerrado que se muestra en la figura 4.2-2 resulta

$$v_a = v_1 - v_2$$

Esta ecuación expresa el voltaje del elemento,  $v_a$ , como una función de los voltajes de nodos,  $v_1$  y  $v_2$ . (Hay una manera fácil de recordar esta ecuación. Observe la polaridad de referencia del voltaje del elemento,  $v_a$ . El voltaje del elemento es igual al voltaje del nodo en el nodo cercano a la polaridad de referencia + menos el voltaje de nodos en el nodo cercano a la polaridad de referencia -.)

Ahora considere la figura 4.2-3. En la figura 4-2-3a, aplicamos lo que hemos aprendido a usar para expresar el voltaje de un elemento de circuito como una función de voltajes de nodos. El elemento

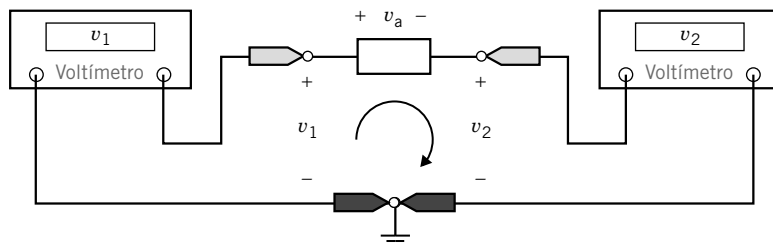


FIGURA 4.2-2 Voltajes de nodos,  $v_1$  y  $v_2$ , y voltaje del elemento,  $v_a$ , de un elemento del circuito.

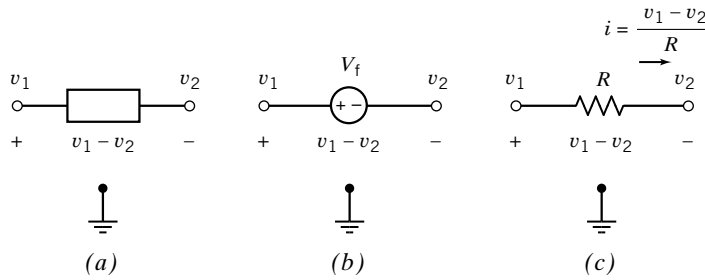


FIGURA 4.3-3 Los voltajes de nodos,  $v_1$  y  $v_2$ , y los voltajes de elemento,  $v_1 - v_2$ , de (a) un elemento de circuito genérico, (b) fuente de voltaje, y (c) resistor.

de circuito en la figura 4.2-3a podría ser cualquier cosa: un resistor, una fuente de corriente, una fuente de corrientes dependiente, etcétera. En las figuras 4.2-3b y c, consideramos tipos específicos de elementos de circuito. En la figura 4.2-3b, el elemento de circuito es una fuente de voltaje. El voltaje de elemento se ha representado dos veces, una como el voltaje de la fuente de voltaje,  $V_s$ , y otra como una función de los voltajes de nodos,  $v_1 - v_2$ . Es interesante observar que las polaridades de referencia para  $V_s$  y  $v_1 - v_2$  son las mismas (ambas + a la izquierda), escribimos

$$V_s = v_1 - v_2$$

Éste es un resultado importante. Cuantas veces tengamos una fuente de voltaje conectada entre dos nodos de un circuito, podemos expresar el voltaje de la fuente de voltaje,  $V_s$ , como una función de los voltajes de nodos,  $v_1$  y  $v_2$ .

Con frecuencia conocemos el valor del voltaje de la fuente de voltaje. Por ejemplo, suponga que  $V_s = 12$  V. Entonces

$$12 = v_1 - v_2$$

Esta ecuación se relaciona con los valores de los dos voltajes de nodos.

A continuación, considere la figura 4.2-3c. En ella el elemento de circuito es un resistor. Aplicaremos la ley de Ohm para expresar la corriente del resistor,  $i$ , como una función de voltajes de nodos. En primer lugar, expresamos el voltaje del resistor como una función de voltajes de nodos,  $v_1 - v_2$ . Como el voltaje del resistor,  $v_1 - v_2$ , y la corriente,  $i$ , se apegan a la convención pasiva, aplicamos la ley de Ohm para escribir

$$i = \frac{v_1 - v_2}{R}$$

En ocasiones, conocemos el valor de la resistencia. Por ejemplo, cuando  $R = 8 \Omega$ , esta ecuación se convierte

$$i = \frac{v_1 - v_2}{8}$$

Esta ecuación expresa la corriente del resistor,  $i$ , como una función de los voltajes de nodos,  $v_1$  y  $v_2$ .

A continuación, escribamos ecuaciones nodales para representar el circuito que se muestra en la figura 4.2-4a. La entrada a este circuito en la corriente de la fuente de corriente,  $i_s$ . Para escribir ecuaciones nodales, primero expresaremos las corrientes del resistor como funciones de voltajes de nodos y después aplicaremos la ley de la corriente de Kirchhoff en los nodos a y b. Los voltajes del resistor se expresan como funciones de los voltajes de nodos en la figura 4.2-4b, y luego las corrientes del resistor se expresan como funciones de los voltajes de nodos en la figura 4.2-4c.

Las ecuaciones nodales que representan el circuito en la figura 4.2-4 se obtienen aplicando la ley de la corriente de Kirchhoff en los nodos a y b. Usar la KCL en el nodo a nos da

$$i_s = \frac{v_a}{R_2} + \frac{v_a - v_b}{R_1} \quad (4.2-1)$$

Del mismo modo, la ecuación de KCL en el nodo b es

$$\frac{v_a - v_b}{R_1} = \frac{v_b}{R_3} \quad (4.2-2)$$

Si  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = R_3 = 0.5 \Omega$  e  $i_s = 4$  A, las ecuaciones 4.2-1 y 4.2-2 se pueden reescribir así

$$4 = \frac{v_a - v_b}{1} + \frac{v_a}{0.5} \quad (4.2-3)$$

$$\frac{v_a - v_b}{1} = \frac{v_b}{0.5} \quad (4.2-4)$$

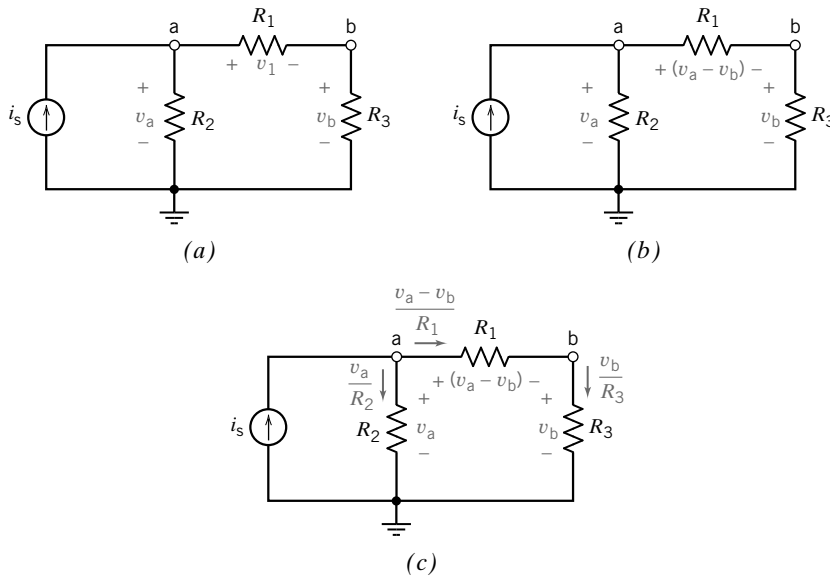


FIGURA 4.2-4

(a) Circuito con tres resistores. (b) Los voltajes de los resistores expresados como funciones de los voltajes de nodos. (c) Las corrientes de los resistores expresadas como funciones de los voltajes de nodos.

El despeje de la ecuación 4.2-4 para  $v_b$  resulta

$$v_b = \frac{v_a}{3} \quad (4.2-5)$$

Al sustituir la ecuación 4.2-5 en la ecuación 4.2-3 da

$$4 = v_a - \frac{v_a}{3} + 2v_a = \frac{8}{3}v_a \quad (4.2-6)$$

Al despejar la ecuación 4.2-6 para  $v_a$  da

$$v_a = \frac{3}{2} \text{ V}$$

Finalmente, la ecuación 4.2-5 da

$$v_b = \frac{1}{2} \text{ V}$$

Entonces, los voltajes de nodos de este circuito son

$$v_a = \frac{3}{2} \text{ V y } v_b = \frac{1}{2} \text{ V}$$

### EJEMPLO 4.2-1 Ecuaciones nodales

Determine el valor de la resistencia  $R$  en el circuito que se muestra en la figura 4.2-5a.

#### Solución

Sea  $v_a$  el voltaje del nodo  $a$ , y  $v_b$  el voltaje de nodos en el nodo  $b$ . El voltímetro en la figura 4.2-5 mide el valor del voltaje de nodos en el nodo  $b$ ,  $v_b$ . En la figura 4.2-5b, las corrientes de los resistores se expresan como funciones de los voltajes de nodos. Aplique la KCL en el nodo  $a$  para obtener

$$4 + \frac{v_a}{10} + \frac{v_a - v_b}{5} = 0$$

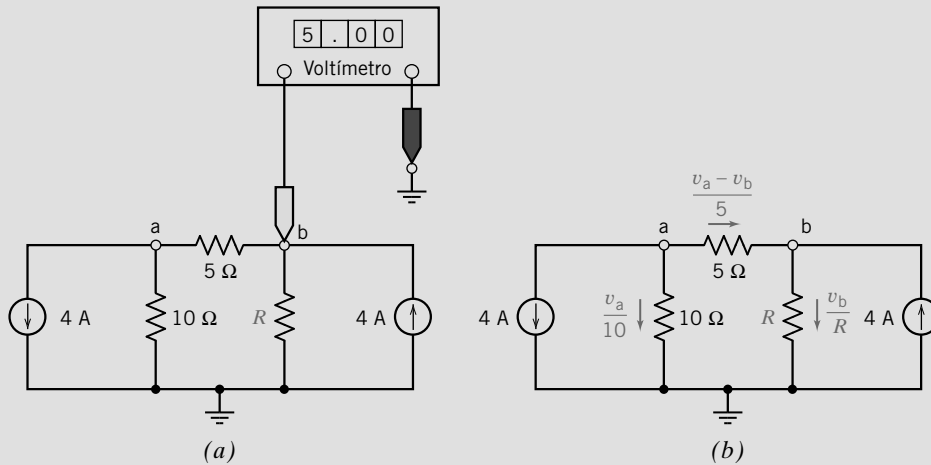


FIGURA 4.2-5 (a) Circuito para el ejemplo 4.2-1. (b) El circuito después de las corrientes del resistor se expresan como funciones de los voltajes de nodos.

Utilizar  $v_b = 5$  V da

$$4 + \frac{v_a}{10} + \frac{v_a - 5}{5} = 0$$

Al despejar  $v_a$ , obtenemos

$$v_a = -10 \text{ V}$$

A continuación, aplicar la KCL en el nodo b para obtener

$$-\left(\frac{v_a - v_b}{5}\right) + \frac{v_b}{R} - 4 = 0$$

Utilizando  $v_a = -10$  V y  $v_b = 5$  V resulta

$$-\left(\frac{-10 - 5}{5}\right) + \frac{5}{R} - 4 = 0$$

Finalmente, despejar  $R$ , da

$$R = 5 \Omega$$

### EJEMPLO 4.2-2 Ecuaciones nodales

Obtener las ecuaciones nodales para el circuito en la figura 4.2-6.

#### Solución

Sea  $v_a$  el voltaje de nodos en el nodo a,  $v_b$  el voltaje de nodos en el nodo b, y  $v_c$  el voltaje de nodos en el nodo c. Aplique la KCL al nodo a para obtener

$$-\left(\frac{v_a - v_c}{R_1}\right) + i_1 - \left(\frac{v_a - v_c}{R_2}\right) + i_2 - \left(\frac{v_a - v_b}{R_5}\right) = 0$$

Separe los términos de esta ecuación que impliquen  $v_a$  de los términos que impliquen  $v_b$  y los que incluyan  $v_c$  para obtener

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5}\right)v_a - \left(\frac{1}{R_5}\right)v_b - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)v_c = i_1 + i_2$$

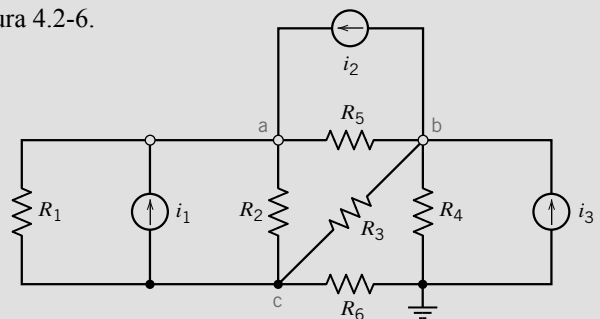


FIGURA 4.2-6 El circuito para el ejemplo 4.2-2.

Hay un patrón en las ecuaciones nodales de circuitos que contienen sólo resistores y fuentes de corriente. En la ecuación nodal en el nodo a, el coeficiente de  $v_a$  es la suma de los recíprocos de las resistencias de todos los resistores conectados al nodo a. El coeficiente de  $v_b$  es la resta de la suma de los recíprocos de las resistencias de todos los resistores conectados entre los nodos a y b. El coeficiente  $v_c$  es la resta de la suma de los recíprocos de las resistencias de todos los resistores conectados entre los nodos c y a. El lado derecho de esta ecuación es la suma algebraica de corrientes de la fuente de corriente dirigidas al nodo a.

Aplique la KCL en el nodo b para obtener

$$-i_2 + \left(\frac{v_a - v_b}{R_5}\right) - \left(\frac{v_b - v_c}{R_3}\right) - \left(\frac{v_b}{R_4}\right) + i_3 = 0$$

Separe los términos de esta ecuación que impliquen  $v_a$  de los términos que incluyan  $v_b$  y los términos que impliquen  $v_c$  para obtener

$$-\left(\frac{1}{R_5}\right)v_a + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)v_b - \left(\frac{1}{R_3}\right)v_c = i_3 - i_2$$

Como se esperaba, esta ecuación nodal se apega al patrón para ecuaciones nodales de circuitos que contienen solamente resistores y fuentes de corriente. En la ecuación nodal en el nodo b, el coeficiente de  $v_b$  es la suma de los recíprocos de las resistencias de los resistores conectados al nodo b. El coeficiente de  $v_a$  es la resta de la suma de los recíprocos de las resistencias de todos los resistores conectados entre los nodos a y b. El coeficiente de  $v_c$  es la resta de la suma de los recíprocos de las resistencias de todos los resistores conectados entre los nodos c y b. El lado derecho de esta ecuación es la suma algebraica de corrientes de la fuente de corriente dirigidas al nodo b.

Finalmente, utilice el patrón de ecuaciones nodales de circuitos que contiene solamente resistores y fuentes de corriente para obtener la ecuación nodal en el nodo c:

$$-\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)v_a - \left(\frac{1}{R_3}\right)v_b + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6}\right)v_c = i_1$$

### EJEMPLO 4.2-3 Ecuaciones nodales

Determine los voltajes de nodos para el circuito en la figura 4.2-6 cuando  $i_1 = 1$  A,  $i_2 = 2$  A,  $i_3 = 3$  A,  $R_1 = 5 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $R_3 = 10 \Omega$ ,  $R_4 = 4 \Omega$  y  $R_6 = 2 \Omega$ .

#### Solución

Las ecuaciones nodales son

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)v_a - \left(\frac{1}{5}\right)v_b - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right)v_c &= 1 + 2 \\ -\left(\frac{1}{5}\right)v_a + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)v_b - \left(\frac{1}{10}\right)v_c &= -2 + 3 \\ -\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right)v_a - \left(\frac{1}{10}\right)v_b + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2}\right)v_c &= -1 \\ 0.9v_a - 0.2v_b - 0.7v_c &= 3 \\ -0.2v_a + 0.55v_b - 0.1v_c &= 1 \\ -0.7v_a - 0.1v_b + 1.3v_c &= -1 \end{aligned}$$

Las ecuaciones nodales se pueden escribir utilizando matrices como

$$Av = b$$

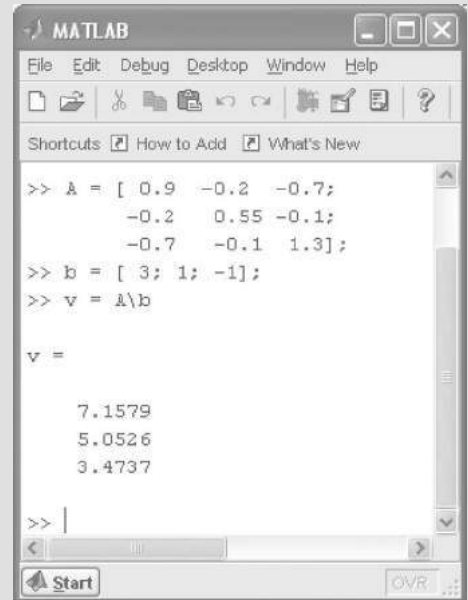
donde

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.7 \\ -0.2 & 0.55 & -0.1 \\ -0.7 & 0.1 & 1.3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad v = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix}$$

Esta ecuación de matriz se despeja utilizando MATLAB en la figura 4.2-7.

$$v = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.1579 \\ 5.0526 \\ 3.4737 \end{bmatrix}$$

En consecuencia,  $v_a = 7.1579$  V,  $v_b = 5.0526$  V y  $v_c = 3.4737$  V.



```

MATLAB
File Edit Debug Desktop Window Help
Shortcuts How to Add What's New
>> A = [ 0.9 -0.2 -0.7;
        -0.2 0.55 -0.1;
        -0.7 -0.1 1.3];
>> b = [ 3; 1; -1];
>> v = A\b

v =

    7.1579
    5.0526
    3.4737

>>
  
```

FIGURA 4.2-7 Uso de MATLAB para despejar la ecuación nodal del ejemplo 4.2-3.

**EJERCICIO 4.2-1** Determine los voltajes de nodos  $v_a$  y  $v_b$ , para el circuito de la figura E 4.2-1.

*Respuesta:*  $v_a = 3$  V y  $v_b = 11$  V

**EJERCICIO 4.2-2** Determine los voltajes de nodos  $v_a$  y  $v_b$ , para el circuito de la figura E 4.2-2.

*Respuesta:*  $v_a = -4/3$  V y  $v_b = -4$  V

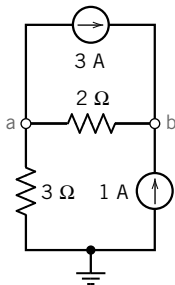


FIGURA E 4.2-1

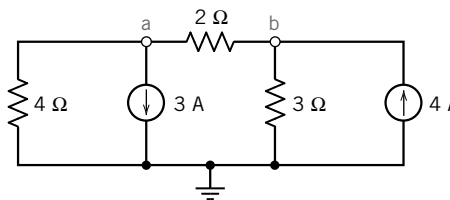


FIGURA E 4.2-2

### 4.3 ANÁLISIS DE VOLTAJES DE NODOS DE CIRCUITOS CON FUENTES DE CORRIENTE Y DE VOLTAJE

En la sección anterior determinamos los voltajes de nodos de circuitos que únicamente incluían fuentes de corriente independientes. En esta sección consideramos circuitos con fuentes tanto de corriente como de voltaje independientes.

En primer lugar consideremos un circuito con una fuente de voltaje entre tierra y uno de los nodos restantes. Puesto que hay libertad de seleccionar el nodo de referencia, esta disposición en particular se logra fácilmente.

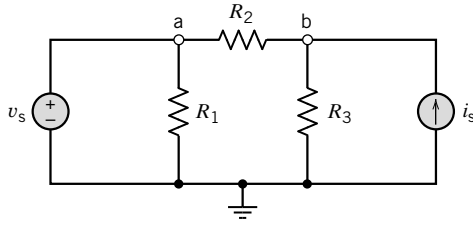


FIGURA 4.3-1 Circuito con una fuente de voltaje independiente y una fuente de corriente independiente

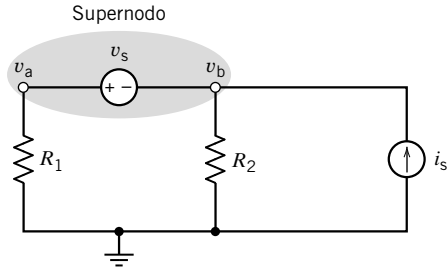


FIGURA 4.3-2 Circuito con un supernodo que incorpora  $v_a$  y  $v_b$ .

Un circuito como ese se muestra en la figura 4.3-1. Inmediatamente observamos que la fuente está conectada entre la terminal a y la tierra, por lo que

$$v_a = v_s$$

Entonces,  $v_a$  es conocida y sólo  $v_b$  es incógnita. Escribimos la ecuación de la KCL en el nodo b para obtener

$$i_s = \frac{v_b}{R_3} + \frac{v_b - v_a}{R_2}$$

Sin embargo,  $v_a = v_b$ , por lo que,

$$i_s = \frac{v_b}{R_3} + \frac{v_b - v_s}{R_2}$$

Entonces, al despejar la incógnita del voltaje de nodos  $v_b$ , obtenemos

$$v_b = \frac{R_2 R_3 i_s + R_3 v_s}{R_2 + R_3}$$

A continuación, consideremos el circuito de la figura 4.3-2, el cual incluye una fuente de voltaje entre dos nodos. Dado que se conoce el voltaje de la fuente, usamos la KVL para obtener

$$v_a - v_b = v_s$$

o bien

$$v_a - v_s = v_b$$

Para tener en cuenta que el voltaje de la fuente es conocido, consideramos tanto el nodo a como el b como parte de un nodo más grande representado por la elipse sombreada que se muestra en la figura 4.3-2. Requerimos un nodo más grande porque  $v_a$  y  $v_b$  son dependientes. Este nodo más grande suele denominarse *supernodo* o *nodo generalizado*. La KCL dice que la suma algebraica de las corrientes que entran a un supernodo es cero. Eso significa que aplicamos la KCL a un supernodo de la misma manera que se aplica la KCL a un nodo.

**Un supernodo** consta de dos nodos conectados por una fuente de voltaje independiente o dependiente.

Entonces podemos escribir la ecuación de la KCL en el supernodo como

$$\frac{v_a}{R_1} + \frac{v_b}{R_2} = i_s$$

Sin embargo, como  $v_a = v_s + v_b$ , tenemos

$$\frac{v_s + v_b}{R_1} + \frac{v_b}{R_2} = i_s$$

Entonces, despejando la incógnita del voltaje de nodos  $v_b$ , tenemos

$$v_b = \frac{R_1 R_2 i_s - R_2 v_s}{R_1 + R_2}$$

Podemos ahora compilar un resumen de ambos métodos de tratar con fuentes de voltaje independientes en un circuito, y deseamos despejar por medio de los métodos de voltaje de nodos, como se registra en la tabla 4.3-1.

**Tabla 4.3-1 Método de análisis del voltaje de nodos con una fuente de voltaje**

CASO	MÉTODO
1. La fuente de voltaje conecta el nodo $q$ y el nodo de referencia (tierra).	Establecer $v_q$ igual al voltaje de la fuente, teniendo en cuenta las polaridades y procesos para escribir la KCL en los nodos restantes.
2. La fuente de voltaje está entre dos nodos, $a$ y $b$ .	Crear un supernodo que incorpore a $a$ y $b$ e igualar a cero la suma de todas las corrientes en el supernodo.

### EJEMPLO 4.3-1 Ecuaciones nodales para un circuito que contiene fuentes de voltaje

Determine los voltajes de nodos para el circuito que se muestra en la figura 4.3-3.

#### Solución

En esta solución se ejemplifican los métodos resumidos en la tabla 4.3-1. La fuente de voltaje de 4 V conectada al nodo ejemplifica el método 1. La fuente de 8 V entre los nodos  $b$  y  $c$  ejemplifica el método 2.

Utilizando el método 1 para la fuente de 4 V, observamos que

$$v_a = -4 \text{ V}$$

Utilizando el método 2 para la fuente de 8 V, tenemos un supernodo en los nodos  $b$  y  $c$ . Los voltajes de nodos en los nodos  $b$  y  $c$  se relacionan por

$$v_b = v_c + 8$$

Al escribir una ecuación KCL par el supernodo tenemos

$$\frac{v_b - v_a}{6} + \frac{v_b}{12} + \frac{v_c}{12} = 2$$

o bien

$$3v_b + v_c = 24 + 2v_a$$

Utilizando  $v_a = -4 \text{ V}$  y  $v_b = v_c + 8$  para eliminar  $v_a$  y  $v_b$ , tenemos

$$3(v_c + 8) + v_c = 24 + 2(-4)$$

Despejando esta ecuación  $v_c$ , tenemos

$$v_c = -2 \text{ V}$$

Ahora calculamos que  $v_b$  sea

$$v_b = v_c + 8 = -2 + 8 = 6 \text{ V}$$

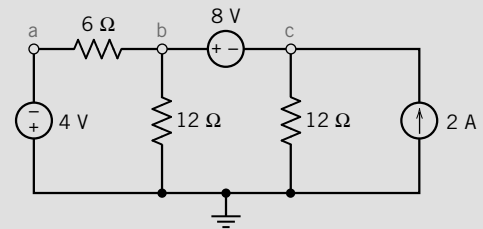


FIGURA 4.3-3 Un circuito que contiene dos fuentes de voltaje, de las cuales sólo una está conectada al nodo de referencia.

### EJEMPLO 4.3-2 Supernodos

Determine los valores de los voltajes de nodos,  $v_a$  y  $v_b$  para el circuito que se muestra en la figura 4.3-4.

#### Solución

Podemos escribir la primera ecuación nodal considerando la fuente de voltaje. El voltaje de la fuente de voltaje está relacionado con los voltajes de nodos por

$$v_b - v_a = 12 \Rightarrow v_b = v_a + 12$$

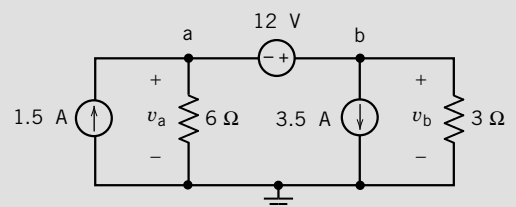


FIGURA 4.3-4 Circuito del ejemplo 4.3-2.



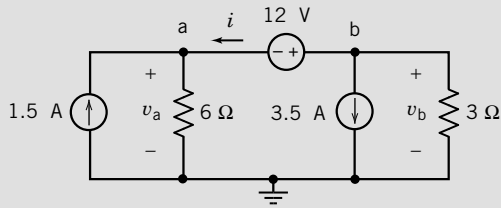


FIGURA 4.3-5 Método 1 para el ejemplo 4.3-2.

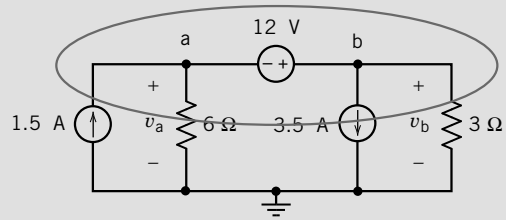


FIGURA 4.3-6 Método 2 para el ejemplo 4.3-2.

Para escribir la segunda ecuación nodal, debemos decidir qué hacer respecto de la corriente de la fuente de voltaje. (Observe que no es fácil expresar la corriente de la fuente de corriente en términos de voltajes de nodos.) En este ejemplo, ilustramos dos métodos de escritura de la segunda ecuación nodal.

**Método 1:** Asignar un nombre a la corriente de fuente de voltaje. Aplicar la KCL en ambos nodos de la fuente de voltaje. Eliminar la corriente de la fuente de voltaje de las ecuaciones KCL.

La figura 4.3-5 muestra el circuito después de etiquetar la corriente de la fuente de voltaje. La ecuación de la KCL en el nodo a es

$$1.5 + i = \frac{v_a}{6}$$

La ecuación KCL en el nodo b es

$$i + 3.5 + \frac{v_b}{3} = 0$$

La combinación de estas dos ecuaciones da

$$1.5 - \left(3.5 + \frac{v_b}{3}\right) = \frac{v_a}{6} \Rightarrow -2.0 = \frac{v_a}{6} + \frac{v_b}{3}$$

**Método 2:** Aplicar la KCL al supernodo que corresponda a la fuente de voltaje. En la figura 4.3-6 se muestra esta fuente que separa la fuente de voltaje y sus nodos del resto del circuito. (En este pequeño circuito, el resto del circuito es sólo la referencia del nodo.)

Aplicar la KCL al supernodo para obtener

$$1.5 = \frac{v_a}{6} + 3.5 + \frac{v_b}{3} \Rightarrow -2.0 = \frac{v_a}{6} + \frac{v_b}{3}$$

Ésta es la misma ecuación que se obtenía con el método 1. Aplicar la KCL al supernodo es un cortocircuito para hacer estas tres cosas:

1. Etiquetar la corriente de la fuente de voltaje como  $i$
2. Aplicar la KCL a los dos nodos de la fuente de voltaje
3. Eliminar  $i$  de las ecuaciones de la KCL

En resumen, las ecuaciones nodales son

$$v_b - v_a = 12$$

y

$$\frac{v_a}{6} + \frac{v_b}{3} = -2.0$$

Despejando las ecuaciones nodales queda

$$v_a = -12 \text{ V, y } v_b = 0 \text{ V}$$

(Debía sorprendernos que  $v_b$  sea 0 V, pero es fácil verificar que estos valores son correctos si los sustituimos en las ecuaciones nodales.)

### EJEMPLO 4.3-3 Ecuaciones nodales para un circuito que contiene fuentes de voltaje

Determine los voltajes de nodos para el circuito que se muestra en la figura 4.3-7.

#### Solución

Calcularemos los voltajes de nodos en este circuito escribiendo una ecuación KCL para el supernodo que corresponda a la fuente de voltaje de 10 V. Primero observamos que

$$v_b = -12 \text{ V}$$

y que

$$v_a = v_c + 10$$

Al escribir una ecuación KCL para el supernodo, tenemos

$$\frac{v_a - v_b}{10} + 2 + \frac{v_c - v_b}{40} = 5$$

o bien

$$4v_a + v_c - 5v_b = 120$$

Utilizando  $v_a = v_c + 10$  y  $v_b = -12$  para eliminar  $v_a$  y  $v_b$ , tenemos

$$4(v_c + 10) + v_c - 5(-12) = 120$$

Despejando esta ecuación para  $v_c$ , tenemos

$$v_c = 4 \text{ V}$$

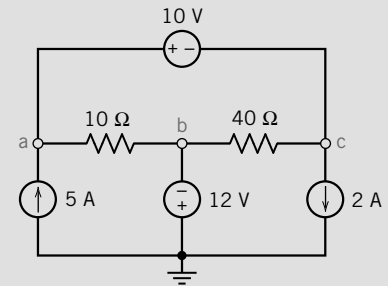


FIGURA 4.3-7 Circuito del ejemplo 4.3-3.

**EJERCICIO 4.3-1** Encuentre los voltajes de nodos para el circuito de la figura 4.3-1.

*Sugerencia:* Escriba una ecuación de KCL para el supernodo que corresponda a la fuente de voltaje de 10 V.

$$\text{Respuesta: } 2 + \frac{v_b + 10}{20} + \frac{v_b}{30} = 5 \Rightarrow v_b = 30 \text{ V} \quad \text{y} \quad v_a = 40 \text{ V}$$

**EJERCICIO 4.3-2** Encuentre los voltajes  $v_a$  y  $v_b$  para el circuito de la figura E 4.3-2.

$$\text{Respuesta: } \frac{(v_b + 8) - (-12)}{10} + \frac{v_b}{40} = 3 \Rightarrow v_b = 8 \text{ V} \quad \text{y} \quad v_a = 16 \text{ V}$$

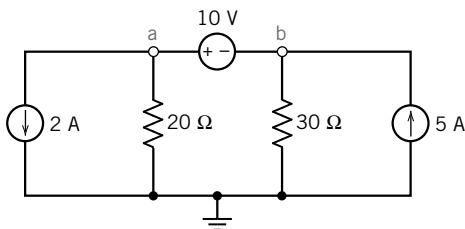


FIGURA E 4.3-1

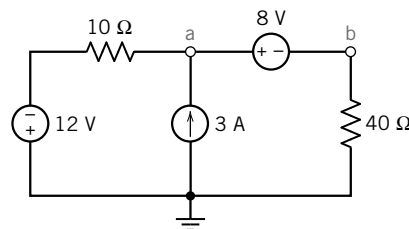


FIGURA E 4.3-2

## 4.4 ANÁLISIS DE VOLTAJES DE NODOS CON FUENTES DEPENDIENTES

Cuando un circuito contiene una fuente dependiente, la corriente o el voltaje controladores de esa fuente dependiente se deben expresar como una función de los voltajes de nodos.

Entonces es sencillo expresar la corriente o voltajes controlados como una función de los voltajes de nodos, y las ecuaciones nodales se obtienen mediante las técnicas descritas en las dos secciones anteriores.

### EJEMPLO 4.4-1 Ecuaciones nodales para un circuito que contiene una fuente dependiente

Determine los voltajes de nodos para el circuito que se muestra en la figura 4.4-1.

#### Solución

La corriente controladora de la fuente dependiente es  $i_x$ . Nuestra primera tarea es expresar esta corriente como una función de los voltajes de nodos:

$$i_x = \frac{v_a - v_b}{6}$$

El valor del voltaje de nodos en el nodo a lo establece la fuente de voltaje de 8 V para que sea

$$v_a = 8 \text{ V}$$

Por lo tanto,

$$i_x = \frac{8 - v_b}{6}$$

El voltaje de nodos en el nodo c es igual al voltaje de la fuente dependiente, por lo tanto,

$$v_c = 3i_x = 3 \left( \frac{8 - v_b}{6} \right) = 4 - \frac{v_b}{2} \quad (4.4-1)$$

A continuación, aplique la KCL al nodo b para obtener

$$\frac{8 - v_b}{6} + 2 = \frac{v_b - v_c}{3} \quad (4.4-2)$$

Utilizando la ecuación 4.4-1 para eliminar  $v_c$  de la ecuación 4.4-2 resulta

$$\frac{8 - v_b}{6} + 2 = \frac{v_b - \left(4 - \frac{v_b}{2}\right)}{3} = \frac{v_b}{2} - \frac{4}{3}$$

Despejando  $v_b$  resulta

$$v_b = 7 \text{ V}$$

Entonces,

$$v_c = 4 - \frac{v_b}{2} = \frac{1}{2} \text{ V}$$

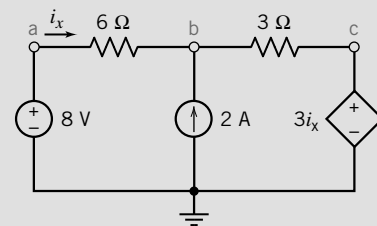


FIGURA 4.4-1 Un circuito con una CCVS.

**EJEMPLO 4.4-2**

Determine los voltajes de nodos para el circuito que se muestra en la figura 4.4.-2.

**Solución**

El voltaje controlador de la fuente dependiente es  $v_x$ . Nuestra primera tarea es expresar este voltaje como una función de los voltajes de nodos:

$$v_x = -v_a$$

La diferencia entre los voltajes de los nodos a y b la establece el voltaje de fuente dependiente:

$$v_a - v_b = 4 v_x = 4(-v_a) = -4 v_a$$

Simplificando esta ecuación resulta

$$v_b = 5 v_a \quad (4.4-3)$$

Al aplicar la KCL al supernodo correspondiente a la fuente de voltaje dependiente da

$$3 = \frac{v_a}{4} + \frac{v_b}{10} \quad (4.4-4)$$

Utilizando la ecuación 4.4-3 para eliminar  $v_b$  de la ecuación 4.4-4 da

$$3 = \frac{v_a}{4} + \frac{5v_a}{10} = \frac{3}{4}v_a$$

Despejando  $v_a$ , obtenemos

$$v_a = 4 \text{ V}$$

Finalmente,

$$v_b = 5 v_a = 20 \text{ V}$$

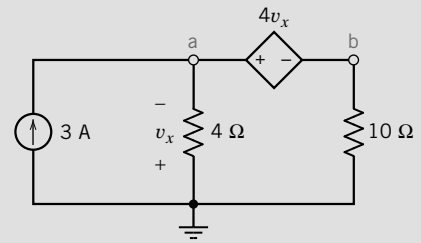


FIGURA 4.4-2 Un circuito con una VCVS.

**EJEMPLO 4.4-3**

Determine los voltajes de nodos correspondientes a los nodos a y b para el circuito que se muestra en la figura 4.4-3.

**Solución**

La corriente controladora de la fuente dependiente es  $i_a$ . Nuestra primera tarea es expresar esta corriente como una función de los voltajes de nodos. Aplique la KCL al nodo a para obtener

$$\frac{6 - v_a}{10} = i_a + \frac{v_a - v_b}{20}$$

El nodo a está conectado al nodo de referencia por un cortocircuito, de modo que  $v_a = 0 \text{ V}$ . Al sustituir este valor de  $v_a$  en la ecuación anterior y simplificando, resulta

$$i_a = \frac{12 + v_b}{20} \quad (4.4-5)$$

A continuación, aplique la KCL al nodo b para obtener

$$\frac{0 - v_b}{20} = 5 i_a \quad (4.4-6)$$

Al utilizar la ecuación 4.4-5 para eliminar  $i_a$  de la ecuación 4.4-6, resulta

$$\frac{0 - v_b}{20} = 5 \left( \frac{12 + v_b}{20} \right)$$

Despejando  $v_b$  resulta

$$v_b = -10 \text{ V}$$

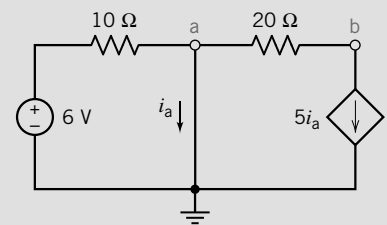


FIGURA 4.4-3 Circuito con una CCCS.

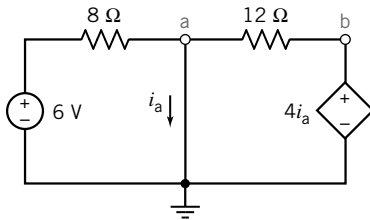


FIGURA E 4.4-1 Circuito con una CCVS.

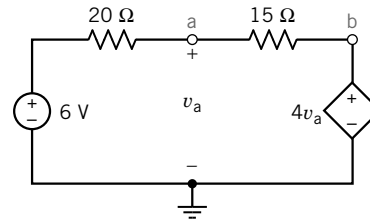


FIGURA E 4.42 Circuito con una VCVS.

**EJERCICIO 4.4-1** Encuentre el voltaje de nodos  $v_b$  para el circuito que se muestra en la figura E 4.4-1.

**Sugerencia:** Aplique la KCL al nodo a para expresar  $i_a$  como una función de los voltajes de nodos. Sustituya el resultado en  $v_b = 4i_a$  y despeje  $v_b$ .

$$\text{Respuesta: } -\frac{6}{8} + \frac{v_b}{4} - \frac{v_b}{12} = 0 \Rightarrow v_b = 4.5 \text{ V}$$

**EJERCICIO 4.4-2** Encuentre los voltajes de nodos para el circuito que se muestra en la figura E 4.4-2.

**Sugerencia:** El voltaje controlador de la fuente dependiente es un voltaje de nodos, de modo que ya está expresado como una función de los voltajes de nodos. Aplique una KCL en el nodo a.

$$\text{Respuesta: } \frac{v_a - 6}{20} + \frac{v_a - 4v_a}{15} = 0 \Rightarrow v_a = -2 \text{ V}$$

## 4.5 ANÁLISIS DE CORRIENTES DE ENLACES CON FUENTES DE VOLTAJE INDEPENDIENTES

En ésta y en las siguientes secciones consideramos el análisis de circuitos aplicando la ley del voltaje de Kirchhoff (KVL) en torno a una ruta cerrada. Una *ruta cerrada* (también conocida como *loop*) se traza empezando en un nodo y se continúa por una ruta de tal modo que se vuelva al nodo original sin pasar más de una vez por un nodo intermedio.

Un enlace es un caso especial en un circuito cerrado.

Un **enlace** es un circuito cerrado que no contiene ningún otro circuito cerrado dentro de sí.

El análisis de corriente de enlaces es aplicable sólo a redes planares. Un circuito planar es aquel que se puede trazar en un plano, sin cruces. Un ejemplo de un circuito no planar se muestra en la figura 4.5-1, en el cual el cruce está identificado y no se puede eliminar volviendo a dibujar el circuito. Para redes planares, los enlaces en la red se ven como ventanas. Hay cuatro enlaces en el circuito que se muestra en la figura 4.5-2.

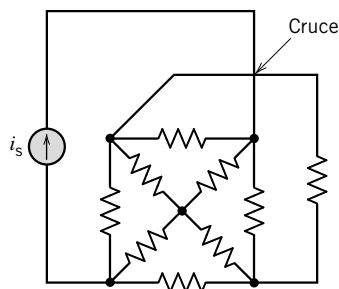


FIGURA 4.5-1 Circuito no planar con un cruce.

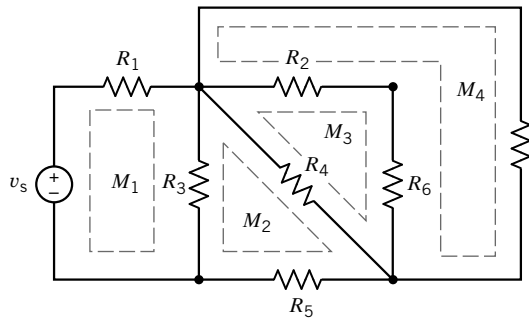


FIGURA 4.5-2 Circuito con cuatro enlaces. Cada enlace está identificado por líneas punteadas.

Están identificados como  $M_i$ . El enlace 2 contiene los elementos  $R_3$ ,  $R_4$  y  $R_5$ . Observe que el resistor  $R_3$  es común para el enlace 1 y el enlace 2.

Definimos una corriente de enlaces como la corriente que fluye a través de los elementos que constituyen el enlace. La figura 4.5-3a muestra un circuito que tiene dos enlaces con las corrientes de enlaces etiquetadas como  $i_1$  e  $i_2$ . Usaremos la convención de una corriente de enlaces que fluye en el sentido de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 4.5-3a. En la figura 4.5-3b se han insertado amperímetros en los enlaces para medir las corrientes de enlaces.

Uno de los métodos normales para analizar un circuito eléctrico es escribir y despejar un conjunto de ecuaciones simultáneas denominadas ecuaciones de enlaces. Las variables desconocidas en las ecuaciones de enlaces son las corrientes de enlaces del circuito. Determinamos los valores de las corrientes de enlaces despejando las ecuaciones de enlaces.

Para escribir un conjunto de ecuaciones de enlaces, se hacen dos cosas:

1. Expresar voltajes de elementos como funciones de las corrientes de enlaces
2. Aplicar la ley de los voltajes de Kirchhoff a cada uno de los enlaces del circuito

Considere el problema de expresar voltajes de elementos como funciones de corrientes de enlaces. Aun cuando nuestro objetivo es expresar *voltajes* de elementos como funciones de las corrientes de enlaces, empezaremos por expresar *corrientes* de elementos como funciones de las corrientes de enlaces. La figura 4.5-3b muestra cómo se hace esto. Los amperímetros en la figura 4.5-3b miden las corrientes de enlaces,  $i_1$  e  $i_2$ . Los elementos C y E están en el enlace derecho pero no en el izquierdo. Aplique la ley de la corriente de Kirchhoff en el nodo c y luego en el nodo f para ver que las corrientes en los elementos C y E son iguales a la corriente de enlaces del enlace de la derecha,  $i_2$ , como se

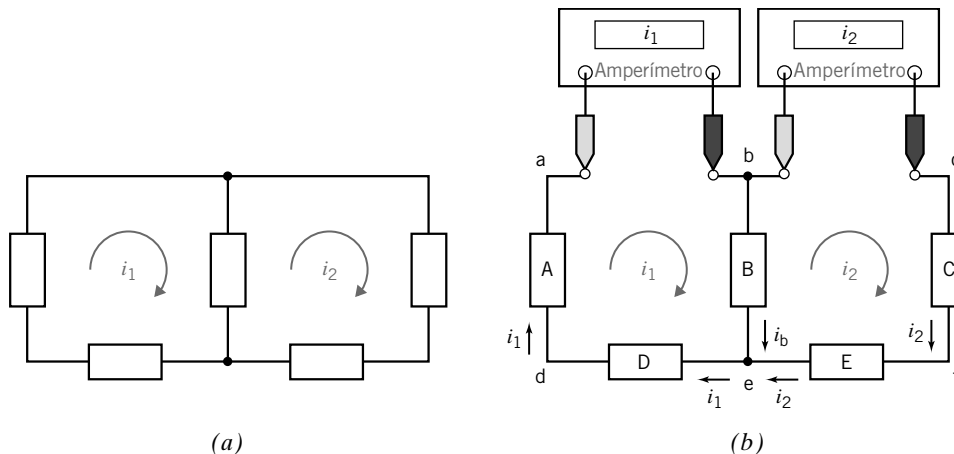


FIGURA 4.5-3 (a) Un circuito con dos enlaces. (b) Inserción de amperímetros para medir las corrientes de enlaces.

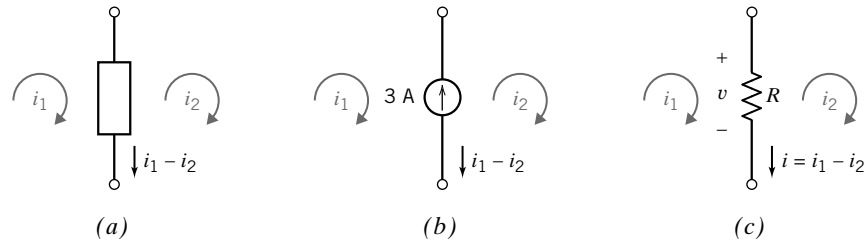


FIGURA 4.5-4 Las corrientes de enlaces,  $i_1$  e  $i_2$ , y la corriente de elemento,  $i_1 - i_2$ , de un (a) elemento de circuito genérico, (b) fuente de corriente y (c) resistor.

muestra en la figura 4.5-3b. Del mismo modo, los elementos A y D sólo están en el enlace izquierdo. Las corrientes en los elementos A y D son iguales a la corriente de enlaces del enlace de la izquierda,  $i_1$ , como se muestra en la figura 4.5-3b.

El elemento B está en ambos enlaces. La corriente del elemento B se ha etiquetado como  $i_b$ . Al aplicar la ley de la corriente de Kirchhoff en el nodo b en la figura 4.5-3b resulta

$$i_b = i_1 - i_2$$

Esta ecuación expresa la corriente del elemento,  $i_b$ , como una función de las corrientes de enlaces  $i_1$  e  $i_2$ .

La figura 4.5-4a muestra un elemento de circuito que está en dos enlaces. La corriente del elemento de circuito se expresa como una función de las corrientes de enlaces de los dos enlaces. El elemento de circuito en la figura 4.5-4a podría ser cualquier cosa: un resistor, una fuente de corriente, una fuente de voltaje dependiente, etcétera. En las figuras 4.5-4b y c, consideramos tipos específicos de elementos de circuito. En la figura 4.5-4b, el elemento de circuito es una fuente de corriente. La corriente del elemento se ha representado dos veces, una como la corriente de la fuente de corriente, 3 A, y otra como una función de corrientes de enlaces,  $i_1 - i_2$ . Observando que las direcciones de referencia para 3 A e  $i_1 - i_2$  son diferentes (una apunta hacia arriba, la otra hacia abajo), escribimos

$$-3 = i_1 - i_2$$

Esta ecuación relaciona los valores de dos de las corrientes de enlaces.

A continuación consideramos la figura 4.5-4c, en la cual el elemento de circuito es un resistor. Usaremos la ley de Ohm para expresar los voltajes del resistor,  $v$ , como funciones de las corrientes de enlaces. Primero, expresamos la corriente del resistor como una función de las corrientes de enlaces,  $i_1 - i_2$ . Observando que la corriente del resistor,  $i_1 - i_2$ , y el voltaje,  $v$ , se apegan a la convención pasiva, usamos la ley de Ohm para escribir

$$v = R(i_1 - i_2)$$

Con frecuencia, conocemos el valor de la resistencia. Por ejemplo, cuando  $R = 8 \Omega$ , esta ecuación se convierte en

$$v = 8(i_1 - i_2)$$

Esta ecuación expresa el voltaje del resistor,  $v$ , como una función de las corrientes de enlaces,  $i_1$  e  $i_2$ .

A continuación escribamos las ecuaciones de enlaces para representar el circuito que se muestra en la figura 4.5-5a. La entrada a este circuito es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . Para escribir ecuaciones de enlaces, antes debemos expresar los voltajes del resistor como funciones de las corrientes de enlaces y luego aplicar la ley del voltaje de Kirchhoff a los enlaces. Las corrientes del resistor se expresan como funciones de las corrientes de enlaces en la figura 4.5-5b, y luego los voltajes del resistor se expresan como funciones de las corrientes de enlaces en la figura 4.5-5c.

Podemos aplicar la ley del voltaje de Kirchhoff en torno a cada enlace. Utilizaremos la siguiente convención para obtener la suma algebraica de voltajes en torno a un enlace. Nos moveremos en torno al enlace en el sentido de las manecillas del reloj. Si encontramos el signo + de la polaridad de referencia del voltaje de un elemento antes del signo -, agregamos el voltaje. Por el contrario, si encontramos el signo - de la polaridad de referencia del voltaje de un elemento antes del signo +, restamos ese voltaje. Por lo tanto, para el circuito de la figura 4.5-5c, tenemos

$$\text{enlace 1: } -v_s + R_1 i_1 + R_3(i_1 - i_2) = 0 \quad (4.5-1)$$

$$\text{enlace 2: } -R_3(i_1 - i_2) + R_2 i_2 = 0 \quad (4.5-2)$$

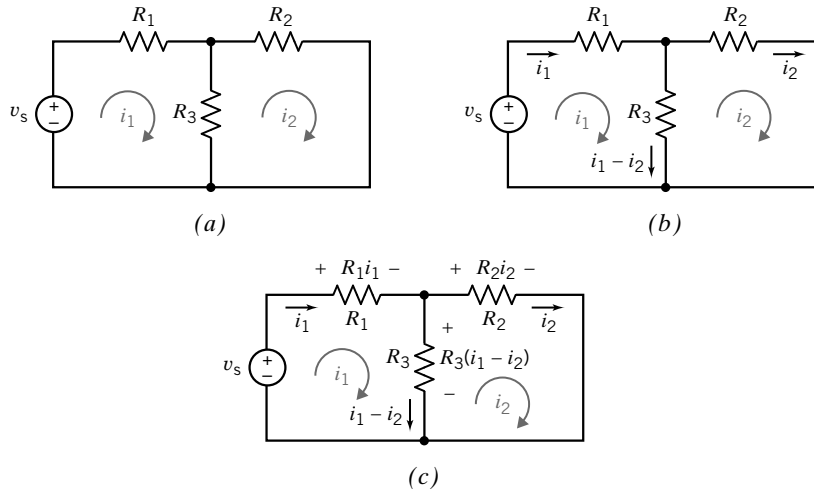


FIGURA 4.4-5 (a) Circuito. (b) Las corrientes del resistor expresadas como funciones de las corrientes de enlaces. (c) Los voltajes del resistor expresados como funciones de las corrientes de enlaces.

Observe que el voltaje a través de  $R_3$  en el enlace 1 está determinado por la ley de Ohm, donde

$$v = R_3 i_a = R_3 (i_1 - i_2)$$

donde  $i_a$  es la corriente del elemento real que fluye hacia abajo a través de  $R_3$ .

Las ecuaciones 4.5-1 y 4.5-2 nos permitirán determinar la corrientes de los dos enlaces,  $i_1$  e  $i_2$ . Reescribiendo las dos ecuaciones tenemos

$$i_1(R_1 + R_3) - i_2 R_3 = v_s$$

y

$$-i_1 R_3 + i_2(R_3 + R_2) = 0$$

Si  $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \Omega$ , tenemos

$$2i_1 - i_2 = v_s$$

y

$$-i_1 + 2i_2 = 0$$

Suma dos veces la primera ecuación a la segunda, obteniendo  $3i_1 = 2v_s$ . Entonces tenemos

$$i_1 = \frac{2v_s}{3} \text{ y } i_2 = \frac{v_s}{3}$$

Por lo tanto, hemos obtenido dos ecuaciones de corriente de enlaces independiente que ya están totalmente despejadas para las dos incógnitas. Si tenemos  $N$  enlaces y escribimos  $N$  ecuaciones en términos de  $N$  corrientes de enlaces, podemos obtener  $N$  ecuaciones de enlaces independientes. Este conjunto de  $N$  ecuaciones es independiente y por eso garantiza una solución para las  $N$  corrientes de enlaces.

Un circuito que contiene sólo fuentes de voltaje independiente y resistores da como resultado un formato específico de ecuaciones que se pueden obtener fácilmente. Piense en un circuito con tres enlaces, como se muestra en la figura 4.5-6. Asigne la dirección en el sentido de las manecillas del

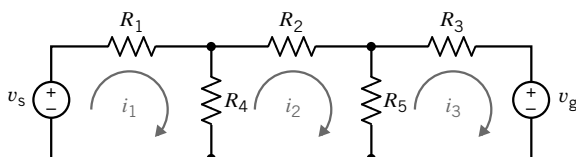


FIGURA 4.5-6 Circuito con tres corrientes de enlaces y dos fuentes de voltaje.



reloj a todas la corrientes de enlaces. Utilizando la KVL, obtenemos las tres ecuaciones de enlaces

$$\text{enlace 1: } -v_s + R_1 i_1 + R_4(i_1 - i_2) = 0$$

$$\text{enlace 2: } R_2 i_2 + R_5(i_2 - i_3) + R_4(i_2 - i_1) = 0$$

$$\text{enlace 3: } R_5(i_3 - i_2) + R_3 i_3 + v_g = 0$$

Estas tres ecuaciones de enlaces se pueden reescribir al conjuntar los coeficientes para cada corriente de enlaces como

$$\text{enlace 1: } (R_1 + R_4)i_1 - R_4 i_2 = v_s$$

$$\text{enlace 2: } -R_4 i_1 + R_5 + (R_4 + R_2 + R_5)i_2 - R_5 i_3 = 0$$

$$\text{enlace 3: } -R_5 i_2 + (R_3 + R_5)i_3 = -v_g$$

Por lo tanto, observamos que el coeficiente de la corriente de enlaces  $i_1$  para el primer enlace es la suma de resistencias en el enlace 1, y el coeficiente de la segunda corriente de enlaces es la negativa de la resistencia común a los enlaces 1 y 2. En general, planteamos que para la corriente de enlaces  $i_n$ , la ecuación para el  $n$ ésimo enlace con fuentes de voltaje independientes sólo se obtiene como sigue:

$$-\sum_{q=1}^Q R_k i_q + \sum_{j=1}^P R_j i_n = -\sum_{n=1}^N v_{sn} \quad (4.5-3)$$

Es decir, para el enlace  $n$  multiplicamos  $i_n$  por la suma de todas las resistencias  $R_j$  en torno al enlace. Entonces agregamos los términos respecto de las resistencias en común con otro enlace como la negativa de la resistencia de conexión  $R_k$ , multiplicada por la corriente de enlaces en el enlace adyacente  $i_q$  para todos los  $Q$  enlaces adyacentes. Finalmente, las fuentes de voltaje independientes en torno al circuito cerrado aparecen a la derecha de la ecuación como la negativa de las fuentes de voltaje encontradas conforme cruzamos el circuito cerrado en dirección a la corriente de enlaces. Recuerde que el resultado anterior se obtuvo suponiendo que todas las corrientes de enlaces fluyen en el sentido de las manecillas del reloj.

La ecuación matriz general para el análisis de la corriente de enlaces para fuentes de voltaje independiente en un circuito es

$$\mathbf{R}\mathbf{i} = \mathbf{v}_s \quad (4.5-4)$$

donde  $\mathbf{R}$  es una matriz simétrica con una diagonal que consta de la suma de las resistencias en cada enlace y los elementos fuera de la diagonal son la negativa de la suma de las resistencias comunes a dos enlaces. La matriz  $\mathbf{i}$  consta de la corriente de enlaces como

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ \cdot \\ i_N \end{bmatrix}$$

Para las  $N$  corrientes de enlaces, la matriz fuente  $\mathbf{v}_s$  es

$$\mathbf{v}_s = \begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ \vdots \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{sN} \end{bmatrix}$$

donde  $v_{sj}$  es la suma algebraica de los voltajes de las fuentes de voltaje en el  $j$ ésimo enlace con el signo apropiado asignado a cada voltaje.

Para el circuito de la figura 4.5-6 y la ecuación 4.5-4 matriz, tenemos

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} (R_1 + R_4) & -R_4 & 0 \\ -R_4 & (R_2 + R_4 + R_5) & -R_5 \\ 0 & -R_5 & (R_3 + R_5) \end{bmatrix}$$

Observe que  $\mathbf{R}$  es una matriz simétrica, como se esperaba.

**EJERCICIO 4.5-1** Determine el valor del voltaje medido por el voltímetro en la figura E 4.5-1.

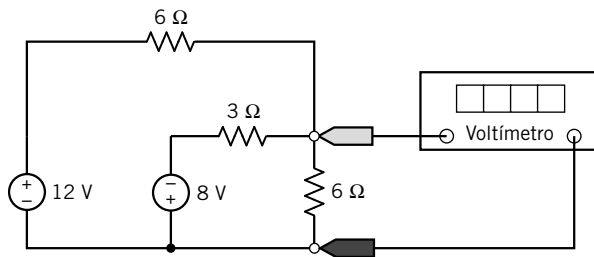


FIGURA E 4.5-1

**Respuesta:**  $-1\text{ V}$

## 4.6 ANÁLISIS DE CORRIENTES DE ENLACES CON FUENTES DE CORRIENTE Y DE VOLTAJE

Hasta aquí solamente hemos considerado circuitos con fuentes de voltaje independientes para análisis por el método de corrientes de enlaces. Si el circuito tiene una fuente de corriente independiente, como se muestra en la figura 4.6-1, aceptamos que la segunda corriente de enlaces es igual a la negativa de la corriente de la fuente de corriente. Entonces podemos escribir

$$i_2 = -i_s$$

y solamente necesitamos determinar la primera corriente de enlaces  $i_1$ . Escribiendo KVL para el primer enlace, obtenemos

$$(R_1 + R_2)i_1 - R_2i_2 = v_s$$

Dado que  $i_2 = -i_s$ , tenemos

$$i_1 = \frac{v_s - R_2i_s}{R_1 + R_2} \quad (4.6-1)$$

donde  $i_s$  y  $v_s$  son fuentes de magnitud conocida.

Si nos encontramos con un circuito como el que se muestra en la figura 4.6-2, tenemos una fuente de corriente  $i_s$  que tiene un voltaje desconocido  $v_{ab}$  a través de sus terminales. Fácilmente podemos observar que

$$i_2 - i_1 = i_s \quad (4.6-2)$$

al escribir la KCL en el nodo a. Las dos ecuaciones de enlaces son

$$\text{enlace 1: } R_1i_1 + v_{ab} = v_s \quad (4.6-3)$$

$$\text{enlace 2: } (R_2 + R_3)i_2 - v_{ab} = 0 \quad (4.6-4)$$

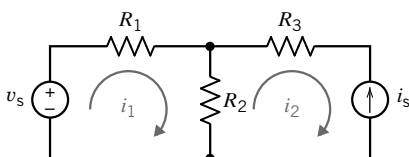


FIGURA 4.6-1 Circuito con una fuente de voltaje independiente y una fuente de corriente independiente.

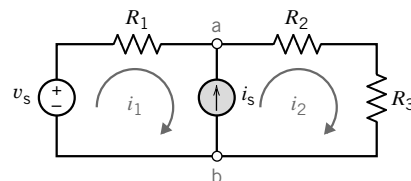


FIGURA 4.6-2 Circuito con una fuente de corriente independiente común a ambos enlaces.

Observamos que si agregamos las ecuaciones 4.6-3 y 4.6-4 eliminamos  $v_{ab}$ , obteniendo

$$R_1 i_1 + (R_2 + R_3) i_2 = v_s$$

Sin embargo, dado que  $i_2 = i_s + i_1$ , obtenemos

$$R_1 i_1 + (R_2 + R_3)(i_s + i_1) = v_s$$

o bien

$$i_1 = \frac{v_s - (R_2 + R_3)i_s}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (4.6-5)$$

Por lo tanto, nos inclinamos por las fuentes de corriente independientes al registrar la relación entre las corrientes de enlaces y la corriente de la fuente de corriente. Si la fuente de corriente influye en *sólo una* corriente de enlaces, escribimos la ecuación que relaciona esa corriente de enlaces con la corriente de la fuente de corriente y escribimos las ecuaciones KVL para los enlaces restantes. Si la fuente de corriente influye en dos corrientes de enlaces, escribimos la ecuación KVL para los dos enlaces, suponiendo un voltaje  $v_{ab}$  a través de las terminales de la fuente de corriente. Luego, agregando estas dos ecuaciones de enlaces, obtenemos una ecuación independiente de  $v_{ab}$ .

### EJEMPLO 4.6-1 Ecuaciones de enlaces

Considere el circuito de la figura 4.6-3, donde  $R_1 = R_2 = 1 \Omega$  y  $R_3 = 2 \Omega$ . Encuentre las corrientes de estos tres enlaces.

#### Solución

Como la fuente 4-A sólo está en el enlace 1, observamos que

$$i_1 = 4$$

Para la fuente 5-A tenemos

$$i_2 - i_3 = 5 \quad (4.6-6)$$

Si escribimos la KVL para los enlaces 2 y 3, obtenemos

$$\text{enlace 2: } R_1 (i_2 - i_1) + v_{ab} = 10 \quad (4.6-7)$$

$$\text{enlace 3: } R_2(i_3 - i_1) + R_3 i_3 - v_{ab} = 0 \quad (4.6-8)$$

Se sustituye  $i_1 = 4$  y se agregan las ecuaciones 4.6-7 y 4.6-8 para obtener

$$R_1(i_2 - 4) + R_2(i_3 - 4) + R_3 i_3 = 10 \quad (4.6-9)$$

De la ecuación 4.6-6,  $i_2 = 5 + i_3$ , sustituimos la ecuación 4.6-9 y obtenemos

$$R_1(5 + i_3 - 4) + R_2(i_3 - 4) + R_3 i_3 = 10$$

Utilizando los valores para los resistores, obtenemos

$$i_3 = \frac{13}{4} \text{ A} \quad \text{e} \quad i_2 = 5 + i_3 = \frac{33}{4} \text{ A}$$

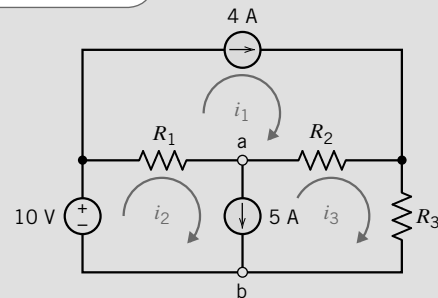


FIGURA 4.6-3 Circuito con dos fuentes de corriente independientes.

Otra técnica para el método de análisis de enlaces cuando una fuente de corriente es común a dos enlaces implica el concepto de un *superenlace*. Un *superenlace* es un enlace creado a partir de dos enlaces que tienen una fuente de corriente en común, como se muestra en la figura 4.6-4.

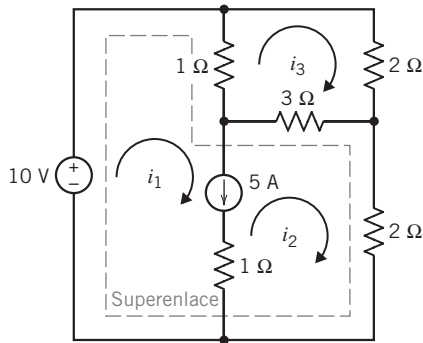


FIGURA 4.6-4 Circuito con un superenlace que incorpora los enlaces 1 y 2. El superenlace está indicado por la línea punteada.

Un **superenlace** es un enlace más grande, creado a partir de dos enlaces que tienen en común una fuente de corriente independiente o dependiente.

Por ejemplo, considere el circuito de la figura 4.6-4. La fuente de corriente 5-A es común a los enlaces 1 y 2. El superenlace consta de los enlaces internos 1 y 2. Al escribir la KVL en torno a la periferia del superenlace mostrado por la línea punteada, obtenemos

$$-10 + 1(i_1 - i_3) + 3(i_2 - i_3) + 2i_2 = 0$$

Para el enlace 3 tenemos

$$1(i_3 - i_1) + 2i_3 + 3(i_3 - i_2) = 0$$

Finalmente, la ecuación que relaciona la corriente de la fuente de corriente con las corrientes de enlaces es

$$i_1 - i_2 = 5$$

Entonces las tres ecuaciones se pueden reducir a

$$\begin{array}{lcl} \text{superenlace:} & 1i_1 + 5i_2 - 4i_3 & = 10 \\ \text{enlace 3:} & -1i_1 - 3i_2 + 6i_3 & = 0 \\ \text{fuente de corriente:} & 1i_1 - 1i_2 & = 5 \end{array}$$

Por consiguiente, al despejar simultáneamente las tres ecuaciones encontramos que  $i_2 = 2.5$  A,  $i_1 = 7.5$  A e  $i_3 = 2.5$  A.

El método de análisis de las corrientes de enlaces utilizado cuando hay una fuente de corriente se resume en la tabla 4.6-1.

Tabla 4.6-1 Métodos de análisis de corrientes de enlaces con una fuente de corriente

CASO	MÉTODO
1. Una fuente de corriente aparece en la periferia de sólo un enlace, $n$ .	Igualar la corriente de enlaces $i_n$ con la corriente de la fuente de corriente, teniendo en cuenta la dirección de la fuente de corriente.
2. Una fuente de corriente es común a dos enlaces.	A. Suponga un voltaje $v_{ab}$ a través de las terminales de la fuente de corriente, escriba las ecuaciones de la KVL para los dos enlaces, y agréguelas para eliminar $v_{ba}$ , o bien, B. Cree un superenlace en la periferia de los dos enlaces y escriba una ecuación de la KVL en torno a la periferia del superenlace. Además, escriba la ecuación restrictiva para las dos corrientes de enlaces en términos de la fuente de corriente.

## EJEMPLO 4.6-2 Superenlaces

Determine los valores de las corrientes de enlaces,  $i_1$  e  $i_2$ , para el circuito que se muestra en la figura 4.6-5.

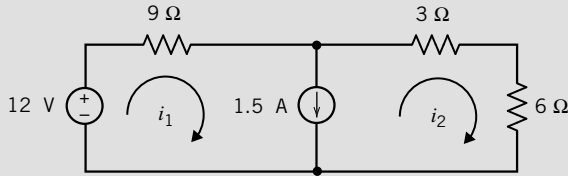


FIGURA 4.6-5 El circuito para el ejemplo 4.6-2.

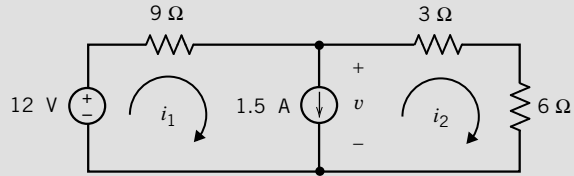


FIGURA 4.6-6 Método 1 del ejemplo 4.6-2.

## Solución

Podemos escribir la primera ecuación de enlaces considerando la fuente de corriente. La corriente de la fuente de corriente se relaciona con las corrientes de enlaces por

$$i_1 - i_2 = 1.5 \Rightarrow i_1 = i_2 + 1.5$$

Para escribir la segunda ecuación de enlaces debemos decidir que hacer respecto del voltaje de la fuente de corriente. (Observe que no es fácil expresar el voltaje de la fuente de corriente en términos de corrientes de enlaces.) En este ejemplo ilustramos dos métodos de escritura de la segunda ecuación de enlaces.

**Método 1:** Asignar un nombre al voltaje de la fuente de corriente. Aplicar la KVL a los dos enlaces. Eliminar el voltaje de la fuente de corriente desde las ecuaciones de la KVL.

La figura 4.6-6 muestra el circuito después de etiquetar el voltaje de la fuente de corriente. La ecuación de la KVL para el enlace 1 es

$$9i_1 + v - 12 = 0$$

La ecuación de la KVL para el enlace 2 es

$$3i_2 + 6i_2 - v = 0$$

La combinación de estas dos ecuaciones da

$$9i_1 + (3i_2 + 6i_2) - 12 = 0 \Rightarrow 9i_1 + 9i_2 = 12$$

**Método 2:** Aplicar la KVL al superenlace que corresponda a la fuente de corriente. Este superenlace que se muestra en la figura 4.6-7 es el perímetro de los dos enlaces, los cuales contienen cada uno la fuente de corriente. Aplicar la KVL al superenlace para obtener

$$9i_1 + 3i_2 + 6i_2 - 12 = 0 \Rightarrow 9i_1 + 9i_2 = 12$$

Ésta es la misma ecuación que se obtuvo con el método 1. Aplicar la KVL al superenlace es un atajo para hacer estas tres cosas:

1. Etiquetar el voltaje de la fuente de corriente como  $v$ .
2. Aplicar la KVL a los dos enlaces que contienen la fuente de corriente.
3. Eliminar  $v$  a partir de las ecuaciones de la KVL.

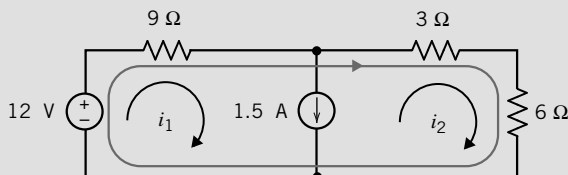


FIGURA 4.6-7 Método 2 del ejemplo 4.6-2.

En resumen, las ecuaciones de enlace son

$$i_1 = i_2 + 1.5$$

y

$$9i_1 + 9i_2 = 12$$

Despejar las ecuaciones nodales da por resultado

$$i_1 = 1.4167 \text{ A} \quad \text{e} \quad i_2 = -83.3 \text{ mA}$$

**EJERCICIO 4.6-1** Determine el valor del voltaje medido por el voltímetro en la figura E 4.6-1.

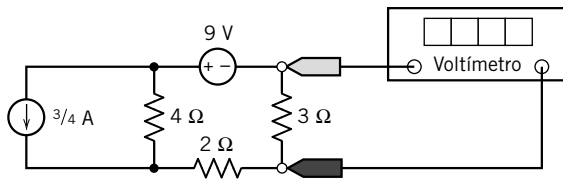


FIGURA E 4.6-1

**Sugerencia:** Escriba y despeje una ecuación de enlaces única para determinar la corriente en el resistor de 3 Ω.

**Respuesta:** -4 V.

**EJERCICIO 4.6-2** Determine el valor de la corriente medida por el amperímetro en la figura E 4.6-2.

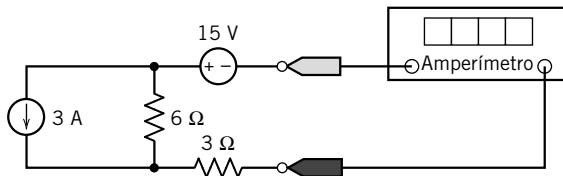


FIGURA E 4.6-2

**Sugerencia:** Escriba y despeje una ecuación de enlaces única.

**Respuesta:** -3.67 A

## 4.7 ANÁLISIS DE CORRIENTES DE ENLACES CON FUENTES DEPENDIENTES

Cuando un circuito contiene una fuente dependiente la corriente controladora o el voltaje de esa fuente dependiente se debe expresar como una función de las corrientes de enlaces.

De este modo, entonces ya es sencillo expresar la corriente controlada o el voltaje como una función de las corrientes de enlaces. Las ecuaciones de enlaces se pueden obtener entonces de la aplicación de la ley del voltaje de Kirchhoff para los enlaces del circuito.

### EJEMPLO 4.7-1 Ecuaciones de enlaces y fuentes dependientes

### EJEMPLO INTERACTIVO

Considere el circuito que se muestra en la figura 4.7-1a. Encuentre el valor del voltaje medido por el voltímetro.

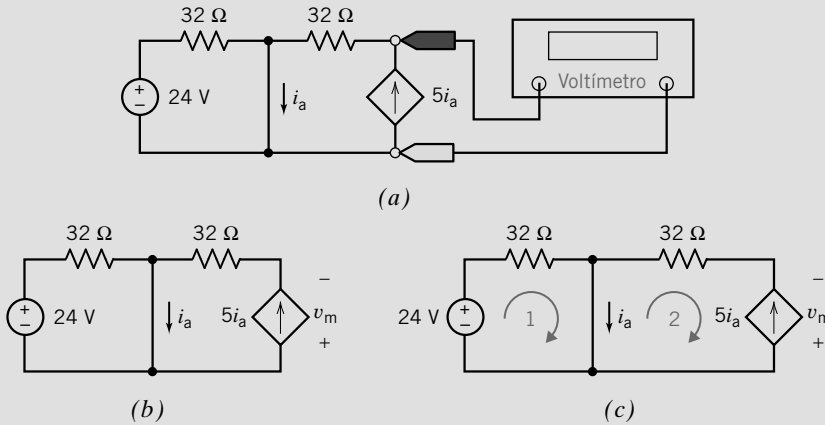


FIGURA 4.7-1 (a) El circuito considerado en el ejemplo 4.7-1. (b) El circuito luego de reemplazar el voltímetro por un circuito abierto. (c) El circuito después de haber etiquetado los enlaces.

### Solución

La figura 4.7-1b muestra el circuito después de que el voltímetro ha sido reemplazado por un circuito abierto equivalente y que el voltaje se ha etiquetado  $v_m$ , medido por el voltímetro. La figura 4.7-1c muestra el circuito luego de numerar los enlaces. Sean  $i_1$  e  $i_2$  las corrientes de enlaces en los enlaces 1 y 2, respectivamente.

La corriente controladora de la fuente dependiente,  $i_a$ , es la corriente en un cortocircuito. Éste es común para los enlaces 1 y 2. La corriente del cortocircuito se puede expresar en términos de las corrientes de enlaces como

$$i_a = i_1 - i_2$$

La fuente dependiente está en sólo un enlace, el enlace 2. La dirección de referencia de la fuente de corriente dependiente no concuerda con la dirección de referencia de  $i_2$ . En consecuencia,

$$5i_a = -i_2$$

Despejando  $i_2$ , resulta

$$i_2 = -5i_a = -5(i_1 - i_2)$$

Entonces,

$$-4i_2 = -5i_1 \Rightarrow i_2 = \frac{5}{4}i_1$$

Aplicar la KVL al enlace 1 para obtener

$$32i_1 - 24 = 0 \Rightarrow i_1 = \frac{3}{4}\text{A}$$

En consecuencia, el valor de  $i_2$  es

$$i_2 = \frac{5}{4}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{15}{16}\text{A}$$

Aplicar la KVL al enlace 2 para obtener

$$32i_2 - v_m = 0 \Rightarrow v_m = 32i_2$$

Finalmente,

$$v_m = 32\left(\frac{15}{16}\right) = 30\text{V}$$

### EJEMPLO 4.7-2 Ecuaciones de enlaces y fuentes dependientes

### EJEMPLO INTERACTIVO

Considere el circuito que se muestra en la figura 4.7-2a. Encuentre el valor de la ganancia,  $A$ , de la CCVS.

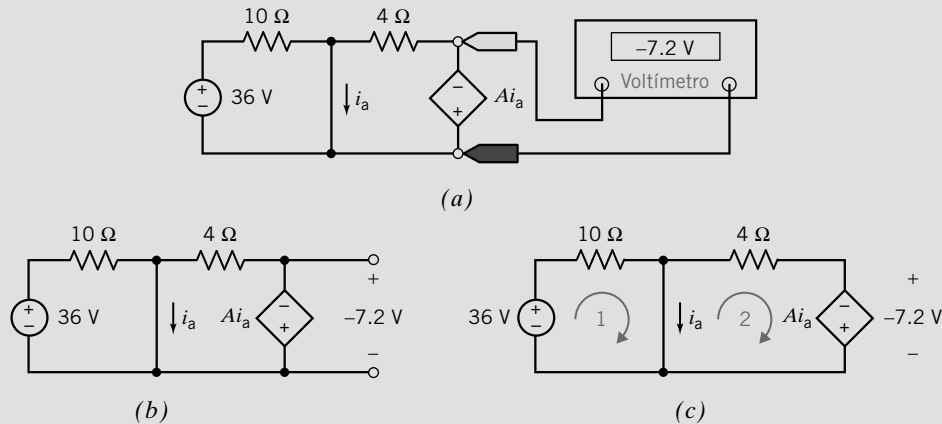


FIGURA 4.7-2 (a) El circuito considerado en el ejemplo 4.7-2. (b) El circuito después de reemplazar el voltímetro por un circuito abierto. (c) El circuito después de etiquetar los enlaces.

### Solución

La figura 4.7-2b muestra el circuito después de reemplazar el voltímetro por un circuito abierto equivalente y de etiquetar el voltaje medido por el voltímetro. La figura 4.7-2c muestra el circuito luego de enumerar los enlaces. Sean  $i_1$  e  $i_2$  las corrientes de enlaces en los enlaces 1 y 2, respectivamente.

El voltaje a través de la fuente dependiente está representado de dos maneras. Como  $Ai_a$  con el signo + de la dirección de referencia al final, y como  $-7.2$  V con el signo + arriba. En consecuencia,

$$Ai_a = -(-7.2) = 7.2$$

La corriente controladora de la fuente dependiente,  $i_a$ , es la corriente en un cortocircuito. Este cortocircuito es común para los enlaces 1 y 2. La corriente del cortocircuito se puede expresar en términos de las corrientes de enlaces como

$$i_a = i_1 - i_2$$

Aplique la KVL al enlace 1 para obtener

$$10i_1 - 36 = 0 \Rightarrow i_1 = 3.6 \text{ A}$$

Aplique la KVL al enlace 2 para obtener

$$4i_2 + (-7.2) = 0 \Rightarrow i_2 = 1.8 \text{ A}$$

Finalmente,

$$A = \frac{Ai_a}{i_a} = \frac{Ai_a}{i_1 - i_2} = \frac{7.2}{3.6 - 1.8} = 4 \text{ V/A}$$



## 4.8 COMPARACIÓN ENTRE EL MÉTODO DE VOLTAJES DE NODOS Y EL MÉTODO DE CORRIENTES DE ENLACES

El análisis de un circuito compuesto se suele completar tanto por el método de voltajes de nodos como por el de corrientes de enlaces. La ventaja de utilizar estos métodos son los procedimientos sistemáticos que se proporcionan para obtener las ecuaciones simultáneas.

En algunos casos se tiene preferencia por un método sobre el otro. Por ejemplo, cuando el circuito contiene sólo fuentes de voltaje, quizá sea más fácil utilizar el método de las corrientes de enlaces. Pero si el circuito sólo contiene fuentes de corriente, entonces lo más sencillo sería utilizar el método de voltajes de nodos.

Si un circuito tiene tanto fuentes de corriente como de voltaje, se puede analizar por cualquier método. Un enfoque puede ser comparar el número de ecuaciones que se requieren para cada método. Si el circuito contiene menos nodos que enlaces, lo sensato sería elegir el método de voltaje de nodos. Pero si el circuito consta de menos enlaces que nodos, entonces lo prudente es seguir el método de las corrientes de enlaces.

Otro punto a considerar al momento de seleccionar los métodos es qué información se requiere. Si lo que necesita es conocer las diversas corrientes, lo aconsejable sería proceder directamente con el análisis de corrientes de enlaces. Recuerde: el análisis de corrientes de enlaces sólo funciona para redes planares.

En ocasiones es útil determinar cuál método es el más apropiado para los requerimientos del problema y tener en consideración ambos métodos.

### EJEMPLO 4.8-1 Ecuaciones de enlaces

### EJEMPLO INTERACTIVO

Considere el circuito que se muestra en la figura 4.8-1. Encuentre el valor de la resistencia,  $R$ .

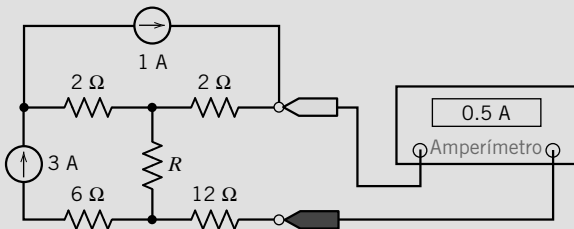


FIGURA 4.8-1 El circuito considerado en el ejemplo 4.8-1.

### Solución

La figura 4.8-2a muestra el circuito de la figura 4.8-1 después de reemplazar el amperímetro por un cortocircuito equivalente y etiquetar la corriente medida por el amperímetro. Este circuito se puede analizar empleando ecuaciones de enlaces o ecuaciones nodales. Para decidir cuál podría ser más fácil, primero se cuentan los nodos y los enlaces. Este circuito tiene cinco nodos. Seleccionar un nodo de referencia y luego aplicar la KCL a los otros

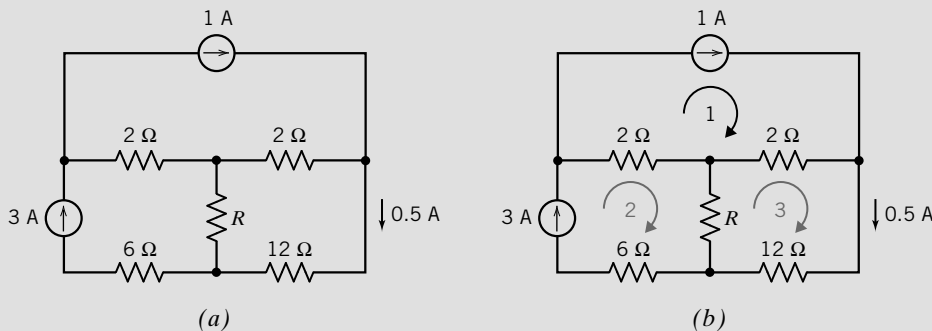


FIGURA 4.8-2 (a) El circuito de la figura 4.8-1, luego de reemplazar al amperímetro por un cortocircuito. (b) El circuito, luego de etiquetar los enlaces.

cuatro nodos producirá un conjunto de cuatro ecuaciones nodales. El circuito tiene tres enlaces. Aplicar la KVL a estos tres enlaces producirá un conjunto de tres ecuaciones de enlaces. Por consiguiente, analizar este circuito utilizando ecuaciones de enlaces en vez de ecuaciones nodales producirá un conjunto menor de ecuaciones. Además, observe que dos de las tres corrientes de enlaces se pueden determinar directamente por las corrientes de la fuente de corriente. Esto hace que las ecuaciones de enlaces sean más fáciles de despejar. Analizaremos este circuito mediante la escritura y despeje de ecuaciones de enlaces.

La figura 4.8-2b muestra el circuito después de numerar los enlaces. Sean  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  las corrientes de enlaces en los enlaces 1, 2 y 3, respectivamente. La corriente de enlaces  $i_1$  es igual a la corriente en la fuente de corriente 1-A, por lo que

$$i_1 = 1 \text{ A}$$

La corriente de enlaces  $i_2$  es igual a la corriente en la fuente de corriente de 3 A, de modo que

$$i_2 = 3 \text{ A}$$

La corriente de enlaces  $i_3$  es igual a la corriente en el cortocircuito que reemplazó al amperímetro, de modo que

$$i_3 = 0.5 \text{ A}$$

Aplicar la KVL al enlace 3 para obtener

$$2(i_3 - i_1) + 12(i_3) + R(i_3 - i_2) = 0$$

Sustituir los valores de las corrientes de enlaces da

$$2(0.5 - 1) + 12(0.5) + R(0.5 - 3) = 0 \Rightarrow R = 2 \Omega$$

### EJEMPLO 4.8-2 Ecuaciones nodales

### EJEMPLO INTERACTIVO

Considere el circuito que se muestra en la figura 4.8-3. Encuentre el valor de la resistencia,  $R$ .

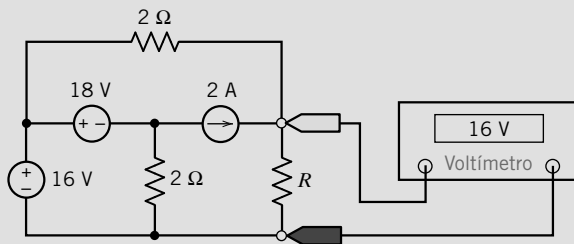


FIGURA 4.8-3 El circuito considerado en el ejemplo 4.8-2.

### Solución

La figura 4.8-4a muestra el circuito de la figura 4.8-3 después de reemplazar el voltímetro por un circuito abierto equivalente y etiquetar el voltaje medido por el voltímetro. Este circuito se puede analizar utilizando las ecuaciones de enlaces o las ecuaciones nodales. Para decidir cuál será la más fácil, primero se cuentan los nodos y los enlaces. Este circuito tiene cuatro nodos. Seleccionar un nodo de referencia y luego aplicar la KCL a los otros tres nodos producirá un conjunto de tres ecuaciones nodales. El circuito tiene tres enlaces. Aplicar la KVL a estos tres enlaces producirá un conjunto de tres ecuaciones de enlaces. Analizar este circuito utilizando ecuaciones de enlaces requiere el mismo número de ecuaciones como el que se requiere para analizar el circuito utilizando ecuaciones nodales. Observe que una de las tres corrientes de enlaces se puede determinar directamente a partir de la corriente de la fuente de corriente, pero dos de los tres voltajes de nodos se pueden determinar directamente a partir de los voltajes de la fuente de voltaje. Esto hace que las ecuaciones nodales se despejen más fácilmente. Analizaremos este circuito escribiendo y despejando ecuaciones nodales.

La figura 4.8-4b muestra el circuito después de seleccionar un nodo de referencia y enumerar los nodos restantes. Sean  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  los voltajes de nodos en los nodos 1, 2 y 3, respectivamente. El voltaje de la fuente de voltaje de 16 V se puede expresar en términos de voltajes de nodos como

$$16 = v_1 - 0 \Rightarrow v_1 = 16 \text{ V}$$

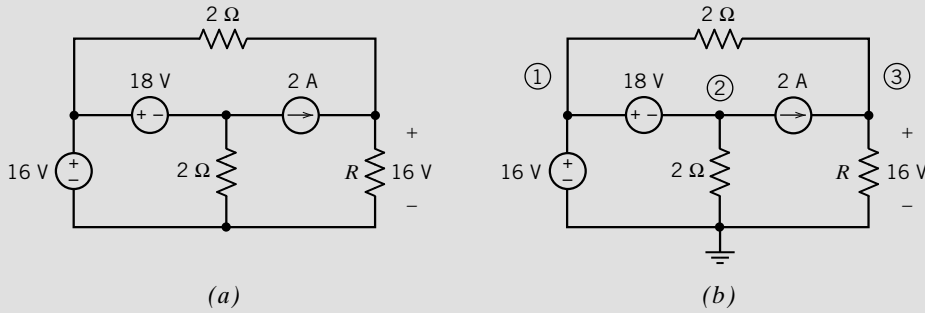


FIGURA 4.8-4 (a) El circuito de la figura 4.8-3 después de reemplazar el voltímetro por un circuito abierto. (b) El circuito después de etiquetar los nodos.

El voltaje de la fuente de voltaje de 18 V se puede expresar en términos de voltajes de nodos como

$$18 = v_1 - v_2 \Rightarrow 18 = 16 - v_2 \Rightarrow v_2 = -2 \text{ V}$$

El voltímetro mide el voltaje de nodos en el nodo 3, de modo que

$$v_3 = 16 \text{ V}$$

Aplicar la KCL al nodo 3 para obtener

$$\frac{v_1 - v_3}{2} + 2 = \frac{v_3}{R}$$

Sustituir los valores de los voltajes de nodos da

$$\frac{16 - 16}{2} + 2 = \frac{16}{R} \Rightarrow R = 8 \Omega$$

## 4.9 ANÁLISIS DE CORRIENTES DE ENLACES UTILIZANDO MATLAB

Hemos visto que los circuitos que contienen resistores y fuentes independientes o dependientes se pueden analizar de la siguiente manera:

1. Escribiendo un conjunto de ecuaciones nodales o de enlaces
2. Despejando simultáneamente esas ecuaciones

En esta sección usaremos el programa de computación MATLAB para despejar las ecuaciones.

Considere el circuito que se muestra en la figura 4.9-1a. Este circuito contiene un potenciómetro. En la figura 4.9-1b, el potenciómetro ha sido reemplazado por un modelo de potenciómetro.  $R_p$

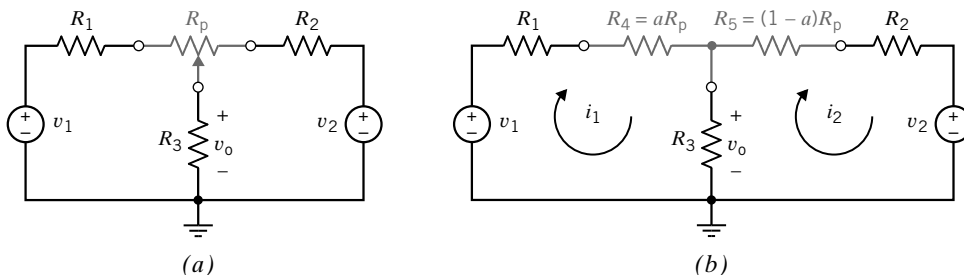


FIGURA 4.9-1 (a) Circuito que contiene un potenciómetro y (b) un circuito equivalente formado por el reemplazo del potenciómetro con un modelo de potenciómetro ( $0 < a < 1$ ).

es la resistencia del potenciómetro. El parámetro  $a$  varía de 0 a 1 en cuanto el contacto deslizante del potenciómetro se mueve de un extremo al otro del potenciómetro. Las resistencias  $R_4$  y  $R_5$  se describen mediante las ecuaciones

$$R_4 = aR_p \quad (4.9-1)$$

y

$$R_5 = (1 - a)R_p \quad (4.9-2)$$

Nuestro objetivo es analizar este circuito para determinar cómo cambia el voltaje de salida al cambiar la posición del contacto deslizante del potenciómetro.

```
% mesh.m solves mesh equations
%-----
% Enter values of the parameters that describe the circuit.
%-----
% circuit parameters
R1=1000;      % ohms
R2=1000;      % ohms
R3=5000;      % ohms
V1= 15;       % volts
V2=-15;       % volts

% potentiometer parameters
Rp=20e3;      % ohms
%-----
% the parameter a varies from 0 to 1 in 0.05 increments.
%-----
a=0:0.05:1;   % dimensionless

for k=1:length(a)
%-----
% Here is the mesh equation, RI=V:
%-----
R = [R1+a(k)*Rp+R3      -R3;          % -----
     -R3      (1-a(k))*Rp+R2+R3];    % eqn.
V = [ V1;              % 4.9-6
     -V2];             % -----

%-----
% Tell MATLAB to solve the mesh equation:
%-----
I = V'/R;

%-----
% Calculate the output voltage from the mesh currents.
%-----
Vo(k) = R3*(I(1) - I(2)); % eqn. 4.9-7

end

%-----
% Plot Vo versus a
%-----
plot(a, Vo)
axis([0 1 -15 15])
xlabel('a, dimensionless')
ylabel('Vo, V')
```

FIGURA 4.9-2 Archivo de entrada de MATLAB que se utilizó para analizar el circuito que se muestra en la figura 4.9-1.

El circuito en la figura 4.9-1b se puede representar por ecuaciones de enlaces como

$$\begin{aligned} R_1 i_1 + R_4 i_1 + R_3(i_1 - i_2) - v_1 &= 0 \\ R_5 i_2 + R_2 i_2 + [v_2 - R_3(i_1 - i_2)] &= 0 \end{aligned} \quad (4.9-3)$$

Estas ecuaciones de enlaces se pueden reacomodar como

$$\begin{aligned} (R_1 + R_4 + R_3)i_1 - R_3 i_2 &= v_1 \\ -R_3 i_1 + (R_5 + R_2 + R_3)i_2 &= -v_2 \end{aligned} \quad (4.9-4)$$

Sustituyendo las ecuaciones 4.9-1 y 4.9-2 en la ecuación 4.9-4 resulta

$$\begin{aligned} (R_1 + aR_p + R_3)i_1 - R_3 i_2 &= v_1 \\ -R_3 i_1 + [(1-a)R_p + R_2 + R_3]i_2 &= -v_2 \end{aligned} \quad (4.9-5)$$

La ecuación 4.9-5 se puede escribir usando matrices como

$$\begin{bmatrix} R_1 + aR_p + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & (1-a)R_p + R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix} \quad (4.9-6)$$

Enseguida,  $i_1$  e  $i_2$  se calculan utilizando MATLAB para despejar la ecuación de enlaces, 4.9-6. Luego se calcula el voltaje de salida como

$$v_o = R_3(i_1 - i_2) \quad (4.9-7)$$

La figura 4.9-2 muestra el archivo de entrada de MATLAB. El parámetro  $a$  varía de 0 a 1 en incrementos de 0.05. En cada valor de  $a$ , MATLAB despeja la ecuación 4.9-6 y luego utiliza la ecuación 4.9.7 para calcular el voltaje de salida. Finalmente, MATLAB produce el trazo de  $v_o$  comparado con  $a$  que se muestra en la figura 4.9-3.

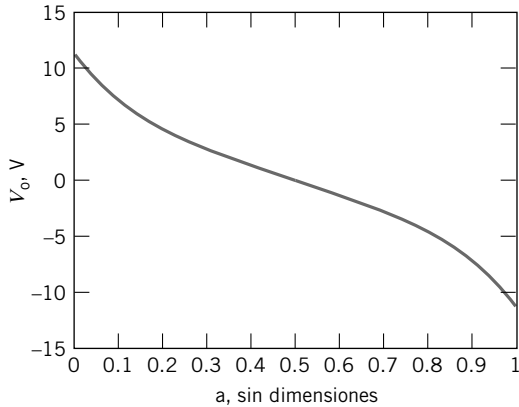


FIGURA 4.9-3 Trazo de  $v_o$  versus  $a$  para el circuito que se muestra en la figura 4.9.1.

## 4.10 USO DE PSPICE PARA DETERMINAR LOS VOLTAJES DE NODOS Y LAS CORRIENTES DE ENLACES

Para determinar los voltajes de nodos de un circuito utilizando PSpice,

1. Dibujamos el circuito en el área de trabajo de OrCAD Capture
2. Especificamos una simulación 'Bias Point'
3. Ejecutamos la simulación

PSpice etiquetará los nodos con los valores de los voltajes de nodos.

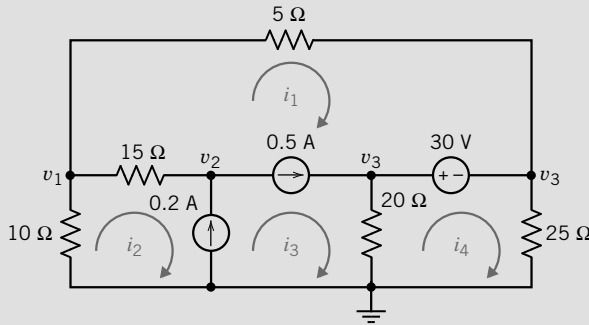
Se necesita un paso extra para utilizar PSpice para determinar las corrientes. PSpice no etiqueta los valores de las corrientes de enlaces, pero proporciona el valor de la corriente en cada fuente de voltaje. Recuerde que una fuente de voltaje de 0 V equivale a un cortocircuito. En consecuencia, podemos insertar fuentes de voltaje de 0 V en el circuito sin alterar los valores de las corrientes de enlaces. Insertaremos esas fuentes en el circuito de tal manera que sus corrientes sean también corrientes de enlaces. Para determinar las corrientes de enlaces de un circuito de cd usando PSpice,

1. Dibujamos el circuito en el área de trabajo de OrCAD Capture.
2. Agregamos fuentes de voltaje de 0 V para medir las corrientes de enlaces.
3. Especificamos un simulación Bias Point.
4. Ejecutamos la simulación.

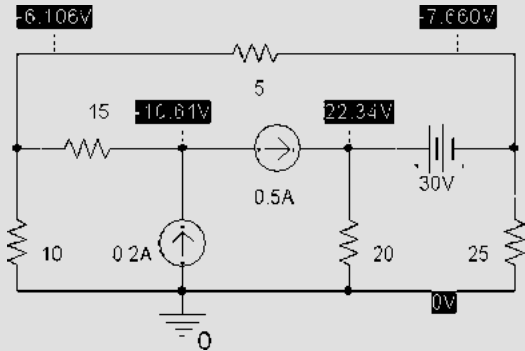
PSpice escribirá las corrientes de fuente de voltaje en el archivo de salida.

**EJEMPLO 4.10-1** Uso de PSpice para encontrar voltajes de nodos y corrientes de enlaces

Utilice PSpice para determinar los valores de los voltajes de nodo y las corrientes de enlaces para el circuito que se muestra en la figura 4.10-1.



**FIGURA 4.10-1** Circuito con voltajes de nodos  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  y  $v_4$  y corrientes de enlaces  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  e  $i_4$ .



**FIGURA 4.10-2** El circuito de la figura 4.10-1 dibujado en el área de trabajo de OrCAD. Los números blancos que se muestran en los fondos negros son los valores de los voltajes de nodos.

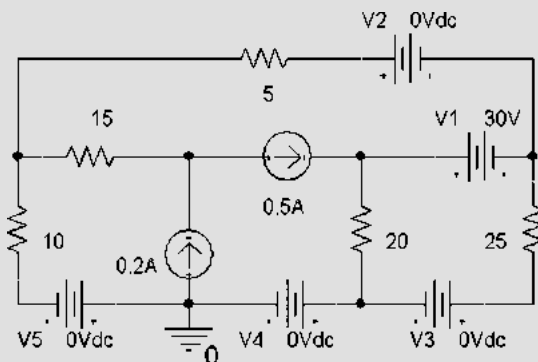
**Solución**

La figura 4.10-2 muestra el resultado de dibujar el circuito en el área de trabajo de OrCAD (vea Apéndice A) y ejecutar una simulación Bias Point. (En la barra de menús de OrCAD seleccione el menú PSpice y haga clic en la opción New Simulation Profile; luego seleccione Bias Point de la lista descendente Analysis Type en el cuadro de diálogo Simulation Settings, para especificar un punto de simulación de desvío. En la barra de menús de OrCAD Capture, seleccione el menú PSpice, y haga clic en la opción Run Simulation Profile para ejecutar la simulación.) PSpice etiqueta los nodos con los valores de los voltajes de nodos mediante números blancos que destacan sobre fondos negros. Al comparar las figuras 4.10-1 y 4.10-2 vemos que los voltajes de nodos son

$$v_1 = -6.106 \text{ V}, v_2 = -10.61 \text{ V}, v_3 = -22.34 \text{ V} \text{ y } v_4 = -7.660 \text{ V}.$$

La figura 4.10-3 muestra el circuito de la figura 4.10-2 después de insertar una fuente de corriente de 0 V en el exterior de cada enlace. Las corrientes en estas fuentes de 0 V serán las corrientes de enlaces que se muestran en la figura 4.10-1. En particular, la fuente V2 mide la corriente de enlaces  $i_1$ , la fuente V3 mide la corriente de enlaces  $i_2$ , la fuente V4 mide la corriente de enlaces  $i_3$ , y la fuente V5 mide la corriente de enlaces  $i_4$ .

Luego ejecute una vez más la simulación (de la barra de menús de OrCAD seleccione el menú PSpice y haga clic en la opción Run), OrCAD Capture abrirá una ventana Schematics. En la barra de menús de la ventana Schematics seleccione el menú View y haga clic en la opción Output File. Mueva hacia abajo la barra deslizadora



**FIGURA 4.10-3** Circuito de la figura 4.10-1 dibujado en el taller de OrCAD con fuentes de voltaje de 0 V agregadas para medir las corrientes de enlaces.

a través del archivo de salida para encontrar las corrientes en las fuentes de voltajes:

```

VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME             CURRENT
V_V1             - 6.170E - 01
V_V2             3.106E - 01
V_V3             - 3.064E - 01
V_V4             8.106E - 01
V_V5             6.106E - 01

TOTAL POWER DISSIPATION  1.85E + 01  WATTS

JOB CONCLUDED

```

PSpice utiliza la convención pasiva para la corriente y el voltaje de todos los elementos de circuito, incluyendo las fuentes de voltaje. Observando los signos + y - en los símbolos de la fuente de voltaje en la figura 4.10-3, vemos que las corrientes provistas por PSpice se dirigen de izquierda a derecha en las fuentes V1 y V2, y de derecha a izquierda en las fuentes V3, V4 y V5. En particular, las corrientes de enlaces son

$$i_1 = 0.3106 \text{ A}, i_2 = 0.6106 \text{ A}, i_3 = 0.8106 \text{ A} \text{ e } i_4 = -0.3064 \text{ A}.$$

#### 4.11 ¿CÓMO LO PODEMOS COMPROBAR...?

A los ingenieros se les suele solicitar comprobar que la solución de un problema sea la correcta. Por ejemplo, las soluciones propuestas para problemas de diseño se deben comprobar para confirmar que se ha cumplido con todas las especificaciones. Además, se deben revisar los resultados de la computadora para protegerse contra errores de captura de datos, así como las exigencias de los comerciantes, las cuales se deben analizar a fondo.

También a los estudiantes de ingeniería se les pide que verifiquen la exactitud de sus trabajos. Por ejemplo, tomarse un breve lapso antes de terminar un examen permitiría dar una vista rápida e identificar esas soluciones que podrían requerir un poco más de trabajo.

Los siguientes ejemplos ilustran técnicas útiles para comprobar las soluciones a los diversos problemas analizados en este capítulo.

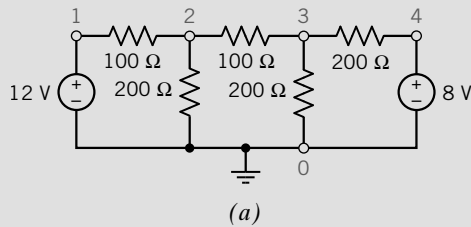
##### EJEMPLO 4.11-1 ¿Cómo podemos comprobar los voltajes de nodos?

El circuito que se muestra en la figura 4.11-1a se analizó utilizando PSpice. El archivo de salida de PSpice, figura 4.11-1b, incluye los voltajes de nodos del circuito. **¿Cómo podemos comprobar** que esos voltajes de nodos son correctos?

##### Solución

La ecuación nodal que corresponde al nodo 2 es

$$\frac{V(2) - V(1)}{100} + \frac{V(2)}{200} + \frac{V(2) - V(3)}{100} = 0$$



## Node Voltage Example

```
V1 1 0 12
R1 1 2 100
R2 2 0 200
R3 2 3 100
R4 3 0 200
R5 3 4 200
V2 4 0 8
```

```
.END
```

```
NODE VOLTAGES
```

```
NODE VOLTAGE
```

```
(1) 12.0000
(2) 7.2727
(3) 5.0909
(4) 8.0000
```

(b)

**FIGURA 4.11-1** (a) Circuito y (b) los voltajes de nodos calculados utilizando PSpice. El nodo inferior se ha elegido como el nodo de referencia, el cual está indicado por el símbolo de tierra y el número de nodo 0. Los voltajes y los resistores tienen unidades de voltajes y ohmios, respectivamente.

donde, por ejemplo,  $V(2)$  es el voltaje de nodos en el nodo 2. Cuando los voltajes de nodos de la figura 4.11-1b están sustituidos en el lado izquierdo de esta ecuación, el resultado es

$$\frac{7.2727 - 12}{100} + \frac{7.2727}{200} + \frac{7.2727 - 5.0909}{100} = 0.011$$

El lado derecho de esa ecuación podría ser 0 en vez de 0.011. Al parecer algo anda mal. ¿Una corriente de 0.011 no es significativa? En este caso probablemente no. Si los voltajes de nodos fueran correctos, entonces las corrientes de los resistores de  $100\ \Omega$  serían de 0.047 A y 0.022 A, respectivamente. La corriente de 0.011 A no parece insignificante si se le compara con las corrientes de 0.047 A y 0.022 A.

¿Es posible que PSpice haya calculado incorrectamente los voltajes de nodos? Quizá no, pero el archivo de entrada de PSpice podría contener errores. En este caso, el valor de la resistencia conectada entre los nodos 2 y 3 se especificó erróneamente a  $200\ \Omega$ . Después de cambiar esta resistencia a  $100\ \Omega$ , PSpice calcula que los voltajes de nodos deben ser

$$V(1) = 12.0, \quad V(2) = 7.0, \quad V(3) = 5.5, \quad V(4) = 8.0$$

Al sustituir estos voltajes en las ecuaciones nodales resulta

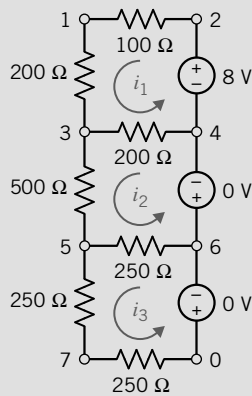
$$\frac{7.0 - 12.0}{100} + \frac{7.0}{200} + \frac{7.0 - 5.5}{100} = 0.0$$

por lo que estos voltajes de nodos satisfacen la ecuación nodal que corresponde al nodo 2.



### EJEMPLO 4.11-2 ¿Cómo podemos comprobar las corrientes de enlaces?

El circuito que se muestra en la figura 4.11-2a se analizó utilizando PSpice. El archivo de salida de PSpice, figura 4.11-2b, incluye las corrientes de enlaces del circuito. ¿Cómo podemos comprobar que estas corrientes de enlaces son correctas?



(a)

#### Mesh Current Example

R1	1	2	100
R2	1	3	200
V1	2	4	8
R3	3	4	200
R5	3	5	500
V2	4	6	0
R6	5	6	250
R7	5	7	250
V3	6	0	0
R8	7	0	250

.END

#### MESH CURRENTS

NAME	CURRENT
I1	1.763E-02
I2	-4.068E-03
I3	-1.356E-03

(b)

FIGURA 4.11-2 (a) Un circuito y (b) las corrientes de enlaces calculadas utilizando PSpice. Los voltajes y resistencias están dados en voltios y ohmios respectivamente.

(El archivo de salida de PSpice incluirá las corrientes a través de las fuentes de voltaje. Recuerde que PSpice utiliza la convención pasiva, de modo que la corriente en la fuente de 8 V será  $-i_1$  en vez de  $i_1$ . Las dos fuentes de 0 V se han agregado para incluir las corrientes de enlaces  $i_2$  e  $i_3$  en el archivo de salida de PSpice.)

### Solución

La ecuación de enlace correspondiente al enlace 2 es

$$200(i_2 - i_1) + 500i_2 + 250(i_2 - i_3) = 0$$

Cuando las corrientes de enlaces de la figura 4.11-2b se sustituyen en el lado izquierdo de esta ecuación el resultado es

$$200(-0.004068 - 0.01763) + 500(-0.004068) + 250(-0.004068 - (-0.001356)) = 1.629$$

El lado derecho de esta ecuación debe ser 0 en vez de 1.629. Parece que algo está mal. Lo más probable es que el archivo de entrada de PSpice contenga un error. Así es en este caso. Los nodos de las dos fuentes de 0 V de voltaje se han instalado en el orden equivocado. Recuerde que el primer nodo debe ser el nodo positivo de la fuente de voltaje. Una vez corregido el error, PSpice da

$$i_1 = 0.01763, \quad i_2 = 0.004068, \quad i_3 = 0.001356$$

Utilizando estos valores en la ecuación de enlaces, resulta

$$200(0.004068 - 0.01763) + 500(0.004068) + 250(0.004068 - 0.001356) = 0.0$$

Estas corrientes de enlaces cumplen satisfactoriamente con la ecuación de enlaces que corresponde al enlace 2.

## 4.12 EJEMPLO DE DISEÑO

## DESPLIEGUE ANGULAR DEL POTENCIÓMETRO

Se necesita que un circuito mida y despliegue la posición angular del eje de un potenciómetro. La posición angular,  $\theta$ , variará de  $-180^\circ$  a  $180^\circ$ .

La figura 4.12-1 ilustra un circuito que pudiera funcionar. Los suministradores de potencia de  $+15\text{ V}$  y  $-15\text{ V}$ , el potenciómetro y los resistores  $R_1$  y  $R_2$  se emplean para obtener un voltaje,  $v_i$ , que es proporcional a  $\theta$ . El amplificador sirve para modificar la constante de proporcionalidad para obtener una relación sencilla entre  $\theta$  y el voltaje,  $v_o$ , desplegado por el voltímetro. En este ejemplo el amplificador se utilizará para obtener la relación

$$v_o = k \cdot \theta \text{ donde } k = 0.1 \frac{\text{voltios}}{\text{grados}} \quad (4.12-1)$$

de modo que  $\theta$  se puede determinar multiplicando la lectura del medidor por 10. Por ejemplo, una lectura de medidor de  $-7.32\text{ V}$  indica que  $\theta = -73.2^\circ$ .

## Describe la situación y los supuestos

El diagrama de circuito en la figura 4.12-2 se obtiene por el modelado de los suministradores de potencia como fuentes de voltaje ideales, el voltímetro como un circuito abierto, y el potenciómetro por dos resistores. El parámetro,  $a$ , en el modelo del potenciómetro varía de 0 a 1 como  $\theta$  varía de  $-180^\circ$  a  $180^\circ$ . Eso quiere decir que

$$a = \frac{\theta}{360^\circ} + \frac{1}{2} \quad (4.12-2)$$

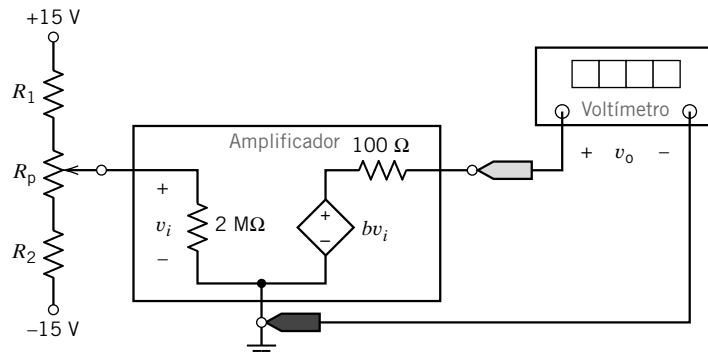


FIGURA 4.12-1 Circuito propuesto para medición y despliegue de la posición angular del eje del potenciómetro.

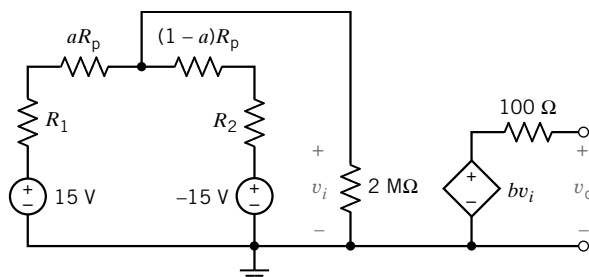


FIGURA 4.12-2 Diagrama de circuito con modelos de los suministradores de potencia, voltímetro y potenciómetro.

Despejando  $\theta$  resulta

$$\theta = \left( a - \frac{1}{2} \right) \cdot 360^\circ \quad (4.12-3)$$

### Establezca el objetivo

Especifique los valores de los resistores  $R_1$  y  $R_2$ , la resistencia del potenciómetro  $R_p$ , y la ganancia  $b$  del amplificador que hará que el voltaje del medidor,  $v_o$ , esté en relación con el ángulo  $\theta$  por la ecuación 4.12-1.

### Genere un plan

Analice el circuito que se muestra en la figura 4.12-2 para determinar la relación entre  $v_1$  y  $\theta$ . Seleccione valores de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_p$ . Utilice estos valores para simplificar la relación entre  $v_1$  y  $\theta$ . Si es posible, calcule el valor de  $b$  que hará que el voltaje del medidor,  $v_o$ , se relacione con el ángulo  $\theta$  por la ecuación 4.12-1. Si esto no es posible, ajuste los valores de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_p$  y pruebe de nuevo.

### Actúe sobre el plan

En la figura 4.12-3 se ha dibujado de nuevo el circuito. Una ecuación nodal única proporcionará la relación entre  $v_1$  y  $\theta$ :

$$\frac{v_i}{2 \text{ M}\Omega} + \frac{v_i - 15}{R_1 + aR_p} + \frac{v_i - (-15)}{R_2 + (1 - a)R_p} = 0$$

Despejando  $v_i$  resulta

$$v_i = \frac{2 \text{ M}\Omega (R_p(2a - 1) + R_1 - R_2) 15}{(R_1 + aR_p)(R_2 + (1 - a)R_p) + 2 \text{ M}\Omega (R_1 + R_2 + R_p)} \quad (4.12-4)$$

Esta ecuación es bastante complicada. Pongamos algunas restricciones a  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_p$  que posibilitarán la simplificación de esta ecuación. Primero, sean  $R_1 = R_2 = R$ . Segundo, se requiere que tanto  $R$  como  $R_p$  sean mucho menores que  $2 \text{ M}\Omega$  (por ejemplo,  $R < 20 \text{ k}\Omega$ ). Entonces,

$$(R + aR_p)(R + (1 - a)R_p) \ll 2 \text{ M}\Omega (2R + R_p)$$

Es decir, el primer término en el denominador del lado izquierdo de la ecuación 4.12-4 es insignificante comparado con el segundo término. La ecuación 4.12-4 se puede simplificar a

$$v_i = \frac{R_p(2a - 1)15}{2R + R_p}$$

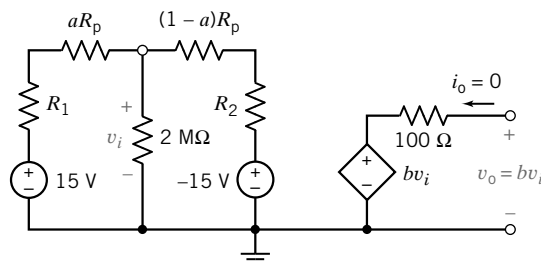


FIGURA 4.12-3 El circuito, dibujado de nuevo, muestra el modo  $v_i$ .

A continuación, utilizando la ecuación 4.12-3,

$$v_i = \left( \frac{R_p}{2R + R_p} \right) \left( \frac{15 \text{ V}}{180^\circ} \right) \theta$$

Es hora de captar los valores para  $R$  y  $R_p$ . Sea  $R = 5 \text{ k}\Omega$  y  $R_p = 10 \text{ k}\Omega$ ; entonces

$$v_i = \left( \frac{7.5 \text{ V}}{180^\circ} \right) \theta$$

Refiriéndonos a la figura 4.12-2, la salida del amplificador está dada por

$$v_o = b v_i \quad (4.12-5)$$

por lo tanto,

$$v_o = b \left( \frac{7.5 \text{ V}}{180^\circ} \right) \theta$$

Comparando esta ecuación con la ecuación 4.12-1 resulta

$$b \left( \frac{7.5 \text{ V}}{180^\circ} \right) = 0.1 \frac{\text{voltio}}{\text{grado}}$$

o bien

$$b = \frac{180}{7.5} (0.1) = 2.4$$

En la figura 4.12-4 se muestra el circuito final.

### Verifique la solución propuesta

A modo de verificación, suponga que  $\theta = 150^\circ$ . De la ecuación 4.12-2 vemos que

$$a = \frac{150^\circ}{360^\circ} + \frac{1}{2} = 0.9167$$

Con la ecuación 4.12-4 calculamos

$$v_i = \frac{2 \text{ M}\Omega (10 \text{ k}\Omega (2 \times 0.9167 - 1)) 15}{(5 \text{ k}\Omega + 0.9167 \times 10 \text{ k}\Omega)(5 \text{ k}\Omega + (1 - 0.9167) 10 \text{ k}\Omega) + 2 \text{ M}\Omega (2 \times 5 \text{ k}\Omega + 10 \text{ k}\Omega)} = 6.24$$

Finalmente, la ecuación 4.12-5 indica que el voltaje del medidor será de

$$v_o \times 2.4 \cdot 6.24 = 14.98$$

La interpretación de este voltaje significa que el ángulo era

$$\theta = 10 \cdot v_o = 149.8^\circ$$

lo cual es correcto para tres dígitos importantes.

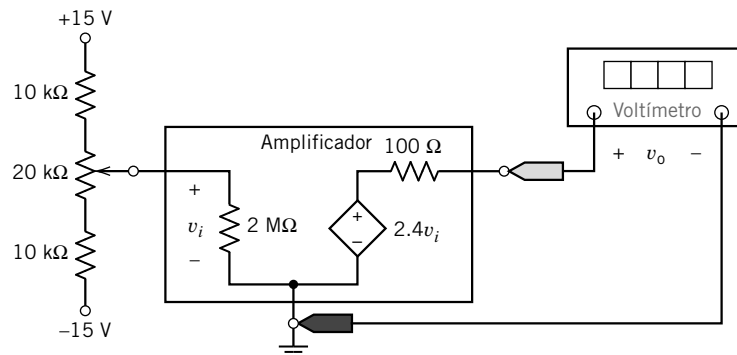


FIGURA 4.12-4 El circuito final diseñado.

### 4.13 RESUMEN

- El método del voltaje de nodos del análisis de circuitos identifica los nodos de un circuito donde están conectados dos o más elementos. Cuando el circuito consta solamente de resistores y fuentes de corriente, se toma el procedimiento siguiente para obtener las ecuaciones nodales.
  1. Elegimos un nodo para que funcione como nodo de referencia. Etiquetamos los voltajes de nodos en los demás nodos.
  2. Expresamos corrientes de elementos como funciones de voltajes de nodos. La figura 4.13-1a ilustra la relación entre la corriente en un resistor y los voltajes en los nodos del resistor.
  3. Aplicamos la KCL en todos los nodos, excepto en el nodo de referencia. La solución de las ecuaciones simultáneas da como resultado el conocimiento de los voltajes de nodos. Todos los voltajes y corrientes en el circuito se pueden determinar cuando los voltajes son conocidos.
- Cuando un circuito tiene fuentes de voltaje y a la vez fuentes de corriente aún podemos aplicar el método de voltajes de nodos utilizando el concepto de un supernodo. Un supernodo es un nodo grande que incluye dos nodos conectados mediante una fuente de voltaje conocida. Si la fuente de voltaje está conectada directamente entre un nodo  $q$  y el nodo de referencia, podemos establecer que  $v_q = v_s$  y escribir las ecuaciones KCL en los nodos restantes.
- Si el circuito contiene una fuente dependiente, primero expresamos el voltaje controlador o corriente de la fuente dependiente como una función de los voltajes de nodos. A continuación expresamos el voltaje o corriente controladores como una función de los voltajes de nodos. Finalmente, aplicamos la KCL a nodos y supernodos.
- El análisis de corrientes de enlaces se complementa con la aplicación de la KVL a los enlaces de un circuito planar. Cuando el circuito consta solamente de resistores y fuentes de voltaje, se aplica el procedimiento siguiente para obtener las ecuaciones de enlaces.

1. Etiquetar las corrientes de enlaces.
2. Expresar los voltajes de elementos como funciones de corrientes de enlaces. La figura 4.13-1b ilustra la relación entre el voltaje a través de un resistor y las corrientes de los enlaces que incluyen al resistor.
3. Aplicar la KVL a todos los enlaces.

La solución de las ecuaciones simultáneas da por resultado el conocimiento de las corrientes de enlaces. Todos los voltajes y corrientes en el circuito se pueden determinar cuando las corrientes de enlaces son conocidas.

- Si una fuente de corriente es común a dos enlaces que se juntan, definimos el interior de los dos enlaces como un superenlace. Entonces escribimos la ecuación de la corriente de enlace en torno a la periferia del superenlace. Si en la periferia de sólo un enlace aparece una fuente de corriente, podemos definir esa corriente de enlace como igual a la corriente de la fuente, teniendo en cuenta la dirección de la fuente de corriente.
- Si el circuito contiene una fuente dependiente, primero expresamos el voltaje o corriente controladores de la fuente dependiente como una función de las corrientes de enlaces. A continuación expresamos el voltaje o corriente controlados como una función de las corrientes de enlaces. Finalmente, aplicamos la KVL a enlaces y superenlaces.
- En general, se pueden utilizar los análisis tanto de voltajes de nodos como de corrientes de enlaces para obtener las corrientes o los voltajes en un circuito. Sin embargo, un circuito con menos ecuaciones nodales que ecuaciones de corrientes de nodos puede requerir que seleccionemos el método de los voltajes de nodos. Por el contrario, el análisis por medio de corrientes de enlaces es fácilmente aplicable para un circuito con menos ecuaciones de corrientes de enlaces que las ecuaciones de voltaje de nodos.
- MATLAB reduce en gran manera la monotonía de despejar ecuaciones de nodos o de enlaces.

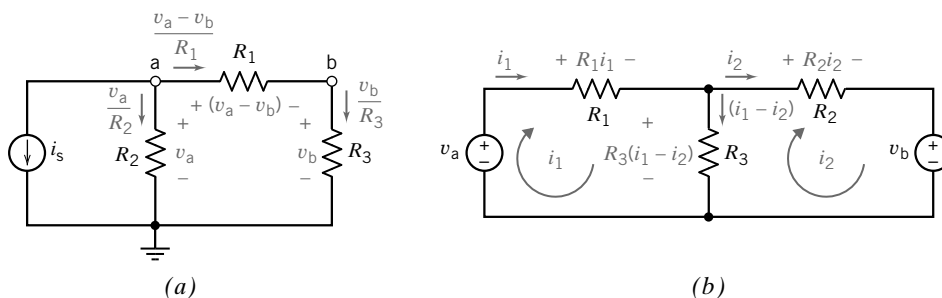


FIGURA 4.13-1 Expresión de corrientes y voltajes de resistor en términos de (a) voltajes de nodos o (b) corrientes de enlaces.

PROBLEMAS

**Sección 4.2 Análisis de voltajes de nodos de circuitos con fuentes de corriente**

**P 4.2-1** Los voltajes de nodos en el circuito de la figura P 4.2-1 son  $v_1 = -4\text{ V}$  y  $v_2 = 2\text{ V}$ . Determine  $i$ , la corriente de la fuente de corriente.

*Respuesta:*  $i = 1.5\text{ A}$

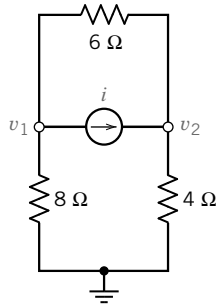


Figura P 4.2-1

**P 4.2-2** Determine los voltajes de nodos para el circuito de la figura 4.2-2.

*Respuesta:*  $v_1 = 2\text{ V}$ ,  $v_2 = 30\text{ V}$ , y  $v_3 = 24\text{ V}$

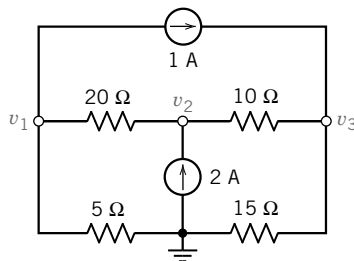


Figura P 4.2-2

**P 4.2-3** Los voltajes de nodos en el circuito de la figura P 4.2-3 son  $v_1 = 4\text{ V}$ ,  $v_2 = 15\text{ V}$  y  $v_3 = 18\text{ V}$ . Determine  $i_1$  e  $i_2$ , las corrientes de las fuentes de corriente.

*Respuesta:*  $i_1 = -2\text{ A}$  e  $i_2 = 2\text{ A}$

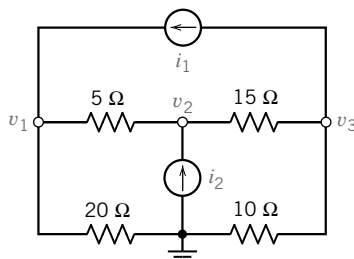


Figura P 4.2-3

**P 4.2-4** Considere el circuito que se muestra en la figura P 4.2-4. Encuentre los valores de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  que ocasionan que los voltajes  $v_1$  y  $v_2$  sean  $v_1 = 1\text{ V}$  y  $v_2 = 2\text{ V}$ .

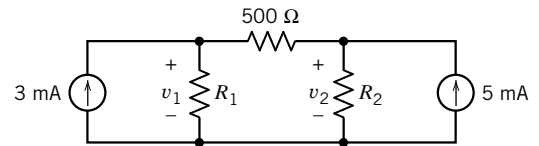


Figura P 4.2-4

**P 4.2-5** Encuentre el voltaje  $v$  para el circuito que se muestra en la figura P 4.2-5.

*Respuesta:*  $v = 21.7\text{ mV}$

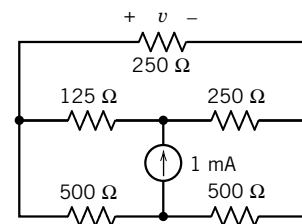


Figura P 4.2-5

**P 4.2-6** Simplifique el circuito que se muestra en la figura P 4.2-6 reemplazando resistores en serie y en paralelo con resistores equivalentes; luego analice el circuito simplificado escribiendo y despejando ecuaciones nodales. (a) Determine la potencia suministrada por cada fuente de corriente. (b) Determine la potencia recibida por el resistor de  $12\ \Omega$ .

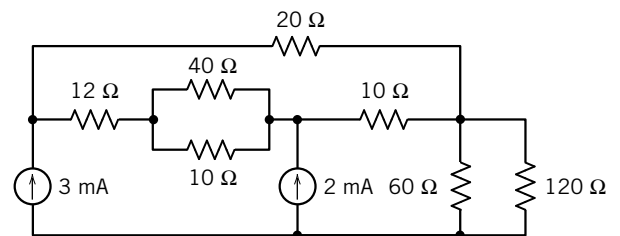


Figura P 4.2-6

**P 4.2-7** Los voltajes de nodos en el circuito que se muestran en la figura P 4.2-7 son  $v_a = 7\text{ V}$  y  $v_b = 10\text{ V}$ . Determine los valores de la corriente de la fuente de corriente,  $i_s$ , y la resistencia,  $R$ .

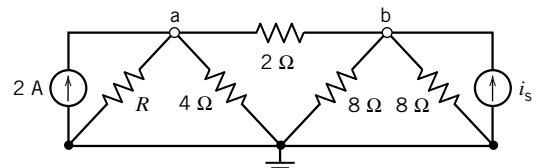


Figura P 4.2-7

### Sección 4.3 Análisis de voltajes de nodos de circuitos con fuentes de corriente y voltaje

**P 4.3-1** El voltímetro en la figura P 4.3-2 mide  $v_c$ , el voltaje de nodos en el nodo c. Determine el valor de  $v_c$ .

**Respuesta:**  $v_c = 2 \text{ V}$

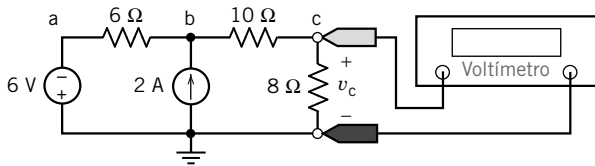


Figura P 4.3-1

**P 4.3-2** Los voltajes  $v_a$ ,  $v_b$ ,  $v_c$  y  $v_d$  en la figura P 4.3-2 son los voltajes de nodos correspondientes a los nodos a, b, c y d. La corriente  $i$  es la corriente en un cortocircuito conectado entre los nodos b y c. Determine los valores de  $v_a$ ,  $v_b$ ,  $v_c$  y  $v_d$  y de  $i$ .

**Respuesta:**  $v_a = -12 \text{ V}$ ,  $v_b = v_c = 4 \text{ V}$ ,  $v_d = -4 \text{ V}$ ,  $i = 2 \text{ mA}$

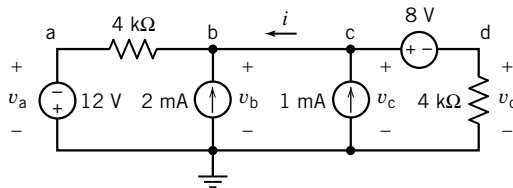


Figura P 4.3-2

**P 4.3-3** Determine el voltaje de nodos  $v_a$  para el circuito de la figura P 4.3-3.

**Respuesta:**  $v_a = 7 \text{ V}$

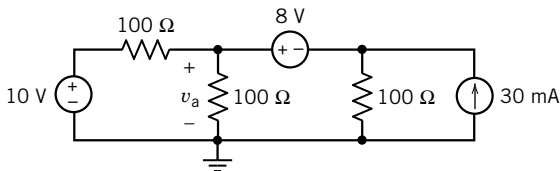


Figura P 4.3-3

**P 4.3-4** Determine el voltaje de nodos  $v_a$  para el circuito de la figura P 4.3-4.

**Respuesta:**  $v_a = 4 \text{ V}$

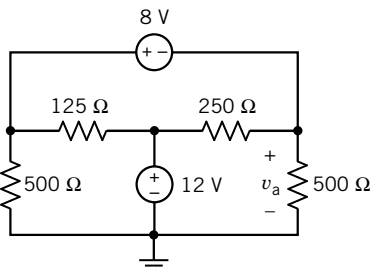


Figura P 4.3-4

**P 4.3-5** Los voltajes  $v_a$ ,  $v_b$  y  $v_c$  en la figura P 4.3-5 son los voltajes de nodos correspondientes a los nodos a, b y c. Los valores de estos voltajes son

$$v_a = 12 \text{ V}, v_b = 9.882 \text{ V}, \text{ y } v_c = 5.294 \text{ V}.$$

Determine la potencia suministrada por la fuente de voltaje.

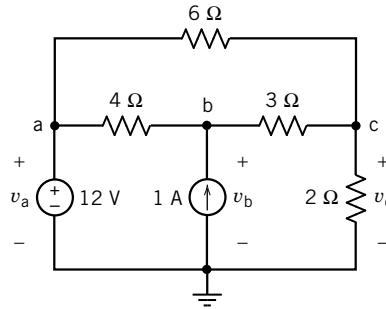


Figura P 4.3-5

**P 4.3-6** El voltímetro en el circuito de la figura P 4.3-6 mide un voltaje de nodos. El valor de ese voltaje de nodos depende del valor de la resistencia  $R$ .

- Determine el valor de la resistencia  $R$  que ocasionará que el voltaje medido por el voltímetro sea 4 V.
- Determine el voltaje medido por el voltímetro cuando  $R = 1.2 \text{ k}\Omega = 1200 \Omega$ .

**Respuesta:** (a)  $6 \text{ k}\Omega$  (b) 2V

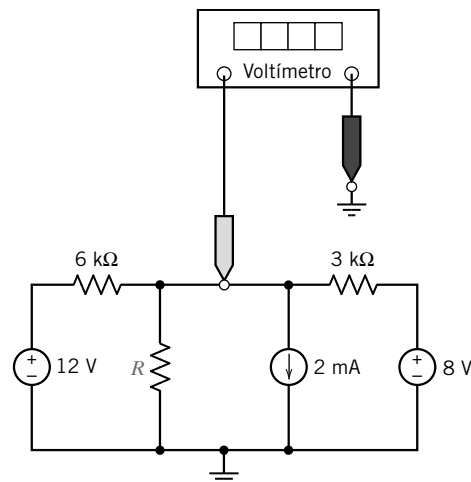


Figura P 4.3-6

**P 4.3-7** Determine los valores de los voltajes de nodos  $v_1$  y  $v_2$ , en la figura P 4.3-7. Determine los valores de las corrientes  $i_a$  e  $i_b$ .

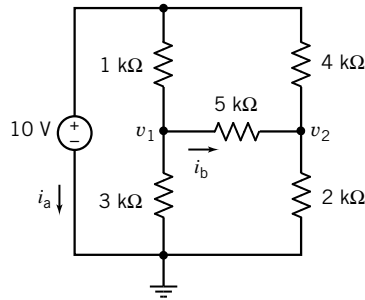


Figura P 4.3-7

**P 4.3-8** El circuito que se muestra en la figura P 4.3-8 tiene dos entradas,  $v_1$  y  $v_2$ , y una salida,  $v_o$ . La salida se relaciona con la entrada por la ecuación

$$v_o = av_1 + bv_2$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes que dependen de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ .

- (a) Determine los valores de los coeficientes  $a$  y  $b$  cuando  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 40 \Omega$  y  $R_3 = 8 \Omega$ .
- (b) Determine los valores de los coeficientes  $a$  y  $b$  cuando  $R_1 = R_2$  y  $R_3 = R_1 || R_2$ .

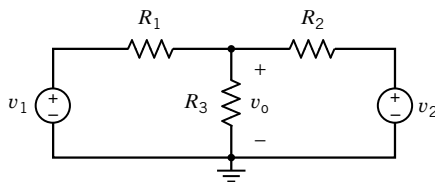


Figura P 4.3-8

**P 4.3-9** Determine los valores de los voltajes de nodos del circuito que se muestra en la figura P 4.3-9.

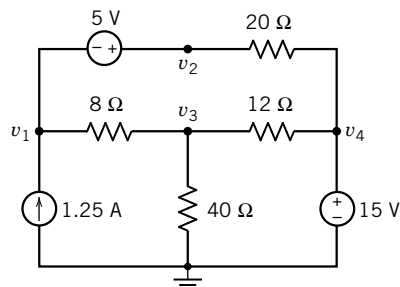


Figura P 4.3-9

**P 4.3-10** La figura P 4.3-10 muestra una medición hecha en el laboratorio. Su compañero de laboratorio olvidó registrar los valores de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ . Piensa que los dos resistores eran de  $10 \text{ k}\Omega$  y que el restante era un resistor de  $5 \text{ k}\Omega$ . ¿Eso es posible? ¿Cuál resistor es el de  $5 \text{ k}\Omega$ ?

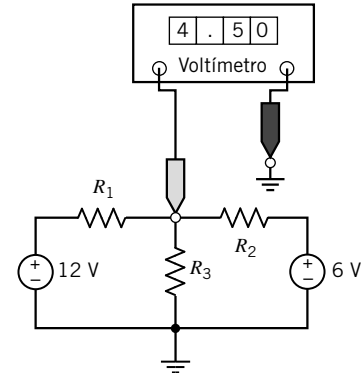


Figura P 4.3-10

**\*P 4.3-11** Determine los valores de los voltajes de nodos del circuito que se muestra en la figura P 4.3-11.

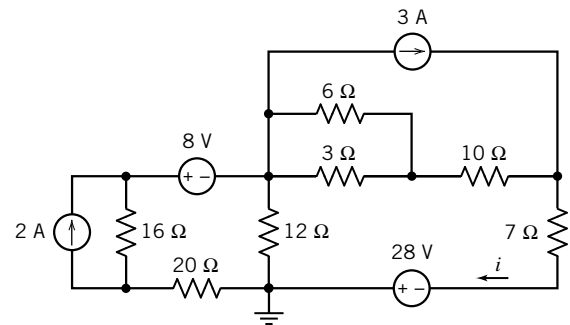


Figura P 4.3-11

**P 4.3-12** Determine los valores de los voltajes de nodos del circuito que se muestra en la figura P 4.3-12.

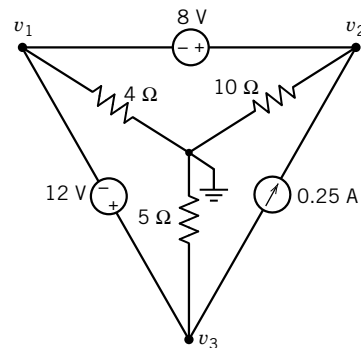


Figura P 4.3-12

### Sección 4.4 Análisis de voltajes de nodos con fuentes dependientes

**P 4.4-1** Los voltajes  $v_a$ ,  $v_b$  y  $v_c$ , en la figura P 4.4-1 son los voltajes de nodos que corresponden a los nodos a, b, y c. Los valores de estos voltaje son:

$$v_a = 8.667 \text{ V}, v_b = 2 \text{ V y } v_c = 10 \text{ V}$$



Determine el valor de  $A$ , la ganancia de la fuente dependiente.

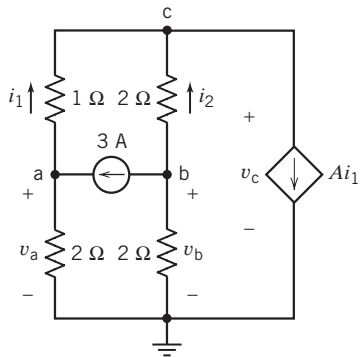


Figura P 4.4-1

**P 4.4-2** Encuentre  $i_b$  para el circuito en la figura P 4.4-2.

*Respuesta:*  $i_b = -12 \text{ mA}$

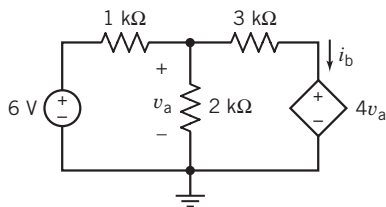


Figura P 4.4-2

**P 4.4-3** Determine el voltaje del nodo  $v_b$  para el circuito de la figura P 4.4-3.

*Respuesta:*  $v_b = 1.54 \text{ V}$

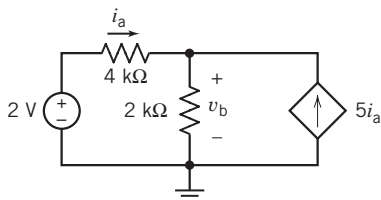


Figura P 4.4-3

**P 4.4-4** Los números circulados en la figura P 4.4-4 son números de nodos. Los voltajes de nodos de este circuito son  $v_1 = 10 \text{ V}$ ,  $v_2 = 14 \text{ V}$  y  $v_3 = 12 \text{ V}$ .

- (a) Determine el valor de la corriente  $i_b$ .  
 (b) Determine el valor de  $r$ , la ganancia de la CCVS.

*Respuestas:* (a)  $-2 \text{ A}$  (b)  $4 \text{ V/A}$

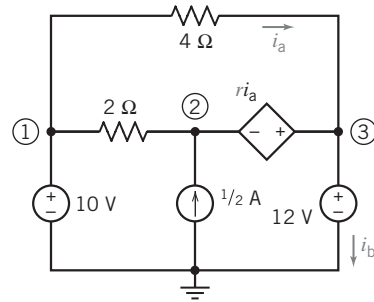


Figura P 4.4-4

**P 4.4-5** Determine el valor de la corriente  $i_x$  en el circuito de la figura P 4.4-5.

*Respuesta:*  $i_x = 2.4 \text{ A}$

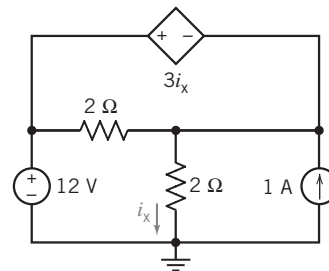


Figura P 4.4-5

**P 4.4-6** Determine la potencia suministrada por la fuente de voltaje de 12-V en la figura P 4.4-6.

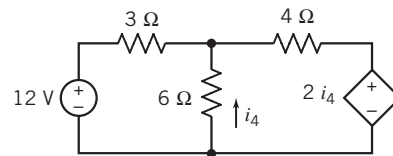


Figura P 4.4-6

**P 4.4-7** Determine el voltaje de la corriente  $i_c$  en la figura P 4.4-7.

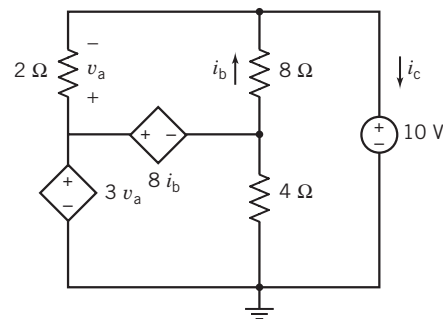


Figura P 4.4-7

**P 4.4-8** Determine el valor de la potencia suministrada por la fuente dependiente en la figura P 4.4-8.

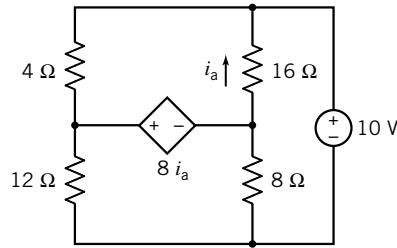


Figura P 4.4-8

**P 4.4-9** Los voltajes de nodos en el circuito que se muestran en la figura P 4.4-9 son

$$v_1 = 4 \text{ V}, v_2 = 0 \text{ V}, \text{ y } v_3 = -6 \text{ V}$$

Determine los valores de la resistencia  $R$ , y de la ganancia,  $b$ , de la CCCS.

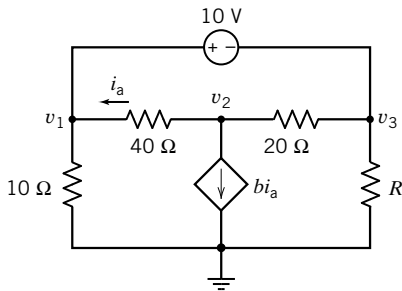


Figura P 4.4-9

**P 4.4-10** El valor del voltaje de nodos en el nodo  $b$  en el circuito que se muestra en la figura P 4.4-10 es  $v_b = 18 \text{ V}$ .

- (a) Determine el valor de  $A$ , la ganancia de la fuente dependiente.
- (b) Determine la potencia suministrada por la fuente dependiente.

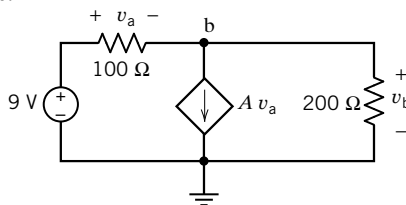


Figura P 4.4-10

**\*P 4.4-11** Determine la potencia suministrada por la fuente dependiente en el circuito que se muestra en la figura P 4.4-11.

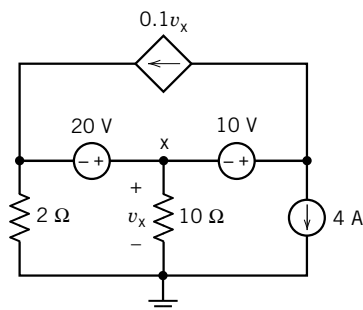


Figura P 4.4-11

**\*P 4.4-12** Determine los valores de los voltajes de nodos,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $v_4$  y  $v_5$  en el circuito que se muestra en la figura P 4.4-12.

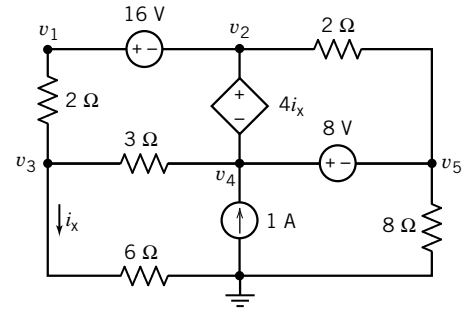


Figura P 4.4-12

**\*P 4.4-13** Determine los valores de los voltajes de nodos,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $v_4$  y  $v_5$  en el circuito que se muestra en la figura P 4.4-13.

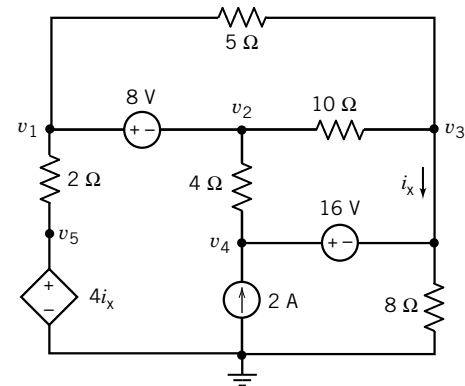


Figura P 4.4-13

**\*P 4.4-14** Determine los valores de los voltajes de nodos,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $v_4$  y  $v_5$  en el circuito que se muestra en la figura P 4.4-14.

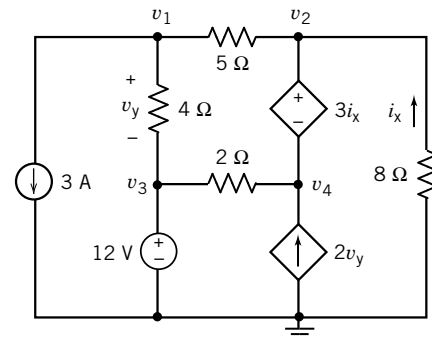


Figura P 4.4-14

**\*P 4.4-15** Los voltajes  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  y  $v_4$  son los voltajes de nodos que corresponden a los nodos 1, 2, 3 y 4 en la figura P 4.4-15. Determine los valores de estos voltajes de nodos.

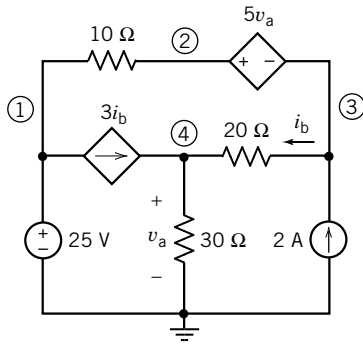


Figura P 4.4-15

**P 4.4-16** Los voltajes  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  y  $v_4$  son los voltajes de nodos que corresponden a los nodos 1, 2, 3 y 4 en la figura P 4.4-16. Los valores de estos voltajes son

$$v_1 = 10 \text{ V}, v_2 = 75 \text{ V}, v_3 = -15 \text{ V y } v_4 = 22.5 \text{ V}$$

Determine los valores de las ganancias de las fuentes dependientes,  $A$  y  $B$ , y de la resistencia  $R_1$ .

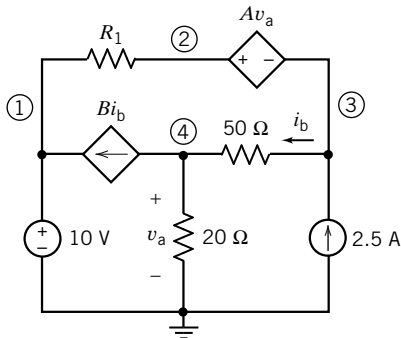


Figura P 4.4-16

**P 4.4-17** Los voltajes  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  son los voltajes de nodos que corresponden a los nodos 1, 2 y 3. Los valores de estos voltajes son

$$v_1 = 12 \text{ V}, v_2 = 21 \text{ V y } v_3 = -3 \text{ V}$$

- Determine los valores de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ .
- Determine la potencia suministrada por cada fuente.

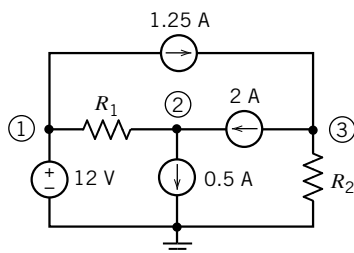


Figura P 4.4-17

**P 4.4-18** Los voltajes  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  en la figura P 4.4-18 son los voltajes de nodos que corresponden a los nodos 1, 2 y 3. Los valores de estos voltajes son

$$v_1 = 12 \text{ V}, v_2 = 9.6 \text{ V y } v_3 = 1.33 \text{ V}$$

- Determine los valores de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ .
- Determine la potencia suministrada por cada fuente.

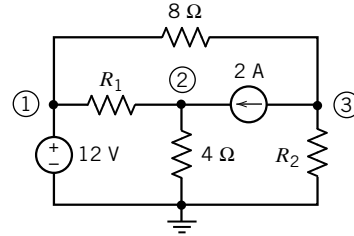


Figura P 4.4-18

**P 4.4-19** Los voltajes  $v_2$ ,  $v_3$  y  $v_4$  para el circuito que se muestra en la figura P 4.4-19 son

$$v_2 = 16 \text{ V}, v_3 = 8 \text{ V y } v_4 = 6 \text{ V}$$

Determine los valores de lo siguiente:

- La ganancia,  $A$ , de las VCVS
- La resistencia  $R_5$ .
- Las corrientes  $i_b$  e  $i_c$
- La potencia recibida por el resistor  $R_4$

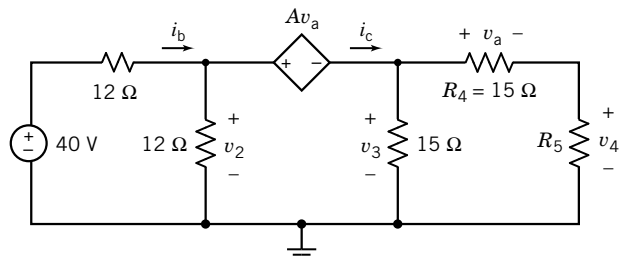


Figura P 4.4-19

**P 4.4-20** Determine los valores de los voltajes de nodos  $v_1$  y  $v_2$ , para el circuito que se muestra en la figura P 4.4-20.

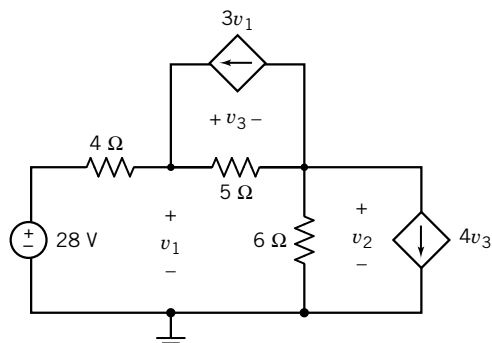


Figura P 4.4-20

**P 4.4-21** Los números circulados en la figura P 4.4-21 son números de nodos. Determine los valores de  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  los voltajes de nodos correspondientes a los nodos 1, 2 y 3.

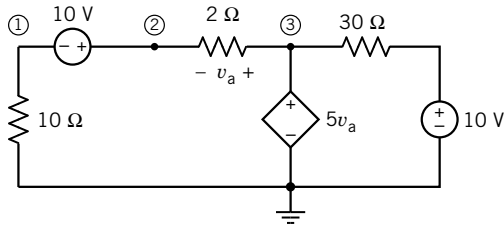


Figura P 4.4-21

**P 4.4-22** Determine los valores de los voltajes de nodos  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ , para el circuito que se muestra en la figura P 4.4-22.

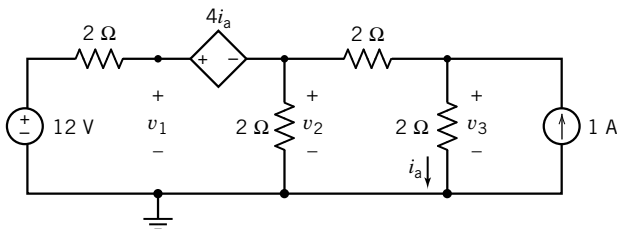


Figura P 4.4-22

**P 4.4-23** Determine los valores de los voltajes de nodos  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ , para el circuito que se muestra en la figura P 4.4-23.

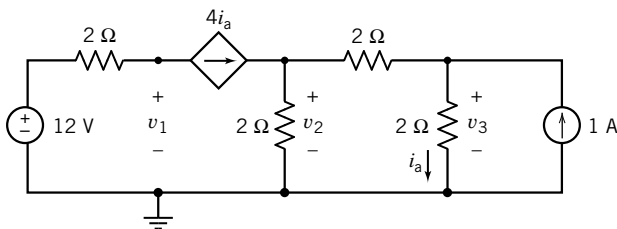


Figura P 4.4-23

**Sección 4.5 Análisis de corrientes de enlaces con fuentes de voltaje independientes**

**P 4.5-1** Determine las corrientes de enlaces  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ , para el circuito que se muestra en la figura P 4.5-1.

*Respuestas:*  $i_1 = 3$  A,  $i_2 = 2$  A e  $i_3 = 4$  A.

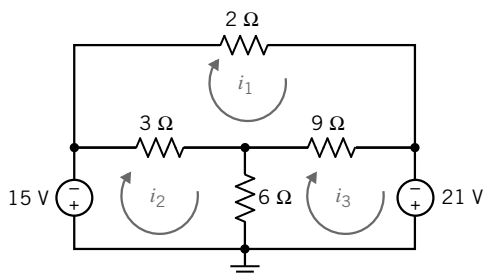


Figura P 4.5-1

**P 4.5-2** Los valores de las corrientes de enlaces en el circuito que se muestra en la figura P 4.5-2 son  $i_1 = 2$  A,  $i_2 = 3$  A e  $i_3 = 4$  A. Determine los valores de la resistencia  $R$  y de los voltajes  $v_1$  y  $v_2$  de las fuentes de voltaje.

*Respuestas:*  $R = 12 \Omega$ ,  $v_1 = -4$  A y  $v_2 = -28$  V

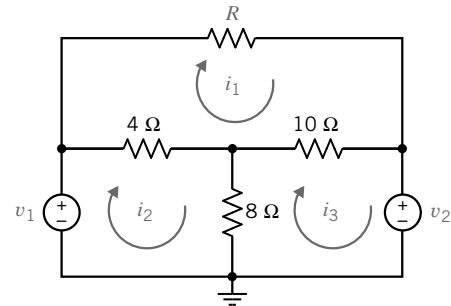


Figura P 4.5-2

**P 4.5-3** Las corrientes  $i_1$  e  $i_2$  en la figura P 4.5-3 son las corrientes de enlaces. Determine el valor de la resistencia  $R$  requerido para que  $v_a = -6$  V.

*Respuesta:*  $R = 4 \Omega$

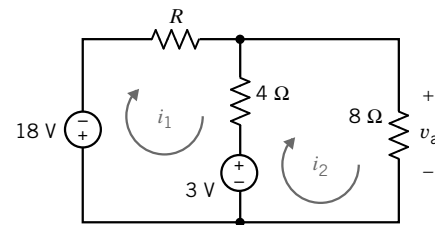


Figura P 4.5-3

**P 4.5-4** Determine las corrientes de enlaces  $i_a$  e  $i_b$  en el circuito que se muestra en la figura P 4.5-4.

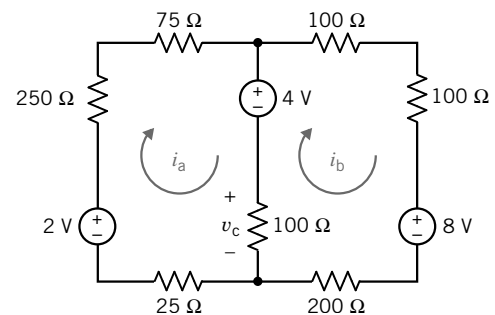


Figura P 4.5-4

**P 4.5-5** Encuentre la corriente  $i$  para el circuito de la figura P 4.5-5.

*Sugerencia:* Un cortocircuito se puede tratar como una fuente de voltaje de 0-V.

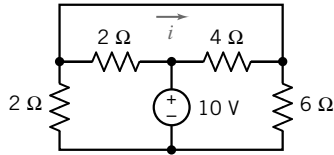


Figura P 4.5-5

**P 4.5-6** Simplifique el circuito que se muestra en la figura P 4.5-6 reemplazando los resistores en serie y en paralelo por resistores equivalentes. A continuación, analice el circuito simplificado al escribir y despejar ecuaciones de enlaces.

- Determine la potencia suministrada por cada fuente.
- Determine la potencia absorbida por cada resistor de  $30\ \Omega$ .

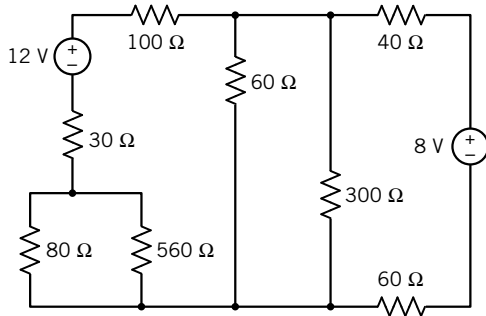


Figura P 4.5-6

### Sección 4.6 Análisis de corrientes de enlaces con fuentes de corriente y voltaje

**P 4.6-1** Encuentre  $i_b$  para el circuito que se muestra en la figura P 4.6-1.

*Respuesta:*  $i_b = 0.6\ \text{A}$

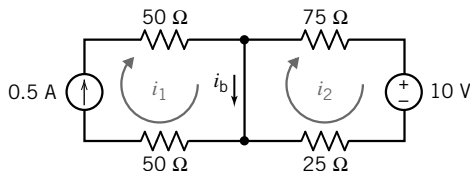


Figura P 4.6-1

**P 4.6-2** Encuentre  $v_c$  para el circuito que se muestra en la figura P 4.6-2.

*Respuesta:*  $v_c = 15\ \text{V}$

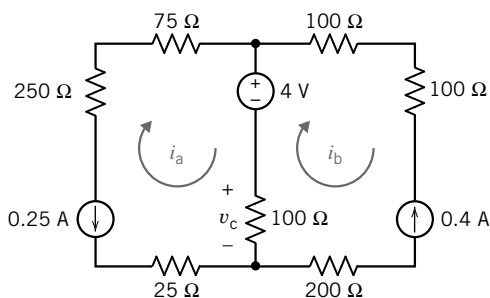


Figura P 4.6-2

**P 4.6-3** Encuentre  $v_2$  para el circuito que se muestra en la figura P 4.6-3.

*Respuesta:*  $v_2 = 2\ \text{V}$

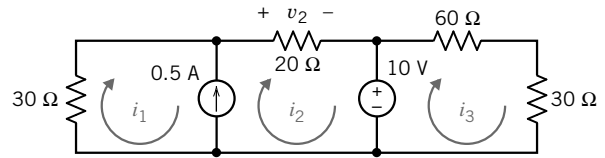


Figura P 4.6-3

**P 4.6-4** Encuentre  $v_c$  para el circuito que se muestra en la figura P 4.6-4.

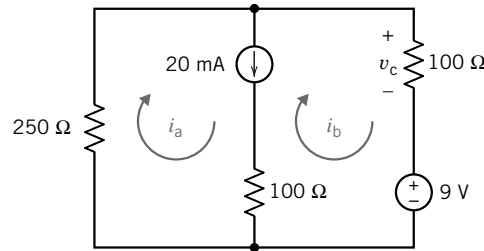


Figura P 4.6-4

**P 4.6-5** Encuentre el valor del voltaje medido por el voltímetro en la figura P 4.6-5.

*Respuesta:*  $8\ \text{V}$

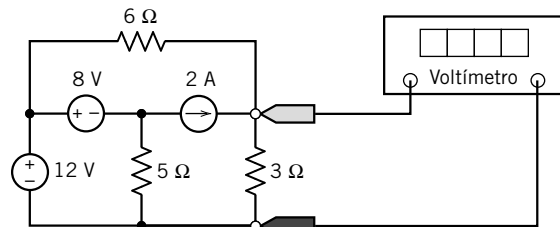


Figura P 4.6-5

**P 4.6-6** Determine el valor de la corriente medida por el amperímetro en la figura P 4.6-6.

*Sugerencia:* Escriba y despeje una ecuación de enlace única.

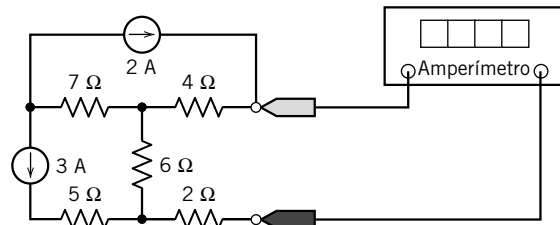


Figura P 4.6-6

**P 4.6-7** Las corrientes  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  en la figura P 4.6-7 son las corrientes de enlaces. Determine el valor de la resistencia  $R$ .

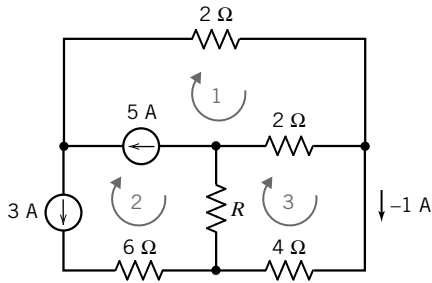


Figura P 4.6-7

**P 4.6-8** Determine los valores de las corrientes de enlaces  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  en el circuito que se muestra en la figura P 4.6-8.

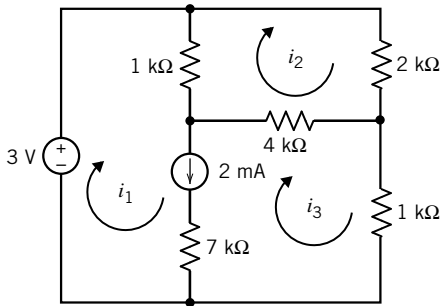


Figura P 4.6-8

**\*P 4.6-9** El circuito que se muestra en la figura P 4.6-9 tiene tres entradas:  $i_x$ ,  $i_y$  y  $v_z$ . La salida de los circuitos es  $i_s$ . La salida se relaciona con las entradas por

$$i_s = a i_x + b i_y + c v_z$$

Donde  $a$ ,  $b$  y  $c$ , son constantes. Determine los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

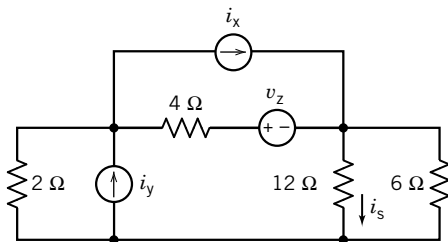


Figura P 4.6-9

**P 4.6-10** Las corrientes de enlaces en el circuito que se muestra en la figura 4.6-10 son

$$i_1 = -2.2213 \text{ A}, i_2 = 0.7787 \text{ A} \text{ e } i_3 = 0.0770 \text{ A}$$

- (a) Determine los valores de las resistencias  $R_1$  y  $R_3$ .
- (b) Determine el valor de la potencia suministrada por la fuente de corriente.

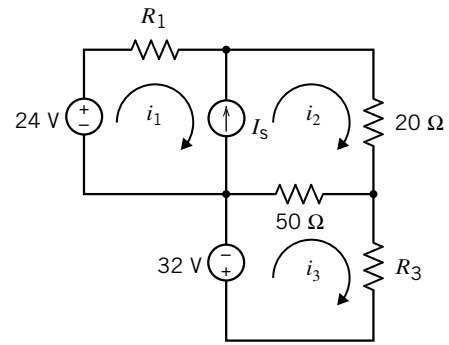


Figura P 4.6-10

**P 4.6-11** Determine el valor del voltaje medido por el amperímetro en la figura P 4.6-11.

*Sugerencia:* Aplique la KVL a un superenlace para determinar la corriente en el resistor de 2-Ω.

*Respuesta:* 4/3 V

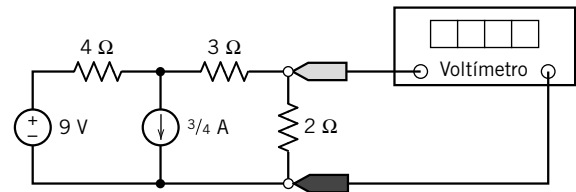


Figura P 4.6-11

**P 4.6-12** Determine el valor de la corriente medida por el amperímetro en la figura P 4.6-12.

*Sugerencia:* Aplique la KVL a un superenlace.

*Respuesta:* -0.333 A

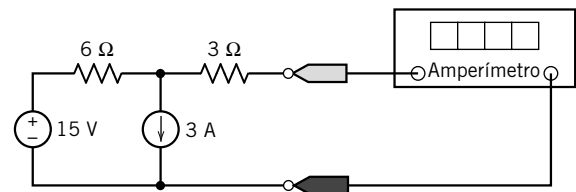


Figura P 4.6-12

**P 4.6-13** Los valores de las corrientes de enlaces en los circuitos que se muestran en la figura P 4.6-13 son

$$i_1 = 0.2 \text{ A}, i_2 = 0.7 \text{ A} \text{ e } i_3 = 0.8 \text{ A}$$

Determine los valores de lo siguiente:

- (a) La potencia alimentada por cada fuente de voltaje.
- (b) La resistencia  $R$ .
- (c) La corriente de la fuente de corriente.
- (d) El voltaje  $v_s$  a través de la fuente de corriente.

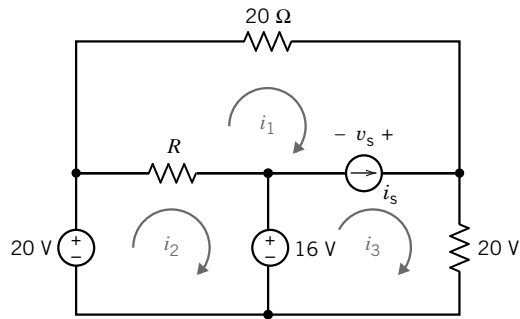


Figura P 4.6-13

### Sección 4.7 Análisis de corrientes de enlaces con fuentes dependientes

**P 4.7-1** Encuentre  $v_2$  para el circuito que se muestra en la figura P 4.7-1.

**Respuesta:**  $v_2 = 10$  V

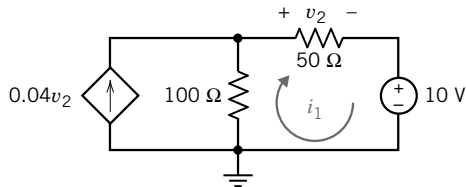


Figura P 4.7-1

**P 4.7-2** Determine la corriente de enlaces  $i_a$  para el circuito que se muestra en la figura P 4.7-2.

**Respuesta:**  $i_a = -48$  mA

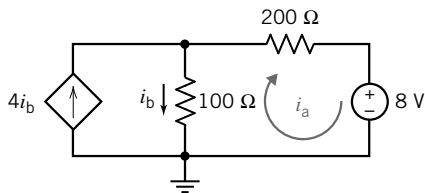


Figura P 4.7-2

**P 4.7-3** Encuentre  $v_o$  para el circuito que se muestra en la figura P 4.7-3.

**Respuesta:**  $v_o = 2.5$  V

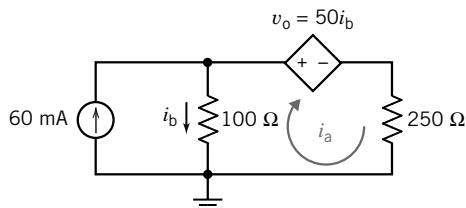


Figura P 4.7-3

**P 4.7-4** Determine la corriente de enlace  $i_a$  para el circuito que se muestra en la figura P 4.7-4.

**Respuesta:**  $i_a = -24$  mA

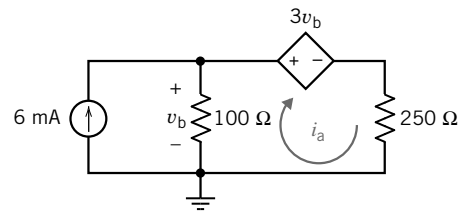
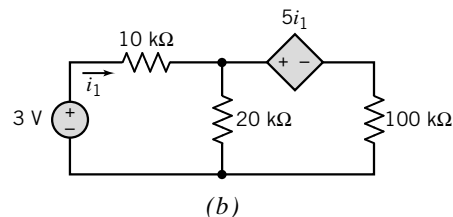
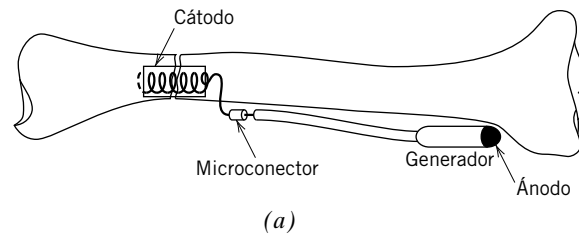


Figura P 4.7-4

**P 4.7-5** Aun cuando los científicos continúan debatiendo acerca de cuán exactamente y cómo funciona el proceso de la electricidad para ayudar en la reparación y crecimiento de huesos, que se ha aplicado sobre todo con las fracturas, es posible que pronto se extienda al arreglo de otros problemas, los cuales van desde la osteoporosis y la osteoartritis hasta la unión de vértebras y la cura de úlceras de la piel.

Se aplica una corriente eléctrica a las fracturas de huesos que no han sanado en el tiempo normal. El proceso pretende imitar las fuerzas eléctricas naturales del cuerpo. Sólo se aplica una pequeña cantidad de simulación eléctrica para acelerar la recuperación ósea. El método de la corriente directa utiliza un electrodo que se implanta en el hueso. Dicho método tiene aproximadamente 80% de éxito.

El implante se muestra en la figura P 4.7-5a y el modelo del circuito en la figura 4.7-5b. Encuentre la energía transmitida al cátodo durante un periodo de 24 horas. El cátodo está representado por la fuente de voltaje dependiente y el resistor de 100-k $\Omega$ .



**Figura P 4.7-5** (a) Asistencia eléctrica en la reparación de un hueso. (b) Modelo del circuito.

**P 4.7-6** En la figura P 4.7-6 se muestra el modelo de un transistor de unión bipolar (BJT).

- Determine la ganancia  $v_o/v_i$ .
- Calcule el valor requerido de  $g$  para obtener una ganancia  $v_o/v_i = -170$  cuando  $R_L = 5$  k $\Omega$ ,  $R_1 = 100$   $\Omega$  y  $R_2 = 1$  k $\Omega$ .

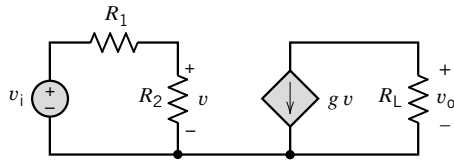


Figura P 4.7-6

**P 4.7-7** Las corrientes  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  son las corrientes de enlaces del circuito que se muestra en la figura P 4.7-7. Determine los valores de  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ .

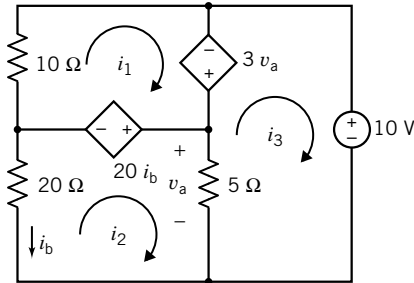


Figura P 4.7-7

**P 4.7-8** Determine el valor de la potencia suministrada por la fuente dependiente en la figura P 4.7-8.

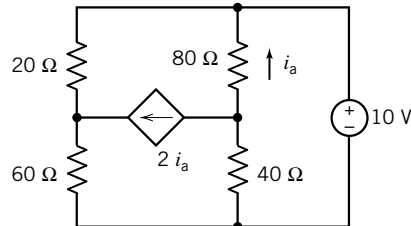


Figura P 4.7-8

**P 4.7-9** Determine el valor de la resistencia  $R$  en el circuito que se muestra en la figura P 4.7-9.

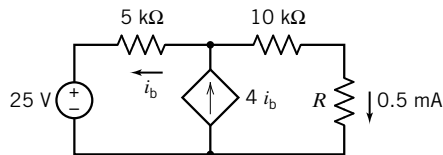


Figura P 4.7-9

**P 4.7-10** El circuito que se muestra en la figura P 4.7-10 es el modelo de señal pequeña de un amplificador. La entrada al amplificador es el voltaje de la fuente de voltaje  $v_s$ . La salida del amplificador es el voltaje  $v_o$ .

- (a) La razón de salida a entrada,  $v_o/v_s$ , se denomina ganancia del amplificador. Determine la ganancia del amplificador.
- (b) La razón de la corriente de la fuente de entrada con el voltaje de entrada, madurez de  $i_b/v_s$ , se denomina resistencia de entrada del amplificador. Determine la resistencia de entrada.

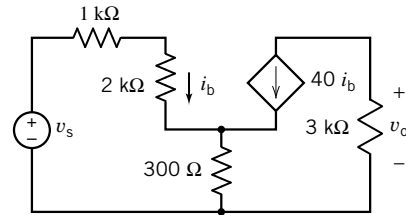


Figura P 4.7-10

**P 4.7-11** Determine los valores de las corrientes de enlaces  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  e  $i_4$  en el circuito que se muestra en la figura P 4.7-11.

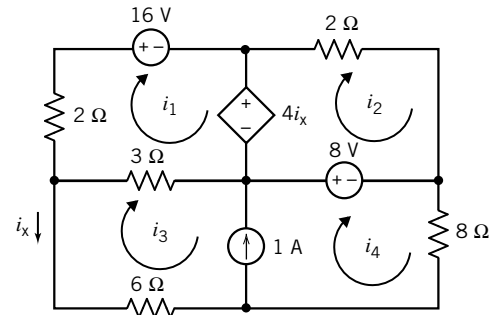


Figura P 4.7-11

**P 4.7-12** Determine los valores de las corrientes de enlaces que se muestran en la figura P 4.7-12.

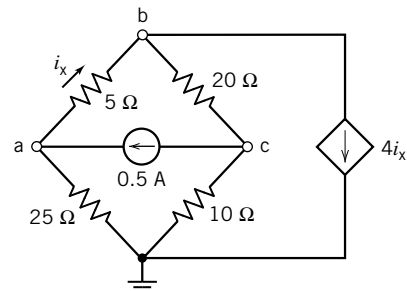


Figura P 4.7-12

**P 4.7-13** Las corrientes  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  son las corrientes de enlaces que corresponden a los enlaces 1, 2 y 3 en la figura P 4.7-13. Determine los valores de estas corrientes de enlace.

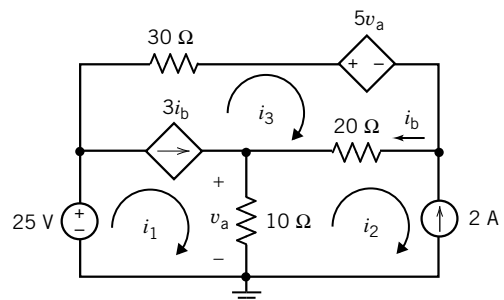


Figura P 4.7-13



**P 4.7-14** Las corrientes  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  son las corrientes de enlaces que corresponden a los enlaces 1, 2 y 3 en la figura P 4.7-14. Los valores de estas corrientes son

$$i_1 = 1.375 \text{ A}, i_2 = -2.5 \text{ A} \text{ e } i_3 = -3.25 \text{ A}$$

Determine los valores de las ganancias de las fuentes dependientes,  $A$  y  $B$ .

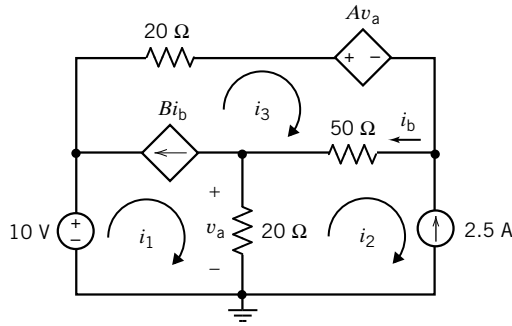


Figura P 4.7-14

**P 4.7-15** Determine la corriente  $i$  en el circuito que se muestra en la figura P 4.7-15.

*Respuesta:*  $i = 3 \text{ A}$

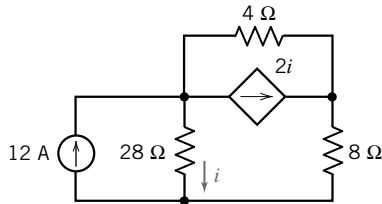


Figura P 4.7-15

**P 4.7-16** Determine los valores de las corrientes de enlace  $i_1$  e  $i_2$  para el circuito que se muestra en la figura P 4.7-16.

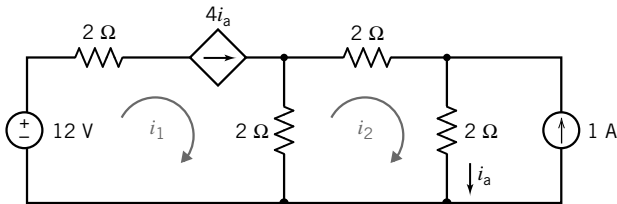


Figura P 4.7-16

**P 4.7-17** Determine los valores de las corrientes de enlaces  $i_1$  e  $i_2$  para el circuito que se muestra en la figura P 4.7-17.

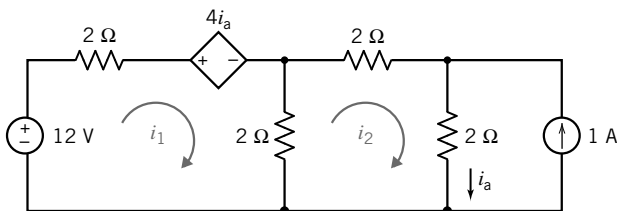


Figura P 4.7-17

## Sección 4.8 Comparación entre el método de voltajes de nodos y el método de corrientes de enlaces

**P 4.8-1** El circuito que se muestra en la figura P 4.8-1 tiene dos entradas, los voltajes de la fuente de voltaje,  $v_1$  y  $v_2$ . Diseñe este circuito de modo que la salida se relacione con las entradas por

$$v_o = 2v_1 + 0.5v_2$$

*Sugerencia:* Determine los valores requeridos de  $A$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$ .

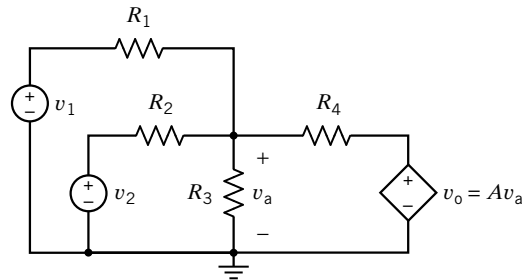


Figura P 4.8-1

**P 4.8-2** El circuito que se muestra en la figura P 4.8-2 tiene dos entradas,  $v_s$  e  $i_s$ , y una salida  $v_o$ . La salida se relaciona con las entradas por la ecuación

$$v_o = ai_s + bv_s$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes que se deben determinar. Determine los valores  $a$  y  $b$  (a) escribiendo y despejando ecuaciones de enlaces, y (b) escribiendo y despejando ecuaciones nodales.

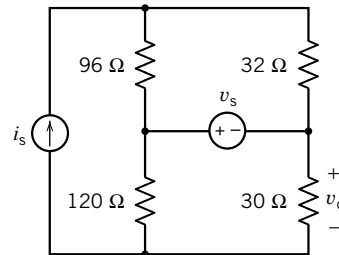


Figura P 4.8-2

**P 4.8-3** Determine la potencia suministrada por la fuente dependiente en el circuito que se muestra en la figura P 4.8-3 escribiendo y despejando (a) ecuaciones nodales y (b) ecuaciones de enlaces.

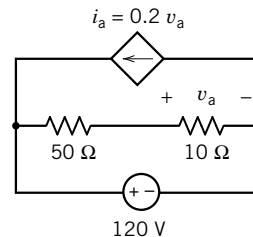


Figura P 4.8-3

**Sección 4.11 ¿Cómo lo podemos comprobar...?**

**P 4.11-1** El análisis por computadora del circuito que se muestra en la figura P 4.11-1 indica que los voltajes de nodos son,  $v_a = 5.2 \text{ V}$ ,  $v_b = -4.8 \text{ V}$  y  $v_c = 3.0 \text{ V}$ . ¿Es correcto el análisis?

*Sugerencia:* Utilice los voltajes de nodos para calcular todas las corrientes de los elementos. Verifique que se cumpla la KCL en cada nodo.

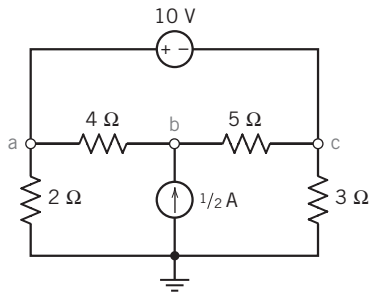


Figura P 4.11-1

**P 4.11-2** Un antiguo reporte de laboratorio asevera que los voltajes de nodos del circuito de la figura P 4.11-2 son,  $v_a = 4 \text{ V}$ ,  $v_b = -20 \text{ V}$  y  $v_c = 12 \text{ V}$ . ¿Son correctos?

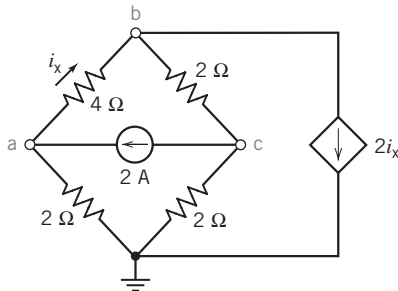


Figura P 4.11-2

**P 4.11-3** Su compañero de laboratorio olvidó registrar los valores de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ . Piensa que dos de los resistores en la figura P 4.11-3 tienen valores de  $10 \text{ k}\Omega$  y que el otro tiene un valor de  $5 \text{ k}\Omega$ . ¿Es posible esto? ¿Cuál resistor es el de  $5 \text{ k}\Omega$ ?

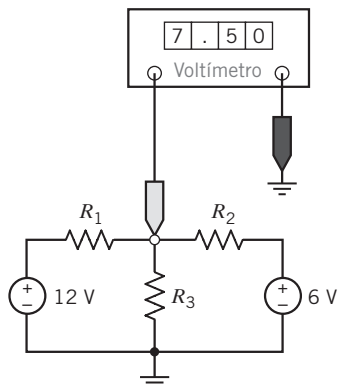


Figura P 4.11-3

**P 4.11-4** El análisis por computadora del circuito que se muestra en la figura P 4.11-4 indica que los voltajes de nodos son,  $v_1 = -8 \text{ V}$ ,  $v_2 = -20 \text{ V}$  y  $v_3 = -6 \text{ V}$ . Verifique que este análisis esté correcto.

*Sugerencia:* Utilice los voltajes de nodos para calcular las corrientes de los elementos. Verifique que se satisfaga la KCL en cada nodo.

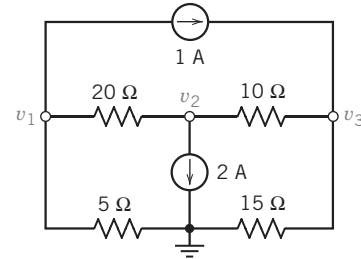


Figura P 4.11-4

**P 4.11-5** El análisis por computadora del circuito que se muestra en la figura P 4.11-5 indica que las corrientes de enlaces son,  $i_1 = 2 \text{ A}$ ,  $i_2 = 4 \text{ A}$  e  $i_3 = 3 \text{ A}$ . Verifique que el análisis esté correcto.

*Sugerencia:* Utilice las corrientes de enlaces para calcular los voltajes de los elementos. Verifique que se cumpla la KCL en cada enlace.

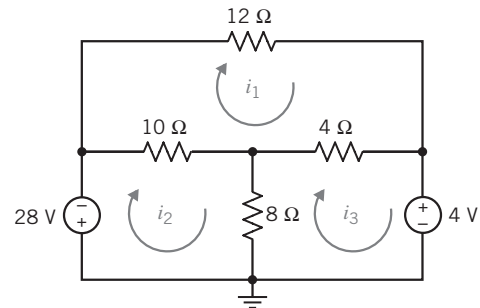


Figura P 4.11-5

## Problemas de PSpice

**PS 4-1** Utilice PSpice para determinar los voltajes de nodos del circuito que se muestra en la figura PS 4-1.

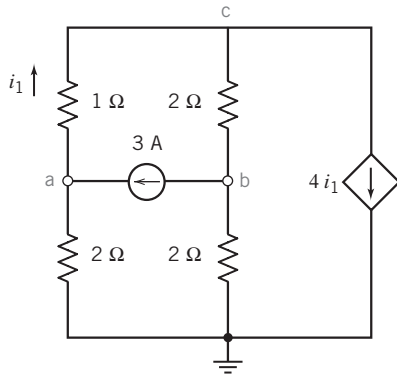


Figura PS 4-1

**PS 4-2** Utilice PSpice para determinar las corrientes de enlaces del circuito que se muestra en la figura PS 4-2.

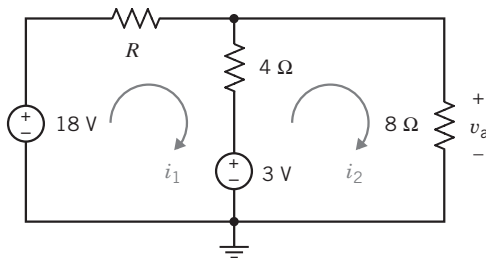


Figura PS 4-2

**PS 4-3** Los voltajes  $v_a$ ,  $v_b$  y  $v_c$  en la figura SP 4-3 son los voltajes de nodos que corresponden a los nodos a, b y c. La corriente  $i$  es la corriente en un cortocircuito conectado entre los nodos b y c. Utilice PSpice para determinar los valores de  $v_a$ ,  $v_b$ ,  $v_c$  y  $v_d$ , al igual que el de  $i$ .

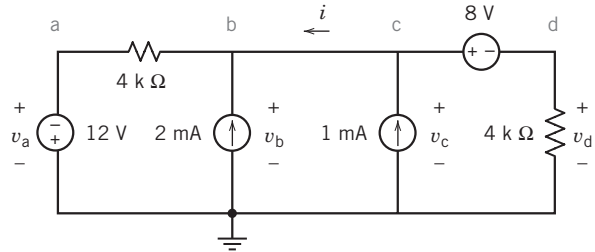


Figura PS 4-3

**PS 4-4** Determine la corriente,  $i$ , que se muestra en la figura PS 4-4.

*Respuesta:*  $i = 0.56 \text{ A}$

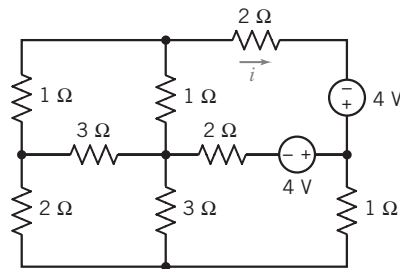


Figura PS 4-4

## Problemas de diseño

**PD 4-1** Un instrumento electrónico incorpora un alimentador de potencia de 15-V. Se agrega un pantalla digital que requiere un alimentador de potencia de 5-V. Por desgracia, el proyecto rebasa el presupuesto y a usted se le han dado instrucciones de que utilice el alimentador de potencia con que se cuenta. Con un divisor de voltaje, como se muestra en la figura PD 4-1, usted es capaz de obtener 5 V. La hoja de especificaciones para la pantalla digital muestra que la pantalla funcionará adecuadamente por arriba de 4.8 V hasta 5.4 V. Además, la pantalla usará 300 mA ( $I$ ) cuando esté activa, y 100 mA cuando descanse (esté inactiva).

- Seleccione valores de  $R_1$  de modo que la pantalla reciba una alimentación de 4.8 V a 5.4 V bajo todas las condiciones de la corriente  $I$ .
- Calcule la potencia máxima disipada por cada resistor,  $R_1$  y  $R_2$ , y la corriente máxima utilizada de la alimentación de 15-V.
- ¿Utilizar un divisor de voltaje es una buena solución de ingeniería? Si no lo es, ¿por qué? ¿Qué problemas podrían surgir?

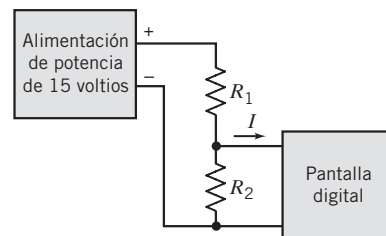


Figura PD 4-1

**PD 4-2** Para el circuito que se muestra en la figura PD 4-2, se desea que el voltaje en el nodo a sea igual al control de un motor eléctrico de 0 V. Seleccione los voltajes  $v_1$  y  $v_2$  para lograr que  $v_a = 0 \text{ V}$  cuando  $v_1$  y  $v_2$  sean menores de 20 V y mayores de cero, y que  $R = 2 \Omega$ .

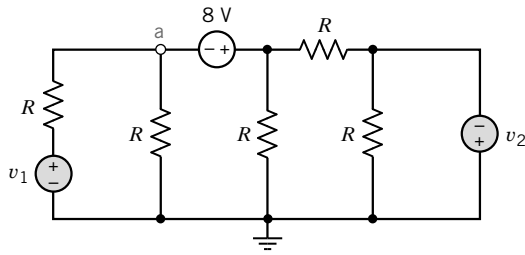


Figura PD 4-2

**PD 4-3** En la figura PD 4-3 se muestra un circuito de cableado para una lámpara especial doméstica. La lámpara tiene una resistencia de  $2\ \Omega$ , y el diseñador selecciona  $R = 100\ \Omega$ . La lámpara brillará cuando  $I \geq 50\ \text{mA}$  pero se quemará cuando  $I > 75\ \text{mA}$ .

- Determine la corriente en la lámpara y si brillará por  $R = 100\ \Omega$ .
- Seleccione  $R$  de modo que la lámpara brille pero que no se quemé si  $R$  cambia en  $\pm 10\%$  ante el cambio de temperatura en la casa.

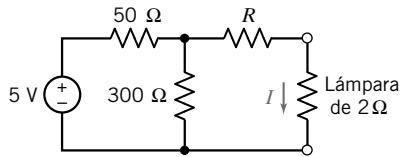


Figura PD 4-3 Circuito de una lámpara.

**PD 4-4** Para controlar un dispositivo que utiliza el circuito que se muestra en la figura PD 4-4, es necesario que  $v_{ab} = 10\ \text{V}$ . Seleccione los resistores cuando se requiera que todos los resistores sean mayores de  $1\ \Omega$  y que  $R_3 + R_4 = 20\ \Omega$ .

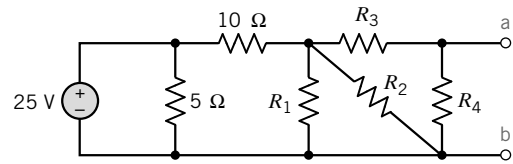


Figura PD 4-4

**PD 4-5** La corriente  $i$  que se muestra en el circuito de la figura PD 4-5 se utiliza para medir la tensión entre dos lados de una línea de falla terrestre. El voltaje  $v_1$  se obtiene desde un lado de la falla, y el  $v_2$  desde el otro lado de la falla. Seleccione las resistencias  $R_1, R_2$  y  $R_3$  de modo que la magnitud de la corriente  $i$  se mantenga en un rango de  $0.5\ \text{mA}$  y  $2\ \text{mA}$  cuando  $v_1$  y  $v_2$  pudieran variar de manera independiente entre  $+1\ \text{V}$  y  $+2\ \text{V}$  ( $1\ \text{V} \leq v_n \leq 2\ \text{V}$ ).

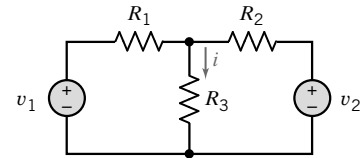



Figura PD 4-5 Un circuito para medición de la tensión de una falla terrestre.

# Teoremas de circuitos



## CAPÍTULO 5

### EN ESTE CAPÍTULO

- |     |   |      |   |
|-----|---|------|---|
| 5.1 | Introducción  | 5.8  | Uso de PSpice para determinar el circuito equivalente de Thévenin |
| 5.2 | Transformaciones de fuentes                                       | 5.9  | ¿Cómo lo podemos comprobar...?                                    |
| 5.3 | Superposición   | 5.10 | <b>EJEMPLO DE DISEÑO</b> — Puentes de indicador de tensión        |
| 5.4 | Teorema de Thévenin   | 5.11 | Resumen   |
| 5.5 | Circuito equivalente de Norton                                    |      | Problemas   |
| 5.6 | Transferencia de potencia máxima                                  |      | Problemas de PSpice   |
| 5.7 | Uso de MATLAB para determinar el circuito equivalente de Thévenin |      | Problemas de diseño   |

## 5.1 INTRODUCCIÓN

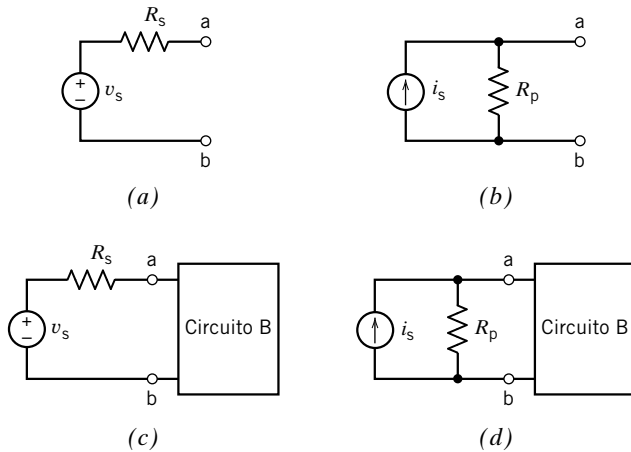
En este capítulo consideramos cinco teoremas de circuitos:

- Una **transformación de fuentes** que nos permite reemplazar una fuente de voltaje y un resistor en serie por una fuente de corriente y un resistor en paralelo. Hacerlo así no modifica la corriente o el voltaje del elemento de cualquier otro elemento del circuito.
- La **superposición** dice que la respuesta de un circuito lineal a varias entradas que trabajan en conjunto es igual a la suma de las respuestas de cada una de las entradas que trabajan por separado.
- El **teorema de Thévenin** nos permite reemplazar parte de un circuito por una fuente de voltaje y un resistor en serie. Hacerlo así no modifica la corriente o el voltaje del elemento o el voltaje de cualquier otro elemento del circuito.
- El **teorema de la transferencia de potencia máxima** describe las condiciones en las cuales un circuito transfiere a otro circuito tanta potencia cuanto le es posible.

Se podría considerar cada uno de estos teoremas de circuitos como una vía corta, una manera de reducir lo complejo de un circuito eléctrico para analizarlo más fácilmente. Sin embargo, lo más importante es que estos teoremas proporcionan una visión al interior de la naturaleza de los circuitos eléctricos lineales.

## 5.2 TRANSFORMACIONES DE FUENTES

La fuente de voltaje ideal es el modelo más sencillo de una fuente de voltaje, pero ocasionalmente necesitamos un modelo más preciso. La figura 5.2a muestra un modelo más preciso pero más complicado de una fuente de voltaje. Al circuito que se muestra en la figura 5.2-1 a veces se le llama fuente de voltaje no ideal. (El voltaje de una fuente de voltaje útil disminuye en cuanto la fuente de voltaje suministra más potencia. La fuente de voltaje no ideal modela este comportamiento, en tanto que la fuente de voltaje ideal no lo hace. La fuente de voltaje no ideal es un modelo más preciso de



**FIGURA 5.2-1** (a) Una fuente de voltaje no ideal. (b) Una fuente de corriente no ideal. (c) El circuito B conectado a una fuente de voltaje no ideal. (d) El circuito B conectado a una fuente de corriente no ideal.

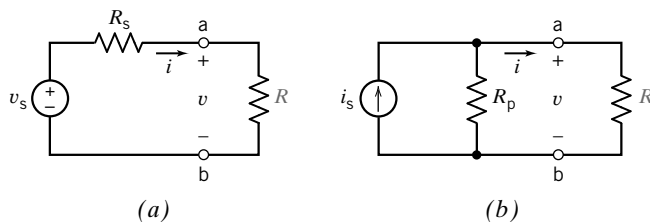
una fuente de voltaje práctica que la fuente de voltaje ideal, pero también es más complicada. Por lo común utilizaremos las fuentes de voltaje ideales para modelar fuentes de voltaje prácticas, pero incluso en ocasiones necesitaremos utilizar una fuente de voltaje no ideal.) La figura 5.2-1b muestra una fuente de corriente no ideal. Es un modelo más preciso pero más complicado de una fuente de corriente práctica.

En determinadas circunstancias ( $R_p = R_s$  y  $v_s = R_s i_s$ ), la fuente de voltaje no ideal y la fuente de corriente no ideal son equivalentes entre sí. La figura 5.2-1 ilustra el significado de “equivalente”. En la figura 5.2-1c, una fuente de voltaje no ideal está conectada al circuito B. En la figura 5.2-1d, una fuente de corriente no ideal está conectada al mismo circuito B. Quizá la figura 5.2-1d se obtuvo de la figura 5.2-1c, reemplazando la fuente de voltaje no ideal con una fuente de corriente no ideal. Reemplazar la fuente de voltaje no ideal por la fuente de corriente no ideal *equivalente* no modifica el voltaje o la corriente de ningún elemento en el circuito B. Eso significa que si buscó entre una lista de valores de las corrientes y voltajes de todos los elementos de circuito en el circuito B, no podría decir si el circuito B estaba conectado a una fuente de voltaje no ideal o a una fuente de corriente no ideal equivalente. Del mismo modo, podemos imaginar que la figura 5.2-1c se obtuvo de la figura 5.2-1d al reemplazar la fuente de corriente no ideal con una fuente de voltaje no ideal. Reemplazar la fuente de corriente no ideal por la fuente de voltaje no ideal equivalente no modifica el voltaje o la corriente de ningún elemento en el circuito B. Al proceso de transformar la figura 5.2-1c en la figura 5.2-1d, o viceversa, se le llama transformación de fuentes.

Queremos transformar el circuito de la figura 5.2-1a en el de la figura 5.2-1b. Entonces requerimos que ambos circuitos tengan las mismas características para todos los valores de un resistor externo  $R$  conectado entre las terminales a-b (figuras 5.2-2a,b). Trataremos los dos valores extremos  $R = 0$  y  $R = \infty$ .

Cuando la resistencia externa  $R = 0$ , tenemos un cortocircuito a través de las terminales a-b. Primero, requerimos que la corriente del cortocircuito sea la misma para cada circuito. La corriente del cortocircuito para la figura 5.2-2a es

$$i = \frac{v_s}{R_s} \tag{5.2-1}$$



**FIGURA 5.2-2** (a) Fuente de voltaje con un resistor externo  $R$ . (b) Fuente de corriente con una resistencia externa  $R$ .

La corriente del cortocircuito para la figura 5.2-2b es  $i = i_s$ . Por consiguiente, requerimos que

$$i_s = \frac{v_s}{R_s} \quad (5.2-2)$$

Para la condición de circuito abierto,  $R$  es infinita, y a partir de la figura 5.2-2a, tenemos el voltaje  $v = v_s$ . Para el voltaje del circuito abierto de la figura 5.2-2b, tenemos

$$v = i_s R_p$$

Dado que  $v$  debe ser igual para que ambos circuitos sean equivalentes, requerimos que

$$v_s = i_s R_p \quad (5.2-3)$$

Además, de la ecuación 5.2-2 requerimos  $i_s = v_s/R_s$ . Así, debemos tener

$$v_s = \left( \frac{v_s}{R_s} \right) R_p$$

y, por lo tanto, requerimos que

$$R_s = R_p \quad (5.2-4)$$

Las ecuaciones 5.2-2 y 5.2-4 deben ser ciertas simultáneamente para que las dos fuentes no ideales sean equivalentes. Desde luego, hemos comprobado que las dos fuentes son equivalentes en los dos valores ( $R = 0$  y  $R = \infty$ ). No hemos comprobado que los circuitos son iguales para todas las  $R$ , pero aseveramos que la relación de igualdad se mantiene para todas las  $R$  para estos dos circuitos como se muestra a continuación.

Para el circuito de la figura 5.2-2a, aplicamos la KVL para obtener

$$v_s = iR_s + v$$

Dividir entre  $R_s$  resulta

$$\frac{v_s}{R_s} = i + \frac{v}{R_s}$$

Si aplicamos la KCL al circuito de la figura 5.2-2b, tenemos

$$i_s = i + \frac{v}{R_p}$$

Así, los dos circuitos son equivalentes cuando  $i_s = v_s/R_s$  y  $R_s = R_p$ .

Una fuente de voltaje  $v_s$  conectada en serie con un resistor  $R_s$ , y una fuente de corriente  $i_s$  conectada en paralelo con un resistor  $R_p$  son circuitos equivalentes siempre que

$$R_p = R_s \text{ y } v_s = R_s i_s$$

Reemplazar una fuente de voltaje en serie con un resistor por su circuito equivalente no modificará las corrientes o voltajes del elemento en el resto del circuito. Del mismo modo, reemplazar una fuente de corriente en paralelo con un resistor por su circuito equivalente no modificará las corrientes o voltajes del elemento en el resto del circuito.

Las transformaciones de fuentes son útiles en la simplificación de circuitos y también lo pueden ser en análisis de nodos o enlaces. El método de transformar una forma de fuente en otra se resume en la figura 5.2-3.

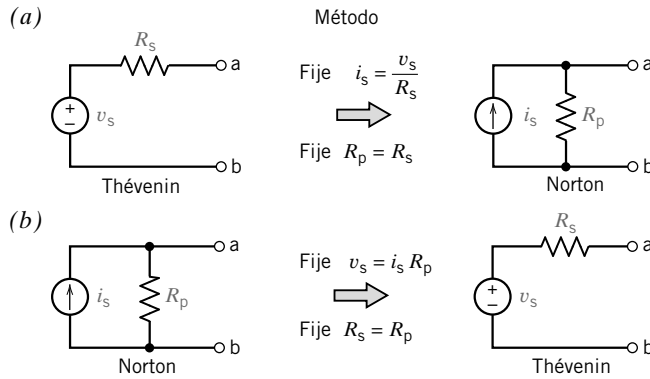


FIGURA 5.2-3 Método de transformaciones de fuentes.

**EJEMPLO 5.2-1** Transformaciones de fuentes

Encuentre la transformación de fuentes para los circuitos en las figuras 5.2-4a, b.

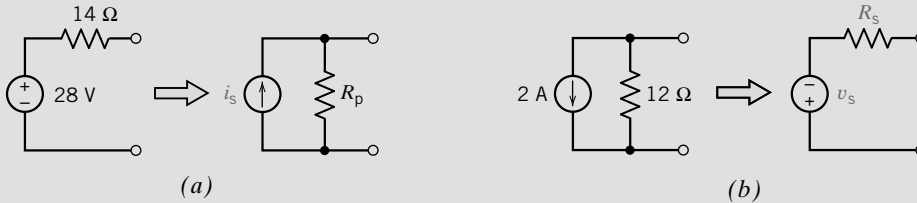


FIGURA 5.2-4 Los circuitos del ejemplo 5.2-1.

**Solución**

Utilizando el método resumido en la figura 5.2-3, observamos que la fuente de voltaje de la figura 5.2-4a se puede transformar en una fuente de corriente con  $R_p = R_s = 14 \Omega$ . La fuente de corriente es

$$i_s = \frac{v_s}{R_s} = \frac{28}{14} = 2 \text{ A}$$

La fuente transformada resultante se muestra en la parte derecha de la figura 5.2-4a.

Empezando con la fuente de corriente de la figura 5.2-4, tenemos  $R_s = R_p = 12 \Omega$ . La fuente de voltaje es

$$v_s = i_s R_p = 2(12) = 24 \text{ V}$$

La fuente transformada resultante se muestra en la parte derecha de la figura 5.2-4b. Observe que el signo positivo de la fuente de voltaje,  $v_s$ , aparece en la terminal más baja porque la flecha de la fuente de corriente apunta hacia abajo.

**EJEMPLO 5.2-2** Transformaciones de fuentes

En la figura 5.2-5 se muestra un circuito. Encuentre la corriente y reduciendo a su forma más simple, el circuito a la derecha de las terminales a-b, mediante las transformaciones de fuentes.

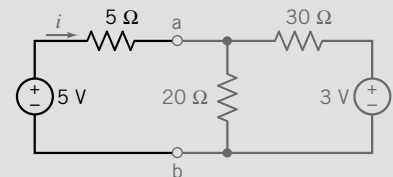


FIGURA 5.2-5 El circuito del ejemplo 5.2-2.



## Solución

El primer paso es transformar el resistor de  $30\ \Omega$  y la fuente de  $3\ \text{V}$  en serie en una fuente de corriente con una resistencia en paralelo. Primero, observe que  $R_p = R_s = 30\ \Omega$ . La fuente de corriente es

$$i_s = \frac{v_s}{R_p} = \frac{3}{30} = 0.1\ \text{A}$$

como se muestra en la figura 5.2-6a. Al combinar las dos resistencias en paralelo en la figura 5.2-6a, tenemos que  $R_{p2} = 12\ \Omega$ , como se muestra en la figura 5.2-6b.

La resistencia en paralelo de  $12\ \Omega$  y la fuente de corriente de  $0.1\ \text{A}$  se pueden transformar en una fuente de voltaje en serie con  $R_{s2} = 12\ \Omega$ , como se muestra en la figura 5.2-6c. La fuente de voltaje  $v_s$  se encuentra utilizando la ecuación 5.2-3:

$$v_s = i_s R_{s2} = 0.1(12) = 1.2\ \text{V}$$

Las transformaciones de fuentes no modifican las corrientes y voltajes en el resto del circuito. Por lo tanto, la corriente  $i$  en la figura 5.2-5 es igual a la corriente  $i$  en la figura 5.2-6c. La corriente  $i$  se encuentra utilizando la KVL en torno al circuito cerrado de la figura 5.2-6c, con el resultado de  $i = 3.8/17 = 0.224\ \text{A}$ .

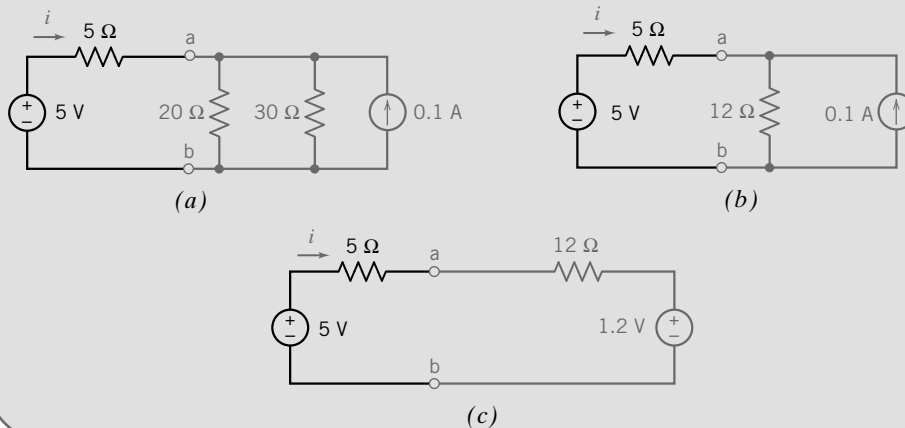


FIGURA 5.2-6

Pasos de transformaciones de fuentes para el ejemplo 5.2-2.

**EJERCICIO 5.2-1** Determine los valores de  $R$  e  $i_s$  de modo que los circuitos que se muestran en las figuras E 5.2-1a, b sean equivalentes entre sí debido a una transformación de fuentes.

**Respuesta:**  $R = 10\ \Omega$  e  $i_s = 1.2\ \text{A}$

**EJERCICIO 5.2-2** Determine los valores de  $R$  e  $i_s$  de modo que los circuitos que se muestran en las figuras E 5.2-2a, b sean equivalentes entre sí debido a una transformación de fuentes.

**Sugerencia:** Observe que la polaridad de la fuente de voltaje en la figura E 5.2-2a no es la misma como en la figura E 5.2-1a.

**Respuesta:**  $R = 10\ \Omega$  e  $i_s = 1.2\ \text{A}$

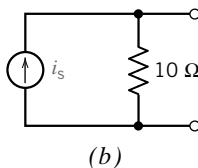
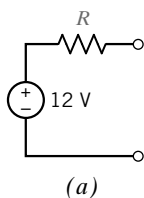


FIGURA E 5.2-1

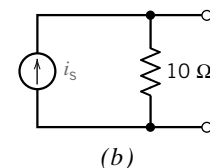
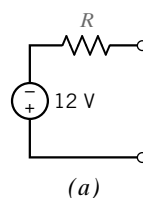


FIGURA E 5.2-2

**EJERCICIO 5.2-3** Determine los valores de  $R$  y  $v_s$  de modo que los circuitos que se muestran en la figura E 5.2-3a,b sean equivalentes entre sí debido a una transformación de fuentes.

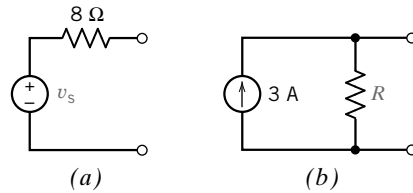


FIGURA E 5.2-3

**Respuesta:**  $R = 8 \Omega$  y  $v_s = 24 \text{ V}$

**EJERCICIO 5.2-4** Determine los valores de  $R$  y  $v_s$  de modo que los circuitos que se muestran en las figuras E 5.2-4a, b sean equivalentes entre sí debido a una transformación de fuentes.

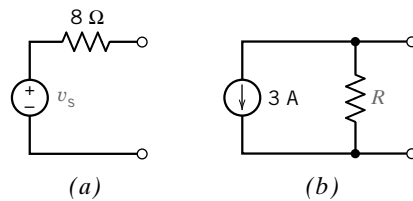


FIGURA E 5.2-4

**Sugerencia:** Observe que la dirección de referencia de la fuente de corriente en la figura E 5.2-4b no es la misma que en la figura E 5.2-3b.

**Respuesta:**  $R = 8 \Omega$  y  $v_s = -24 \text{ V}$

### 5.3 SUPERPOSICIÓN

La salida de un circuito lineal se puede expresar como una combinación lineal de sus entradas. Por ejemplo, considere cualquier circuito que tenga las tres propiedades siguientes:

1. El circuito consta totalmente de resistores y fuentes dependientes e independientes.
2. La entradas del circuito son los voltajes de todas las fuentes de voltaje independientes, y las corrientes de todas las fuentes de corriente independientes.
3. La salida es el voltaje o la corriente de cualquier elemento del circuito.

Un circuito con estas características es un circuito lineal. En consecuencia, la entrada del circuito se puede expresar como una combinación lineal de la entrada del circuito. Por ejemplo:

$$v_o = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \quad (5.3-1)$$

donde  $v_o$  es la salida del circuito (que podría ser una corriente en vez de un voltaje) y  $v_1, v_2, \dots, v_n$  son las entradas al circuito (alguna o todas las entradas podrían ser corrientes en vez de voltajes). Los coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , de la combinación lineal son constantes reales llamadas ganancias.

A continuación consideremos qué pasaría si estableciéramos que todas las entradas menos una fueran cero. Sea  $v_{oi}$  la salida cuando todas las entradas excepto la  $i$ ésima entrada tuvieran que ser cero. Por ejemplo, suponga que establecemos  $v_2, v_3, \dots, v_n$  a cero.

Entonces

$$v_{o1} = a_1 v_1 \quad (5.3-2)$$

Podemos interpretar  $v_{o1} = a_1 v_1$  como la salida del circuito debido a que la entrada  $v_1$  está actuando de manera separada. Por el contrario,  $v_o$  en la ecuación 5.3-1 es la salida del circuito debido a que todas las entradas están trabajando en conjunto. Ahora tenemos la siguiente interpretación importante de la ecuación 5.3-1:

La salida de un circuito lineal debida a que varias entradas trabajan en conjunto es la suma de las salidas porque cada entrada funciona de manera separada.

Las entradas a nuestro circuito son los voltajes de fuentes de voltaje independientes y las corrientes de fuentes de corriente independientes. Cuando se establecen todas las entradas menos una a cero, las demás entradas se convierten en fuentes de voltaje de 0 V y fuentes de corriente de 0 A. Como las fuentes de voltaje de 0 V son equivalentes a cortocircuitos y las fuentes de corriente de 0 A son equivalentes a circuitos abiertos, las fuentes correspondientes a las demás entradas se reemplazan por cortocircuitos o circuitos abiertos.

La ecuación 5.3-2 sugiere un método para determinar los valores de los coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  de la combinación lineal. Por ejemplo, para determinar  $a_1$ , se establecen  $v_2, v_3, \dots, v_n$  a cero. Entonces, al dividir ambos lados de la ecuación entre  $v_1$ , obtenemos

$$a_1 = \frac{v_{o1}}{v_1}$$

Las otras ganancias se determinan de la misma manera.

### EJEMPLO 5.3-1 Superposición

El circuito que se muestra en la figura 5.3-1 tiene una salida,  $v_o$ , y tres entradas,  $v_1, i_2$  y  $v_3$ . (Como se esperaba, las entradas son voltajes de fuentes de voltaje independientes y las corrientes de fuentes de corrientes independientes.) Exprese la salida como una combinación lineal de las entradas.

#### Solución

Analicemos el circuito utilizando ecuaciones nodales. Etiquete el voltaje de nodos en el nodo alto de la fuente de corriente e identifique el supernodo correspondiente a la fuente de voltaje horizontal como se muestra en la figura 5.3-2. Aplique la KCL al supernodo para obtener

$$\frac{v_1 - (v_3 + v_o)}{40} + i_2 = \frac{v_o}{10}$$

Multiplique ambos lados de esta ecuación por 40 para eliminar las fracciones. Así tenemos

$$v_1 - (v_3 + v_o) + 40i_2 = 4v_o \Rightarrow v_1 + 40i_2 - v_3 = 5v_o$$

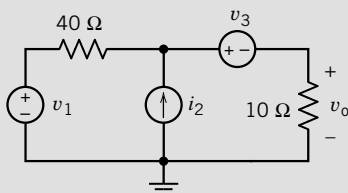


FIGURA 5.3-1 Circuito lineal para el ejemplo 5.3-1.

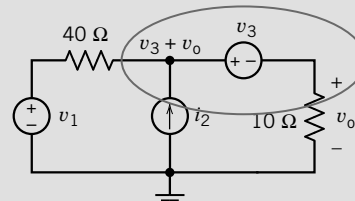


FIGURA 5.3-2 Un supernodo.

Dividiendo ambos lados entre 5, exprese las salida como una combinación lineal de las entradas:

$$v_o = \frac{v_1}{5} + 8i_2 - \frac{v_3}{5}$$

Incluso ahora podemos determinar que los coeficientes de la combinación lineal sean

$$a_1 = \frac{v_{o1}}{v_1} = \frac{1}{5} \text{ V/V}, a_2 = \frac{v_{o2}}{i_2} = 8 \text{ V/A}, \text{ y } a_3 = \frac{v_{o3}}{v_3} = -\frac{1}{5} \text{ V/V}$$

### Solución alterna

La figura 5.3-3 muestra el circuito de la figura 5.3-1 cuando  $i_2 = 0 \text{ A}$  y  $v_3 = 0 \text{ V}$ . (Una fuente de corriente cero equivale a un circuito abierto, y una fuente de voltaje cero es equivalente a un cortocircuito.)

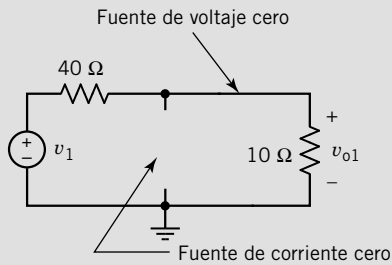


FIGURA 5.3-3 Salida ocasionada por la primera entrada.

Aplicando la división de voltaje

$$v_{o1} = \frac{10}{40 + 10} v_1 = \frac{1}{5} v_1$$

En otras palabras,

$$a_1 = \frac{v_{o1}}{v_1} = \frac{1}{5} \text{ V/V}$$

A continuación, la figura 5.3-4 muestra el circuito cuando  $v_1 = 0 \text{ V}$  y  $v_3 = 0 \text{ V}$ . Los resistores están conectados en paralelo. Aplicar la ley de Ohm a la resistencia equivalente da por resultado

$$v_{o2} = \frac{40 \times 10}{40 + 10} i_2 = 8i_2$$

En otras palabras,

$$a_2 = \frac{v_{o2}}{i_2} = 8 \text{ V/A}$$

Finalmente, la figura 5.3-5 muestra el circuito cuando  $v_1 = 0 \text{ V}$  e  $i_2 = 0 \text{ A}$ . Utilizando la división de voltaje,

$$v_{o3} = \frac{10}{40 + 10} (-v_3) = -\frac{1}{5} v_3$$

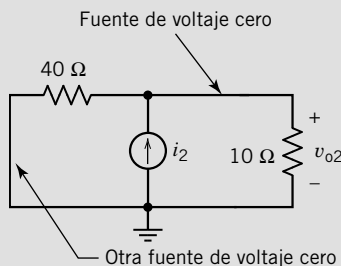


FIGURA 5.3-4 Salida ocasionada por la segunda entrada.

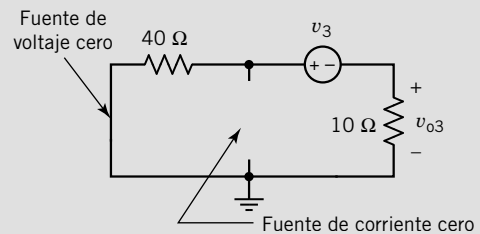


FIGURA 5.3-5 Salida ocasionada por la tercera entrada.

En otras palabras,

$$a_3 = \frac{v_{o3}}{v_3} = -\frac{1}{5} \text{ V/V}$$

Ahora la salida se puede expresar como una combinación lineal de las entradas

$$v_o = a_1 v_1 + a_2 i_2 + a_3 v_3 = \frac{1}{5} v_1 + 8 i_2 + \left(-\frac{1}{5}\right) v_3$$

como antes.

### EJEMPLO 5.3-2

Encuentre la corriente  $i$  para el circuito de la figura 5.3-6a.

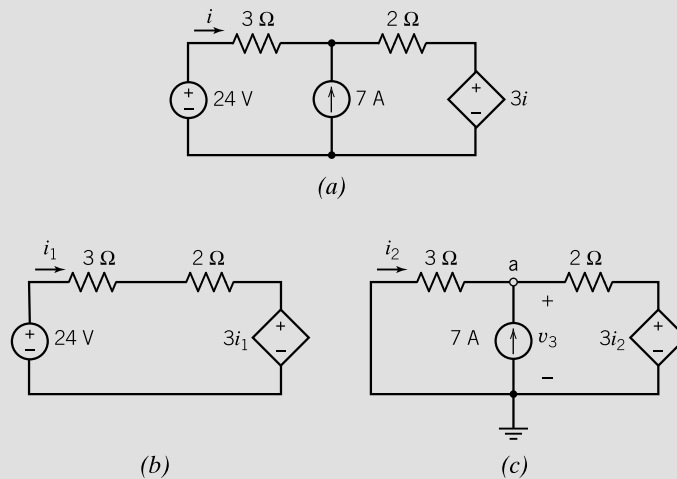


FIGURA 5.3-6 (a) El circuito para el ejemplo 5.3-2. (b) La fuente de voltaje independiente actuando sola. (c) La fuente de corriente independiente actuando sola.

### Solución

Fuentes independientes proporcionan las entradas a un circuito. El circuito en la figura 5.3-6a tiene dos entradas: el voltaje de la fuente de voltaje independiente y la corriente de la fuente de corriente independiente. La corriente,  $i$ , causada por las dos fuentes que actúan en conjunto es igual a la suma de las corrientes causada por cada fuente independiente actuando por separado.

**Paso 1:** La figura 5.3-6b muestra el circuito utilizado para calcular la corriente causada por la fuente de voltaje independiente actuando sola. Para este cálculo, la corriente de la fuente de corriente se establece en cero. (Una fuente de corriente en cero equivale a un circuito abierto, por lo que la fuente de corriente ha sido reemplazada por un circuito abierto.) En la figura 5.3-6b, la corriente ocasionada por la fuente de voltaje sola ha sido etiquetada como  $i_1$ .

Aplique la ley del voltaje de Kirchhoff al circuito cerrado en la figura 5.3-6b para obtener

$$-24 + (3 + 2)i_1 + 3i_1 + 0 \Rightarrow i_1 = 3 \text{ A}$$

(Observe que la fuente dependiente no se ha establecido en cero. Las entradas para un circuito las proporcionan las fuentes independientes, no las dependientes. Cuando encontramos la respuesta a una entrada que actúa sola, establecemos las otras entradas en cero. Entonces, establecemos las demás fuentes independientes en cero, pero no hay razón para establecer en cero la fuente dependiente.)

**Paso 2:** La figura 5.3-6c muestra el circuito que se utilizó para calcular la corriente causada por la fuente de corriente actuando sola. Para este cálculo, el voltaje de la fuente de voltaje independiente se establece en cero. (Una fuente de voltaje cero es equivalente a un cortocircuito, de modo que la fuente de voltaje independiente ha sido reemplazada por un cortocircuito.) La corriente ocasionada por la fuente de voltaje sola se ha etiquetado como  $i_2$  en la figura 5.3-6c.

Primero, exprese la corriente controladora de la fuente dependiente en términos del voltaje de nodos,  $v_a$ , utilizando la ley de Ohm:

$$i_2 = -\frac{v_a}{3} \Rightarrow v_a = -3i_2$$

Luego, aplique la ley de la corriente de Kirchhoff al nodo a para obtener

$$i_2 + 7 = \frac{v_a - 3i_2}{2} \Rightarrow i_2 + 7 = \frac{-3i_2 - 3i_2}{2} \Rightarrow i_2 = -\frac{7}{4} \text{ A}$$

**Paso 3:** La corriente,  $i$ , causada por las dos fuentes independientes actuando en conjunto es igual a la suma de las corrientes,  $i_1$  e  $i_2$ , causadas por cada fuente actuando por separado:

$$i = i_1 + i_2 = 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4} \text{ A}$$

## 5.4 TEOREMA DE THÉVENIN

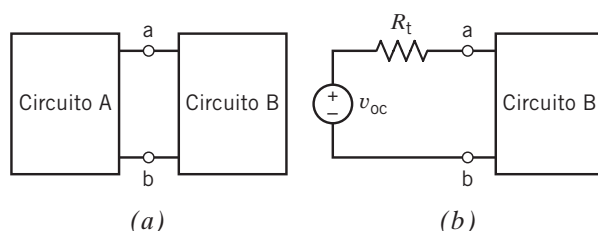
En esta sección presentamos el circuito equivalente de Thévenin, basado en un teorema desarrollado por M. L. Thévenin, ingeniero francés que publicó este principio en 1883. Probablemente Thévenin, a quien se acredita el teorema, basó sus investigaciones en un trabajo original de Hermann von Helmholtz (figura 5.4-1).

La figura 5.4-2 ilustra el uso del circuito equivalente de Thévenin. En la figura 5.4-2a, se parte un circuito en dos, el circuito A y el B, que están conectados en un solo par de terminales. (Ésta es la única conexión entre los circuitos A y B. En particular, si el circuito completo contiene una fuente dependiente, entonces ambas partes de esa fuente dependiente deben estar en el circuito A o bien en el circuito B.) En la figura 5.4-2b, el circuito A es reemplazado por su circuito equivalente de Thévenin, el cual consiste en una fuente de voltaje ideal en serie con un resistor. Reemplazar el circuito A por su circuito equivalente de Thévenin no modifica el voltaje o la corriente de ningún elemento en el circuito B. Esto significa que si usted buscaba en una lista de valores de las corrientes y los voltajes de todos los elementos de circuito en el circuito B, no podría indicar si el circuito B estaba conectado al circuito A o a su circuito equivalente de Thévenin.

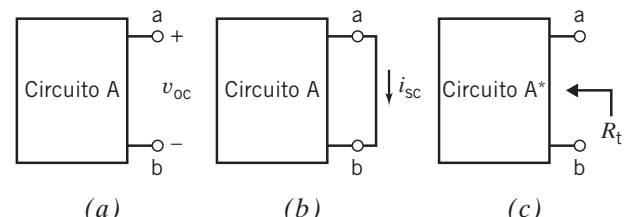
Encontrar el circuito equivalente de Thévenin del circuito A implica tres parámetros: el voltaje del circuito abierto,  $v_{oc}$ , la corriente del cortocircuito,  $i_{sc}$ , y la resistencia de Thévenin,  $R_t$ . La figura 5.4-3 ilustra la interpretación de estos tres parámetros. En la figura 5.4-3a un circuito abierto está conectado a través de las terminales del circuito A. El voltaje a través



**FIGURA 5.4-1** A Hermann von Helmholtz (1821-1894) se le atribuye el trabajo original en que se basó Thévenin para elaborar su teorema. Cortesía de la New York Public Library.



**FIGURA 5.4-2** (a) Un circuito partido en dos partes: el circuito A y el circuito B. (b) El circuito A, reemplazado por su circuito equivalente de Thévenin.



**FIGURA 5.4-3** El circuito equivalente de Thévenin implica tres parámetros: (a) el voltaje,  $v_{oc}$ , del circuito abierto (b) la corriente,  $i_{sc}$ , del cortocircuito y (c) la resistencia,  $R_t$ , de Thévenin.

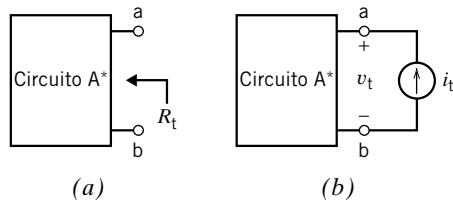


FIGURA 5.4-4 (a) La resistencia de Thévenin,  $R_t$ , y (b) un método para la medición o el cálculo de la resistencia,  $R_t$ , de Thévenin.

de ese circuito abierto es el  $v_{oc}$ , voltaje de circuito abierto. En la figura 5.4-3b, un cortocircuito está conectado a través de las terminales del circuito A. La corriente en ese cortocircuito es la corriente,  $i_{sc}$ , del cortocircuito.

La figura 5.4-3c indica que la resistencia de Thévenin,  $R_t$ , es la resistencia equivalente del circuito A\*. El circuito A\* está formado a partir del circuito A al reemplazar todas las fuentes de voltaje *independientes* por cortocircuitos y reemplazar todas las fuentes de corriente *independientes* por circuitos abiertos. (Las fuentes de corriente y voltaje *dependientes* no se reemplazan con circuitos abiertos o cortocircuitos.) Con frecuencia, la resistencia de Thévenin,  $R_t$ , se puede determinar por el reemplazo repetido de resistores en serie o en paralelo por resistores equivalentes. A veces se requiere un método más formal. La figura 5.4-4 ilustra un método formal para determinar el valor de la resistencia de Thévenin. Una fuente de corriente que tiene una corriente  $i_t$  está conectada a través de las terminales del circuito A\*. El voltaje,  $v_t$ , a través de la fuente de corriente se calcula o mide. La resistencia de Thévenin está determinada por los valores de  $i_t$  y  $v_t$ , utilizando

$$R_t = \frac{v_t}{i_t}$$

El voltaje del circuito abierto,  $v_{oc}$ , la corriente del cortocircuito,  $i_{sc}$ , y la resistencia de Thévenin,  $R_t$ , están relacionados por la ecuación

$$v_{oc} = R_t i_{sc}$$

En consecuencia, la resistencia de Thévenin se puede calcular a partir del voltaje y de la corriente del cortocircuito.

En resumen, el circuito equivalente de Thévenin para el circuito A consiste en una fuente de voltaje ideal, que tiene un voltaje  $v_{oc}$ , en serie con un resistor que tiene una resistencia  $R_t$ . Al reemplazar el circuito A por su circuito equivalente de Thévenin no se modifican el voltaje ni la corriente de ningún elemento en el circuito B.

### EJEMPLO 5.4-1 El circuito equivalente de Thévenin

Utilizando el teorema de Thévenin, encuentre la corriente  $i$  a través del resistor  $R$  en el circuito de la figura 5.4-5.

#### Solución

Puesto que lo que nos interesa es la corriente  $i$ , identificamos el resistor  $R$  como circuito B. Entonces el circuito A es como se muestra en la figura 5.4-6a. La resistencia  $R_t$  de Thévenin se encuentra a partir de la figura 5.4-6b, donde hemos establecido el voltaje de la fuente de voltaje a cero y luego reemplazado la fuente de 0 V por un cortocircuito. Calculamos la resistencia equivalente buscando en las terminales, y obteniendo que  $R_t = 8 \Omega$ .

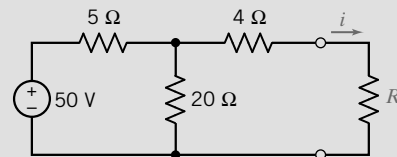


FIGURA 5.4-5 Circuito para el ejemplo 5.4-1.

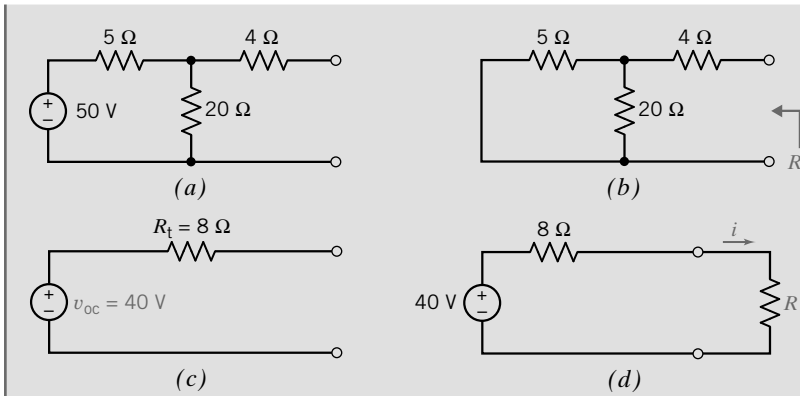


FIGURA 5.4-6 Pasos para determinar el circuito equivalente de Thévenin para el circuito a la izquierda de las terminales de la figura 5.4-5.

Aplicando el principio del divisor de voltaje al circuito de la figura 5.4-6a, encontramos que  $v_{oc} = 40$  V. Si reconectamos el circuito B al circuito equivalente de Thévenin como se muestra en la figura 5.4-6d, obtenemos

$$i = \frac{40}{R + 8} \text{ A}$$

### EJEMPLO 5.4-2 Circuito equivalente de Thévenin

Encuentre el circuito equivalente de Thévenin para el circuito que se muestra en la figura 5.4-7.

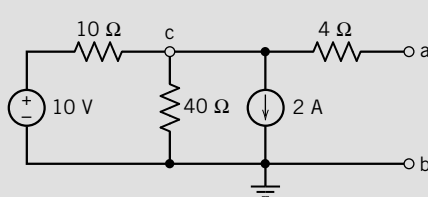


FIGURA 5.4-7 Circuito para el ejemplo 5.4-2.

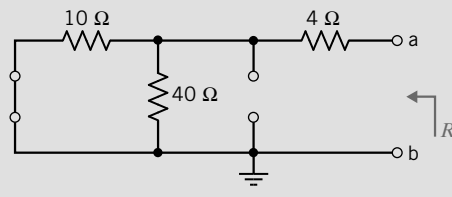


FIGURA 5.4-8 Circuito de la figura 5.4-7 con todas las fuentes desactivadas.

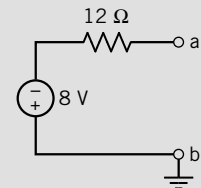


FIGURA 5.4-9 Circuito equivalente de Thévenin para el circuito de la figura 5.4-7.

### Solución

Un método es encontrar el voltaje del circuito abierto y la resistencia equivalente  $R_t$  de Thévenin del circuito. Lo primero es encontrar la resistencia  $R_t$ . La figura 5.4-8 muestra el circuito después de reemplazar la fuente de voltaje por un cortocircuito y la fuente de corriente por un circuito abierto. Buscar el circuito en las terminales a-b para encontrar  $R_t$ . El resistor de 10-Ω en paralelo con el resistor de 40-Ω da como resultado una resistencia equivalente de 8 Ω. Si agregamos 8 Ω a 4 Ω en serie, obtenemos

$$R_t = 12 \Omega$$

A continuación, deseamos determinar el voltaje del circuito abierto en las terminales a-b. Como no fluye corriente a través del resistor de 4-Ω, el voltaje del circuito abierto es idéntico al voltaje a través del resistor de 40-Ω,  $v_c$ . Utilizando el nodo inferior como referencia, escribimos la KCL en el nodo c de la figura 5.4-7 para obtener.

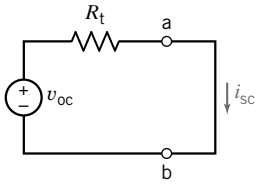
$$\frac{v_c - 10}{10} + \frac{v_c}{40} + 2 = 0$$

Al despejar  $v_c$  resulta

$$v_c = -8 \text{ V}$$

Por lo tanto, el circuito equivalente de Thévenin es como se muestra en la figura 5.4-9.





**FIGURA 5.4-10**  
Circuito de Thévenin con un cortocircuito en las terminales a-b.

Algunos circuitos contienen una o más fuentes dependientes así como fuentes independientes. El que haya una fuente dependiente impide obtener directamente la  $R_t$  desde la reducción de un circuito sencillo utilizando las reglas para los resistores en paralelo y en serie.

Un procedimiento para determinar  $R_t$  es (1) determinar el voltaje de circuito abierto  $v_{oc}$ , y (2) determinar la corriente  $i_{sc}$  del cortocircuito cuando las terminales a-b están conectadas por un cortocircuito, como se muestra en la figura 5.4-10; entonces

$$R_t = \frac{v_{oc}}{i_{sc}}$$

Este método es atractivo porque ya necesitamos el voltaje del circuito abierto para el circuito equivalente de Thévenin. Podemos mostrar que  $R_t = v_{oc}/i_{sc}$  al escribir la ecuación de la KVL para el circuito cerrado de la figura 5.4-10, obteniendo

$$-v_{oc} + R_t i_{sc} = 0$$

Obviamente,  $R_t = v_{oc}/i_{sc}$ .

### EJEMPLO 5.4-3 Circuitos equivalentes y fuentes dependientes de Thévenin

Encuentre el circuito equivalente de Thévenin para el circuito que se muestra en la figura 5.4-11, el cual incluye una fuente dependiente.

#### Solución

Primero, encontramos el voltaje del circuito abierto  $v_{ca} = v_{ab}$ . Al escribir la KVL en torno al enlace de la figura 5.4-11 (usando  $i$  como la corriente de enlace) obtenemos

$$-20 + 6i - 2i + 6i = 0$$

Por lo tanto,

$$i = 2 \text{ A}$$

Dado que no hay corriente que fluya a través del resistor de  $10\text{-}\Omega$ , el voltaje del circuito abierto es idéntico al voltaje a través del resistor entre las terminales c y b. Por lo tanto,

$$v_{oc} = 6i = 12 \text{ V}$$

El paso siguiente es determinar la corriente del cortocircuito para el circuito de la figura 5.4-12. Utilizando las dos corrientes de enlace indicadas, tenemos

$$-20 + 6i_1 - 2i + 6(i_1 - i_2) = 0$$

y

$$6(i_2 - i_1) + 10i_2 = 0$$

Sustituir  $i = i_1 - i_2$  y reordenar las dos ecuaciones para obtener

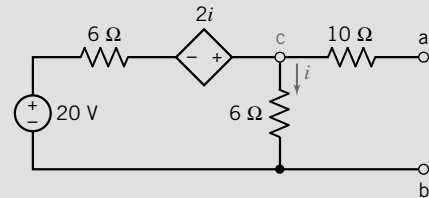
$$10i_1 - 4i_2 = 20$$

y

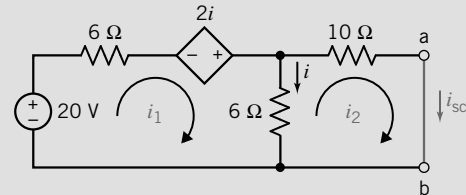
$$-6i_1 + 16i_2 = 0$$

Por lo tanto, encontramos que  $i_2 = i_{sc} = 120/136 \text{ A}$ . La resistencia de Thévenin es

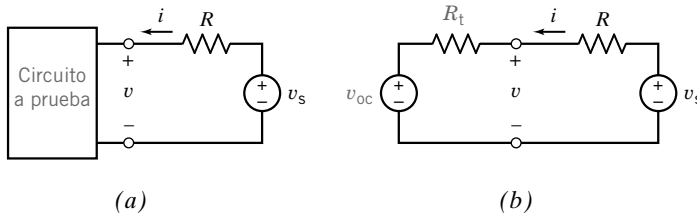
$$R_t = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} = \frac{12}{120/136} = 13.6 \text{ }\Omega$$



**FIGURA 5.4-11** Circuito del ejemplo 5.4-3.



**FIGURA 5.4-12** Circuito de la figura 5.4-11 con terminales de salida a-b en cortocircuito.



**FIGURA 5.4-13** (a) Circuito a prueba con una fuente de laboratorio  $v_s$  y resistor  $R$ . (b) circuito de (a) con el circuito equivalente de Thévenin reemplazando al circuito a prueba.

Un procedimiento de laboratorio para determinar el equivalente de Thévenin de un circuito de caja negra (vea la figura 5.4-13a) es para medir  $i$  y  $v$  para dos o más valores de  $v_s$  y un valor fijo de  $R$ . Para el circuito de la figura 5.4-13b, reemplazamos el circuito de prueba con su equivalente de Thévenin, obteniendo

$$v = v_{oc} + iR_t \quad (5.4-1)$$

El procedimiento es para medir  $v$  e  $i$  para una  $R$  fija y varios valores de  $v_s$ . Por ejemplo, sea  $R = 10 \Omega$  y considerar las dos mediciones resulta

$$(1) \quad v_s = 49 \text{ V}; \quad i = 0.5 \text{ A}, \quad v = 44 \text{ V}$$

y

$$(2) \quad v_s = 76 \text{ V}; \quad i = 2 \text{ A}, \quad v = 56 \text{ V}$$

Entonces tenemos dos ecuaciones simultáneas (utilizando la ecuación 5.5-1):

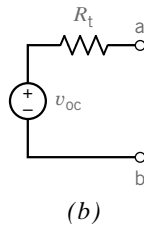
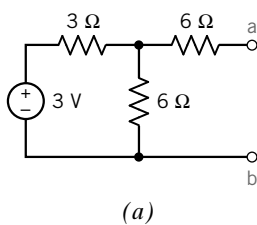
$$44 = v_{oc} + 0.5R_t$$

$$56 = v_{oc} + 2R_t$$

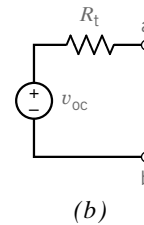
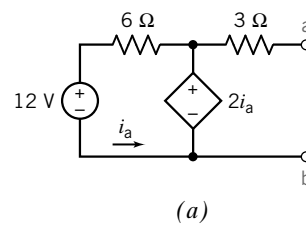
Despejando estas ecuaciones simultáneas, tenemos  $R_t = 8 \Omega$  y  $v_{oc} = 40 \text{ V}$ ; de esta manera se obtiene el equivalente de Thévenin del circuito de la caja negra.

**EJERCICIO 5.4-1** Determine los valores de  $R_t$  y  $v_{oc}$  que hacen que el circuito que se muestra en la figura E 5.4-1b sea el circuito equivalente del circuito en la figura E 5.4-1a.

**Respuesta:**  $R_t = 8 \Omega$  y  $v_{oc} = 2 \text{ V}$



**FIGURA E 5.4-1**



**FIGURA E 5.4-2**

**EJERCICIO 5.4-2** Determine los valores de  $R_t$  y  $v_{oc}$  que hacen que el circuito que se muestra en la figura E 5.4-2b sea el circuito equivalente de Thévenin del circuito en la figura E 5.4-2a.

**Respuesta:**  $R_t = 3 \Omega$  y  $v_{oc} = -6 \text{ V}$

## 5.5 CIRCUITO EQUIVALENTE DE NORTON

Un ingeniero estadounidense, E. L. Norton, de los Laboratorios Bell Telephone, propuso un circuito equivalente para el circuito A de la figura 5.4-2, utilizando una fuente de corriente y una resistencia equivalente. El circuito equivalente de Norton se relaciona con el circuito equivalente de Thévenin por una transformación de fuente. En otras palabras, una transformación de fuente convierte un circuito

equivalente de Thévenin en un circuito equivalente de Norton o viceversa. Norton publicó su método en 1926, 43 años después de Thévenin.

El *teorema de Norton* se puede enunciar como sigue: ante cualquier circuito lineal, dividirlo en dos circuitos, A y B. Si A o B contienen una fuente dependiente, su variable controladora debe estar en el mismo circuito. Considere el circuito A y determine su corriente  $i_{cc}$  del cortocircuito en sus terminales. Entonces el circuito equivalente de A es una fuente de corriente  $i_{sc}$  en paralelo con una resistencia  $R_n$ , donde  $R_n$  es la resistencia que se investiga en el circuito A con todas sus fuentes independientes desactivadas.

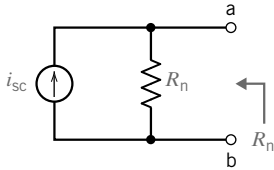


FIGURA 5.5-1 Circuito equivalente de Norton para un circuito lineal A.

**El teorema de Norton** requiere que para cualquier circuito de elementos de resistencia y fuentes de energía con un par de terminales identificadas, el circuito se pueda reemplazar por una combinación en paralelo de una fuente de corriente ideal  $i_{sc}$  y una conductancia  $G_n$ , donde  $i_{sc}$  es la corriente del cortocircuito en las dos terminales, y  $G_n$  es la razón de la corriente del cortocircuito para el voltaje del circuito abierto en el par de terminales.

De todas formas, tenemos el circuito de Norton para el circuito A como se muestra en la figura 5.5-1. Encontrar el circuito equivalente del circuito en la figura 5.5-1 muestra que  $R_n = R_t$  y  $v_{oc} = R_t i_{sc}$ . El equivalente de Norton es simplemente la transformación de fuentes del equivalente de Thévenin.

### EJEMPLO 5.5-1 El circuito equivalente de Norton

Encuentre el circuito equivalente de Norton para el circuito de la figura 5.5-2.

#### Solución

Podemos reemplazar la fuente de voltaje por un cortocircuito y encontrar  $R_n$  por la reducción del circuito. Al reemplazar la fuente de voltaje por un cortocircuito, tenemos un resistor de 6-k $\Omega$  en paralelo con  $(8 \text{ k}\Omega + 4 \text{ k}\Omega) = 12 \text{ k}\Omega$ . Por lo tanto,

$$R_n = \frac{6 \times 12}{6 + 12} = 4 \text{ k}\Omega$$

Para determinar  $i_{sc}$ , ponemos en cortocircuito las terminales de salida con la fuente de voltaje activada como se muestra en la figura 5.5-3. Si escribimos la KCL en el nodo a, tenemos

$$-\frac{15 \text{ V}}{12 \text{ k}\Omega} + i_{sc} = 0$$

o bien

$$i_{sc} = 1.25 \text{ mA}$$

Así, el equivalente de Norton (figura 5.5-1) tiene  $R_n = 4 \text{ k}\Omega$  e  $i_{sc} = 1.25 \text{ mA}$ .

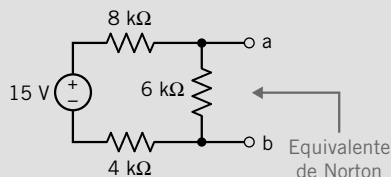


FIGURA 5.5-2 Circuito del ejemplo 5.5-1.

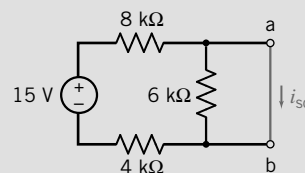


FIGURA 5.5-3 Cortocircuito conectado a las terminales de salida.

**EJEMPLO 5.5-2** El circuito equivalente de Norton

Encuentre el circuito equivalente de Norton para el circuito de la figura 5.5-4.

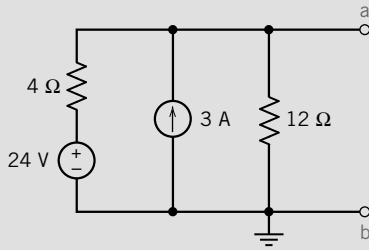


FIGURA 5.5-4 Circuito del ejemplo 5.5-2. Resistencias en ohmios.

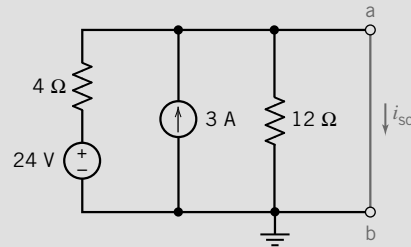


FIGURA 5.5-5 Cortocircuito conectado a las terminales a-b del circuito de la figura 5.5-4. Resistencias en ohmios.

**Solución**

Primero, determine la corriente  $i_{sc}$  para la condición del cortocircuito que se muestra en la figura 5.5-5. Escribiendo la KCL en a, obtenemos

$$-\frac{24}{4} - 3 + i_{sc} = 0$$

Observe que no fluye corriente en el resistor de  $12\text{-}\Omega$  porque está en paralelo con un cortocircuito. Incluso, a causa del cortocircuito, la fuente de  $24\text{-V}$  hace que los  $24\text{ V}$  parezcan pasar a través del resistor de  $4\text{-}\Omega$ . Por lo tanto,

$$i_{sc} = \frac{24}{4} + 3 = 9\text{ A}$$

Ahora, determine la resistencia equivalente  $R_n = R_t$ . La figura 5.5-6 muestra el circuito después de reemplazar la fuente de voltaje por un cortocircuito y reemplazar la fuente de corriente por un circuito abierto. Obviamente,  $R_n = 3\text{ }\Omega$ . Por lo tanto, obtenemos el circuito equivalente de Norton como se muestra en la figura 5.5-7.

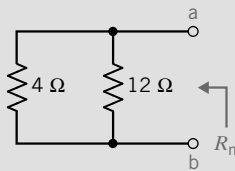


FIGURA 5.5-6 Circuito de la figura 5.5-4 con sus fuentes desactivadas. La fuente de voltaje se convierte en un cortocircuito y la fuente de corriente es reemplazada por un circuito abierto.

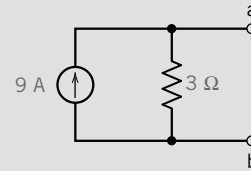


FIGURA 5.5-7 Equivalente de Norton del circuito de la figura 5.5-4.

**EJEMPLO 5.5-3** Circuitos equivalentes de Norton y fuentes dependientes

Encuentre el equivalente de Norton a la izquierda de las terminales a-b para el circuito de la figura 5.5-8.

**Solución**

Primero, necesitamos determinar la corriente  $i_{sc}$  del cortocircuito utilizando la figura 5.5-9. Observe que  $v_{ab} = 0$  cuando las terminales están en cortocircuito. Entonces,

$$i = 5/500 = 10\text{ mA}$$

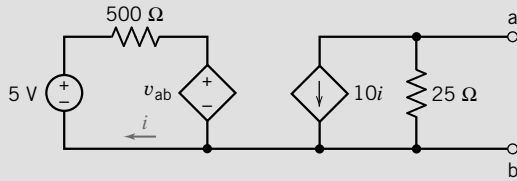


FIGURA 5.5-8 El circuito del ejemplo 5.5-3.

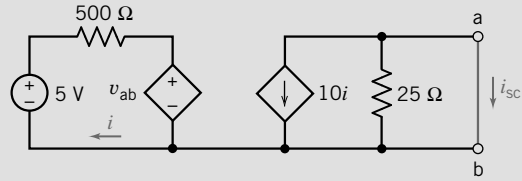


FIGURA 5.5-9 Circuito de la figura 5.5-8 con un cortocircuito en las terminales a-b.

Por consiguiente, para la parte derecha del circuito,

$$i_{sc} = -10i = -100 \text{ mA}$$

Ahora, para obtener  $R_t$ , necesitamos  $v_{oc} = v_{ab}$  a partir de la figura 5.5-8, donde  $i$  es la corriente en el primer enlace (a la izquierda). Escribimos la ecuación de la corriente de enlaces y tenemos

$$-5 + 500i + v_{ab} = 0$$

Además, para el enlace de la parte derecha de la figura 5.5-8, observamos que

$$v_{ab} = -25(10i) = -250i$$

Por consiguiente,

$$i = \frac{-v_{ab}}{250}$$

Si sustituimos  $i$  en la ecuación del primer enlace, obtenemos

$$500\left(\frac{-v_{ab}}{250}\right) + v_{ab} = 5$$

En consecuencia,

$$v_{ab} = -5 \text{ V}$$

y

$$R_t = \frac{v_{ab}}{i_{sc}} = \frac{-5}{-0.1} = 50 \Omega$$

El circuito equivalente de Norton se muestra en la figura 5.5-10.

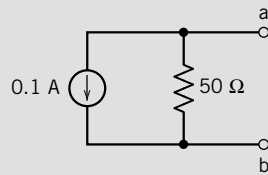


FIGURA 5.5-10 El circuito equivalente de Norton para el ejemplo 5.5-3.

**EJERCICIO 5.5-1** Determine los valores de  $R_t$  e  $i_{sc}$  que hacen que el circuito que se muestra en la figura E 5.5-1b sea el circuito equivalente de Norton del circuito en la figura E 5.5-1a.

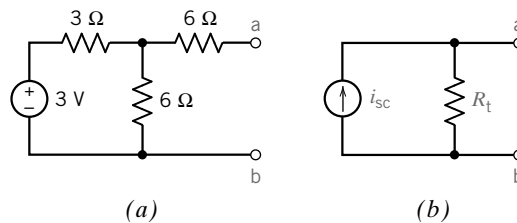


FIGURA E 5.5-1

**Respuesta:**  $R_t = 8 \Omega$  e  $i_{sc} = 0.25 \text{ A}$

## 5.6 TRANSFERENCIA DE POTENCIA MÁXIMA

Muchas aplicaciones de circuitos requieren la potencia máxima disponible que se pueda transferir de una fuente a un resistor de carga  $R_L$ . Considere el circuito A que se muestra en la figura 5.6-1, terminado con una carga  $R_L$ . Como se demostró en la sección 5.4, el circuito A se puede reducir a su equivalente de Thévenin, como se muestra en la figura 5.6-2.

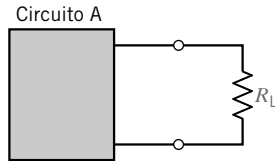


FIGURA 5.6-1 El circuito A contiene resistores y fuentes dependientes e independientes. La carga es el resistor  $R_L$ .

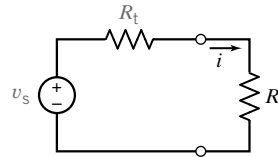


FIGURA 5.6-2 El equivalente de Thévenin es sustituido por el circuito A. Aquí utilizamos  $v_s$  para el voltaje de fuente de Thévenin.

El problema general de transferencia de potencia se puede analizar en términos de eficiencia y efectividad. Los sistemas de instalación de potencia están diseñados para transportar la potencia a la carga con la mayor eficiencia mediante la reducción de pérdidas en las líneas de energía. Por eso el esfuerzo se concentra en reducir  $R_t$ , la cual podría representar la resistencia de la fuente, más la resistencia de la línea. Obviamente, la idea de utilizar líneas superconductoras que no representaran resistencia en la línea es muy atractiva para los ingenieros de energía.

En el caso de transmisión de señales, como en las industria de la electrónica y las comunicaciones, el problema es lograr la máxima intensidad en la señal en la carga. Considere la señal recibida en la antena de un receptor de radio de FM desde una estación lejana. El objetivo de un ingeniero es diseñar un circuito receptor de modo que la potencia máxima llegue finalmente a la salida del circuito amplificador conectado a la antena de su radio de FM. Por lo tanto, podemos representar la antena de FM y el amplificador con el circuito equivalente de Thévenin que se muestra en la figura 5.6-2.

Consideremos el circuito general de la figura 5.6-2. Deseamos encontrar el valor de la resistencia de carga,  $R_C$ , como la máxima potencia que se le transmite. Primero, necesitamos encontrar la potencia a partir de

$$p = i^2 R_L$$

Dado que la corriente  $i$  es

$$i = \frac{v_s}{R_L + R_t}$$

encontramos que la potencia es

$$p = \left( \frac{v_s}{R_L + R_t} \right)^2 R_L \quad (5.6-1)$$

Suponiendo que  $v_f$  y  $R_t$  están colocados para una fuente dada, la potencia máxima es una función de  $R_C$ . Para encontrar el valor de  $R_C$  que maximice la potencia, utilizamos el cálculo diferencial para encontrar dónde la derivada  $dp/dR_C$  es igual a cero. Si tomamos la derivada, obtenemos

$$\frac{dp}{dR_L} = v_s^2 \frac{(R_t + R_L)^2 - 2(R_t + R_L)R_L}{(R_L + R_t)^4}$$

La derivada es cero cuando

$$(R_t + R_L)^2 - 2(R_t + R_L)R_L = 0 \quad (5.6-2)$$

o bien

$$(R_t + R_L)(R_t + R_L - 2R_L) = 0 \quad (5.6-3)$$

Despejando la ecuación 5.6-3 obtenemos

$$R_L = R_t \quad (5.6-4)$$

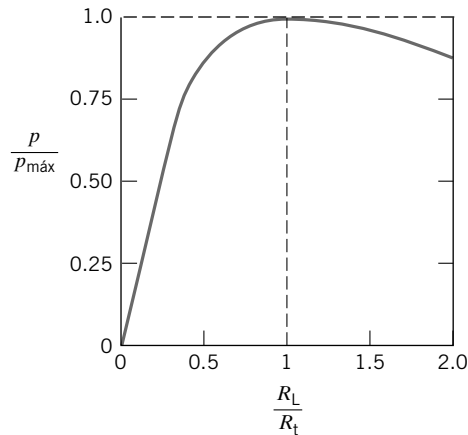


FIGURA 5.6-3 La potencia lograda realmente como  $R_L$  varía en relación con  $R_t$ .

Para confirmar que la ecuación 5.6-4 corresponde a un máximo, se deberá demostrar que  $d^2p/dR_L^2 < 0$ . Por consiguiente, la potencia máxima se transfiere a la carga cuando  $R_L$  es igual a la resistencia equivalente de Thévenin,  $R_t$ .

La potencia máxima, cuando  $R_L = R_t$ , se obtiene entonces sustituyendo  $R_L = R_t$  en la ecuación  $R_C = R_t$  en la ecuación 5.6-1 para obtener

$$P_{\text{máx}} = \frac{v_s^2 R_t}{(2R_t)^2} = \frac{v_s^2}{4R_t}$$

La potencia transmitida a la carga diferirá de la máxima obtenible en cuanto la resistencia  $R_L$  de carga se desvíe de  $R_L = R_t$ . La potencia alcanzada como  $R_L$  que varía de  $R_t$  se representa en la figura 5.6-3.

El teorema de la **transferencia de potencia máxima** establece que la potencia máxima transmitida a una carga por una fuente se alcanza cuando la resistencia,  $R_L$ , es igual a la resistencia,  $R_t$ , de Thévenin, de la fuente.

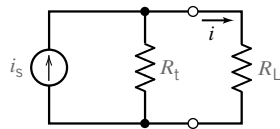


FIGURA 5.6-4 El circuito equivalente de Norton representando el circuito de fuente y un resistor de carga  $R_L$ . Utilizamos  $i_s$  como la corriente de fuente de Norton.

También podemos utilizar el circuito equivalente de Norton para representar el circuito A en la figura 5.6-1. Entonces tenemos un circuito con un resistor de carga  $R_L$  como se muestra en la figura 5.6-4. La corriente  $i$  se puede obtener a partir del principio del divisor de corriente para

$$i = \frac{R_t}{R_t + R_L} i_s$$

Por consiguiente, la potencia  $p$  es

$$p = i^2 R_L = \frac{i_s^2 R_t^2 R_L}{(R_t + R_L)^2} \quad (5.6-5)$$

Si utilizamos el cálculo, podemos demostrar que la potencia máxima ocurre cuando

$$R_L = R_t \quad (5.6-6)$$

Entonces, la potencia máxima transmitida a la carga es

$$p_{\text{máx}} = \frac{R_t i_s^2}{4} \quad (5.6-7)$$

**EJEMPLO 5.6-1** Transferencia de potencia máxima

Encuentre la resistencia  $R_L$  de carga que resultará en la potencia máxima transmitida a la carga por el circuito de la figura 5.6-5. Además, determine la potencia máxima transmitida al resistor de carga.

**Solución**

Primero, determinamos el circuito equivalente de Thévenin para el circuito de la izquierda de las terminales a-b. Desconectamos el resistor de carga. La fuente de voltaje de Thévenin,  $v_t$ , es

$$v_t = \frac{150}{180} \times 180 = 150 \text{ V}$$

La resistencia de Thévenin,  $R_t$ , es

$$R_t = \frac{30 \times 150}{30 + 150} = 25 \Omega$$

El circuito de Thévenin conectado al resistor de carga se muestra en la figura 5.6-6. La transferencia de potencia máxima se obtiene cuando  $R_L = R_t = 25 \Omega$ .

Entonces la potencia máxima es

$$P_{\text{máx}} = \frac{v_s^2}{4R_L} = \frac{(150)^2}{4 \times 25} = 225 \text{ W}$$

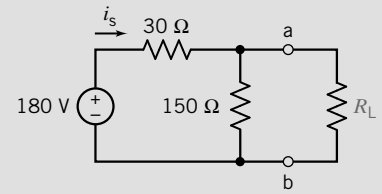


FIGURA 5.6-5 Circuito para el ejemplo 5.6-1. Resistencias en ohmios.

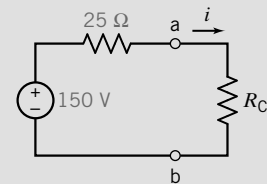


FIGURA 5.6-6 El circuito equivalente de Thévenin conectado a  $R_L$  para el ejemplo 5.6-1.

**EJEMPLO 5.6-2** Transferencia de potencia máxima

Encuentre la carga  $R_L$  que resultará en la potencia máxima transmitida a la carga del circuito de la figura 5.6-7a. Determine, además,  $p_{\text{máx}}$  transmitida.

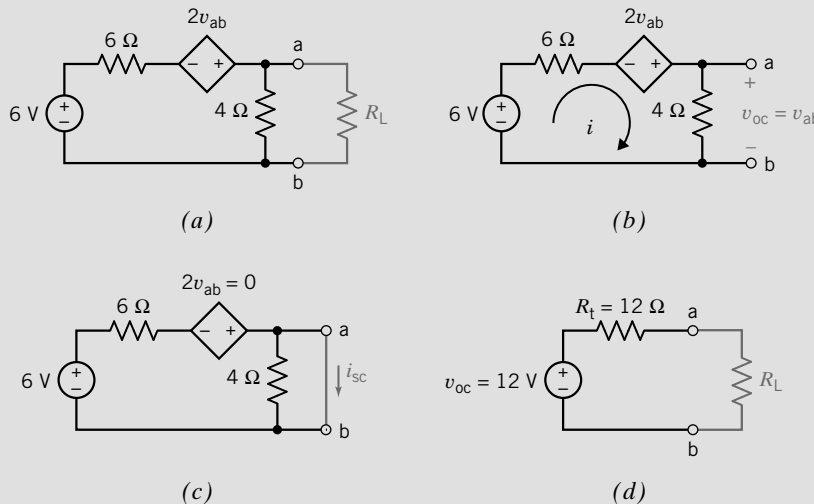


FIGURA 5.6-7 Determinación de la transferencia de potencia máxima a una carga  $R_C$ .



**Solución**

Obtendremos el circuito equivalente de Thévenin para la parte del circuito a la izquierda de las terminales a, b en la figura 5.6-7a. Primero, encontramos  $v_{oc}$  como se muestra en la figura 5.6-7b. La KVL da

$$-6 + 10i - 2v_{ab} = 0$$

Además, observemos que  $v_{ab} = v_{oc} = 4i$ . Por consiguiente,

$$10i - 8i = 6$$

o bien  $i = 3$  A. Por consiguiente,  $v_{oc} = 4i = 12$  V.

Para determinar la corriente del cortocircuito, agregamos un cortocircuito como se muestra en la figura 5.6-7c. El resistor de  $4 \Omega$  está en cortocircuito y puede ser pasado por alto. Al escribir KVL, tenemos

$$-6 + 6i_{sc} = 0$$

Así,  $i_{sc} = 1$  A.

Por consiguiente,  $R_t = v_{oc}/i_{sc} = 12 \Omega$ . El circuito equivalente de Thévenin se muestra en la figura 5.6-7d con el resistor de carga.

La potencia de carga máxima se alcanza cuando  $R_L = R_t = 12 \Omega$ . Entonces,

$$p_{\max} = \frac{v_{oc}^2}{4R_L} = \frac{12^2}{4(12)} = 3 \text{ W}$$

**EJERCICIO 5.6-1** Encuentre la potencia máxima que se puede transmitir a  $R_L$  para el circuito de la figura E 5.6-1, usando un circuito equivalente de Thévenin.

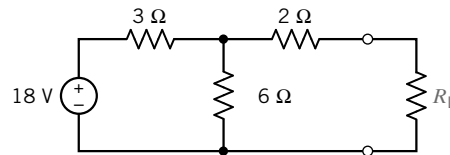


FIGURA E 5.6-1

**Respuesta:** 9 W cuando  $R_C = 4 \Omega$

**EJERCICIO 5.6-2** Encuentre la potencia máxima transmitida a la  $R_L$  para el circuito de la figura E 5.6-2, utilizando un circuito equivalente de Norton.

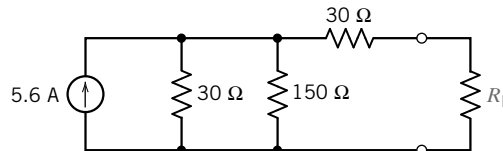


FIGURA E 5.6-2

**Respuesta:** 175 W cuando  $R_L = 28 \Omega$

## 5.7 USO DE MATLAB PARA DETERMINAR EL CIRCUITO EQUIVALENTE DE THÉVENIN

Podemos utilizar MATLAB para reducir el trabajo que se requiere para determinar el equivalente de Thévenin de un circuito como el que se muestra en la figura 5.7-1a. Primero, conecte un resistor,  $R$ , a través de las terminales de la red, como se ve en la figura 5.7-1b. Luego, escriba ecuaciones nodales o

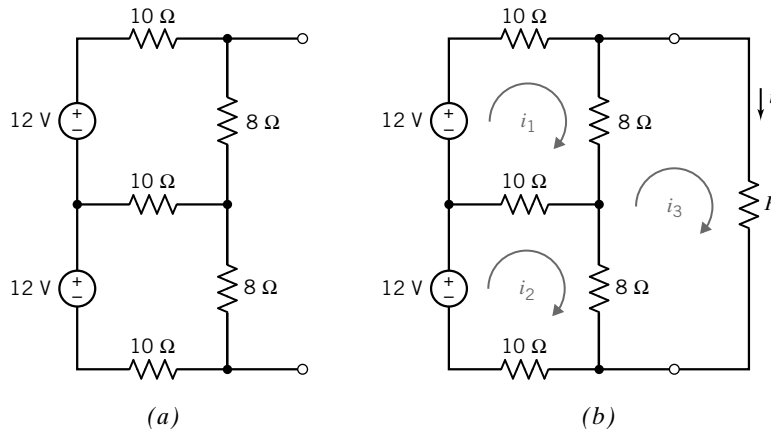


FIGURA 5.7-1 El circuito en (b) se obtuvo conectando un resistor,  $R$ , a través de las terminales del circuito en (a).

de enlace para describir el circuito con el resistor conectado a través de sus terminales. En este caso, el circuito en la figura 5.7-1b está representado por ecuaciones de enlace.

$$\begin{aligned} 12 &= 28i_1 - 10i_2 - 8i_3 \\ 12 &= -10i_1 + 28i_2 - 8i_3 \\ 0 &= -8i_1 - 8i_2 + (16 + R)i_3 \end{aligned} \quad (5.7-1)$$

La corriente  $i$  en el resistor  $R$  es igual a la corriente de enlaces en el tercer enlace, es decir,

$$i = i_3 \quad (5.7-2)$$

Las ecuaciones de enlace se pueden escribir utilizando matrices como

$$\begin{bmatrix} 28 & -10 & -8 \\ -10 & 28 & -8 \\ -8 & -8 & 16 + R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.7-3)$$

Observe que  $i = i_3$  en la figura 5.7-1b.

La figura 5.7-2a muestra un archivo de MATLAB llamado `ch5ex.m` que despeja la ecuación 5.7-1. La figura 5.7-3 ilustra cómo se usa este archivo de MATLAB y muestra que cuando  $R = 6 \Omega$ , entonces  $i = 0.7164 \text{ A}$ , y que cuando  $R = 12 \Omega$ , entonces  $i = 0.5106 \text{ A}$ .

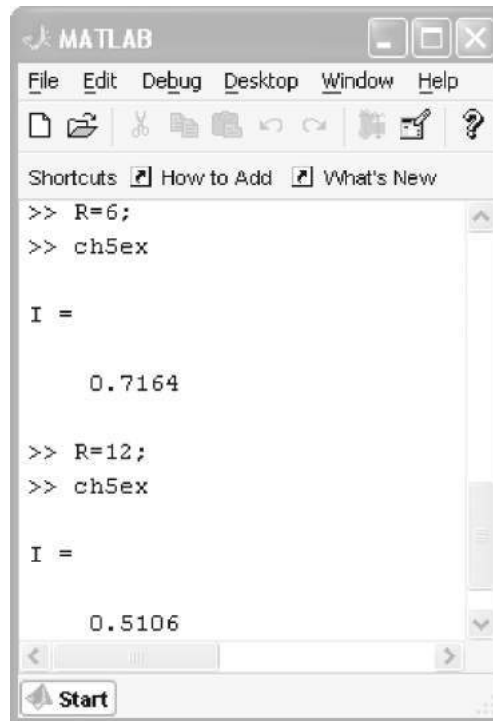
```
% ch5ex.m - MATLAB input file for Section 5-7

z = [ 28   -10   -8;           %
      -10   28   -8;           % Mesh Equation
       -8   -8  16+R];         % Equation 5.7-3

v = [ 12;
      12;
       0];

Im = Z\V;           % Calculate the mesh currents.
I  = Im(3)          % Equation 5.7-2
```

FIGURA 5.7-2. El archivo de MATLAB utilizado para despejar la ecuación de enlace que representa el circuito de la figura 5.7-1b.



```

MATLAB
File Edit Debug Desktop Window Help
Shortcuts How to Add What's New
>> R=6;
>> ch5ex

I =

    0.7164

>> R=12;
>> ch5ex

I =

    0.5106

```

FIGURA 5.7-3 Pantalla de computadora que muestra el uso de MATLAB para analizar el circuito que se muestra en la figura 5.7-1.

A continuación, considere la figura 5.7-4, la cual muestra un resistor  $R$  conectado a través de las terminales de un circuito equivalente de Thévenin. El circuito en la figura 5.7-4 está representado por la ecuación de enlace

$$V_t = R_t i + R i \quad (5.7-4)$$

Una observación importante, sea  $i = i_a$  cuando  $R = R_a$ . Del mismo modo, sea  $i = i_b$  cuando  $R = R_b$ . La ecuación 5.7-4 indica que

$$\begin{aligned} V_t &= R_t i_a + R_a i_a \\ V_t &= R_t i_b + R_b i_b \end{aligned} \quad (5.7-5)$$

La ecuación 5.7-5 se puede escribir utilizando matrices como

$$\begin{bmatrix} R_a i_a \\ R_b i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -i_a \\ 1 & -i_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_t \\ R_t \end{bmatrix} \quad (5.7-6)$$

Dadas  $i_a$ ,  $R_a$ ,  $i_b$  y  $R_b$ , esta ecuación de matriz se puede despejar para  $V_t$  y  $R_t$ , los parámetros del circuito equivalente de Thévenin. La figura 5.7-5 muestra un archivo de MATLAB que despeja la ecuación 5.7-6, utilizando los valores  $i_b = 0.7164$  A,  $R_b = 6 \Omega$ ,  $i_a = 0.5106$  A y  $R_a = 12 \Omega$ . Los valores resultantes de  $V_t$  y  $R_t$  son

$$V_t = 10.664 \text{ V} \quad \text{y} \quad R_t = 8.8863 \Omega$$

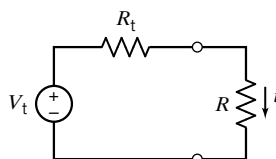


FIGURA 5.7-4 El circuito obtenido de la conexión de un resistor,  $R$ , a través de las terminales de un circuito equivalente de Thévenin.

```

% Find the Thevenin equivalent of the circuit
% connected to the resistor R.

Ra = 12; ia = 0.5106; % When R=Ra then i=ia
Rb = 6; ib = 0.7164; % When R=Rb then i=ib

A = [1 -ia; %
     1 -ib]; %
      % Eqn 5.7-6
b = [Ra*ia; %
     Rb*ib]; %

X = A\b;

Vt = X(1) % Open-Circuit Voltage
Rt = X(2) % Thevenin Resistance

```

FIGURA 5.7-5 Archivo de MATLAB utilizado para calcular el voltaje del circuito abierto y la resistencia de Thévenin.

## 5.8 USO DE PSPICE PARA DETERMINAR EL CIRCUITO EQUIVALENTE DE THÉVENIN

Podemos utilizar el programa de computadora PSpice para encontrar el circuito equivalente de Thévenin o de Norton para circuitos aun cuando sean muy complejos. La figura 5.8-1 ilustra este método. Calculamos el equivalente de Thévenin del circuito mostrado en la figura 5.8-1a calculando su voltaje de circuito abierto,  $v_{oc}$ , y su corriente del cortocircuito,  $i_{sc}$ . Para ello, conectamos un resistor a través de sus terminales como se muestra en la figura 5.8-1b. Cuando la resistencia de este resistor es infinita, el voltaje del resistor será igual al voltaje del circuito abierto,  $v_{oc}$ , como se muestra en la figura 5.8-1b. Por otro lado, cuando la resistencia de este resistor es cero, la corriente del resistor será igual a la corriente del cortocircuito,  $i_{sc}$ , como se muestra en la figura 5.8-1c.

En PSpice no podemos utilizar resistencias en cero o infinitas, de modo que aproximaremos la resistencia infinita por una resistencia que sea en varios órdenes de magnitud más grande que la resistencia más grande en el circuito A. Podremos verificar si nuestra resistencia es lo bastante grande al duplicarla y reiniciar la simulación PSpice. Si el valor calculado de  $v_{sc}$  no cambia, nuestra resistencia grande es efectivamente infinita. Del mismo modo, podemos aproximar una resistencia cero por una resistencia que sea en varios órdenes de magnitud más pequeña que la resistencia más pequeña en el circuito A. Nuestra resistencia pequeña es efectivamente cero cuando al dividirla en dos no se modifica el valor calculado de  $i_{sc}$ .

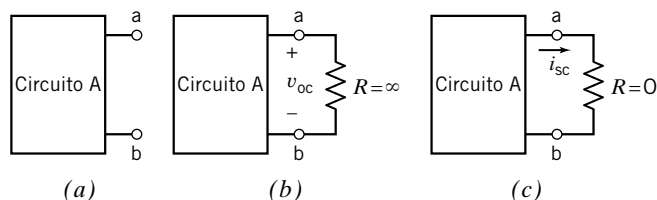


FIGURA 5.8-1 Método para calcular los valores de  $v_{oc}$  e  $i_{sc}$ , utilizando PSpice.

### EJEMPLO 5.8-1 Uso de PSpice para encontrar un circuito equivalente de Thévenin

Utilice PSpice para determinar los valores de voltaje del circuito abierto,  $v_{oc}$ , y la corriente del cortocircuito,  $i_{sc}$ , para el circuito que se muestra en la figura 5.8-2.

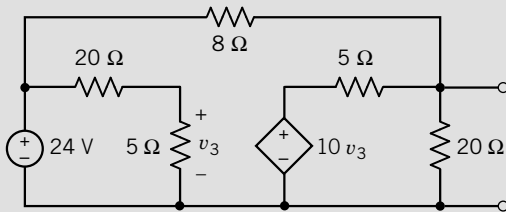


FIGURA 5.8-2 El circuito considerado en el ejemplo 5.8-1.

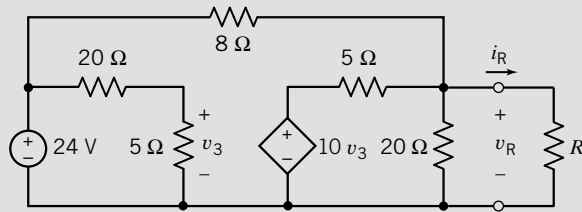


FIGURA 5.8-3 El circuito a partir de la figura 5.8-2 después de agregar un resistor a través de sus terminales.

### Solución

Siguiendo nuestro método, agregamos un resistor a través de las terminales del circuito como se muestra en la figura 5.8-3. Al observar que la resistencia más grande en nuestro circuito es de  $20\ \Omega$ , que la más pequeña es de  $5\ \Omega$ , determinaremos  $v_{oc}$  e  $i_{sc}$  utilizando

$$v_{oc} \approx v_R \quad \text{cuando } R \gg 20\ \Omega$$

y

$$v_{sc} \approx i_R = \frac{v_R}{R} \quad \text{cuando } R \ll 5\ \Omega$$

Para utilizar PSpice se empieza dibujando el circuito en el taller de OrCAD Capture como se muestra en la figura 5.8-4 (vea el apéndice A). La VCVS en la figura 5.8-3 está representada por una “Part E” de PSpice en la figura 5.8-4. La figura 5.8-5 ilustra la correspondencia entre la VCVS y la “Part E” de PSpice.

Para determinar el voltaje del circuito abierto, establecemos la resistencia  $R$  a un valor muy grande y realizamos una simulación ‘Bias Point’ (vea el apéndice A). La figura 5.8-6 muestra los resultados de la simulación cuando  $R = 20\ \text{M}\Omega$ . El voltaje a través del resistor  $R$  es de  $33.6\ \text{V}$ , de modo que  $v_{oc} = 33.6\ \text{V}$ . (Duplicando el valor de  $R$  y ejecutando de nuevo la simulación no cambió el valor del voltaje a través de  $R$ , por lo que confiamos en que  $v_{oc} = 33.6\ \text{V}$ .)

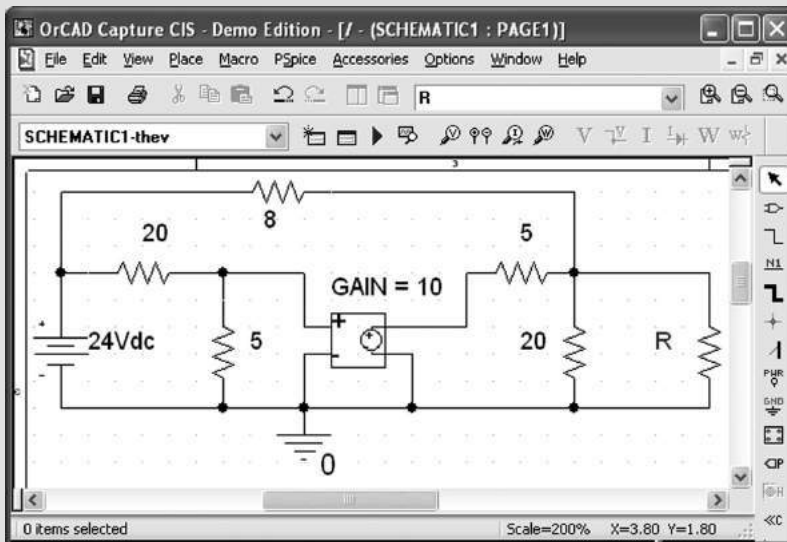


FIGURA 5.8-4 El circuito dibujado en el taller de OrCAD Capture a partir de la figura 5.8-3.

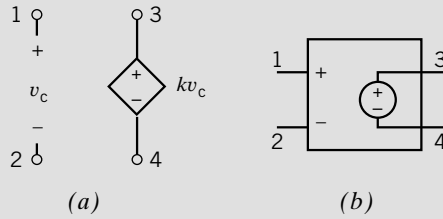


FIGURA 5.8.5 Una VCVS (a) y la correspondiente 'Part E' (b) de PSpice.

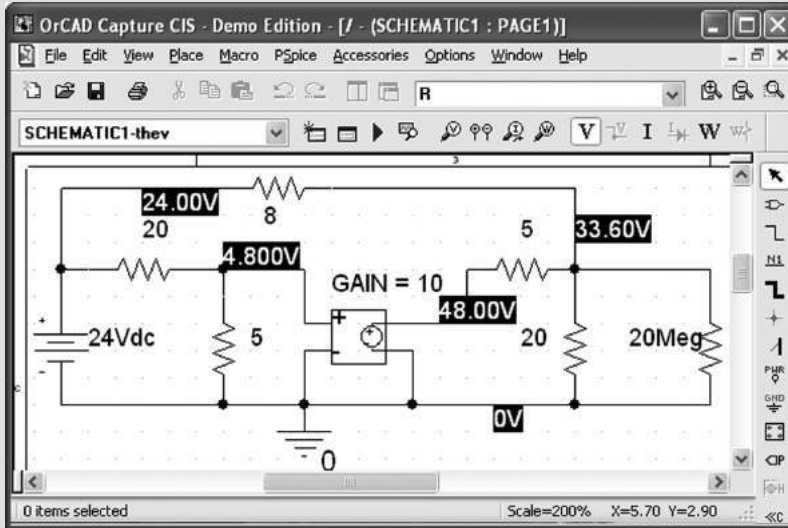


FIGURA 5.8-6 Resultados de la simulación para  $R = 20 \text{ M}\Omega$ .

Para determinar la corriente del cortocircuito, establecemos la resistencia  $R$  a un valor muy pequeño y realizamos una simulación 'Bias Point' (vea el apéndice A). La figura 5.8-7 muestra los resultados de la simulación cuando  $R = 1 \text{ m}\Omega$ . El voltaje a través del resistor  $R$  es de 12.6 mV. Utilizando la ley de Ohm, el valor de la corriente del cortocircuito es

$$i_{sc} = \frac{12.6 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-3}} = 12.6 \text{ A}$$

(Dividiendo en dos el valor de  $R$  y ejecutando de nuevo la simulación, el valor del voltaje a través de  $R$  no cambia, de modo que confiamos en que  $i_{sc} = 12.6 \text{ A}$ .)

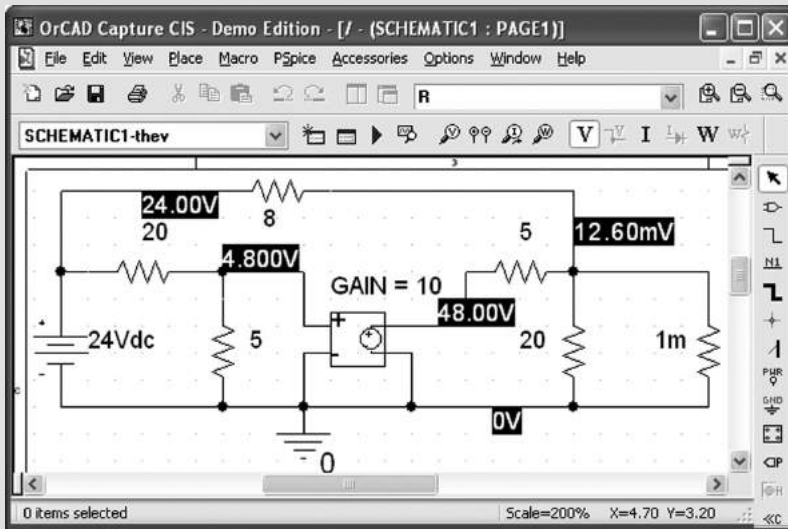


FIGURA 5.8-7 Resultados de la simulación para  $R = 1 \text{ M}\Omega = 0.001 \Omega$ .

## 5.9 ¿CÓMO LO PODEMOS COMPROBAR...?

A los ingenieros se les suele solicitar comprobar que la solución de un problema sea la correcta. Por ejemplo, las soluciones propuestas para problemas de diseño se deben comprobar para confirmar que se ha cumplido con todas las especificaciones. Además, se deben revisar los resultados de la computadora para protegerse contra errores de captura de datos, así como las exigencias de los comerciantes, las cuales se deben analizar a fondo.

También a los estudiantes de ingeniería se les pide que verifiquen la exactitud de sus trabajos. Por ejemplo, tomarse un breve lapso antes de terminar un examen permitiría dar una vista rápida e identificar esas soluciones que podrían requerir un poco más de aplicación.

El ejemplo siguiente ilustra técnicas útiles para comprobar las soluciones a los diversos problemas analizados en este capítulo.

### EJEMPLO 5.9-1 ¿Cómo podemos comprobar los circuitos equivalentes de Thévenin?

Suponga que el circuito que se muestra en la figura 5.9-1a se construyó en el laboratorio utilizando  $R = 2 \text{ k}\Omega$ , y que el voltaje etiquetado  $v$  se midió para que fuera  $v = -1.87 \text{ V}$ . A continuación, el resistor etiquetado  $R$  se cambió a  $R = 5 \text{ k}\Omega$ , y el voltaje  $v$  se midió para que fuera  $v = -3.0 \text{ V}$ . Finalmente, el resistor se cambió a  $R = 10 \text{ k}\Omega$ , y el voltaje se midió para que  $v = -3.75 \text{ V}$ . ¿Cómo podemos comprobar que estas medidas son consistentes?

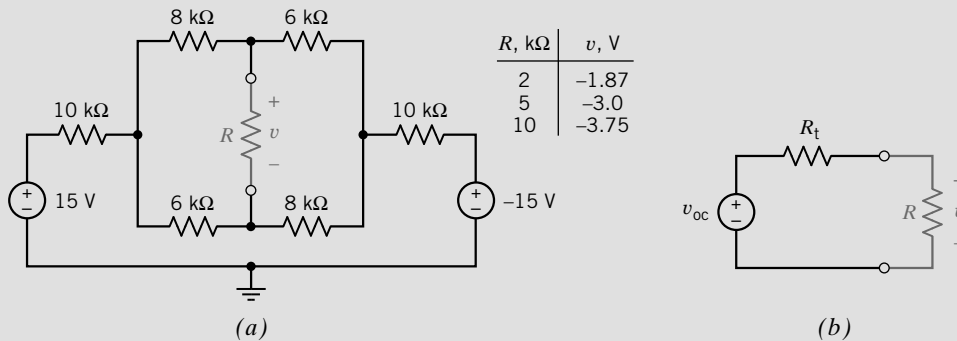


FIGURA 5.9-1 (a) Un circuito con datos obtenidos por la medición del voltaje a través del resistor  $R$ , y (b) el circuito obtenido por el reemplazo de la parte del circuito conectada a  $R$  por su circuito equivalente de Thévenin.

### Solución

Reemplacemos la parte del circuito conectada al resistor  $R$  por su circuito equivalente de Thévenin. La figura 5.9-1b muestra el circuito que resulta. Aplicando el principio de la división de voltajes al circuito en la figura 5.9-1b nos da

$$v = \frac{R}{R + R_t} v_{oc} \quad (5.9-1)$$

Cuando  $R = 2 \text{ k}\Omega$ , entonces  $v = -1.87 \text{ V}$ , y la ecuación 5.9-1 se convierte en

$$-1.87 = \frac{2000}{2000 + R_t} v_{oc} \quad (5.9-2)$$

Del mismo modo, cuando  $R = 5 \text{ k}\Omega$ , entonces  $v = -3.0 \text{ V}$ , y la ecuación 5.9-1 se convierte en

$$-3.0 = \frac{5000}{5000 + R_t} v_{oc} \quad (5.9-3)$$

Las ecuaciones 5.9-2 y 5.9-3 constituyen un conjunto de dos ecuaciones en dos incógnitas,  $v_{oc}$  y  $R_t$ . Al despejar estas ecuaciones resulta  $v_{oc} = -5 \text{ V}$  y  $R_t = 3333 \Omega$ . Sustituyendo estos valores en la ecuación 5.9-1 resulta

$$v = \frac{R}{R + 3333}(-5) \quad (5.9-4)$$

La ecuación 5.9-4 se puede usar para pronosticar el voltaje que se mediría si  $R = 10 \text{ k}\Omega$ . Si el valor de  $v$  obtenido mediante la ecuación 5.9-4 concuerda con el valor medido de  $v$ , entonces los datos medidos son consistentes. Sea  $R = 10 \text{ k}\Omega$  en la ecuación 5.9-4, resulta

$$v = \frac{10\,000}{10\,000 + 3333}(-5) = -3.75 \text{ V} \quad (5.9-5)$$

Dado que este valor concuerda con el valor medido de  $v$ , los datos medidos son consistentes en realidad.

## 5.10 EJEMPLO DE DISEÑO

### PUENTE DE INDICADOR DE TENSIÓN

Los indicadores de tensión son transductores que miden la tensión mecánica. Por la parte eléctrica, los indicadores de tensión son los resistores. La tensión causa un cambio en la resistencia que es proporcional a la tensión.

La figura 5.10-1 muestra cuatro indicadores de tensión conectados en una configuración llamada puente. Los puentes de indicadores de tensión miden la fuerza de la presión (Doebelin, 1966).

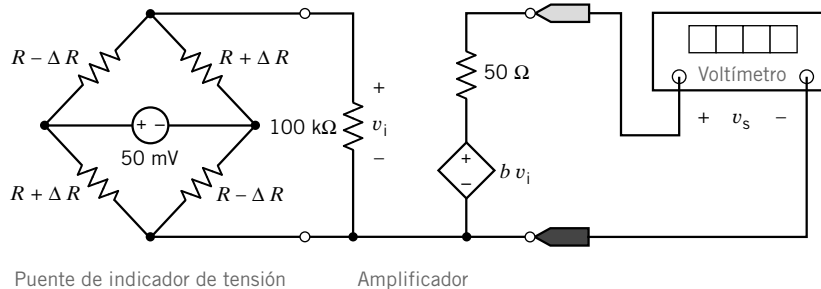


FIGURA 5.10-1 Problema de diseño que implica un puente de indicador de tensión.

La salida del puente suele ser un voltaje pequeño. En la figura 5.10-1, un amplificador multiplica la salida del puente,  $v_i$ , por una ganancia para obtener un voltaje mayor,  $v_o$ , lo cual se muestra en el voltímetro.

#### Describe la situación y los supuestos

Un puente de indicador de tensión se utiliza para medir fuerzas. Se han colocado los indicadores de tensión de modo que la fuerza aumentará la resistencia de los dos puentes de indicadores de tensión en tanto que, al mismo tiempo, disminuye la resistencia de los demás indicadores de tensión.

Los indicadores de tensión que se utilizan en el puente tienen resistencias nominales de  $R = 120 \Omega$ . (La resistencia nominal es la resistencia que ocurre cuando la tensión es cero.) Se espera que esta resistencia aumente o disminuya en no más de  $2 \Omega$  por causa de la tensión. Esto quiere decir que

$$-2 \Omega \leq \Delta R \leq 2 \Omega \quad (5.10-1)$$



Se requiere que la salida de voltaje,  $v_o$ , varíe de  $-10\text{ V}$  a  $+10\text{ V}$  como  $\Delta R$  varía de  $-2\ \Omega$  a  $2\ \Omega$ .

### Establezca el objetivo

Determine la ganancia del amplificador,  $b$ , que se necesita para que  $v_o$  se relacione con  $\Delta R$  por

$$v_o = 5 \frac{\text{volt}}{\text{ohm}} \cdot \Delta R \quad (5.10-2)$$

### Genere un plan

Utilice el teorema de Thévenin para analizar el circuito que se muestra en la figura 5.10-1 para determinar la relación entre  $v_1$  y  $\Delta R$ . Calcule la ganancia del amplificador que se necesitó para satisfacer la ecuación 5.10-2.

### Actúe sobre el plan

Empezaremos por encontrar el equivalente de Thévenin del puente de indicador de tensión. Se requieren dos ecuaciones, una para encontrar el voltaje de circuito abierto,  $v_t$ , y otra para encontrar la resistencia  $R_t$  de Thévenin. La figura 5.10-2a muestra el circuito que se utilizó para calcular  $v_t$ . Empecemos por encontrar las corrientes  $i_1$  e  $i_2$ .

$$i_1 = \frac{50\text{ mV}}{(R - \Delta R) + (R + \Delta R)} = \frac{50\text{ mV}}{2R}$$

Del mismo modo 
$$i_2 = \frac{50\text{ mV}}{(R + \Delta R) + (R - \Delta R)} = \frac{50\text{ mV}}{2R}$$

Entonces 
$$\begin{aligned} v_t &= (R + \Delta R)i_1 - (R - \Delta R)i_2 \\ &= (2\Delta R) \frac{50\text{ mV}}{2R} \\ &= \frac{\Delta R}{R} 50\text{ mV} = \frac{50\text{ mV}}{120\ \Omega} \Delta R = (0.4167 \times 10^{-3}) \Delta R \end{aligned} \quad (5.10-3)$$

La figura 5.10.2b muestra el circuito que se usó para calcular  $R_t$ . Esta figura muestra que  $R_t$  se compone de una conexión de dos resistencias en serie, cada una de las cuales es una

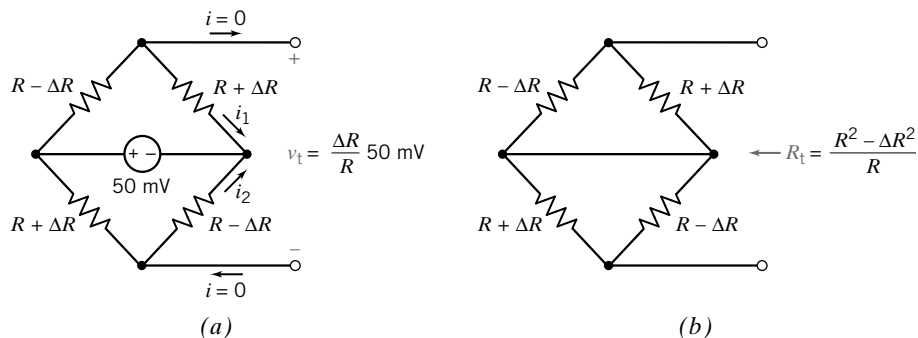


FIGURA 5.10-2 Cálculo (a) del voltaje del circuito abierto, y (b) la resistencia de Thévenin del puente del indicador de tensión.

conexión en paralelo de dos resistencias del indicador de tensión

$$R_t = \frac{(R - \Delta R)(R + \Delta R)}{(R - \Delta R) + (R + \Delta R)} + \frac{(R + \Delta R)(R - \Delta R)}{(R + \Delta R) + (R - \Delta R)} = 2 \frac{R^2 - \Delta R^2}{2R}$$

Porque  $R$  es mucho más grande que  $\Delta R$ , esta ecuación se puede simplificar a

$$R_t = R$$

En la figura 5.10-3 el puente de indicador de tensión ha sido reemplazado por su circuito equivalente de Thévenin. Esta simplificación nos permite calcular  $v_i$  utilizando la división de voltaje

$$v_i = \frac{100 \text{ k}\Omega}{100 \text{ k}\Omega + R_t} v_t = 0.9988 v_t = (0.4162 \times 10^{-3}) \Delta R \quad (5.10-4)$$

Modele el voltímetro como un voltímetro ideal. Entonces la corriente del voltímetro es  $i = 0$  como se muestra en la figura 5.10-3. Aplicando la KVL al enlace de la derecha da

$$v_s + 50(0) - b v_i = 0$$

o bien  $v_s = b v_i = b(0.4162 \times 10^{-3}) \Delta R$  (5.10-5)

La comparación entre las ecuaciones 5.10-5 y 5.10-2 muestra que la ganancia del amplificador,  $b$ , debe satisfacer

$$b(0.4162 \times 10^{-3}) = 5$$

Por lo tanto, la ganancia del amplificador es

$$b = 12\,013$$

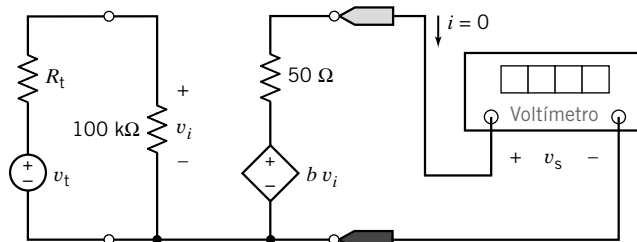


FIGURA 5.10-3 Solución al problema de diseño.

### Verifique la solución propuesta

Sustituir  $b = 12\,013$  en la ecuación 5.10-2 da como resultado

$$v_o = (12\,013)(0.4162 \times 10^{-3}) \Delta R = 4.9998 \Delta R \quad (5.10-6)$$

lo cual está en concordancia con la ecuación 5.10-2.

## 5.11 RESUMEN

- Las transformaciones de fuente, que se resumen en la tabla 5.11-1, se utilizan para transformar un circuito en un circuito equivalente. Una fuente de voltaje  $v_{oc}$  en serie con un resistor  $R_t$  se pueden transformar en una fuente de corriente  $i_{sc} = v_{oc}/R_t$ , y un resistor en paralelo. Por el contrario, una fuente de corriente  $i_{sc}$  en paralelo con un resistor  $R_t$  se puede transformar en una fuente de voltaje  $v_{oc} = R_t i_{sc}$  en serie con un resistor  $R_t$ . Los circuitos en la tabla 5.11-1 son equivalentes en el sentido de que el voltaje y la corriente de todos los elementos de circuito en el circuito B no se modificaron por la transformación de fuentes.
- El teorema de la superposición nos permite determinar la respuesta total de un circuito lineal a varias fuentes independientes al encontrar la respuesta a cada fuente independiente por separado y luego agregar algebraicamente las respuestas por separado.
- Los circuitos equivalentes de Thévenin y Norton, que se resumen en la figura 5.11-2, se utilizan para transformar un circuito en otro circuito más pequeño, aún equivalente. Primero, el circuito se separa en dos partes, circuito A y circuito B,

en la tabla 5.11-2. El circuito A puede ser reemplazado tanto por su circuito equivalente de Thévenin, como por su circuito equivalente de Norton. Los circuitos en la tabla 5.11-2 son equivalentes en el sentido de que el voltaje y la corriente de todos los elementos de circuito en el circuito B no se modifican al reemplazar el circuito A tanto con su circuito equivalente de Thévenin como con su circuito equivalente de Norton.

- Los procedimientos para calcular los parámetros  $v_{oc}$ ,  $i_{sc}$  y  $R_t$  de los circuitos equivalentes de Thevenin y de Norton se resumen en las figuras 5.4-3 y 5.4-4.
- El objetivo de todos los circuitos electrónicos y de comunicaciones es transmitir la potencia máxima a un resistor de carga  $R_L$ . La potencia máxima se logra cuando  $R_L$  se establecen iguales la resistencia de Thévenin  $R_t$ , del circuito conectado a  $R_L$ . De aquí resulta la potencia máxima en la carga cuando no se puede reducir la resistencia en serie  $R_t$ .
- El programa de computación MATLAB se puede utilizar para reducir el fastidio computacional de tener que calcular los parámetros  $v_{oc}$ ,  $i_{sc}$  y  $R_t$ , de los circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton.

Tabla 5.11-1 Transformación de fuentes

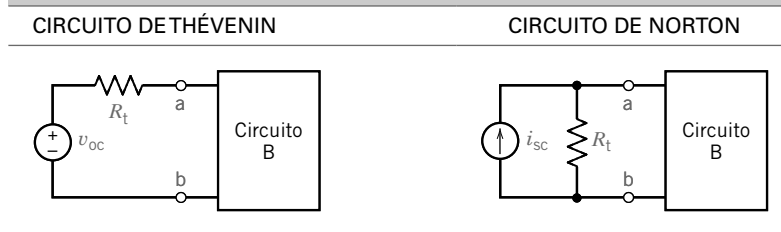
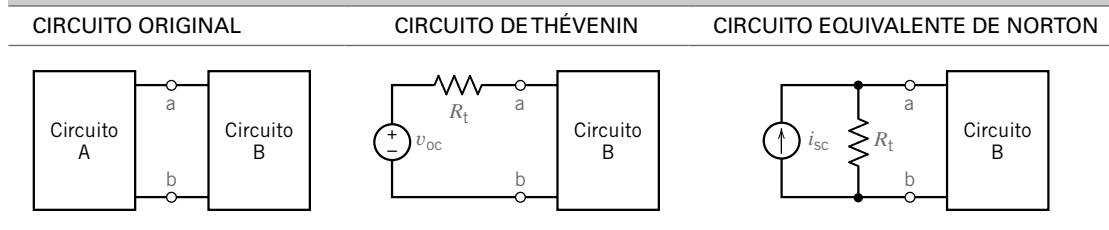


Tabla 5.11-2 Circuitos equivalentes de Thévenin y Norton



## PROBLEMAS

### Sección 5.2 Transformaciones de fuentes

**P 5.2-1** El circuito que se muestra en la figura P 5.2-1a ha sido dividido en dos partes. El circuito que se muestra en la figura P 5.2-1b se obtuvo simplificando la parte a la derecha de

las terminales mediante transformaciones de fuentes. La parte del circuito a la izquierda de las terminales no se modificó.

- (a) Determine los valores de  $R_t$  y  $v_t$  en la figura P 5.2-1b.

- (b) Determine los valores de la corriente  $i$  y el voltaje  $v$  en la figura P 5.2-1b. El circuito en la figura P 5.2-1b es equivalente al circuito de la figura P 5.2-1a. En consecuencia, la corriente  $i$  y el voltaje  $v$  en la figura P 5.2-1a tiene los mismos valores que la corriente  $i$  y el voltaje  $v$  en la figura P 5.2-1b.
- (c) Determine el valor de la corriente  $i_a$  en la figura P 5.2-1a.

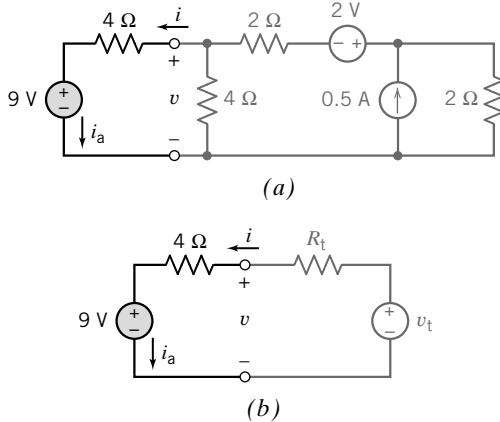


Figura P 5.2-1

**P 5.2-2** Considere el circuito de la figura P 5.2-2. Encuentre  $i_a$  simplificando el circuito (utilice transformaciones de fuentes) a un circuito cerrado único, de modo que sólo necesite escribir una ecuación de KVL para encontrar  $i_a$ .

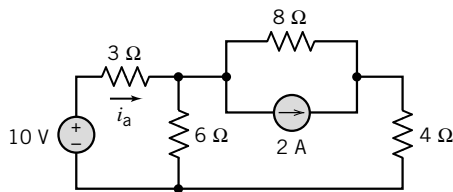


Figura P 5.2-2

**P 5.2-3** Encuentre  $v_o$  utilizando transformaciones de fuentes si  $i = 5/2$  A en el circuito que se muestra en la figura P 5.2-3.

*Sugerencia:* Reduzca el circuito a un enlace único que contenga la fuente de voltaje etiquetada  $v_o$ .

*Respuesta:*  $v_o = 28$  V

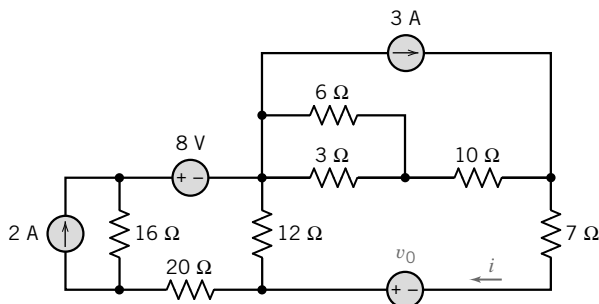


Figura P 5.2-3

**P 5.2-4** Determine el valor de la corriente  $i_a$  en el circuito que se muestra en la figura P 5.2-4.

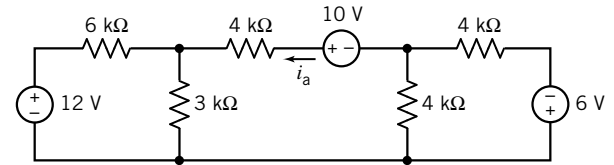


Figura P 5.2-4

**P 5.2-5** Utilice transformaciones de fuentes para encontrar la corriente  $i_a$  en el circuito que se muestra en la figura P 5.2-5.

*Respuesta:*  $i_a = 1$  A

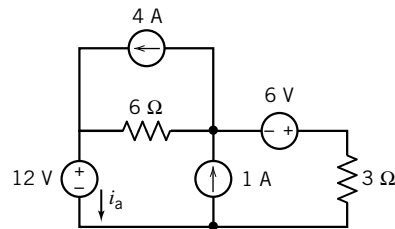


Figura P 5.2-5

**P 5.2-6** Utilice transformaciones de fuentes para encontrar el valor del voltaje  $v_a$  en la figura P 5.2-6.

*Respuesta:*  $v_a = 7$  V

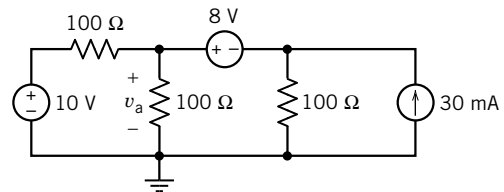


Figura P 5.2-6

**\*P 5.2-7** Determine la potencia suministrada por cada una de las fuentes en el circuito que se muestra en la figura P 5.2-7.

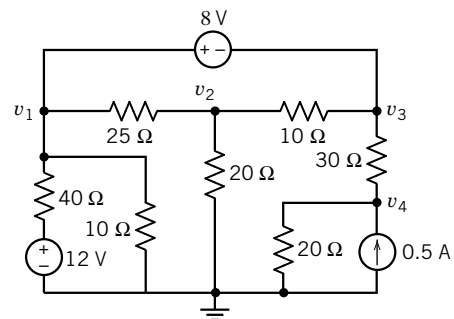


Figura P 5.2-7

**P 5.2-8** El circuito que se muestra en la figura P 5.2-8 contiene una resistencia  $R$  sin especificar.

- (a) Determine el valor de la corriente  $i$  cuando  $R = 4 \Omega$ .  
 (b) Determine el valor del voltaje  $v$  cuando  $R = 8 \Omega$ .  
 (c) Determine el valor de  $R$  que hará que  $i = 1 \text{ A}$ .  
 (d) Determine el valor de  $R$  que hará que  $v = 16 \text{ V}$ .

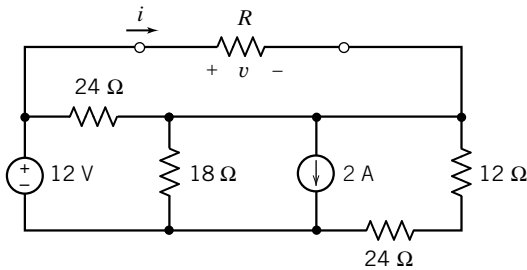


Figura P 5.2-8

**P 5.2-9** Determine el valor de la potencia suministrada por fuente de corriente en el circuito que se muestra en la figura P 5.2-9.

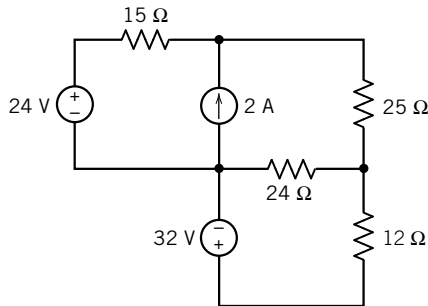


Figura P 5.2-9

### Sección 5.3 Superposición

**P 5.3-1** Las entradas al circuito que se muestra en la figura P5.3-1 son las fuentes de voltaje  $v_1$  y  $v_2$ . La salida del circuito es el voltaje  $v_o$ . La salida se relaciona con las entradas por

$$v_o = av_1 + bv_2$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes. Determine los valores de  $a$  y  $b$ .

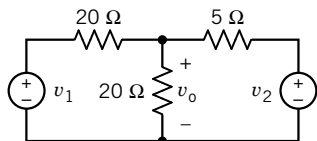


Figura P 5.3-1

**P 5.3-2** Un circuito lineal en particular tiene dos entradas,  $v_1$  y  $v_2$ , y una salida,  $v_o$ . Se han hecho tres mediciones. La primera medición muestra que la salida es  $v_o = 4 \text{ V}$  cuando las entradas son  $v_1 = 2 \text{ V}$  y  $v_2 = 0$ . La segunda medición muestra que la salida es  $v_o = 10 \text{ V}$  cuando las entradas son  $v_1 = 0$  y  $v_2 = 2.5 \text{ V}$ . En la tercera medición las entradas son  $v_1 = 3 \text{ V}$  y  $v_2 = 3 \text{ V}$ . ¿Cuál es el valor de la salida en la tercera medición?

**P 5.3-3** El circuito que se muestra en la figura P 5.3-3 tiene dos entradas,  $v_s$  e  $i_s$ , y una salida  $i_o$ . La salida se relaciona con las entradas por la ecuación

$$i_o = ai_s + bv_s$$

Dados los dos hechos siguientes:

La salida es  $i_o = 0.45 \text{ A}$  cuando las entradas son  $i_s = 0.25 \text{ A}$  y  $v_s = 15 \text{ V}$ .

y

La salida es  $i_o = 0.30 \text{ A}$  cuando las entradas son  $i_s = 0.50 \text{ A}$  y  $v_s = 0 \text{ V}$ .

Determine los valores de las constantes  $a$  y  $b$  y los valores de las resistencias son  $R_1$  y  $R_2$ .

**Respuestas:**  $a = 0.6 \text{ A/A}$ ,  $b = 0.02 \text{ A/V}$ ,  $R_1 = 30 \Omega$  y  $R_2 = 20 \Omega$

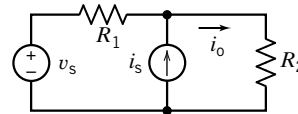


Figura P 5.3-3

**P 5.3-4** Utilice la superposición para encontrar  $v$  para el circuito de la figura P 5.3-4.

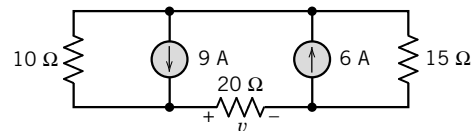


Figura P 5.3-4

**P 5.3-5** Utilice la superposición para encontrar  $i$  para el circuito de la figura P 5.3-5.

**Respuesta:**  $i = 2 \text{ mA}$

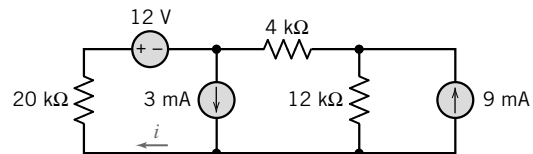


Figura P 5.3-5

**P 5.3-6** Utilice la superposición para encontrar  $i$  para el circuito de la figura P 5.3-6.

**Respuesta:**  $i = 3.5 \text{ mA}$

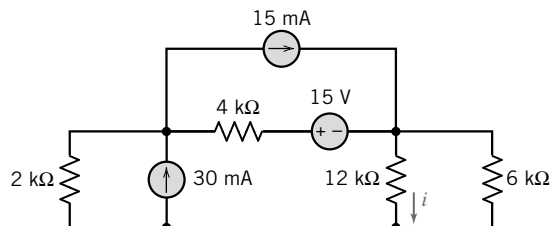


Figura P 5.3-6

**P 5.3-7** Utilice la superposición para encontrar el valor del voltaje  $v_a$  en la figura P 3.5-7.

**Respuesta:**  $v_a = 7\text{ V}$

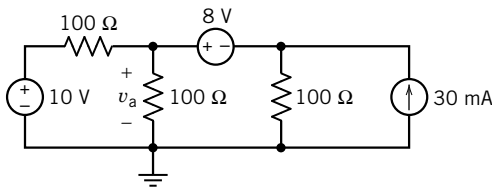


Figura P 5.3-7

**P 5.3-8** Utilice la superposición para encontrar el valor de la corriente  $i_x$  en la figura P 3.5-8.

**Respuesta:**  $i_x = 1/6\text{ A}$

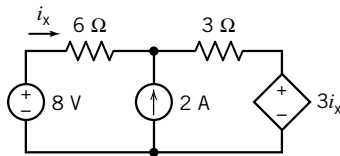


Figura P 5.3-8

**P 5.3-9** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 3.5-9a es el voltaje  $v_s$  de la fuente de voltaje. La salida es el voltaje  $v_o$ . La corriente de la fuente de corriente,  $i_a$ , se utiliza para ajustar la relación entre la entrada y la salida. El trazo que se muestra en la figura P 5.3-9b especifica una relación entre la entrada y la salida del circuito. Diseñe el circuito que se muestra en la figura P 5.3-9a para satisfacer la especificación de la figura P 5.3-9b.

**Sugerencia:** Utilice la superposición para expresar la salida como  $v_o = cv_s + di_a$  donde  $c$  y  $d$  son las constantes que dependen de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $A$ . Especifique los valores de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $A$  para causar el valor requerido de  $c$ .

Finalmente, especifique un valor de  $i_a$  para causar el valor requerido de  $di_a$ .

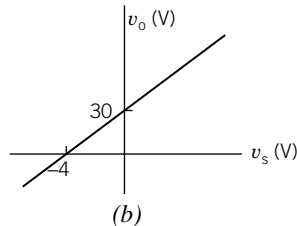
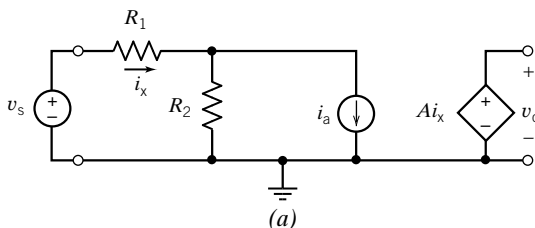


Figura P 5.3-9

**\*P 5.3-10** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 3.5-10 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . La salida es el voltaje  $v_o$ . La corriente de la fuente de corriente,  $i_a$ , se utiliza para ajustar la relación entre la entrada y la salida. Diseñe el circuito de modo que la entrada y la salida se relacionen por la ecuación  $v_o = 2v_s + 9$ .

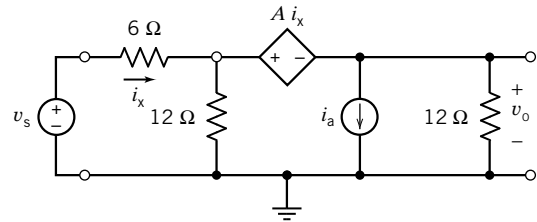


Figura P 5.3-10

**Sugerencia:** Determine los valores requeridos de  $A$  e  $i_a$ .

**P 5.3-11** El circuito que se muestra en la figura P 3.5-11 tiene tres entradas:  $v_1$ ,  $v_2$  e  $i_3$ . La salida del circuito es  $v_o$ . La salida se relaciona con las entradas por

$$v_o = av_1 + bv_2 + ci_3$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$ , son constantes. Determine los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

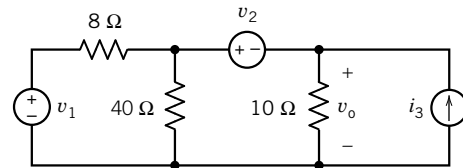


Figura P 5.3-11

**P 5.3-12** Determine el voltaje  $v_o(t)$  para el circuito que se muestra en la figura P 3.5-12.

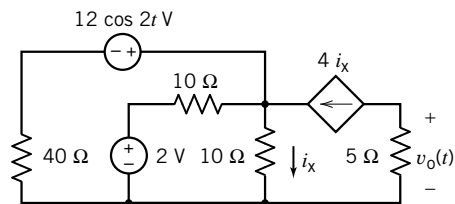


Figura P 5.3-12

**P 5.3-13** Determine el valor del voltaje  $v_o$  en el circuito que se muestra en la figura P 3.5-13.

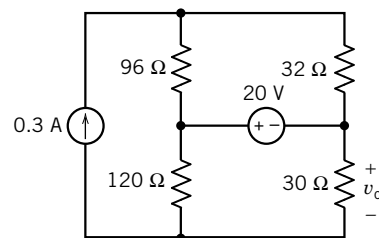


Figura P 5.3-13

**\*P 5.3-14** El circuito que se muestra en la figura P 3.5-14 tiene dos entradas:  $v_1$ ,  $v_2$  y una salida,  $v_o$ . La salida se relaciona con las entradas por

$$v_o = av_1 + bv_2$$

donde  $a$  y  $b$ , son constantes que dependen de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ .

(a) Utilice la superposición para mostrar que cuando  $R_3 = R_1 \parallel R_2$  y  $R_2 = nR_1$ ,

$$a = \frac{n}{2n+2} \quad \text{y} \quad b = \frac{1}{2n+2}$$

(b) Diseñe este circuito de modo que  $a = 4b$ .

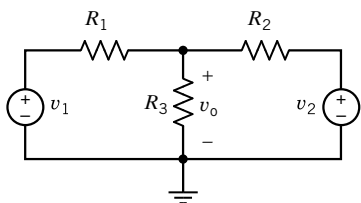


Figura P 5.3-14

**P 5.3-15** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 3.5-15 es la corriente  $i_1$ . La salida es el voltaje  $v_o$ . La corriente  $i_2$  se utiliza para ajustar la relación entre la entrada y la salida. Determine los valores de la corriente  $i_2$  y la resistencia  $R$ , que hacen que la salida se relacione con la entrada por la ecuación

$$v_o = -0.5i_1 + 4$$

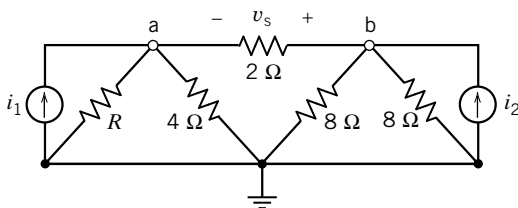


Figura P 5.3-15

**P 5.3-16** Determine los valores de la corriente,  $i_a$ , y la resistencia,  $R$ , para el circuito que se muestra en la figura P 3.5-16.

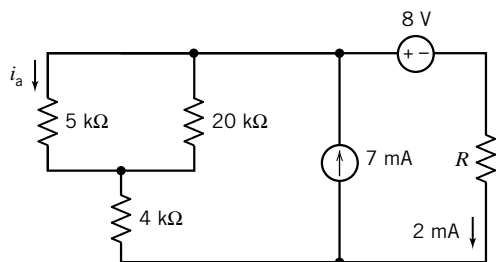


Figura P 5.3-16

**P 5.3-17** El circuito que se muestra en la figura P 3.5-17 tiene tres entradas:  $v_1$ ,  $i_2$  y  $v_3$ . La salida del circuito es la corriente  $i_o$ . La salida del circuito se relaciona con las entradas por

$$i_o = av_o + bv_2 + ci_3$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$ , son constantes. Determine los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

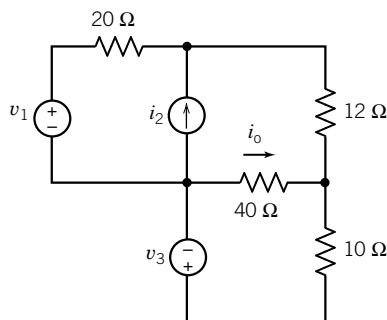
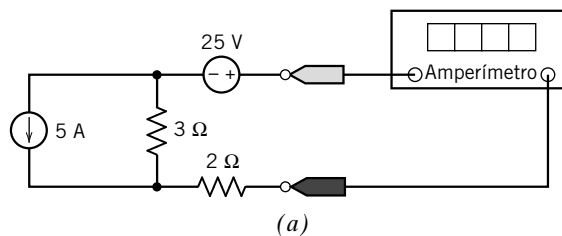


Figura P 5.3-17

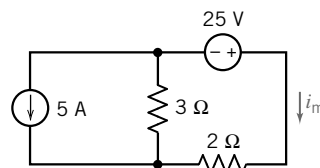
**P 5.3-18** Aplicando el principio de superposición, encuentre el valor de la corriente medida por el amperímetro en la figura P 5.3-18a.

*Sugerencia:* La figura P 5.3-18b muestra el circuito después de que se ha reemplazado el amperímetro ideal por el cortocircuito equivalente, y se ha agregado una etiqueta para indicar la corriente medida por el amperímetro,  $i_m$ .

$$\text{Respuesta: } i_m = \frac{25}{3+2} - \frac{3}{2+3} 5 = 5 - 3 = 2 \text{ A}$$



(a)



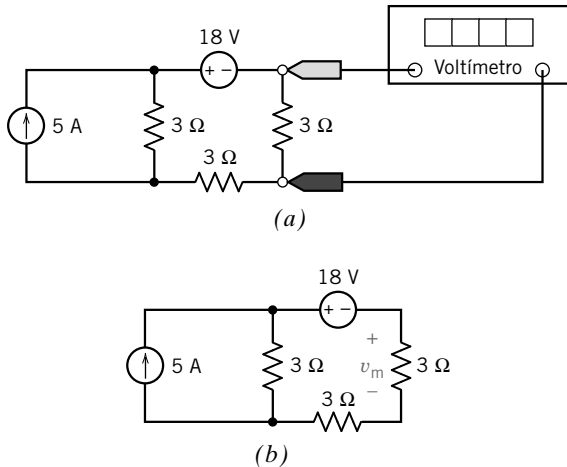
(b)

**Figura P 5.3-18** (a) Un circuito que contiene dos fuentes independientes. (b) El circuito luego de que se ha reemplazado el amperímetro ideal por el cortocircuito equivalente y se ha agregado una etiqueta para indicar la corriente medida por el amperímetro  $i_m$ .

**P 5.3-19** Aplicando el principio de superposición, encuentre el valor del voltaje medido por el voltímetro en la figura P 5.3-19a.

**Sugerencia:** La figura P 5.3-19b muestra el circuito después de que se ha reemplazado el voltímetro ideal por el cortocircuito equivalente, y se ha agregado una etiqueta para indicar el voltaje medido por el voltímetro,  $v_m$ .

$$\text{Respuesta: } v_m = 3 \left( \frac{3}{3 + (3 + 3)} 5 \right) - \frac{3}{3 + (3 + 3)} 18 = 5 - 6 = -1 \text{ V}$$



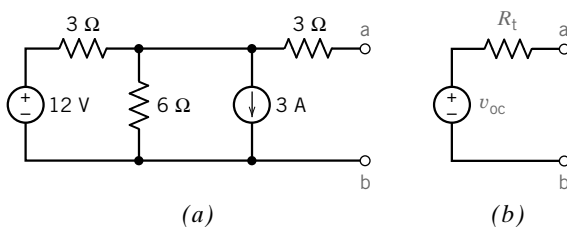
**Figura P 5.3-19** (a) Un circuito que contiene dos fuentes independientes. (b) El circuito luego de que se ha reemplazado el voltímetro ideal por el circuito abierto equivalente y se ha agregado una etiqueta para indicar el voltaje medido por el voltímetro  $v_m$ .

**Sección 5.4 Teorema de Thévenin**

**P 5.4-1** Determine los valores de  $R_t$  y  $v_{oc}$  que hacen que el circuito que se muestra en la figura P 5.4-1b para que sea el circuito equivalente de Thévenin del circuito en la figura P 5.4-1a.

**Sugerencia:** Utilice las transformaciones de fuente y las resistencias equivalentes para reducir el circuito en la figura P 5.4-1a hasta que sea el circuito en la figura P 5.4-1b.

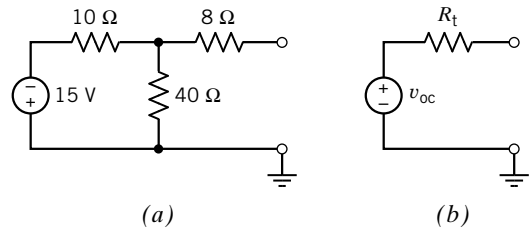
**Respuesta:**  $R_t = 5 \Omega$  y  $v_{oc} = 2 \text{ V}$



**Figura P 5.4-1**

**P 5.4-2** El circuito que se muestra en la figura P 5.4-2b es el circuito equivalente de Thévenin del circuito que se muestra en la figura P 5.4-2a. Encuentre el valor del voltaje del circuito abierto,  $v_{oc}$ , y la resistencia,  $R_t$ , de Thévenin.

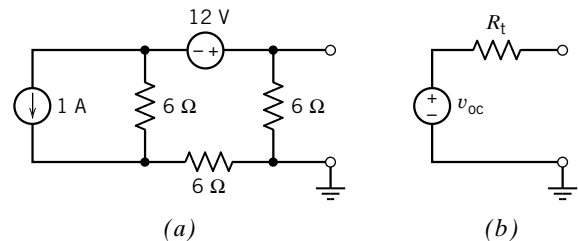
**Respuesta:**  $v_{oc} = -12 \text{ V}$  y  $R_t = 16 \Omega$



**Figura P 5.4-2**

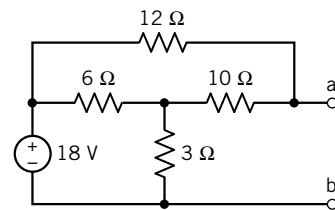
**P 5.4-3** El cortocircuito en la figura P 5.4-3b es el circuito equivalente de Thévenin del circuito en la figura P 5.4-3a. Encuentre el valor del voltaje del circuito abierto,  $v_{oc}$ , y la resistencia de Thévenin,  $R_t$ .

**Respuesta:**  $v_{oc} = 2 \text{ V}$  y  $R_t = 4 \Omega$



**Figura P 5.4-3**

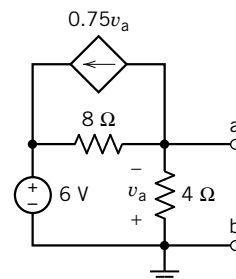
**P 5.4-4** Encuentre el circuito equivalente de Thévenin para el circuito que se muestra en la figura P 5.4-4.



**Figura P 5.4-4**

**P 5.4-5** Encuentre el circuito equivalente de Thévenin para el circuito que se muestra en la figura P 5.4-5.

**Respuesta:**  $v_{oc} = -2 \text{ V}$  y  $R_t = 8/3 \Omega$



**Figura P 5.4-5**



**P 5.4-6** Encuentre el circuito equivalente de Thévenin para el circuito que se muestra en la figura P 5.4-6.

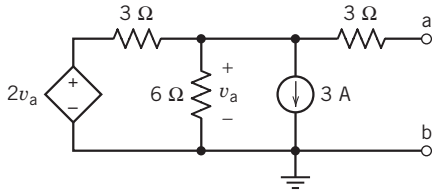


Figura P 5.4-6

**P 5.4-7** El circuito que se muestra en la figura P 5.4-7 tiene cuatro parámetros de circuito no especificados:  $v_s$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $d$ , donde  $d$  es la ganancia de la CCCS.

- (a) Muestre que el voltaje del circuito abierto,  $v_{oc}$ , la corriente del cortocircuito,  $i_{sc}$ , y la resistencia de Thévenin,  $R_t$ , de este circuito están dadas por

$$v_{oc} = \frac{R_2(d+1)}{R_1 + (d+1)R_2} v_s$$

$$i_{sc} = \frac{(d+1)}{R_1} v_s$$

y

$$R_t = \frac{R_1 R_2}{R_1 + (d+1)R_2}$$

- (b) Sea  $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ . Determine los valores de  $v_s$  y  $d$  requeridos para que  $v_{oc} = 5 \text{ V}$  y  $R_t = 625 \Omega$ .

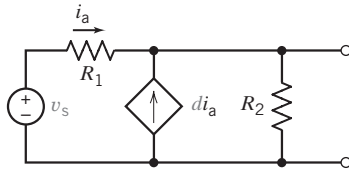


Figura P 5.4-7

**P 5.4-8** Un resistor,  $R$ , se conectó a una caja de circuitos como se muestra en la figura P 5.4-8. Se midió el voltaje,  $v$ . La resistencia se modificó, y el voltaje se midió de nuevo. Los resultados se muestran en la tabla. Determine el equivalente de Thévenin del circuito dentro de la caja y pronosticar el voltaje,  $v$ , cuando  $R = 8 \text{ k}\Omega$ .

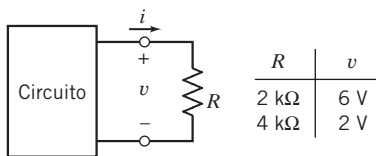


Figura P 5.4-8

**P 5.4-9** Un resistor,  $R$ , se conectó a una caja de circuitos como se muestra en la figura P 5.4-9. Se midió la corriente,  $i$ .

La resistencia se modificó, y la corriente se midió de nuevo. Los resultados se muestran en la tabla.

- (a) Especifique el valor de  $R$  requerido para que  $i = 2 \text{ mA}$ .  
 (b) Dado que  $R > 0$ , determine el valor posible máximo de la corriente  $i$ .

*Sugerencia:* Utilice los datos de la tabla para representar el circuito por un circuito equivalente.

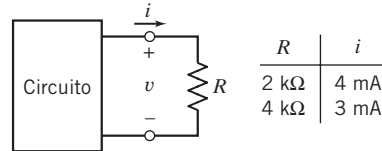
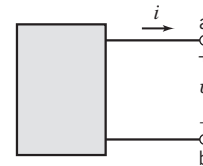
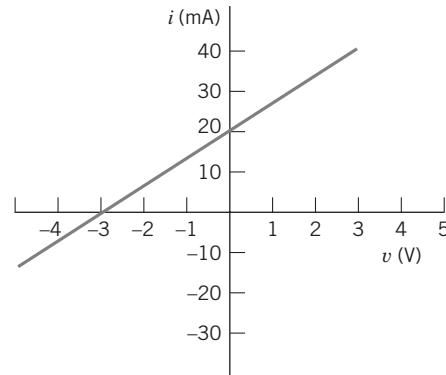


Figura P 5.4-9

**P 5.4-10** Las medidas hechas en las terminales a-b de un circuito lineal, la figura P 5.4-10a, la cual es sabido que consta de sólo fuentes de voltaje dependientes e independientes y de fuentes de corrientes y resistores, reditúa las características de voltaje-corriente que se muestran en la figura P 5.4-10b. Encuentre el circuito equivalente de Thévenin.



(a)



(b)

Figura P 5.4-10

**P 5.4-11** Para el circuito de la figura P 5.4-11, especifique la resistencia  $R$  que causará que una corriente  $i_b$  sea  $2 \text{ mA}$ . La corriente  $i_a$  tiene unidades de amperios.

**Sugerencia:** Encuentre el circuito equivalente de Thévenin del circuito conectado a  $R$ .

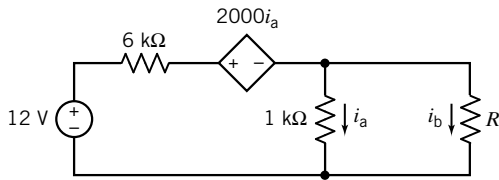


Figura P 5.4-11

**P 5.4-12** Para el circuito de la figura P 5.4-12, especifique el valor de la resistencia  $R_L$  que causará que una corriente  $i_L$  sea  $-2$  A.

**Respuesta:**  $R_L = 12 \Omega$

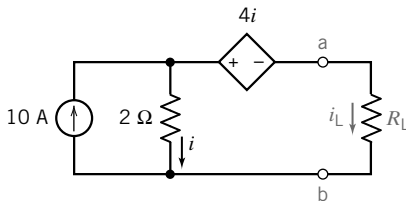


Figura P 5.4-12

**P 5.4-13** El circuito que se muestra en la figura P 5.4-13 contiene un resistor ajustable. La resistencia  $R$  se puede establecer a cualquier valor en el rango de  $0 \leq R \leq 100 \text{ k}\Omega$ .

- Determine el valor máximo de la corriente  $i_a$  que se puede obtener al ajustar  $R$ . Determine el valor correspondiente de  $R$ .
- Determine el valor máximo del voltaje  $v_a$  que se puede obtener al ajustar  $R$ . Determine el valor correspondiente de  $R$ .
- Determine el valor máximo de la potencia suministrada al resistor ajustable que se puede obtener al ajustar  $R$ . Determine el valor correspondiente de  $R$ .

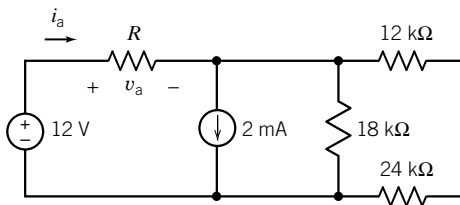


Figura P 5.4-13

**P 5.4-14** El circuito que se muestra en la figura P 5.4-14 consta de dos partes, la fuente (a la izquierda de las terminales) y la carga. La carga consta de un resistor ajustable único que tiene una resistencia  $0 \leq R_C \leq 20 \Omega$ . La resistencia  $R$  está establecida pero no especificada. Cuando  $R_L = 4 \Omega$ , la corriente de carga se ha medido para que  $i_o = 0.375$  A. Cuando  $R_L = 8 \Omega$ , el valor de la corriente de carga es  $i_o = 0.300$  A.

- Determine el valor de la corriente de carga cuando  $R_L = 10 \Omega$ .
- Determine el valor de  $R$ .

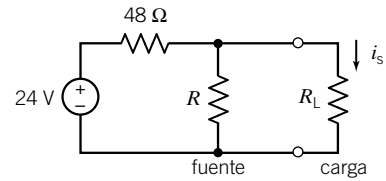


Figura P 5.4-14

**P 5.4-15** El circuito que se muestra en la figura P 5.4-15 contiene una resistencia no especificada,  $R$ . Determine el valor de  $R$  en cada una de las dos siguientes formas.

- Escriba y despeje ecuaciones de enlaces.
- Reemplace la parte del circuito conectada al resistor  $R$  por un circuito equivalente de Thévenin. Analice el circuito resultante.

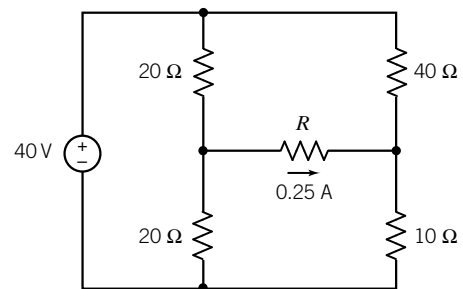


Figura P 5.4-15

**P 5.4-16** Considere el circuito que se muestra en la figura P 5.4-16. Reemplace la parte del circuito a la izquierda de las terminales a-b por su circuito equivalente de Thévenin. Determine el valor de la corriente  $i_s$ .

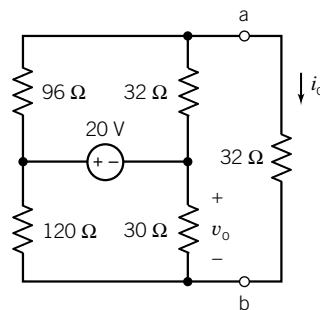


Figura P 5.4-16

**P 5.4-17** Se ha modelado un voltímetro ideal como un circuito abierto. Un modelo más realista de un voltímetro es una resistencia grande. La figura P 5.4-17a muestra un circuito con un voltímetro que mide el voltaje  $v_m$ . En la figura P 5.4-17b, el voltímetro es reemplazado por el modelo de un voltímetro ideal, un circuito abierto. El voltímetro mide  $v_{mi}$ , el valor ideal de  $v_m$ .

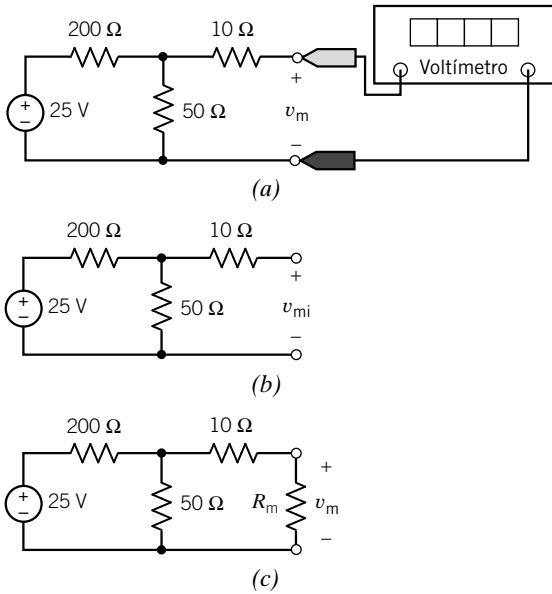


Figura P 5.4-17

Como  $R_m \rightarrow \infty$ , el voltímetro se transforma en un voltímetro ideal y  $v_m \rightarrow v_{mi}$ . Cuando  $R_m < \infty$ , el voltímetro es no ideal y  $v_m > v_{mi}$ . La diferencia entre  $v_m$  y  $v_{mi}$  es un error de medición ocasionado por el hecho de que el voltímetro es no ideal.

- Determine el valor de  $v_{mi}$ .
- Expresé el error de medición que ocurre cuando  $R_m = 1\,000\ \Omega$  como un porcentaje de  $v_{mi}$ .
- Determine el valor mínimo de  $R_m$  requerido para asegurar que el error de medición sea menor de 2% de  $v_{mi}$ .

**P 5.4-18** Determine el circuito equivalente para el circuito que se muestra en la figura P 5.4-18.

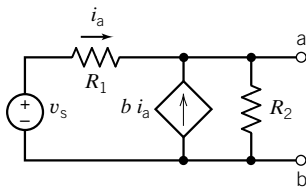


Figura P 5.4-18

**P 5.4-19** Dado que  $0 \leq R \leq \infty$  en el circuito que se muestra en la figura P 5.4-19, considere estas dos observaciones:

Observación 1: Cuando  $R = 2\ \Omega$  entonces  $v_R = 4\ \text{V}$  e  $i_R = 2\ \text{A}$ .

Observación 2: Cuando  $R = 6\ \Omega$  entonces  $v_R = 6\ \text{V}$  e  $i_R = 1\ \text{A}$ .

Determine lo siguiente:

- El valor máximo de  $i_R$  y el valor de  $R$  que hace que  $i_R$  sea máximo.
- El valor máximo de  $v_R$  y el valor de  $R$  que hace que  $v_R$  sea máximo.
- El valor máximo de  $p_R = i_R v_R$  y el valor de  $R$  que hace que  $p_R$  sea máximo.

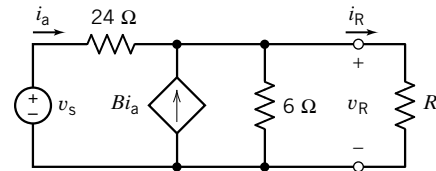


Figura P 5.4-19

**P 5.4-20** Considere el circuito que se muestra en la figura P 5.4-20.

Determine

- El valor de  $v_R$  que ocurre cuando  $R = 9\ \Omega$ .
- El valor de  $R$  que hace que  $v_R = 5.4\ \text{V}$ .
- El valor de  $R$  que hace que  $i_R = 300\ \text{mA}$ .

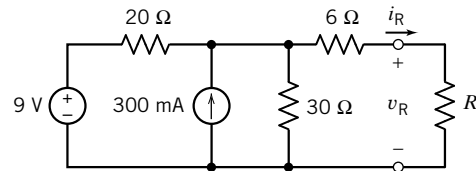


Figura P 5.4-20

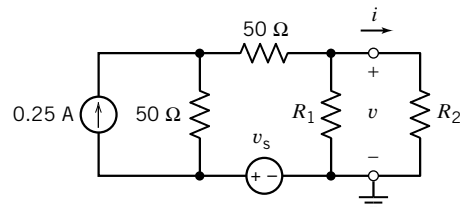
## Sección 5.5 Circuito equivalente de Norton

**P 5.5-1** La parte del circuito que se muestra en la figura P 5.5-1a a la izquierda de las terminales se puede reducir a su circuito equivalente de Norton utilizando transformaciones de fuente y resistencia equivalente. El circuito equivalente de Norton resultante, que se muestra en la figura P 5.5-1b, se caracterizará por los parámetros

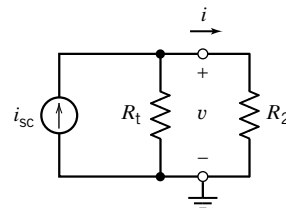
$$i_{sc} = 0.5\ \text{A} \text{ y } R_t = 20\ \Omega$$

- Determine los valores de  $v_s$  y  $R_1$ .
- Dado que  $0 \leq R_2 \leq \infty$ , determine los valores máximos del voltaje,  $v$ , y de la potencia,  $p = vi$ .

**Respuestas:**  $v_s = 37.5\ \text{V}$ ,  $R_1 = 25\ \Omega$ , máxima  $v = 10\ \text{V}$  y máxima  $p = 1.25\ \text{W}$



(a)



(b)

Figura P 5.5-1

**P 5.5-2** En la figura P 5.5-2 se muestran dos cajas negras. La caja A contiene el equivalente de Thévenin de algunos circuitos lineales, y la caja B contiene el equivalente de Norton del mismo circuito. Con el acceso a únicamente los exteriores de las cajas y sus terminales, ¿cómo puede determinar cuál es cuál, utilizando solamente un cable de cortocircuito?

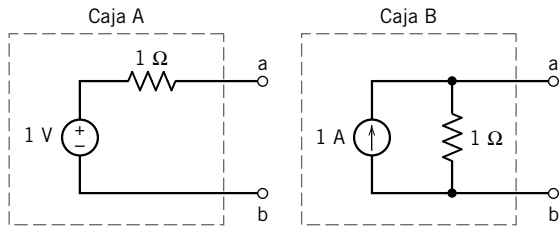


Figura P 5.5-2 El problema de las cajas negras.

**P 5.5-3** Encuentre el circuito equivalente de Norton para el circuito que se muestra en la figura P 5.5-3.

Respuesta:  $R_t = 2 \Omega$  e  $i_{sc} = -7.5A$

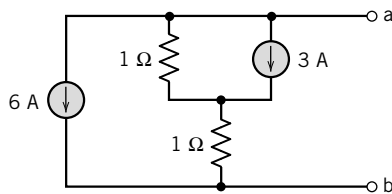


Figura P 5.5-3

**P 5.5-4** Encuentre el circuito equivalente de Norton para el circuito que se muestra en la figura P 5.5-4.

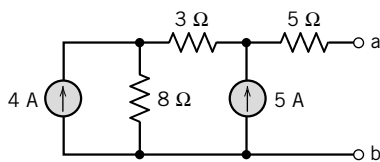


Figura P 5.5-4

**P 5.5-5** El circuito que se muestra en la figura P 5.5-5b es el circuito equivalente de Norton del circuito que se muestra en la figura P 5.5-5a. Encuentre el valor de la corriente del cortocircuito,  $i_{sc}$ , y la resistencia de Thévenin,  $R_t$ .

Respuesta:  $i_{sc} = 1.13 A$  y  $R_t = 7.57 \Omega$

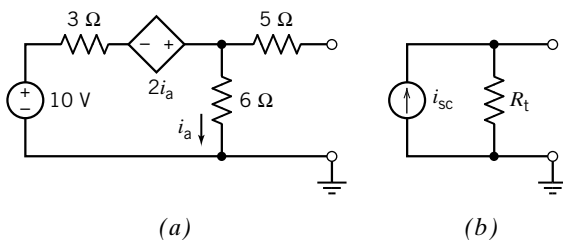


Figura P 5.5-5

**P 5.5-6** El circuito que se muestra en la figura P 5.5-6b es el circuito equivalente de Norton del circuito que se muestra en la figura P 5.5-6a. Encuentre el valor de la corriente del cortocircuito,  $i_{sc}$ , y la resistencia de Thévenin,  $R_t$ .

Respuesta:  $i_{sc} = -24 A$  y  $R_t = -3 \Omega$

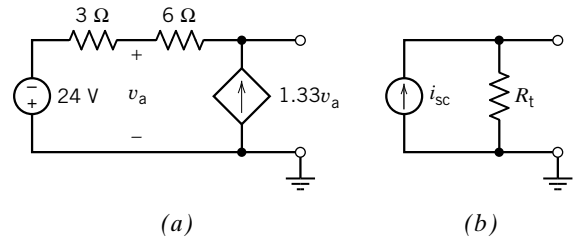


Figura P 5.5-6

**P 5.5-7** Determine el valor de la resistencia  $R$  en el circuito que se muestra en la figura P 5.5-7 mediante cada uno de los métodos siguientes:

- (a) Reemplace la parte del circuito a la izquierda de las terminales a-b por su circuito equivalente de Norton. Utilice la división de corrientes para determinar el valor de  $R$ .
- (b) Analice el circuito que se muestra en la figura P 5.5-7 utilizando ecuaciones de enlaces. Despeje las ecuaciones de enlace para determinar el valor de  $R$ .

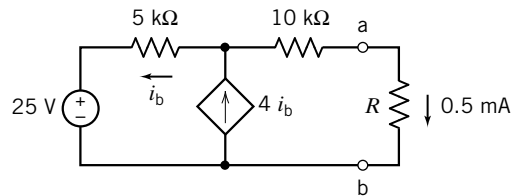


Figura P 5.5-7

**\*P 5.5-8** El dispositivo a la derecha de las terminales a-b en la figura P 5.5-8 es un resistor no lineal caracterizado por

$$i = \frac{v^2}{2}$$

Determine los valores de  $i$  y  $v$ .

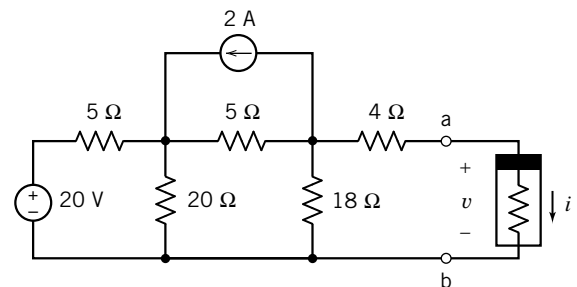


Figura P 5.5-8

**P 5.5-9** Encuentre el circuito equivalente de Norton para el circuito que se muestra en la figura P 5.5-9.

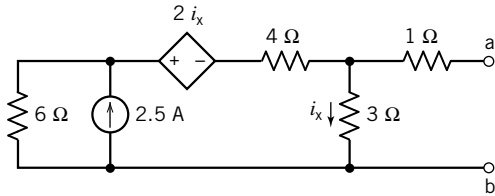


Figura P 5.5-9

**P 5.5-10** Encuentre el circuito equivalente de Norton para el circuito que se muestra la figura P 5.5-10.

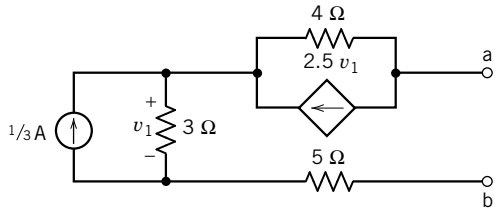
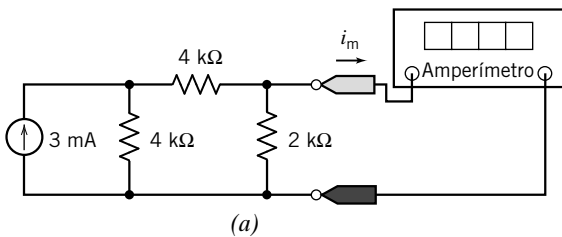
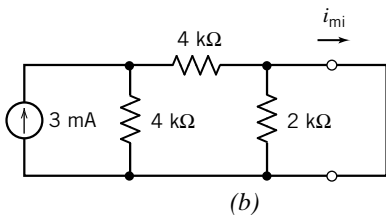


Figura P 5.5-10

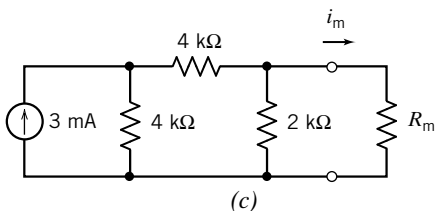
**P 5.5-11** Se ha modelado un amperímetro ideal como un cortocircuito. Un modelo más realista de un amperímetro es una resistencia pequeña. La figura P 5.5-11a muestra un circuito con un amperímetro que mide la corriente  $i_m$ . En la figura P 5.5-10b, el amperímetro ha sido reemplazado por el modelo de un amperímetro ideal, un cortocircuito. El amperímetro mide  $i_{mi}$ , el valor ideal de  $i_m$ .



(a)



(b)



(c)

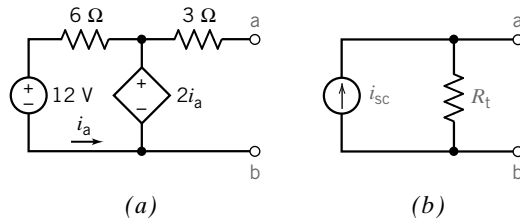
Figura P 5.5-11

Puesto que  $R_m \rightarrow 0$ , el amperímetro se convierte en un amperímetro ideal e  $i_m \rightarrow i_{mi}$ . Cuando  $R_m > 0$ , el amperímetro es no ideal, e  $i_m < i_{mi}$ . La diferencia entre  $i_m$  e  $i_{mi}$  es un error de medición causado por el hecho de que el amperímetro es no ideal.

- Determine el valor de  $i_{mi}$ .
- Expresé el error de medición que ocurre cuando  $R_m = 20 \Omega$  como un porcentaje de  $i_{mi}$ .
- Determine el valor máximo de  $R_m$  requerido para asegurar que el error de medición es menor que 2% de  $i_{mi}$ .

**P 5.5-12** Determine los valores de  $R_t$  e  $i_{sc}$  que hacen que el circuito que se muestra en la figura P 5.5-12b sea el circuito equivalente de Norton del circuito en la figura P 5.5-12a.

**Respuesta:**  $R_t = 3 \Omega$  e  $i_{sc} = -2A$



(a)

(b)

Figura P 5.5-12

**P 5.5-13** Utilice el teorema de Norton para formular una expresión general para la corriente  $i$  en términos de la resistencia variable  $R$  en la figura P 5.5-13.

**Respuesta:**  $i = 20/(8 + R) A$

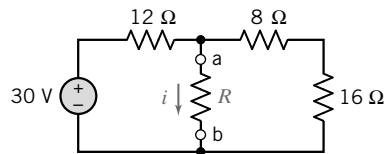


Figura P 5.5-13

## Sección 5.6 Transferencia de potencia máxima

**P 5.6-1** El circuito que se muestra en la figura P 5.6-1 consta de dos partes separadas por un par de terminales. Considere la parte del circuito de la izquierda de las terminales. El voltaje del circuito abierto es  $v_{oc} = 8 V$ , y la corriente del cortocircuito es  $i_{sc} = 2A$ . Determine los valores de (a) el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ , de la resistencia  $R_2$ , y (b) la resistencia  $R$  que maximice la potencia transmitida al resistor de la derecha de las terminales, y la potencia máxima correspondiente.

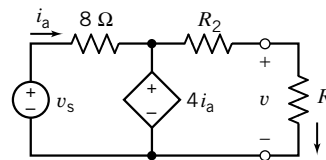


Figura P 5.6-1

**P 5.6-2** El modelo de circuito para una celda fotovoltaica se da en la figura P 5.6-2 (Edelson, 1992). La corriente  $i_f$  es proporcional a la insolación ( $\text{kW/m}^2$ ).

- (a) Encuentre la resistencia de carga,  $R_L$ , para la transferencia de potencia máxima.
- (b) Encuentre la potencia máxima transferida cuando  $i_s = 1\text{A}$ .

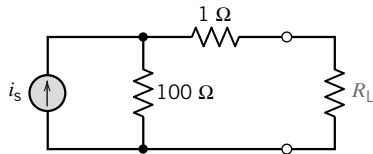


Figura P 5.6-2 Modelo de circuito de una celda fotovoltaica.

**P 5.6-3** Para el circuito en la figura P5.6-3, (a) encuentre  $R$  tal que la potencia máxima se disipe en  $R$ , y (b) calcule el valor de la potencia máxima.

**Respuesta:**  $R = 60\ \Omega$  y  $P_{\text{máx}} = -54\ \text{mW}$

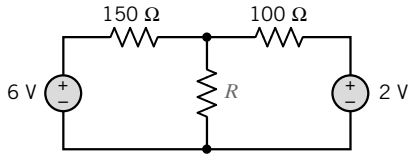


Figura 5.6-3

**P 5.6-4** Para el circuito en la figura P 5.6-4, compruebe que para  $R_s$  variable y  $R_L$  fija, la potencia disipada en  $R_L$  es la máxima cuando  $R_s = 0$ .

**Respuesta:**  $R = 60\ \Omega$  y  $P_{\text{máx}} = -54\ \text{mW}$

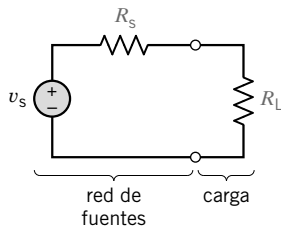


Figura P 5.6-4

**P 5.6-5** Encuentre la potencia máxima para la carga  $R_L$  si la condición de transferencia de potencia máxima se encuentra para el circuito de la figura P 5.6-5.

**Respuesta:**  $p_L$  máxima =  $0.75\ \text{mW}$

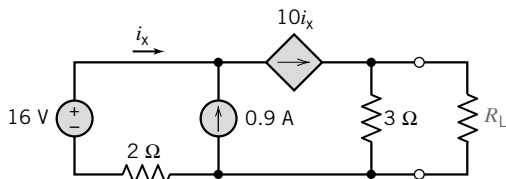


Figura P 5.6-5

**P 5.6-6** Determine la potencia máxima que puede ser absorbida por un resistor,  $R$ , conectado a las terminales a-b del circuito que se muestra en la figura P 5.6-6. Especifique el valor requerido de  $R$ .

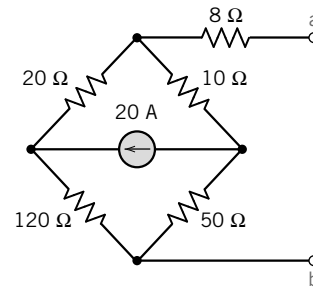


Figura P 5.6-6 Circuito de puente.

**P 5.6-7** La figura P 5.6-7 muestra una fuente conectada a una carga a través de un amplificador. La carga puede recibir con gran seguridad hasta  $15\ \text{W}$  de potencia. Considere tres casos:

- (a)  $A = 20\ \text{V/V}$  y  $R_o = 10\ \Omega$ . Determine el valor de  $R_L$  que maximice la potencia transmitida a la carga y la potencia de carga máxima correspondiente.
- (b)  $A = 20\ \text{V/V}$  y  $R_L = 8\ \Omega$ . Determine el valor de  $R_o$  que maximice la potencia transmitida a la carga y la potencia de carga máxima correspondiente.
- (c)  $R_s = 10\ \Omega$  y  $R_L = 8\ \Omega$ . Determine el valor de  $A$  que maximice la potencia transmitida a la carga y a la potencia de carga máxima.

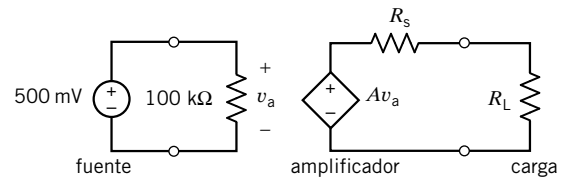


Figura P 5.6-7

**P 5.6-8** El circuito en la figura P 5.6-8 contiene una resistencia variable,  $R$ , implementada con un potenciómetro. La resistencia del resistor variable varía por sobre el rango de  $0 \leq R \leq 1\ 000\ \Omega$ . El resistor variable puede recibir con toda seguridad la potencia de  $1/4\ \text{w}$ . Determine la potencia máxima recibida por el resistor variable. ¿Es seguro el circuito?

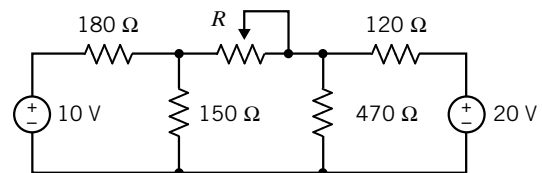


Figura P 5.6-8

**P 5.6-9** Para el circuito de la figura P 5.6-9, encuentre la potencia transmitida a la carga cuando  $R_L$  es fija y  $R_t$  puede haber

variado entre  $1 \Omega$  y  $5 \Omega$ . Seleccione  $R_t$  de modo que la potencia máxima se transmita a  $R_L$ .

**Respuesta:** 13.9 W

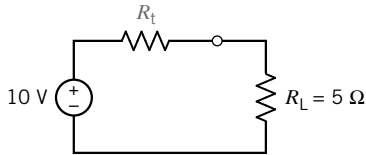


Figura P 5.6-9

**P 5.6-10** Se conectó un circuito resistivo a un resistor variable, y la potencia transmitida al resistor se midió como se muestra en la figura P 5.6-10. Determine el circuito equivalente de Thévenin.

**Respuesta:**  $R_t = 20 \Omega$  y  $v_{oc} = 20 V$

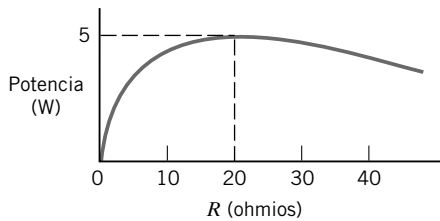


Figura P 5.6-10

**Sección 5.8 Uso de PSpice para determinar el circuito equivalente de Thévenin**

**P 5.8-1** El circuito que se muestra en la figura P 5.8-1 está separado en dos partes por un par de terminales. Lleve la parte del circuito a la izquierda de las terminales del circuito A y la parte del circuito a la derecha de la terminal del circuito B. Utilice PSpice para lo siguiente:

- (a) Determine los voltajes de nodo para todo el circuito.
- (b) Determine el circuito equivalente de Thévenin del circuito A.
- (c) Reemplace el circuito con su equivalente de Thévenin y determine los voltajes de nodo del circuito modificado.
- (d) Compare los voltajes de nodo del circuito B antes y después de reemplazar el circuito A por el equivalente de Thévenin.

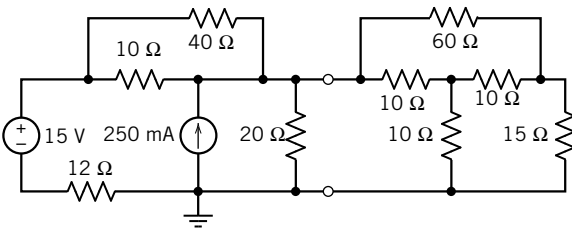


Figura P 5.8-1

**Sección 5.9 ¿Cómo lo podemos comprobar...?**

**P 5.9-1** Para el circuito de la figura P 5.9-1, se ha medido la corriente  $i$  para tres diferentes valores de  $R$  y se ha enlistado en la tabla. ¿Los datos son consistentes?

$R(\Omega)$	$i(\text{mA})$
5000	16.5
500	43.8
0	97.2

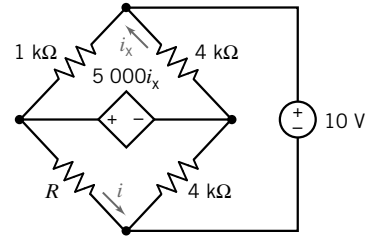
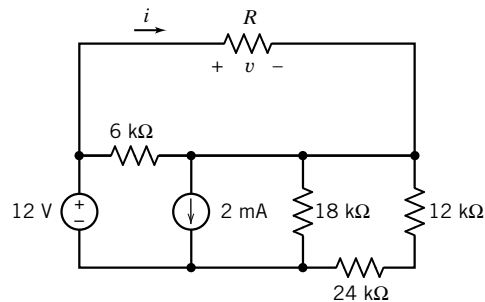


Figura P 5.9-1

**P 5.9-2** Su compañero de laboratorio construyó el circuito que se muestra en la figura P 5.9-2 y midió la corriente  $i$  y el voltaje  $v$  correspondientes a los diversos valores de la resistencia  $R$ . Los resultados se muestran en la tabla de la figura P 5.9-2. Su compañero de laboratorio dice que se requiere que  $R_L = 8000 \Omega$  para que  $i = 1 \text{ mA}$ . ¿Está usted de acuerdo? Justifique su respuesta.



$R$	$i$	$v$
circuito abierto	0 mA	12 V
de $10 \text{ k}\Omega$	0.857 mA	8.57 V
	3 mA	0 V

Figura P 5.9-2

**P 5.9-3** En preparación para laboratorio, su compañero de laboratorio determinó el circuito equivalente de Thévenin conectado a  $R_L$  en la figura P 5.9-3. Dice que la resistencia de Thévenin es  $R_t = \frac{6}{11} R$  y que el voltaje del circuito abierto es  $v_{oc} = \frac{60}{11} V$ . En el laboratorio, usted construyó el circuito utilizando  $R = 110 \Omega$  y  $R_L = 40 \Omega$ , además de haber medido  $i = 54.5 \text{ mA}$ . ¿Esta medición es consistente con los cálculos de preparación de laboratorio? Justifique sus respuestas.

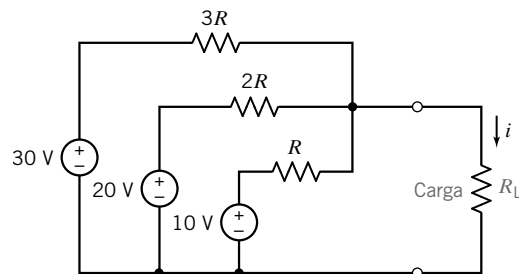


Figura P 5.9-3

**P 5.9-4** Su compañero de laboratorio pide que la corriente  $i$  en la figura P 5.9-4 no sea mayor de 12.0 mA, independientemente del valor de la resistencia  $R$ . ¿Está de acuerdo?

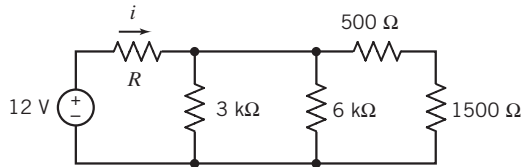
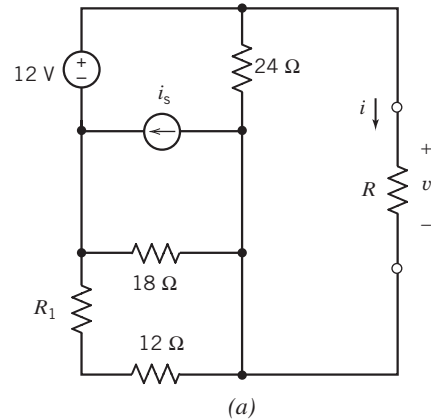


Figura P 5.9-4

**P 5.9-5** La figura P 5.8-1 muestra un circuito y algunos datos que se corresponden. Dos resistencias,  $R_1$  y  $R$ , y la corriente de la fuente de corriente no están especificados. Los datos tabulados proporcionan valores de la corriente,  $i$ , y del voltaje,  $v$ , que corresponden a diversos valores de la resistencia  $R$ .

- Considere reemplazar la parte del circuito conectado al resistor  $R$  por un circuito equivalente de Thévenin. Utilice los datos en las filas 2 y 3 de la tabla para encontrar los valores de  $R_1$  y  $v_{oc}$ , la resistencia de Thévenin y el voltaje del circuito abierto.
- Utilice los resultados de la parte (a) para verificar que los datos tabulados sean consistentes.
- Llene los espacios en blanco de la tabla.
- Determine los valores de  $R_1$  e  $i_s$ .



$R, \Omega$	$i, A$	$v, V$
0	3	0
10	1.333	13.33
20	0.857	17.14
40	0.5	?
80	?	21.82

Figura P 5.9-5

## Problemas de PSpice

**PS 5-1** El circuito en la figura SP 5-1 tiene tres entradas:  $v_1$ ,  $v_2$  e  $i_3$ . El circuito tiene una salida,  $v_o$ . La ecuación

$$v_o = a v_1 + b v_2 + c i_3$$

expresa la salida como una función de las entradas. Los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes reales.

- Utilice PSpice y el principio de la superposición para determinar los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ .
- Suponga que  $v_1 = 10 \text{ V}$  y  $v_2 = 8 \text{ V}$ , y queremos que la salida sea  $v_o = 7 \text{ V}$ . ¿Cuál es el valor requerido de  $i_3$ ?

**Sugerencia:** La salida está dada por  $v_o = a$  cuando  $v_1 = 1 \text{ V}$ ,  $v_2 = 0 \text{ V}$  e  $i_3 = 0 \text{ A}$ .

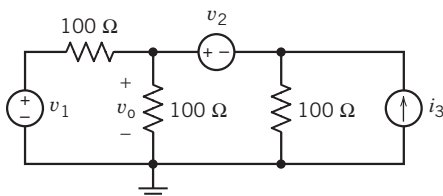


Figura PS 5-1

**Respuesta:** (a)  $v_o = 0.3333v_1 + 0.3333v_2 + 33.33i_3$ , (b)  $i_3 = 30 \text{ mA}$

**PS 5-2** El par de terminales a-b divide el circuito de la figura SP 5-2 en dos partes. Indique los voltajes de nodo en los nodos 1 y 2 como  $v_1$  y  $v_2$ . Utilice PSpice para demostrar que efectuar una transformación de fuentes en la parte del circuito a la derecha de las terminales no modifica nada a la derecha de las terminales. En particular, muestre que la corriente,  $i_o$ , y los voltajes de nodo,  $v_1$  y  $v_2$ , tiene los mismos valores después de la transformación de fuentes como antes de la transformación de fuentes.

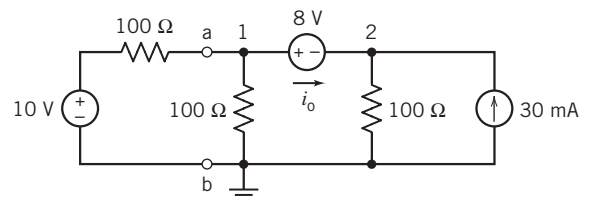


Figura PS 5-2

**PS 5-3** Utilice PSpice para encontrar el circuito equivalente de Thévenin para el circuito que se muestra en la figura PS 5-3.



Respuesta:  $v_{oc} = 2 \text{ V}$  y  $R_t = -8/3 \Omega$

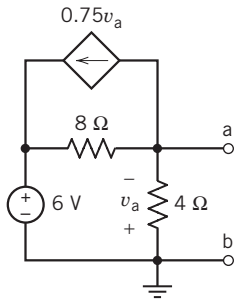


Figura PS 5-3

PS 5-4 El circuito que se muestra en la figura PS 5-4b es el circuito equivalente de Norton del circuito que se muestra en

la figura PS 5-4a. Encuentre el valor de la corriente del cortocircuito,  $i_{sc}$ , y la resistencia de Thévenin,  $R_t$ .

Respuesta:  $i_{sc} = 1.13 \text{ V}$  y  $R_t = 7.57 \Omega$

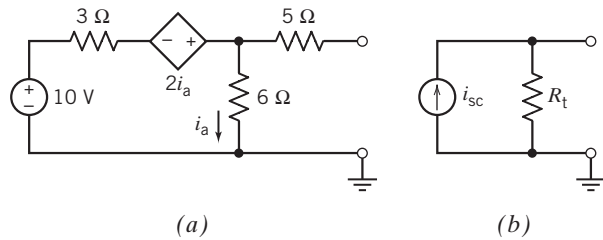


Figura PS 5-4

## Problemas de diseño

PD 5-1 El circuito que se ilustra en la figura PD 5-1a tiene cuatro parámetros de circuito no especificados:  $v_s$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ . Para diseñar este circuito, debemos especificar los valores de estos cuatro parámetros. La gráfica que se muestra en la figura PD 5-1b describe una relación entre la corriente  $i$  y el voltaje  $v$ .

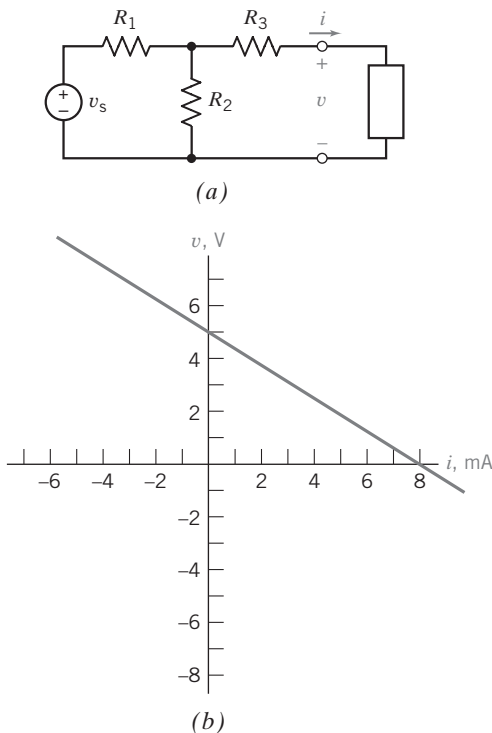


Figura PD 5-1

Especifique los valores de  $v_s$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  que hacen que la corriente  $i$  y el voltaje  $v$  en la figura PD 5-1a satisfaga la relación descrita por la gráfica en la figura PD 5-1b.

**Primera sugerencia:** La ecuación que representa la línea recta en la figura PD 5-1b es

$$v = -R_t i + v_{oc}$$

Es decir, la inclinación de la línea es igual a  $-1$  vez la resistencia de Thévenin, y la intercepción del  $v$  es igual al voltaje del circuito abierto.

**Segunda sugerencia:** Hay más de una respuesta correcta para este problema. Trate de hacerlo estableciendo  $R_1 = R_2$ .

PD 5-2 El circuito que se ilustra en la figura PD 5-2a tiene cuatro parámetros de circuito no especificados:  $i_s$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ . Para diseñar este circuito, debemos especificar los valores de estos cuatro parámetros. La gráfica que se muestra en la figura PD 5-2b describe una relación entre la corriente  $i$  y el voltaje  $v$ .

Especifique los valores de  $i_s$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  que hacen que la corriente  $i$  y el voltaje  $v$  en la figura PD 5-2a satisfaga la relación descrita por la gráfica en la figura PD 5-2b.

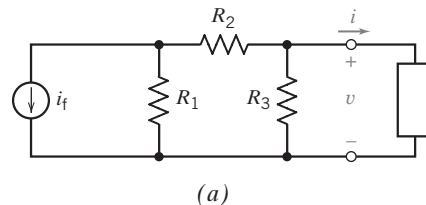
**Primera sugerencia:** Calcule el voltaje de circuito abierto,  $v_{oc}$ , y la resistencia de Thévenin,  $R_t$ , de la parte del circuito a la izquierda de las terminales en la figura PD 5-2a.

**Segunda sugerencia:** La ecuación que representa la línea recta en la figura PD 5-2b es

$$v = -R_t i + v_{oc}$$

Es decir, la inclinación de la línea es igual a  $-1$  vez la resistencia de Thévenin, y la intercepción de  $v$  es igual al voltaje del circuito abierto.

**Tercera sugerencia:** Hay más de una respuesta correcta para este problema. Trate de hacerlo estableciendo que tanto  $R_3$  y  $R_1 + R_2$  sean iguales dos veces la inclinación de la gráfica en la figura PD 5-2b.



(a)

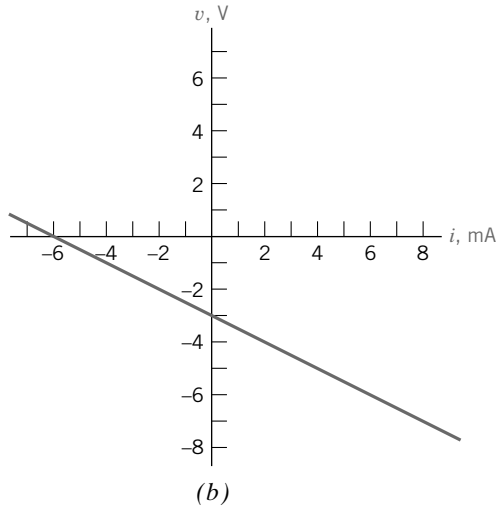


Figura PD 5-2

**PD 5-3** El circuito que se ilustra en la figura PD 5-3a tiene cuatro parámetros de circuito no especificados:  $v_s$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ . Para diseñar este circuito, debemos especificar los valores de estos cuatro parámetros. La gráfica que se muestra en la figura PD 5-3b describe una relación entre la corriente  $i$  y el voltaje  $v$ .

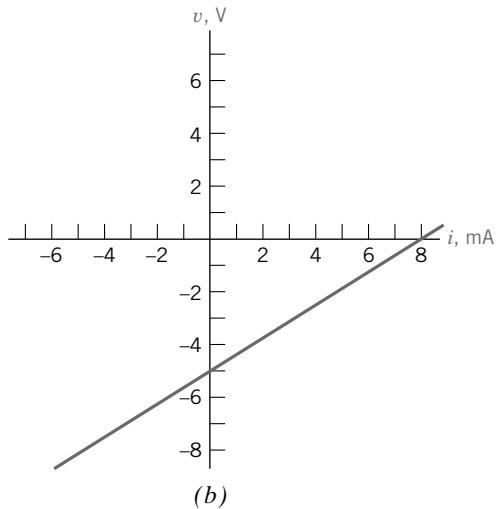
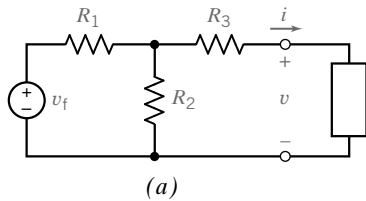


Figura PD 5-3

¿Es posible especificar los valores de  $v_s$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  que hacen que la corriente  $i$  y el voltaje  $v$  en la figura PD 5-3a satisfaga la relación descrita por la gráfica en la figura PD 5-3b? Justifique su respuesta.

**PD 5-4** El circuito que se muestra en la figura PD 5-4a tiene cuatro parámetros de circuito no especificados:  $v_s$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $d$ , donde  $d$  es la ganancia de la CCCS. Para diseñar este circuito, debemos especificar los valores de estos cuatro parámetros. La gráfica que se muestra en la figura PD 5-4b describe una relación entre la corriente  $i$  y el voltaje  $v$ .

Especifique los valores de  $v_s$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $d$  que hacen que la corriente  $i$  y el voltaje  $v$  en la figura PD 5-4a satisfaga la relación descrita por la gráfica en la figura PD 5-4b.

**Primera sugerencia:** La ecuación que representa la línea recta en la figura PD 5-4b es

$$v = -R_i i + v_{oc}$$

Es decir, la inclinación de la línea es igual a  $-1$  vez la resistencia de Thévenin, y la intercepción de  $v$  es igual al voltaje del circuito abierto.

**Segunda sugerencia:** Hay más de una respuesta correcta para este problema. Trate de hacerlo estableciendo  $R_1 = R_2$ .

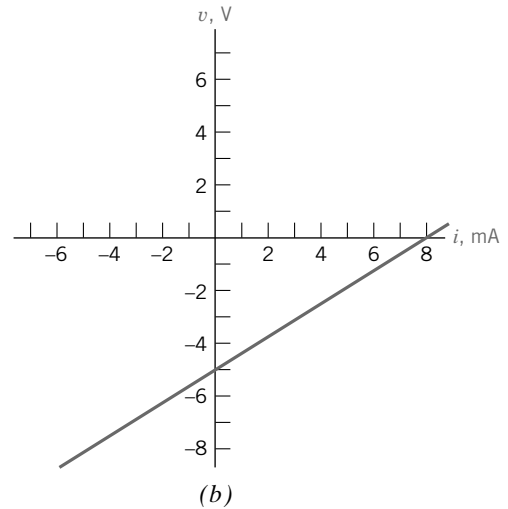
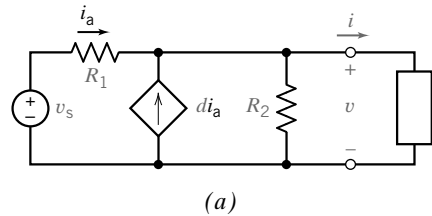


Figura PD 5-4

# El amplificador operacional

## CAPÍTULO

# 6

### EN ESTE CAPÍTULO

- |     |  |      |   |
|-----|--|------|---|
| 6.1 | Introducción   | 6.8  | Análisis de circuitos de amplificadores operacionales mediante el uso de MATLAB |
| 6.2 | El amplificador operacional  | 6.9  | Análisis de circuitos de amplificadores operacionales mediante el uso de PSpice |
| 6.3 | El amplificador operacional ideal  | 6.10 | ¿Cómo lo podemos comprobar...?  |
| 6.4 | Análisis nodal de circuitos que contienen amplificadores operacionales ideales | 6.11 | <b>EJEMPLO DE DISEÑO</b> — Circuito de interfase de transductor                 |
| 6.5 | Diseño mediante el uso de amplificadores operacionales                         | 6.12 | Resumen   |
| 6.6 | Circuitos de amplificadores operacionales y ecuaciones algebraicas lineales    |      | Problemas   |
| 6.7 | Características de los amplificadores operacionales prácticos                  |      | Problemas de PSpice   |
|     |  |      | Problemas de diseño   |

## 6.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo presenta otro elemento de circuitos, el amplificador operacional, o *AMP OP*. Aprenderemos a analizar y diseñar circuitos que contengan *AMP OPs*. En particular, veremos que

- Se puede disponer de varios modelos, de certeza y complejidad diversas, para amplificadores operacionales. Los modelos sencillos son fáciles de utilizar, y los modelos precisos son más complicados. El modelo más sencillo de amplificador operacional es el amplificador operacional ideal.
- Los circuitos que contienen amplificadores operacionales ideales se analizan mediante la escritura y despeje de ecuaciones nodales.
- Los amplificadores operacionales se pueden utilizar para construir circuitos que realicen operaciones matemáticas. Muchos de estos circuitos tienen un amplio uso e incluso han recibido su denominación propia. La figura 6.5-1 proporciona un catálogo de algunos circuitos útiles de amplificador operacional.
- Los amplificadores operacionales prácticos tienen propiedades que no se contemplan en el amplificador operacional ideal. Entre ellas están el voltaje de ramas de entrada, la corriente de polarización negativa, la ganancia de la cd, la resistencia de entrada y la de salida. Para hacer posibles estas propiedades se han requerido modelos más complicados.

## 6.2 EL AMPLIFICADOR OPERACIONAL

El *amplificador operacional* es un elemento de circuito electrónico, diseñado para su uso con otros elementos de circuito que lleven a cabo operaciones de procesamiento de señales especificadas. En la figura 6.2-1a se muestra el amplificador operacional  $\mu A471$ , el cual consta de ocho clavijas de conexión, cuyas funciones se indican en la figura 6.2-1b.

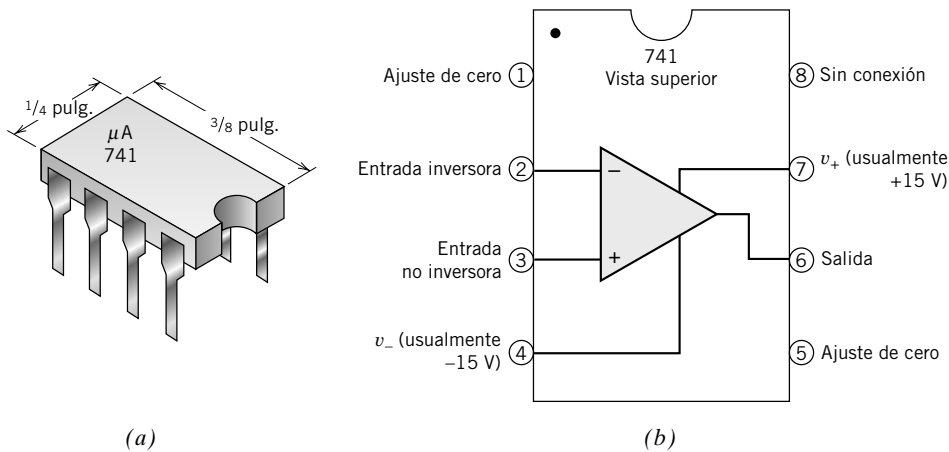


FIGURA 6.2-1 (a) Un circuito integrado  $\mu A471$  tiene ocho clavijas. (b) Correspondencia entre los números de las clavijas circulasdas del circuito integrado y de los nodos del amplificador operacional.

El amplificador operacional que se muestra en la figura 6.2-2 tiene cinco terminales. Los nombres de estas terminales se muestran en las figuras 6.2-1b y 6.2-2. Observe los signos más y menos en la parte triangular del símbolo del amplificador operacional. El signo más identifica la entrada no inversora y el signo menos identifica a la entrada inversora.

Los alimentadores de potencia se utilizan para polarizar el amplificador operacional. En otras palabras, los alimentadores de potencia ocasionan ciertas condiciones que se requieren para que el amplificador operacional funcione de manera adecuada. No es conveniente incluir los alimentadores de potencia en los dibujos en que se detallan circuitos de amplificadores operacionales. Estos alimentadores de potencia tienden a desordenar los dibujos de circuitos de amplificadores operacionales, lo cual dificulta su lectura. En consecuencia, los alimentadores de potencia se suelen omitir en los dibujos que acompañan las explicaciones de la función de los circuitos de amplificadores operacionales, como las ilustraciones que se encuentran en los libros de texto. Se entiende que los alimentadores de potencia son parte del circuito aun cuando no se ilustren. (Los esquemas, los dibujos que se utilizaron para describir cómo ensamblar un circuito, son un tema distinto.) Los voltajes del alimentador de potencia se muestran en la figura 6.2-2, indicados como  $v_+$  y  $v_-$ .

Dado que los alimentadores de potencia se suelen omitir de los dibujos de circuitos de amplificadores operacionales, es fácil pasar por alto las corrientes del alimentador de potencia. Este error se evita con la cuidadosa aplicación de la ley de la corriente de Kirchhoff (KCL). Por regla general, no es útil aplicar la KCL de un modo que implique cualquier corriente de alimentador de potencia. Dos casos específicos son de manera particular importantes. En principio, el nodo de tierra de la figura 6.2-2 es una terminal de ambos alimentadores de potencia. Estas dos corrientes de alimentación de potencia se podrían ver implicadas si se aplicara la KCL al nodo de tierra. Estas corrientes no se deben

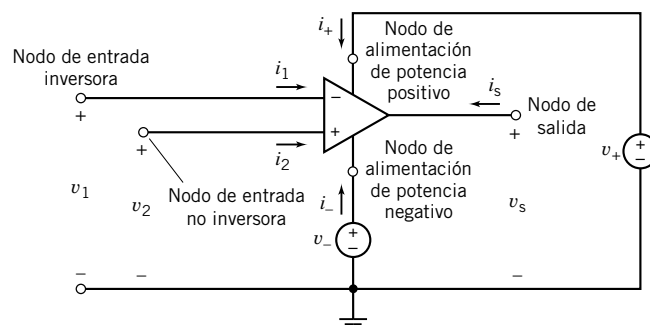


FIGURA 6.2-2 Un AMP OP, incluyendo alimentadores de potencia  $v_+$  y  $v_-$ .

pasar por alto. Es mejor simplemente abstenerse de aplicar la KCL al nodo de tierra de un circuito de amplificador operacional. En segundo lugar, la KCL requiere que la suma de todas las corrientes en el amplificador operacional sean cero:

$$i_1 + i_2 + i_o + i_+ + i_- = 0$$

Ambas corrientes de alimentación de potencia están comprendidas en esta ecuación. Una vez más, no hay que pasar por alto estas corrientes. Es mejor simplemente abstenerse de aplicar la KCL a la suma de corrientes en un amplificador operacional cuando los alimentadores de potencia se omitan del diagrama del circuito.

### 6.3 EL AMPLIFICADOR OPERACIONAL IDEAL

Los amplificadores operacionales son dispositivos complicados que presentan un comportamiento lineal y no lineal. El voltaje y la corriente de salida del amplificador operacional,  $v_o$  e  $i_o$ , deben cumplir tres condiciones para que un amplificador operacional sea lineal, a saber:

$$\begin{aligned} |v_o| &\leq v_{\text{sat}} \\ |i_o| &\leq i_{\text{sat}} \\ \left| \frac{dv_o(t)}{dt} \right| &\leq SR \end{aligned} \quad (6.3-1)$$

El voltaje de saturación,  $v_{\text{sat}}$ , la corriente de saturación,  $i_{\text{sat}}$ , y el límite de razón de decaimiento,  $SR$ , son todos parámetros de un amplificador operacional. Por ejemplo, si el amplificador operacional  $\mu A741$  se polariza utilizando alimentadores de potencia  $+15V$  y  $-15V$ , entonces

$$v_{\text{sat}} = 14 \text{ V}, \quad i_{\text{sat}} = 2 \text{ mA} \quad \text{y} \quad SR = 500\,000 \frac{\text{V}}{\text{s}} \quad (6.3-2)$$

Estas restricciones reflejan el hecho de que los amplificadores operacionales no producen voltajes grandes o grandes corrientes, ni cambian rápidamente voltajes de salida de manera arbitraria.

La figura 6.3-1 describe el *amplificador operacional ideal*. Este tipo de amplificador es un modelo sencillo de un amplificador operacional que es lineal. El amplificador operacional ideal se caracteriza por restricciones en sus corrientes y voltajes de entrada. Las corrientes en las terminales de entrada de un amplificador operacional ideal son cero. En consecuencia, en la figura 6.3-1,

$$i_1 = 0 \quad \text{e} \quad i_2 = 0$$

Los voltajes de nodos en los nodos de entrada de un amplificador operacional son iguales. En consecuencia, en la figura 6.3-1,

$$v_2 = v_1$$

El amplificador operacional ideal es un modelo de un amplificador operacional lineal, de modo que la corriente y el voltaje de salida del amplificador operacional deben satisfacer las restricciones de la ecuación 6.3-1. Si no lo hacen, entonces el amplificador operacional ideal no es un modelo adecuado de un amplificador operacional real. La corriente y el voltaje de salida dependen del circuito en el cual se utiliza el amplificador operacional. Las condiciones del *AO* ideal se resumen en la tabla 6.3-1.

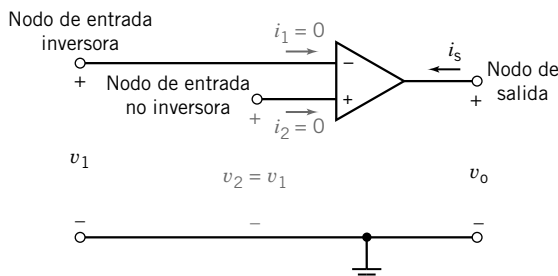


FIGURA 6.3-1 El amplificador operacional ideal.

Tabla 6.3-1 Condiciones operativas para un amplificador operacional ideal

VARIABLE	CONDICIÓN IDEAL
Corriente de entrada de nodo inversora	$i_1 = 0$
Corriente de entrada de nodo no inversora	$i_2 = 0$
Diferencia de voltaje entre el voltaje de nodo inversor $v_1$ y el voltaje del nodo no inversor $v_2$	$v_2 - v_1 = 0$

## EJEMPLO 6.3-1 Amplificador operacional ideal

Considere el circuito que se muestra en la figura 6.3-2a. Suponga que el amplificador operacional es un amplificador operacional  $\mu A741$ . Modele el amplificador operacional como un amplificador operacional ideal. Determine cómo se relaciona el voltaje de salida,  $v_o$ , con el voltaje de entrada,  $v_s$ .

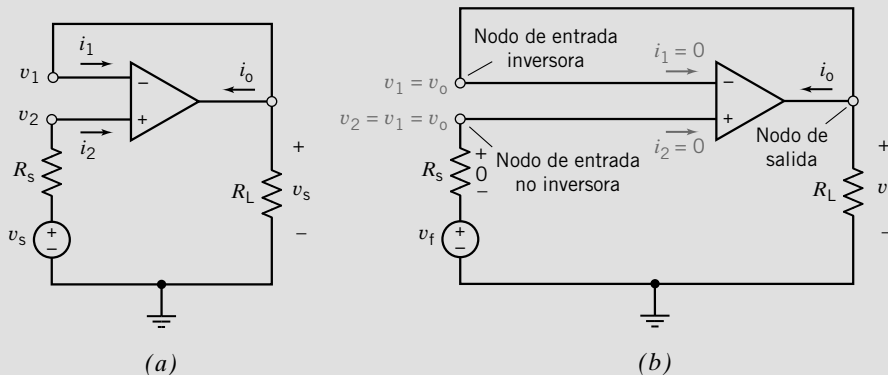


FIGURA 6.3-2 (a) Circuito del amplificador operacional para el ejemplo 6.3-1 y (b) un circuito equivalente que muestra las consecuencias de modelar el amplificador operacional como un amplificador operacional. Los voltajes  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_o$  son voltajes de nodos.

## Solución

La figura 6.3-2b muestra el circuito cuando el amplificador operacional de la figura 6.3-2a está modelado como un amplificador operacional ideal.

1. Los nodos de entrada y de salida inversores del amplificador operacional están conectados por un cortocircuito, de modo que los voltajes de nodo son iguales en estos nodos:

$$v_1 = v_o$$

2. Los voltajes y los nodos inversor y no inversor de un AO ideal son iguales:

$$v_2 = v_1 = v_o$$

3. Las corrientes en los nodos inversor y no inversor de un amplificador operacional son cero, por lo tanto

$$i_1 = 0 \quad \text{e} \quad i_2 = 0$$

4. La corriente en el resistor  $R_s$  es  $i_2 = 0$ , por lo que el voltaje a través de  $R_s$  es 0 V. El voltaje a través de  $R_s$  es  $v_s - v_2 = v_s - v_o$ ; por ende.

$$v_s - v_o = 0$$

o bien

$$v_s = v_o$$

¿Estas soluciones satisfacen los requerimientos de las ecuaciones 6.3-1 y 6.3-2? Se debe calcular la corriente de salida del amplificador operacional. Aplique la KCL en el nodo de salida del amplificador operacional para obtener

$$i_1 + i_o + \frac{v_o}{R_L} = 0$$

Porque  $i_1 = 0$ ,

$$i_o = -\frac{v_o}{R_L}$$

Ahora las ecuaciones 6.3-1 y 6.3-2 requieren que

$$\begin{aligned} |v_s| &\leq 14 \text{ V} \\ \left| \frac{v_s}{R_L} \right| &\leq 2 \text{ mA} \\ \left| \frac{d}{dt} v_s \right| &\leq 500\,000 \frac{\text{V}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Por ejemplo, cuando  $v_s = 10 \text{ V}$  y  $R_L = 20 \text{ k}\Omega$ , entonces

$$\begin{aligned} |v_s| &= 10 \text{ V} < 14 \text{ V} \\ \left| \frac{v_s}{R_L} \right| &= \frac{10 \text{ V}}{20 \text{ k}\Omega} = \frac{1}{2} \text{ mA} < 2 \text{ mA} \\ \left| \frac{d}{dt} v_s \right| &= 0 < 500\,000 \frac{\text{V}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Esto es consistente con el uso del amplificador operacional ideal. Por otra parte, cuando  $v_s = 10 \text{ V}$  y  $R_L = 2 \text{ k}\Omega$ , entonces

$$\frac{v_s}{R_L} = 5 \text{ mA} > 2 \text{ mA}$$

por lo que no es adecuado modelar el  $\mu\text{A}741$  como un amplificador operacional ideal cuando  $v_s = 10 \text{ V}$  y  $R_L = 2 \text{ k}\Omega$ . Cuando  $v_s = 10 \text{ V}$ , requerimos que  $R_L > 5 \text{ k}\Omega$  para satisfacer la ecuación 6.3-1.

## 6.4 ANÁLISIS NODAL DE CIRCUITOS QUE CONTIENEN AMPLIFICADORES OPERATIVOS IDEALES

Es conveniente utilizar ecuaciones nodales para analizar circuitos que contengan amplificadores operacionales ideales.

Hay tres puntos que recordar.

1. Los voltajes de nodo en los nodos de entrada de los amplificadores operacionales ideales son iguales. Entonces, uno de estos dos voltajes de nodos se puede eliminar a partir de las ecuaciones nodales. Por ejemplo, en la figura 6.4-1, los voltajes en los nodos de entrada del amplificador operacional ideal son  $v_1$  y  $v_2$ . Dado que

$$v_1 = v_2$$

se puede eliminar  $v_2$  a partir de las ecuaciones nodales.

- Las corrientes en los conductores de entrada de un amplificador operacional ideal son cero. Estas corrientes están incluidas en las ecuaciones de la KCL en los nodos de entrada del amplificador operacional.
- La corriente de salida del amplificador operacional es no cero. Esta corriente está incluida en las ecuaciones de la KCL en el nodo de salida del amplificador operacional. Aplicar la KCL a este nodo agrega otra incógnita a las ecuaciones nodales. Si no se tiene que determinar la corriente de salida del amplificador operacional, entonces no es necesario aplicar la KCL en el nodo de salida del amplificador operacional.

### EJEMPLO 6.4-1 Amplificador de diferencia

El circuito que se muestra en la figura 6.4-1 se denomina amplificador de diferencia (o de residuo). El amplificador operacional ha sido modelado como un amplificador operacional ideal. Utilice ecuaciones nodales para analizar este circuito y determinar  $v_o$  en términos de los dos voltajes de fuente,  $v_a$  y  $v_b$ .

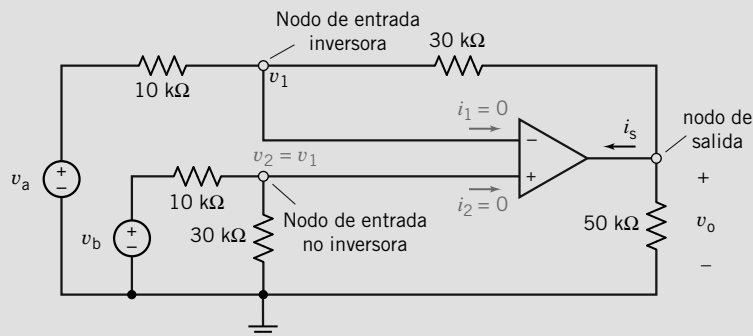


FIGURA 6.4-1 Circuito del ejemplo 6.4-1.

### Solución

La ecuación nodal en el nodo no inversor del amplificador operacional ideal es

$$\frac{v_2}{30\,000} + \frac{v_2 - v_b}{10\,000} + i_2 = 0$$

Dado que  $v_2 = v_1$  e  $i_2 = 0$ , esta ecuación será

$$\frac{v_1}{30\,000} + \frac{v_1 - v_b}{10\,000} = 0$$

Despejando  $v_1$ , tenemos

$$v_1 = 0.75 \times v_b$$

La ecuación nodal en el nodo inversor del amplificador operacional es

$$\frac{v_1 - v_a}{10\,000} + \frac{v_1 - v_o}{30\,000} + i_1 = 0$$

Como  $v_1 = 0.75v_b$  e  $i_1 = 0$ , esta ecuación se convierte

$$\frac{0.75 \times v_b - v_a}{10\,000} + \frac{0.75 \times v_b - v_o}{30\,000} = 0$$

Despejando  $v_o$ , tenemos

$$v_o = 3(v_b - v_a)$$

El amplificador de diferencia recibe su nombre porque el voltaje de salida,  $v_o$ , es una función de la diferencia,  $v_b - v_a$ , de los voltajes de entrada.



### EJEMPLO 6.4-2 Análisis de un amplificador de puente

A continuación, considere el circuito que se muestra en la figura 6.4-2a. Este circuito se denomina amplificador de puente. La parte del circuito que se denomina puente se muestra en la figura 6.4-2b. El amplificador operacional y los resistores  $R_5$  y  $R_6$  se utilizaron para amplificar la salida del puente. El amplificador operacional de la figura 6.4-2a se ha modelado como un amplificador operacional ideal. En consecuencia,  $v_1 = 0$  e  $i_1 = 0$ , como se muestra. Determine el voltaje de salida,  $v_o$ , en términos del voltaje de fuente,  $v_s$ .

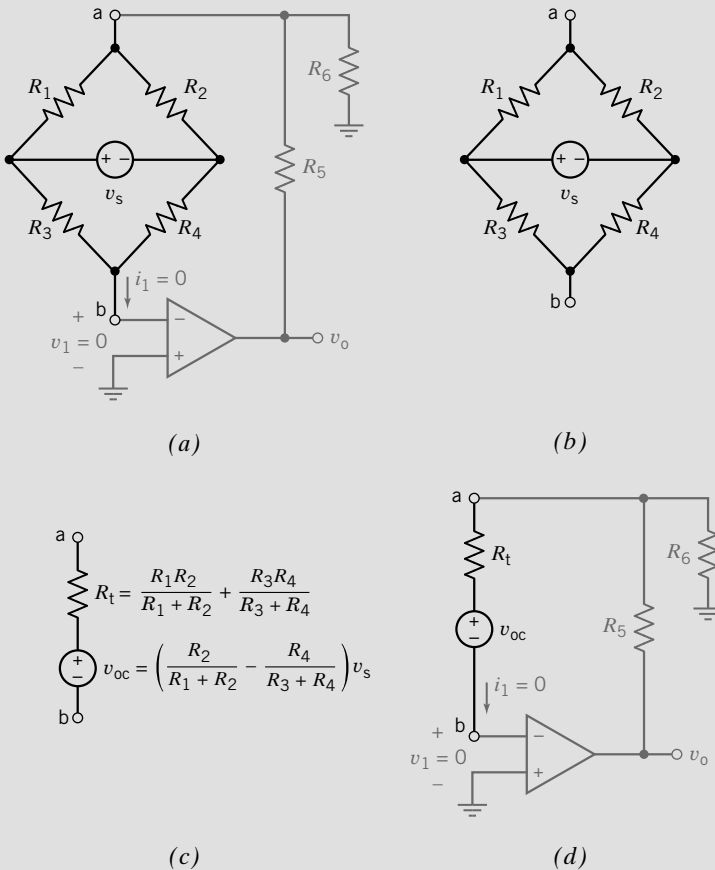


FIGURA 6.4-2 (a) Amplificador de puente, que incluye el circuito de puente. (b) El circuito de puente y (c) su circuito equivalente de Thévenin. (d) El amplificador de puente, que incluye el equivalente de Thévenin del puente.

### Solución

Aquí hay una oportunidad de utilizar el teorema de Thévenin. La figura 6.4-2c muestra el equivalente de Thévenin del circuito de puente. La figura 6.4-2d muestra el amplificador de puente luego que el puente ha sido reemplazado por su equivalente de Thévenin. La figura 6.4-2d es más sencilla que la figura 6.4-2a. Es más fácil escribir y despejar las ecuaciones nodales que representa la figura 6.4-2d que escribir y despejar las ecuaciones nodales que representan la figura 6.4-2a. El teorema de Thévenin nos asegura que el voltaje  $v_o$  de la figura 6.4-2d es el mismo que el voltaje  $v_o$  en la figura 6.4-2a.

Escribamos ecuaciones nodales que representen el circuito en la figura 6.4-2d. Primero, observemos que el voltaje del nodo  $v_a$  resulta de (utilizando KVL)

$$v_a = v_1 + v_{oc} + R_t i_1$$

Como  $v_1 = 0$  e  $i_1 = 0$ ,

$$v_a = v_{oc}$$

Ahora, escribiendo la ecuación nodal en el nodo a

$$i_1 + \frac{v_a - v_o}{R_5} + \frac{v_a}{R_6} = 0$$

Puesto que  $v_a = v_{oc}$  e  $i_1 = 0$ ,

$$\frac{v_{oc} - v_o}{R_5} + \frac{v_{oc}}{R_6} = 0$$

Despejando  $v_o$ , tenemos

$$v_o = \left(1 + \frac{R_5}{R_6}\right)v_{oc} = \left(1 + \frac{R_5}{R_6}\right)\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4}\right)v_o$$

**EJEMPLO 6.4-3** Análisis de un circuito de Amp Op utilizando ecuaciones nodales

Considere el circuito que se muestra en la figura 6.4-3. Encuentre el valor del voltaje medido por el voltímetro.

**Solución**

La figura 6.4-4 muestra el circuito de la figura 6.4-3 luego de reemplazar el voltímetro por un circuito abierto equivalente y etiquetar el voltaje medido por el voltímetro. Analizaremos este circuito escribiendo y despejando ecuaciones nodales. Los nodos del circuito están numerados en la figura 6.4-4. Dejemos que  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$  indiquen los voltajes de nodo en los nodos 1, 2, 3 y 4, respectivamente.

La salida de este circuito es el voltaje medido por el voltímetro. El voltaje de salida se relaciona con los voltajes de nodos por

$$v_m = v_4 - 0 = v_4$$

Las entradas de este circuito son el voltaje de la fuente de voltaje y las corrientes de las fuentes de corriente. El voltaje de la fuente de voltaje está relacionado con los voltajes de nodo en los nodos de la fuente de voltaje por

$$0 - v_3 = 2.75 \Rightarrow v_3 = -2.75 \text{ V}$$

Aplice la KCL al nodo 2 para obtener

$$\frac{v_3 - v_2}{30\,000} = 0 + 60 \times 10^{-6} \Rightarrow v_3 - v_2 = 1.8 \text{ V}$$

Utilizar  $v_3 = -2.75 \text{ V}$  da por resultado

$$v_2 = -4.55 \text{ V}$$

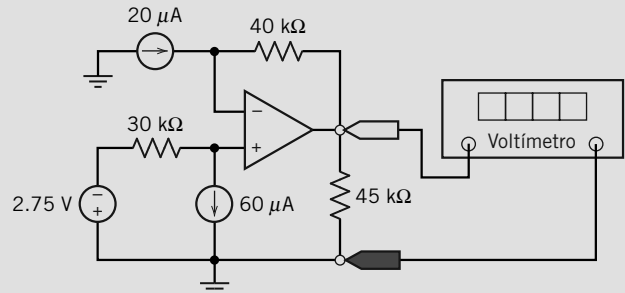


FIGURA 6.4-3 El circuito considerado en el ejemplo 6.4-3.

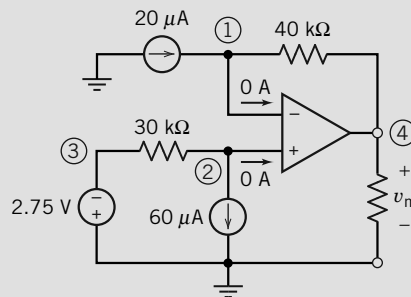


FIGURA 6.4-4 El circuito de la figura 6.4-3 luego de reemplazar el voltímetro por un circuito abierto y etiquetar los nodos. (Los números circulos son los números de nodos.)

La entrada no inversa del AMP OP está conectada al nodo 2. El voltaje del nodo en la entrada inversa de un AMP OP ideal es igual al voltaje de nodo en la entrada no inversa. La entrada inversa de un AMP OP está conectada al nodo 1. En consecuencia,

$$v_1 = v_2 = -4.55 \text{ V}$$

Aplique la KCL al nodo 1 para obtener

$$20 \times 10^{-6} = 0 + \frac{v_1 - v_4}{40\,000} \Rightarrow v_1 - v_4 = 0.8 \text{ V}$$

Utilizar  $v_m = v_4$  y  $v_1 = -4.55$  da el valor del voltaje medido por el voltímetro para que

$$v_m = -4.55 - 0.8 = -5.35 \text{ V}$$

### EJEMPLO 6.4-4 Análisis de un circuito de Amp Op

Considere el circuito que se muestra en la figura 6.4-5. Encuentre el valor del voltaje medido por el voltímetro.

#### Solución

La figura 6.4-6 muestra el circuito de la figura 6.4-5 luego de reemplazar el voltímetro por un circuito abierto equivalente y etiquetar el voltaje medido por el voltímetro. Analizaremos este circuito escribiendo y despejando ecuaciones nodales. Los nodos del circuito están numerados en la figura 6.4-6. Dejemos que  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  y  $v_4$  indiquen los voltajes de nodo en los nodos 1, 2, 3 y 4, respectivamente.

La entrada a este circuito es el voltaje de la fuente de voltaje. La entrada se relaciona con los voltajes de nodo en los nodos de la fuente de voltaje por

$$0 - v_1 = 3.35 \Rightarrow v_1 = -3.35 \text{ V}$$

La salida de este circuito es el voltaje medido por el voltímetro. El voltaje de salida está relacionado con los voltajes de nodo por

$$v_m = v_4 - 0 = v_4$$

La entrada no inversa del AMP OP está conectada al nodo de referencia. El voltaje de nodos en la entrada inversa de un AMP OP ideal es igual al voltaje de nodos en la entrada no inversa. La entrada inversa del AMP OP está conectada al nodo 2. En consecuencia,

$$v_2 = 0 \text{ V}$$

Aplique la KCL al nodo 2 para obtener

$$\frac{v_1 - v_2}{20\,000} = 0 + \frac{v_2 - v_3}{40\,000} \Rightarrow v_3 = -2v_1 + 3v_2 = -2v_1$$

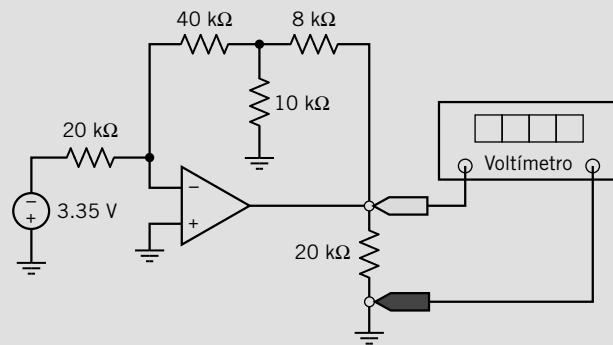


FIGURA 6.4-5 El circuito considerado en el ejemplo 6.4-4.

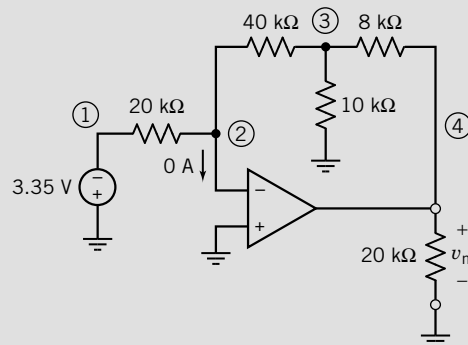


FIGURA 6.4-6 El circuito de la figura 6.4-5 luego de reemplazar el voltímetro por un circuito abierto y etiquetar los nodos. (Los números circulos son los números de nodos.)

Aplique la KCL al nodo 3 para obtener

$$\frac{v_2 - v_3}{40\,000} = \frac{v_3}{10\,000} + \frac{v_3 - v_4}{8\,000} \Rightarrow 5v_4 = -v_2 + 10v_3 = 10v_3$$

Combinando estas ecuaciones resulta

$$v_4 = 2v_3 = -4v_1$$

Utilizar  $v_m = v_4$  y  $v_1 = -3.35$  da el valor del voltaje medido por el voltímetro para que

$$v_m = -4(-3.35) = 13.4\text{ V}$$

## 6.5 DISEÑO MEDIANTE EL USO DE AMPLIFICADORES OPERACIONALES

Una de las primeras aplicaciones de los amplificadores operacionales fue construir circuitos que desempeñaban operaciones matemáticas. En realidad, el amplificador operacional toma su nombre de su importante aplicación. Muchos de los circuitos de amplificadores operacionales que desempeñan operaciones matemáticas se utilizan con tanta frecuencia que incluso se les ha dado nombre. Estos nombres son parte de un vocabulario de la ingeniería eléctrica. La figura 6.5-1 muestra varios circuitos estándar de amplificadores operacionales. Los siguientes ejemplos muestran cómo utilizar la figura 6.5-1 para diseñar circuitos sencillos de amplificadores operacionales.

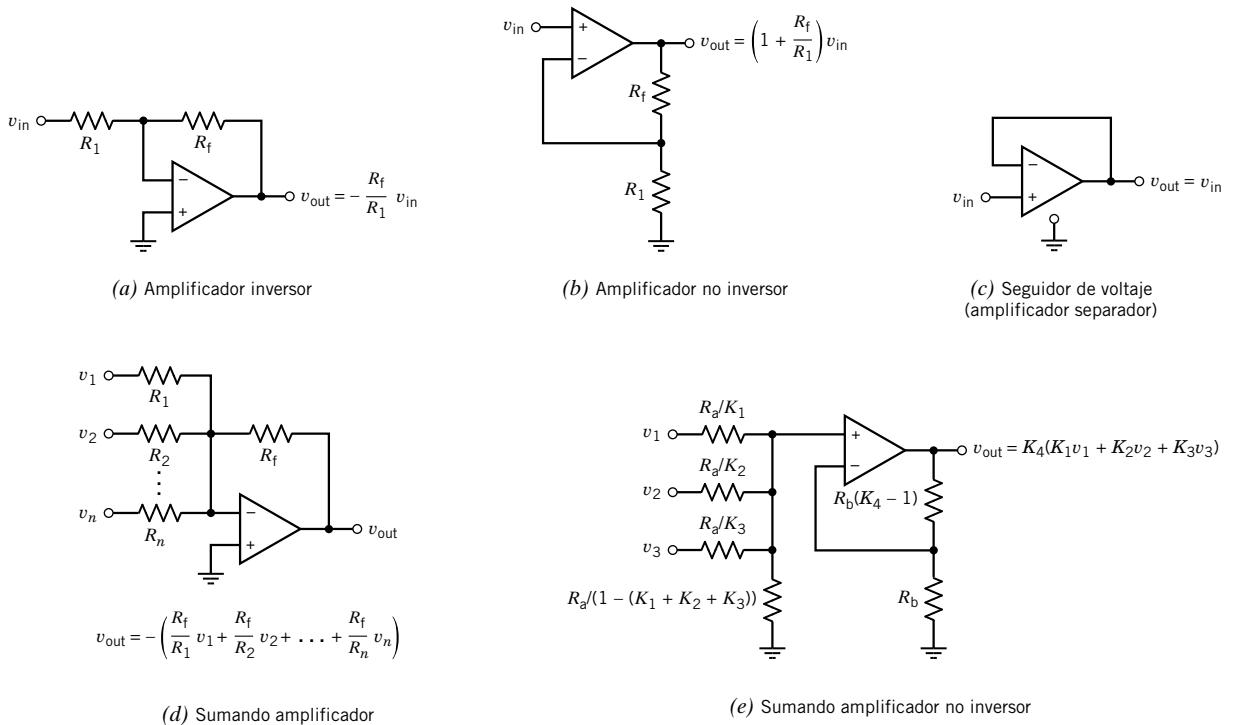
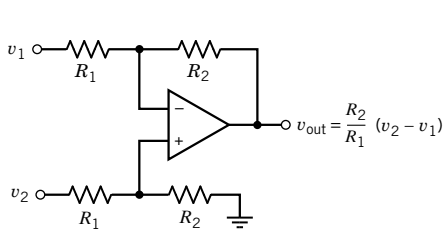
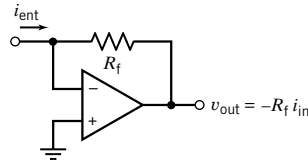


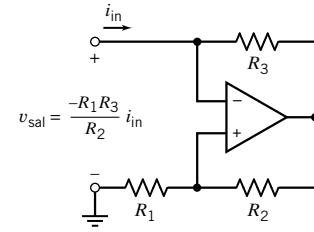
FIGURA 6.5-1 Breve catálogo de circuitos de amplificador operacional. Observe que los voltajes de nodo están en referencia con el nodo de tierra.



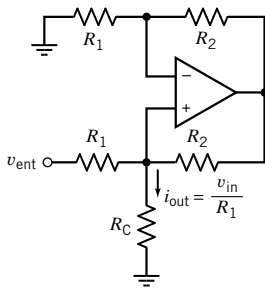
(f) Amplificador de diferencia



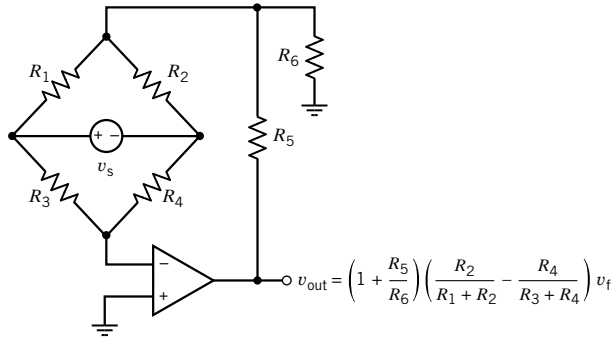
(g) Convertidor de corriente a voltaje



(h) Convertidor de resistencia negativa



(i) Fuente de corriente de voltaje controlado (VCCS)



(j) Amplificador de puente

FIGURA 6.5-1 (continuación)

### EJEMPLO 6.5-1 Prevención de la carga mediante el uso de un seguidor de voltaje

Este ejemplo ilustra el uso de un seguidor de voltaje para prevenir la carga. El seguidor de voltaje se muestra en la figura 6.5-1c. La carga ocurre cuando dos circuitos están conectados. Considere la figura 6.5-2. En la figura 6.5-2a, la salida del circuito 1 es el voltaje  $v_a$ . En la figura 6.5-2b, el circuito 2 está conectado al circuito 1. La salida del circuito 1 se usa como la entrada del circuito 2. Por desgracia, conectar el circuito 2 al circuito 1 puede modificar la salida del circuito 1. A esto se le llama *carga*. Si nos referimos nuevamente a la figura 6.5-2, se dice que el circuito 2 carga al circuito 1 si  $v_b \neq v_a$ . La corriente  $i_b$  se denomina la corriente de carga. Se requiere que el circuito 1 proporcione esta corriente en la figura 6.5-2b pero no en la figura 6.5-2a. Ésta es la causa de la carga. La corriente de carga se puede eliminar mediante un seguidor de voltaje como se muestra en la figura 6.5-2c. El seguidor de voltaje copia el voltaje  $v_a$  desde la salida del circuito 1 hasta la entrada del circuito 2 sin alterar el circuito 1.

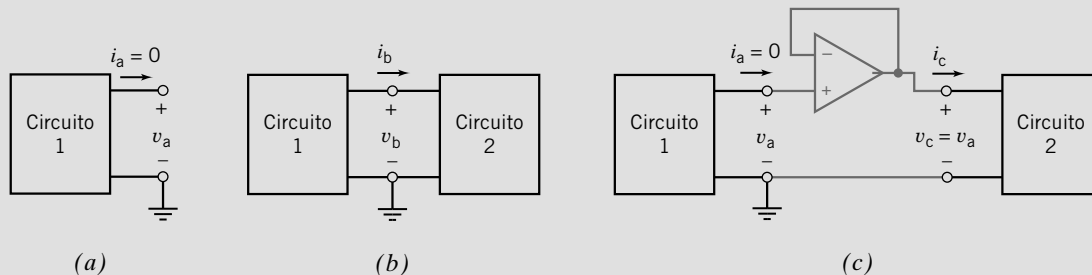
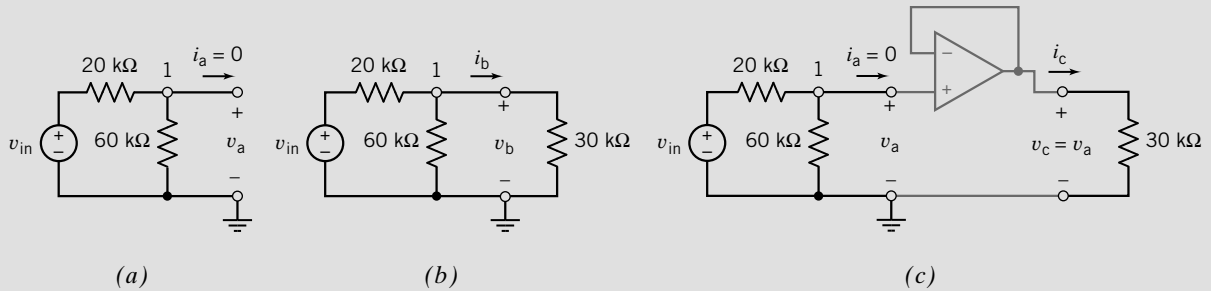


FIGURA 6.5-2 El circuito 1 (a) antes de y (b) después de haberse conectado el circuito 2. (c) Prevenir la carga, utilizando un seguidor de voltaje.



**FIGURA 6.5-3** Un divisor de voltaje (a) antes, y (b) después de que se ha agregado un resistor de 30 kΩ. (c) Se agrega un seguidor de voltaje para prevenir la carga.

### Solución

Como un ejemplo específico, considere la figura 6.5-3. El divisor de voltaje que se muestra en la figura 6.5-3a se puede analizar mediante la escritura de una ecuación nodal en el nodo 1:

$$\frac{v_a - v_{in}}{20\,000} + \frac{v_a}{60\,000} = 0$$

Despejando  $v_a$ , tenemos

$$v_a = \frac{3}{4}v_{in}$$

En la figura 6.5-3b, un resistor está conectado a través de la salida del divisor de voltaje. Este circuito se puede analizar escribiendo una ecuación nodal en el nodo 1:

$$\frac{v_b - v_{in}}{20\,000} + \frac{v_b}{60\,000} + \frac{v_b}{30\,000} = 0$$

Despejando  $v_b$ , tenemos

$$v_b = \frac{1}{2}v_{in}$$

Dado que  $v_b \neq v_a$ , conectar directamente el resistor al divisor de voltaje carga al divisor de voltaje. Esta carga la causa la corriente requerida por el resistor de 30-kΩ. Sin el seguidor de voltaje, el divisor de voltaje debe evitar que esto ocurra.

En la figura 6.5-3c, se utiliza un seguidor de voltaje para conectar el resistor de 30-kΩ a la salida del divisor de voltaje. Una vez más, el circuito se puede analizar mediante la escritura de una ecuación nodal en el nodo 1:

$$\frac{v_c - v_{in}}{20\,000} + \frac{v_c}{60\,000} = 0$$

Despejando  $v_c$ , tenemos

$$v_c = \frac{3}{4}v_{in}$$

como  $v_c = v_a$ , la carga se impide cuando se utiliza el seguidor de voltaje para conectar el resistor al divisor de voltaje. El seguidor de voltaje, no el divisor de voltaje, proporciona la corriente requerida por el resistor de 30-kΩ.

### EJEMPLO 6.5-2 Diseño de un amplificador

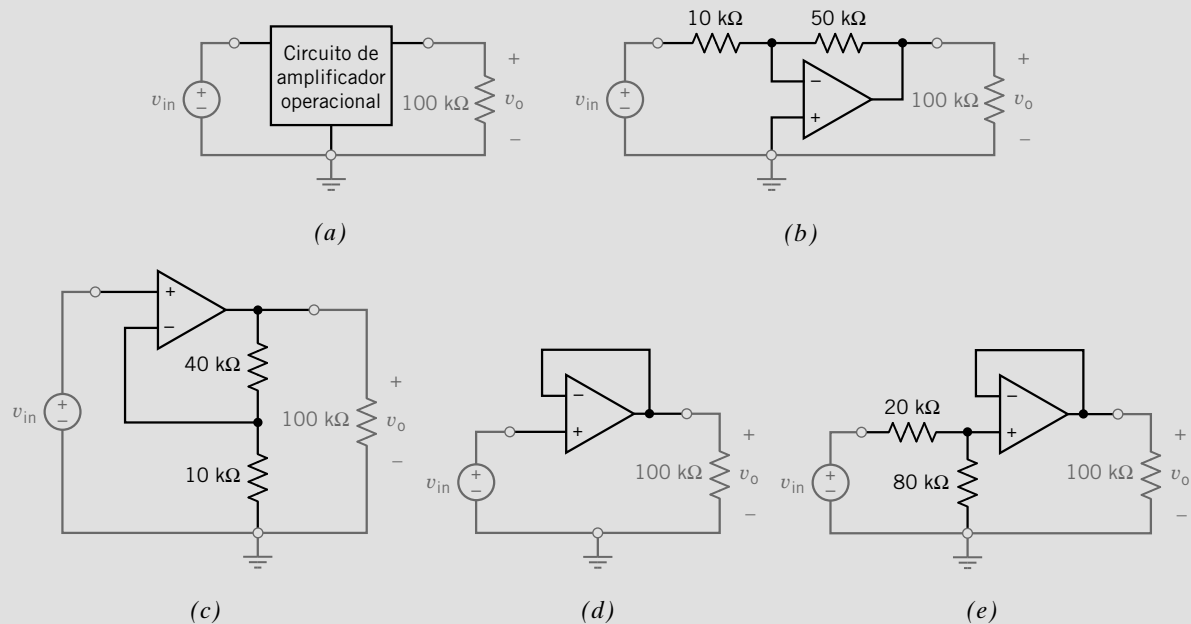
Una aplicación común de los amplificadores operacionales es escalar un voltaje, es decir, multiplicar un voltaje por una constante,  $K$ , de modo que

$$v_o = K v_{in}$$

Esta situación se ilustra en la figura 6.5-4a. El voltaje de entrada,  $v_{in}$ , lo proporciona una fuente de voltaje ideal. El voltaje de salida,  $v_o$ , es el voltaje del elemento de un resistor de  $100\text{-k}\Omega$ .

Los circuitos que efectúan esta operación se suelen denominar amplificadores. A la constante  $K$  se le llama ganancia del amplificador.

El valor requerido de la constante  $K$  determinará cuál de los circuitos se elige de la figura 6.5-1. Hay cuatro casos a considerar:  $K < 0$ ,  $K > 1$ ,  $K = 1$  y  $0 < K < 1$ .



**FIGURA 6.5-4** (a) Se requiere un amplificador para que haga que  $v_o = K v_{in}$ . La elección del circuito de amplificador depende del valor de la ganancia  $K$ . Se muestran cuatro casos: (b)  $K = -5$ , (c)  $K = 5$ , (d)  $K = 1$  y (e)  $K = 0.8$ .

### Solución

Como los valores del resistor son positivos, la ganancia del amplificador inversor, que se muestra en la figura 6.5-1a, es negativa. Por consiguiente, cuando se requiere que  $K < 0$ , se utiliza un amplificador inversor. Por ejemplo, suponga que requiere  $K = -5$ . De la figura 6.5-1a,

$$-5 = -\frac{R_f}{R_1}$$

de modo que

$$R_f = 5R_1$$

Como regla de oro, una buena idea es elegir resistores en circuitos de amplificadores operacionales que tengan, de ser posible, valores entre  $5\text{ k}\Omega$  y  $500\text{ k}\Omega$ . Elegir

$$R_1 = 10\text{ k}\Omega$$

da por resultado

$$R_f = 50\text{ k}\Omega$$

El circuito resultante se muestra en la figura 6.5-4b.

A continuación, suponga que requerimos que  $K = 5$ . El amplificador no inversor que se muestra en la figura 6.5-1b, se utiliza para obtener ganancias mayores que 1. A partir de la figura 6.5-1b,

$$5 = 1 + \frac{R_f}{R_1}$$

de modo que

$$R_f = 4R_1$$

Elegir  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$  da  $R_f = 40 \text{ k}\Omega$ . El circuito resultante se muestra en la figura 6.5-4c.

Considere utilizar el amplificador no inversor de la figura 6.5-1b para obtener una ganancia de  $K = 1$ . Desde la figura 6.5-1b,

$$1 = 1 + \frac{R_f}{R_1}$$

de modo que

$$\frac{R_f}{R_1} = 0$$

Ésta se puede completar reemplazando  $R_f$  por un cortocircuito ( $R_f = 0$ ), o bien reemplazando  $R_1$  por un circuito abierto ( $R_1 = \infty$ ) o ambos. Si se hacen ambos reemplazos, esto convierte el amplificador no inversor en un seguidor de voltaje. La ganancia del seguidor de voltaje es 1. En la figura 6.5-4d se utiliza un seguidor de voltaje para el caso  $K = 1$ .

En la figura 6.5-1 no hay amplificador que tenga una ganancia entre 0 y 1. Este tipo de circuito se obtiene utilizando un divisor de voltaje a una con un seguidor de voltaje. Suponga que requiere que  $K = 0.8$ . Primero, diseñe un divisor de voltaje que tenga una atenuación igual a  $K$ :

$$0.8 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

de modo que

$$R_2 = 4 \times R_1$$

Elegir  $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$  da  $R_2 = 80 \text{ k}\Omega$ . Agregar un seguidor de voltaje da como resultado el circuito que se muestra en la figura 6.5-4e.

### EJEMPLO 6.5-3 Diseño de un sumando amplificador no inversor

Diseñe un circuito que tenga una salida,  $v_o$ , y tres entradas,  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ . La salida debe estar relacionada con las entradas por

$$v_o = 2v_1 + 3v_2 + 4v_3$$

Además, las entradas están restringidas a tener valores entre  $-1 \text{ V}$  y  $1 \text{ V}$ , es decir,

$$|v_i| \leq 1 \text{ V } i = 1, 2, 3$$

Considere el uso de un amplificador operacional que tenga  $i_{\text{sat}} = 2 \text{ mA}$  y  $v_{\text{sat}} = 15 \text{ V}$  y diseñe el circuito.

#### Solución

El circuito requerido debe multiplicar cada entrada por un número positivo individual y sumar los resultados. El recapitulador no inversor que se muestra en la figura 6.5-1e puede hacer estas operaciones. Este circuito está representado por seis parámetros,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_4$ ,  $R_a$  y  $R_b$ . El diseño del recapitulador no inversor importa para elegir valores para estos seis parámetros. Observe que se requiere que  $K_1 + K_2 + K_3 < 1$  para garantizar que todos los resistores tengan valores positivos. Tome  $K_4 = 10$  (un valor conveniente es justamente un poco más grande  $2 + 3 + 4 = 9$ ). Entonces,

$$v_o = 2v_1 + 3v_2 + 4v_3 = 10(0.2v_1 + 0.3v_2 + 0.4v_3)$$

Es decir,  $K_4 = 10$ ,  $K_1 = 0.2$ ,  $K_2 = 0.3$  y  $K_3 = 0.4$ . La figura 6.5-1e no es de gran ayuda en la captación de valores de  $R_a$  y  $R_b$ . Haga la prueba con  $R_a = R_b = 100 \Omega$ . Entonces,

$$(K_4 - 1)R_b = (10 - 1)100 = 900 \Omega.$$



La figura 6.5-5 muestra el circuito resultante. Es necesario verificar este circuito para asegurar que satisface las especificaciones. Escribiendo las ecuaciones nodales

$$\frac{v_a - v_1}{500} + \frac{v_a - v_2}{333} + \frac{v_a - v_3}{250} + \frac{v_a}{1\,000} = 0$$

$$-\frac{v_o - v_a}{900} + \frac{v_a}{100} = 0$$

y despejando estas ecuaciones resulta

$$v_o = 2v_1 + 3v_2 + 4v_3 \quad \text{y} \quad v_a = \frac{v_o}{10}$$

La corriente de salida del amplificador está dada por

$$i_{oa} = \frac{v_a - v_o}{900} = -\frac{v_o}{1\,000} \quad (6.5-1)$$

¿Qué tan grande puede ser el voltaje de salida? Sabemos que

$$|v_o| = |2v_1 + 3v_2 + 4v_3|$$

Por lo tanto  $|v_o| \leq 2|v_1| + 3|v_2| + 4|v_3| \leq 9\text{ V}$

El voltaje de salida del amplificador operacional siempre será menor que  $v_{sat}$ . Eso es bueno. ¿Y ahora qué hay de la corriente de salida? Observe que  $|v_o| \leq 9\text{ V}$ . De la ecuación 6.5-1,

$$|i_{oa}| = \left| \frac{-v_o}{1\,000\ \Omega} \right| \leq \left| \frac{-9\text{ V}}{1\,000\ \Omega} \right| = 9\text{ mA}$$

La corriente de salida del amplificador operacional  $i_{sat} = 2\text{ mA}$ . Esto no se permite. Incrementar  $R_b$  reducirá  $i_o$ . Haga la prueba con  $R_b = 1\,000$ . Entonces,

$$(K_4 - 1)R_b = (10 - 1)1\,000 = 9\,000\ \Omega$$

Esto produce el circuito que se muestra en la figura 6.5-6. Incrementar  $R_a$  y  $R_b$  no modifica el voltaje de salida del amplificador operacional. Como antes,

$$v_o = 2v_1 + 3v_2 + 4v_3$$

y  $|v_o| \leq 2|v_1| + 3|v_2| + 4|v_3| \leq 9\text{ V}$

Incrementar  $R_b$  reduce la corriente de salida del amplificador operacional. Ahora,

$$|i_{oa}| \leq \left| \frac{-9\text{ V}}{10\,000\ \Omega} \right| = 0.9\text{ mA}$$

por lo tanto,  $|i_{oa}| < 2\text{ mA}$  y  $|v_o| < 15\text{ V}$ , como se requería.

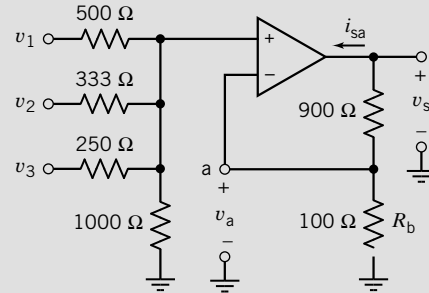


FIGURA 6.5-5 El sumando amplificador propuesto no inversor.

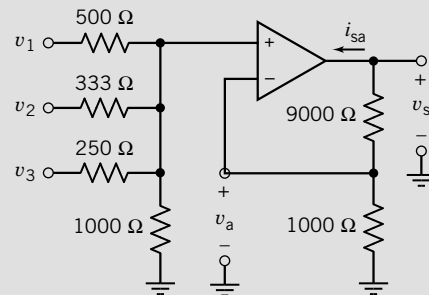


FIGURA 6.5-6 Diseño final del sumando amplificador no inversor.

## 6.6 CIRCUITOS DE AMPLIFICADORES OPERACIONALES Y ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES

Esta sección describe un procedimiento para el diseño de circuitos de amplificadores operacionales que implementen ecuaciones algebraicas lineales. Algunos de los voltajes de nodos del circuito del amplificador operacional representarán las variables en la ecuación algebraica. Por ejemplo, la ecuación

$$z = 4x - 5y + 2 \quad (6.6-1)$$

estará representada por un circuito de amplificador operacional que tenga voltajes de nodos  $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$  que están relacionados con la ecuación

$$v_z = 4v_x - 5v_y + 2 \quad (6.6-2)$$

Un voltaje o una corriente que se utilicen para representar algo se denomina una señal.

Ese “algo” podría ser una temperatura, una posición, una fuerza o algo más. En este caso,  $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$  son señales que representan las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

La ecuación 6.6-1 muestra cómo se puede obtener el valor de  $z$  a partir de los valores de  $x$  y  $y$ . Del mismo modo, la ecuación 6.6-2 muestra cómo se puede obtener el valor de  $v_z$  a partir de los valores de  $v_x$  y  $v_y$ .

El procedimiento de diseño tiene dos pasos. Primero representamos la ecuación por un diagrama llamado bloque de diagrama. En segundo lugar, implementamos cada bloque del diagrama de bloques como un circuito de amplificador operacional.

Empezaremos con la ecuación algebraica. La ecuación 6.6-1 indica que el valor de la variable  $z$  se puede calcular a partir de los valores de las variables  $x$  y  $y$  utilizando las operaciones de suma, resta y multiplicación por un multiplicador constante. La ecuación 6.6-1 se puede reescribir como

$$z = 4x + (-5)y + 2 \quad (6.6-3)$$

La ecuación 6.6-3 indica que  $z$  se puede obtener a partir de  $x$  y  $y$  utilizando solamente la suma y la multiplicación a pesar de que ahora uno de los multiplicadores es negativo.

La figura 6.6-1 muestra representaciones simbólicas de operaciones de suma y multiplicación por una constante. En la figura 6.6-1a, la operación de la multiplicación por un multiplicador constante está representada por un rectángulo junto con dos flechas, una de las cuales apunta al rectángulo y la otra hacia fuera. La flecha que apunta al rectángulo está etiquetada por una variable que representa la entrada de la operación, es decir, la variable que se ha de multiplicar por la constante. Del mismo modo, la flecha que apunta hacia fuera del rectángulo está etiquetada por una variable que representa la salida, o resultado, de la operación. El rectángulo mismo está etiquetado con el valor del multiplicador. El símbolo que se muestra en la figura 6.6-1b representa la operación de suma. El rectángulo está etiquetado con el signo más. Las flechas que apuntan al rectángulo están etiquetadas por las variables que se deben agregar. Hay tantas de estas flechas como variables que se deben agregar. Una flecha apunta hacia fuera del rectángulo. Esta flecha está etiquetada por la variable que representa la suma.

Los rectángulos que representan la suma y la multiplicación por una constante se llaman bloques. Un diagrama compuesto por tales bloques se denomina diagrama de bloque. La figura 6.6-2 representa la ecuación 6.6-3 como un diagrama de bloque. En el diagrama de bloque cada bloque corresponde a una operación en la ecuación. Observe, en particular, que el producto  $4x$  tiene dos roles en la ecuación 6.6-3. El producto  $4x$  es tanto la salida de una operación, multiplicando  $x$  por la constante 4, y una de las entradas a otra operación, sumando  $4x$  a  $-5y$  y 2 para obtener  $z$ . Esta observación se utiliza para construir el diagrama de bloque. El producto  $4x$  es la salida de un bloque y la entrada a otro. En realidad, esta observación explica por qué la salida del bloque que multiplica  $x$  por 4 está conectada a una entrada del bloque que suma  $4x$  a  $-5y$  y 2.

A continuación, considere diseñar un circuito de amplificador operacional para implementar un diagrama de bloque en la figura 6.6-2. Los bloques que representan la multiplicación por un multiplicador constante se pueden implementar utilizando amplificadores tanto inversores como no inversores, dependiendo del signo del multiplicador. Para ello diseñe el amplificador de tal modo que tenga una ganancia que sea igual al multiplicador del bloque correspondiente. (Los amplificadores no inversores se pueden usar cuando al constante sea tanto positiva como mayor que 1. El ejemplo 6.5-2 muestra que un circuito que consta de un divisor de voltaje y un seguidor de voltaje se puede utilizar cuando la constante es positiva y menor que 1.)

Las figuras 6.6-3b, d, f muestran circuitos de amplificador operacional que implementan los bloques que se muestran en las figuras 6.6-3a, c, e respectivamente. El bloque de la figura 6.6-3a requiere la multiplicación por 4, un constante positivo. La figura 6.6-3b muestra el circuito de amplificador

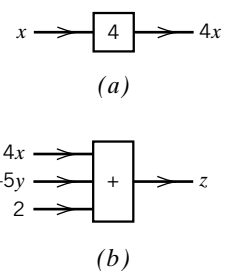


FIGURA 6.6.1 Representaciones simbólicas de (a) multiplicación por una constante y (b) la suma.

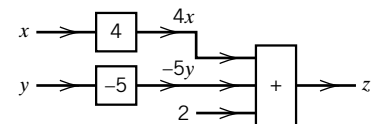


FIGURA 6.6-2 Diagrama de bloque que representa la ecuación 6.6-3.

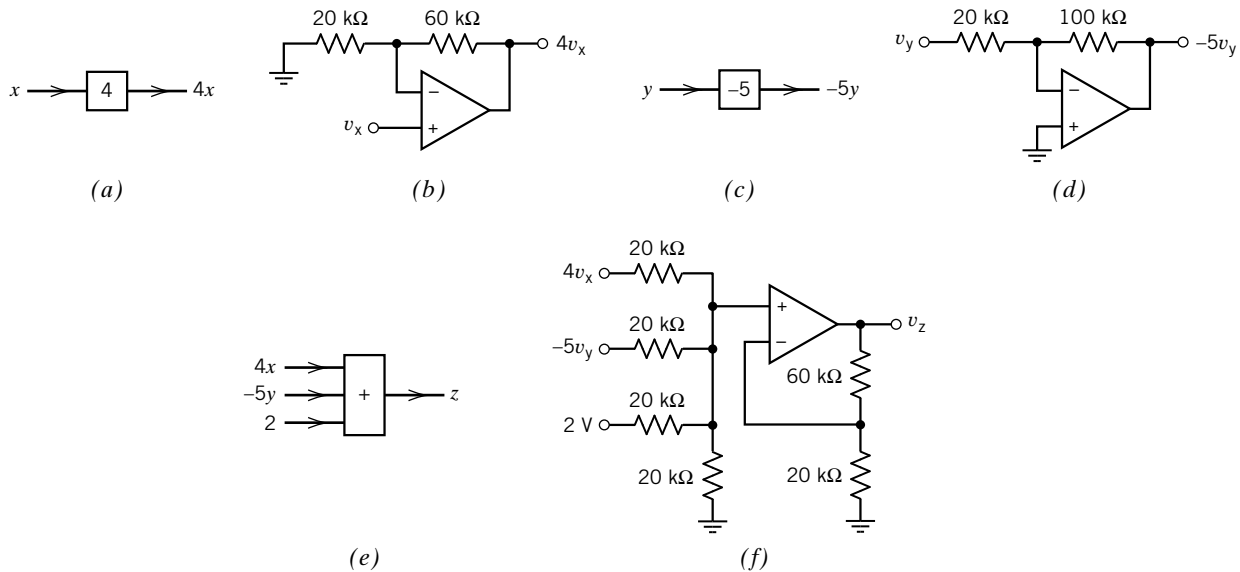


FIGURA 6.6-3 (a), (c) y (e) muestran los bloques de la figura 6.6-2, en tanto que (b), (d) y (f) muestran los circuitos del amplificador operacional correspondiente.

operacional correspondiente, un amplificador no inversor que tiene una ganancia igual a 4. Este amplificador no inversor está diseñado en referencia a la figura 6.5-1b y establece que

$$R_1 = 20 \text{ k}\Omega \quad \text{y} \quad R_f = 3R_1 = 60 \text{ k}\Omega$$

(Una útil regla de oro sugiere la selección de resistores para circuitos de amplificador operacional que tengan resistencias en un rango de  $5 \text{ k}\Omega$  a  $500 \text{ k}\Omega$ .)

En la figura 6.6-3b, la notación  $v_x = x$  indica que  $v_x$  es un voltaje que representa a  $x$ . Un voltaje o corriente que se utiliza para representar algo se denomina señal, por lo que  $v_x$  es la señal que representa a  $x$ .

El bloque en la figura 6.6-3c requiere la multiplicación por una constante negativa,  $-5$ . La figura 6.6-3d muestra el circuito del amplificador operacional correspondiente, un amplificador inversor que tiene una ganancia igual a  $-5$ . Diseñe este amplificador inversor refiriéndose a la figura 6.5-1a y estableciendo

$$R_1 = 20 \text{ k}\Omega \quad \text{y} \quad R_f = 5R_1 = 100 \text{ k}\Omega$$

El bloque en la figura 6.6-3e requiere la suma de los tres términos. La figura 6.6-3f muestra el circuito de amplificador operacional correspondiente, un recapitulador no inversor. Diseñe el recapitulador no inversor refiriéndose a la figura 6.6-4 y estableciendo que

$$R_1 = 20 \text{ k}\Omega, \quad n = 3 \quad \text{y} \quad nR = 3(20 \text{ 000}) = 60 \text{ k}\Omega$$

(El sumador no inversor es un caso especial de amplificador recapitulador no inversor, el cual se muestra en la figura 6.5-1e. Tome  $K_1 = K_2 = K_3 = 1/(n + 1)$ ,  $K_4 = n$ ,  $R_b = R$  y  $R_a = R/(n + 1)$  en la figura 6.5-1e para tener el circuito que se muestra en la figura 6.6-4.)

La figura 6.6-5 muestra el circuito que se obtuvo al reemplazar cada bloque de la figura 6.6-2 por el circuito de amplificador operacional correspondiente de la figura 6.6-3. El circuito de la figura 6.6-5 implementa la ecuación 6.6-3, pero es posible mejorar este circuito.

La entrada constante al sumador se ha implementado utilizando una fuente de voltaje de  $2 \text{ V}$ . Aunque correcta, puede llegar a ser más costosa de lo necesario. Las fuentes de voltaje son dispositivos relativamente caros, de manera considerable más costosos que los resistores o los amplificadores operacionales. Podemos reducir el costo de este circuito utilizando una fuente de voltaje que ya hayamos instalado en vez de crear una nueva. Recuerde que necesitamos alimentadores de potencia para polarizar el amplificador operacional. Suponga que se utilizaron fuentes de voltaje de  $\pm 15 \text{ V}$

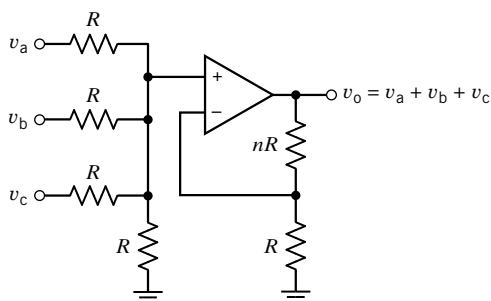


FIGURA 6.6-4 El sumador no inversor. La integral  $n$  indica el número de entradas al circuito.

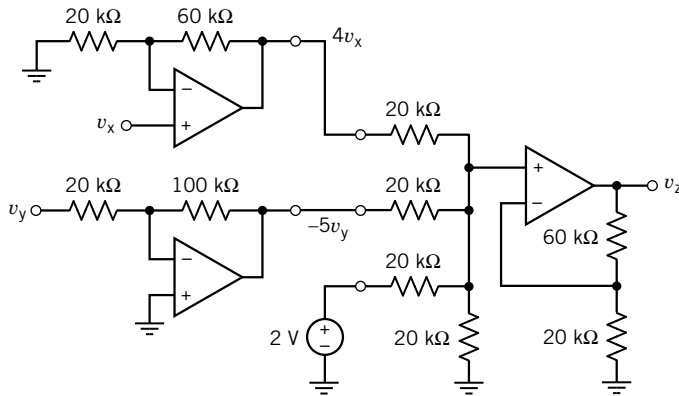


FIGURA 6.6-5 Un circuito de amplificador operacional que implementa la ecuación 6.6-2.

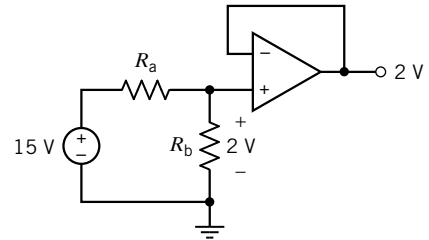


FIGURA 6.6-6 Uso del suministrador de potencia del amplificador operacional para obtener una señal de 2 V.

para polarizar el amplificador operacional. Podemos reducir costos utilizando una fuente de voltaje de  $\pm 15$  V junto con un divisor de voltaje y un seguidor de voltaje para obtener la entrada de 2 V para el de resumen. La figura 6.6-6 ilustra la situación. El divisor de voltaje produce un voltaje constante igual a 2 V. El seguidor de voltaje impide la carga (vea ejemplo 6.5-1).

Aplicar la regla de la división de voltaje en la figura 6.6-6 requiere que

$$\frac{R_b}{R_a + R_b} = \frac{2}{15} = 0.133 \Rightarrow R_a = 6.5 R_b$$

La solución a esta ecuación no es única. Una solución es  $R_a = 130$  k $\Omega$  y  $R_b = 20$  k $\Omega$ . La figura 6.6-7 muestra el circuito del amplificador operacional mejorado. Podemos verificar, quizá, mediante la escritura de ecuaciones nodales que

$$v_z = 4v_x - 5v_y + 2$$

Se debe considerar la saturación de voltaje de los amplificadores operacionales cuando se defina la relación entre las señales  $v_x$ ,  $v_y$  y las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$ . La salida de voltaje de un amplificador está restringido por  $|v_o| \leq v_{sat}$ . Por lo común,  $v_{sat}$  es aproximadamente igual a la magnitud de los voltajes de

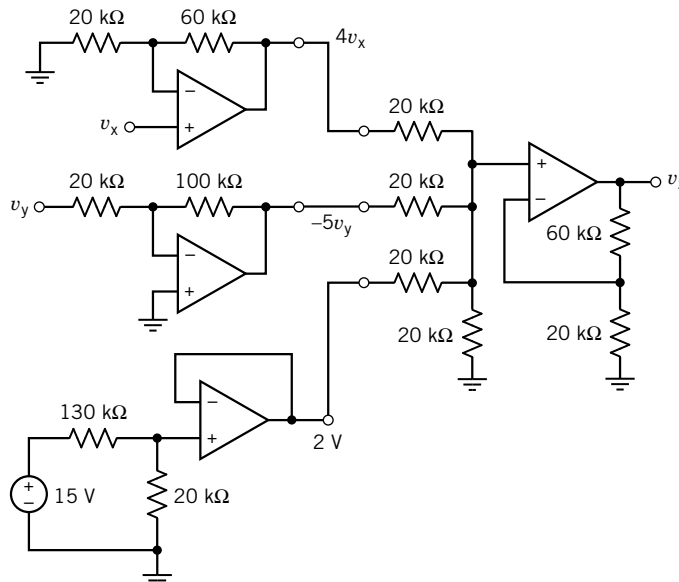


FIGURA 6.6-7 Un circuito del amplificador operacional mejorado que implementa la ecuación 6.6-2.

los suministradores de potencia que se usaron para polarizar el amplificador operacional. Es decir,  $v_{\text{sat}}$  es aproximadamente de 15 V cuando se usaron fuentes de voltaje de  $\pm 15$  V para polarizar el amplificador operacional. En la figura 6.6-7,  $v_z$ ,  $4v_x$  y  $-5v_y$ , cada uno son voltajes de salida de uno de los amplificadores operacionales. En consecuencia,

$$|v_x| \leq \frac{v_{\text{sat}}}{4} \approx \frac{15}{4} = 3.75 \text{ V}, \quad |v_y| \leq \frac{v_{\text{sat}}}{5} \approx \frac{15}{5} = 3 \text{ V} \quad \text{y} \quad |v_z| \leq v_{\text{sat}} \approx 15 \text{ V} \quad (6.6-4)$$

La codificación sencilla de  $x$ ,  $y$  y  $z$  por  $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$  es

$$v_x = x, \quad v_y = y \quad \text{y} \quad v_z = z \quad (6.6-5)$$

Esto es conveniente porque, por ejemplo,  $v_z = 4.5$  V indica que  $z = 4.5$ . Sin embargo, utilizando la ecuación 6.6-3 para reemplazar  $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$  en la ecuación 6.6-4 con  $x$ ,  $y$  y  $z$  da

$$|x| \leq 3.75, \quad |y| \leq 3.0 \quad \text{y} \quad |z| \leq 15$$

Estas condiciones deben ser muy restrictivas, considere definir la relación entre las señales  $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$  y las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$  de manera diferente. Por ejemplo, suponga

$$v_x = \frac{x}{10}, \quad v_y = \frac{y}{10} \quad \text{y} \quad v_z = \frac{z}{10} \quad (6.6-6)$$

Ahora necesitamos multiplicar el valor de  $v_z$  por 10 para obtener el valor de  $z$ . Por ejemplo,  $v_z = 4.5$  V indica que  $z = 45$ . Por otra parte, el circuito puede acomodar valores más grandes de  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Las ecuaciones 6.6-4 y 6.6-6 implican que

$$|x| \leq 37.5, \quad |y| \leq 30.0 \quad \text{y} \quad |z| \leq 150.0$$

**EJERCICIO 6.6-1** Especifique los valores de  $R_1$  y  $R_2$  en la figura E 6.6-1 que se requieren para que  $v_3$  se relacione con  $v_1$  y  $v_2$  mediante la ecuación  $v_3 = (4)v_1 - (\frac{1}{5})v_2$ .

**Respuesta:**  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$  y  $R_2 = 2.5 \text{ k}\Omega$

**EJERCICIO 6.6-2** Especifique los valores de  $R_1$  y  $R_2$  en la figura E 6.6-1 que se requieren para que  $v_3$  se relacione con  $v_1$  y  $v_2$  mediante la ecuación  $v_3 = (6)v_1 - (\frac{4}{5})v_2$ .

**Respuesta:**  $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$  y  $R_2 = 40 \text{ k}\Omega$

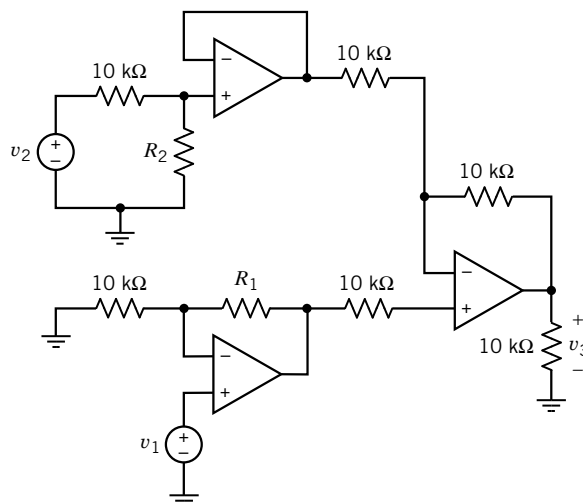


FIGURA E 6.6-1

## 6.7 CARACTERÍSTICAS DE LOS AMPLIFICADORES OPERACIONALES PRÁCTICOS

El amplificador operacional ideal es el modelo más sencillo de un amplificador operacional. Esta sencillez se obtiene al ignorar algunas imperfecciones de los amplificadores operacionales prácticos. Esta sección considera algunas de estas imperfecciones y proporciona modelos alternativos de amplificadores operacionales para tener presentes estas imperfecciones.

Considere el amplificador operacional que se muestra en la figura 6.7-1a. Si este amplificador operacional es ideal, entonces

$$i_1 = 0, \quad i_2 = 0 \quad \text{y} \quad v_1 - v_2 = 0 \quad (6.7-1)$$

Por el contrario, el modelo de amplificador operacional que se muestra en la figura 6.7-1d explica varios parámetros no ideales de amplificadores operacionales prácticos, llamados:

- Corrientes de desviación no cero.
- Voltaje nulo de entrada no cero.
- Resistencia de entrada finita.
- Resistencia de salida no cero.
- Ganancia de voltaje finita.

Este modelo de más precisión describe amplificadores operacionales prácticos que un amplificador operacional ideal. Por desgracia, el modelo más preciso de la figura 6.7-1d es mucho más complicado

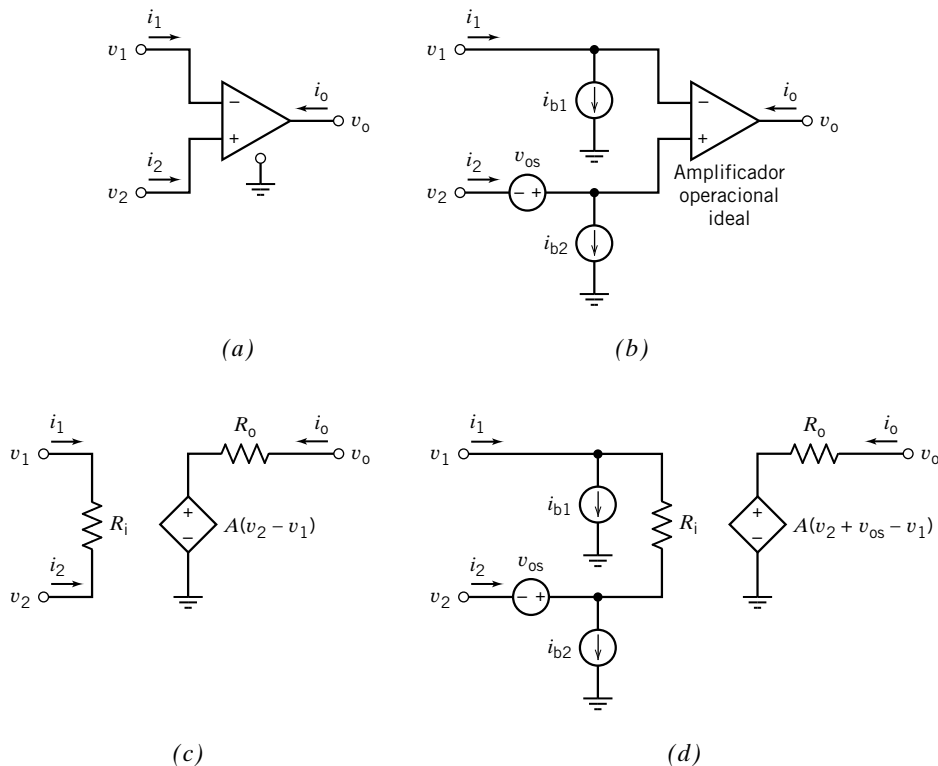


FIGURA 6.7-1 (a) Un amplificador operacional y (b) el modelo de ramas de un amplificador operacional. (c) El modelo de ganancia finita de un amplificador operacional. (d) El modelo de ramas y ganancia finita de un amplificador operacional.

y mucho más difícil de usar que el amplificador operacional ideal. Los modelos en las figuras 6.7-1b y 6.7-1c estipulan un compromiso. Estos modelos son más precisos que el amplificador operacional ideal pero más fáciles de usar que el modelo de la figura 6.7-1d. Será conveniente tener nombres para estos modelos. Al modelo de la figura 6.7-1b lo llamaremos modelo de ramas del amplificador operacional. Del mismo modo, al modelo de la figura 6.7-1c lo denominaremos modelo de ganancia finita del amplificador operacional, y el modelo de la figura 6.7-1d se llamará modelo de ramas y ganancia finita del modelo operacional.

El modelo de amplificador operacional que se muestra en la figura 6.7-1b explica la corriente polarizadora y el voltaje de ramas de entrada no cero de amplificadores operacionales prácticos pero no de la resistencia de entrada finita, la resistencia de salida no cero o la ganancia de voltaje finita. Este modelo consta de tres fuentes independientes y de un amplificador operacional ideal. En contraste con el amplificador operacional ideal, el modelo de amplificador operacional que explica las ramas está representado por las ecuaciones

$$i_1 = i_{b1}, \quad i_2 = i_{b2} \quad \text{y} \quad v_1 - v_2 = v_{os} \quad (6.7-2)$$

El voltaje  $v_{os}$  es un pequeño voltaje constante denominado voltaje de ramas de entrada. Las corrientes  $i_{b1}$  e  $i_{b2}$  se denominan corrientes de polarización del amplificador operacional. Son corrientes pequeñas, constantes. La diferencia entre las corrientes de polarización se denomina corriente de ramas de entrada,  $i_{os}$ , del amplificador:

$$i_{os} = i_{b1} - i_{b2}$$

Observe que cuando las corrientes de polarización y el voltaje de ramas de entrada son cero, la ecuación 6.7-2 es la misma que la ecuación 6.7-1. En otras palabras, el modelo de ramas revierte al amplificador operacional ideal cuando las corrientes de polarización y el voltaje de ramas de entrada son cero.

Con frecuencia, las corrientes de polarización del voltaje de ramas de entrada se pueden pasar por alto porque son muy pequeñas. Sin embargo, cuando la señal a un circuito es muy pequeña, las corrientes de polarización y el voltaje de entrada pueden llegar a ser muy importantes.

Los fabricantes especifican un valor máximo para las corrientes de polarización, las corrientes de ramas de entrada y del voltaje de ramas de entrada. Para el  $\mu A741$ , la corriente de polarización máxima se especifica que sea de 500 nA, la corriente de ramas de entrada máxima se especifica a 200 nA, y el voltaje de ramas de salida máximo se especifica a 5 mV. Estas especificaciones garantizan que

$$\begin{aligned} |i_{b1}| &\leq 500 \text{ nA} & \text{y} & & |i_{b2}| &\leq 500 \text{ nA} \\ |i_{b1} - i_{b2}| &\leq 200 \text{ nA} \\ |v_{os}| &\leq 5 \text{ mV} \end{aligned}$$

La tabla 6.7-1 muestra las corrientes de polarización, las corrientes de ramas, y el voltaje de ramas de entrada *típicos* de diversos tipos de amplificador operacional.

**Tabla 6.7-1 Parámetros seleccionados de amplificadores operacionales típicos**

PARÁMETRO	UNIDAD	$\mu A741$	LF351	TL051C	OPA101AM	OP-07E
Voltaje de saturación, $v_{sat}$	V	13	13.5	13.2	13	13
Corriente de saturación, $i_{sat}$	mA	2	15	6	30	6
Rapidez de respuesta (slow rate), SR	V/ $\mu$ S	0.5	13	23.7	6.5	0.17
Corriente de polarización, $i_b$	nA	80	0.05	0.03	0.012	1.2
Corriente de compensación de entrada, $i_{os}$	nA	20	0.025	0.025	0.003	0.5
Voltaje de compensación de entrada, $v_{os}$	mV	1	5	0.59	0.1	0.03
Resistencia de entrada, $R_i$	M $\Omega$	2	$10^6$	$10^6$	$10^6$	50
Resistencia de salida, $R_o$	$\Omega$	75	1 000	250	500	60
Ganancia de la diferencia, $A$	V/mV	200	100	105	178	5 000
Proporción de rechazo del modo común, CMRR	V/mv	31.6	100	44	178	1 413
Producto de ganancia por ancho de banda, $B$	MHz	1	4	3.1	20	0.6

### EJEMPLO 6.7-1 Voltaje de ramas y corrientes de polarización

El amplificador inversor que se muestra en la figura 6.7-2a contiene un amplificador operacional  $\mu A741$ . El amplificador inversor diseñado en el ejemplo 6.5-2 tiene una ganancia de  $-5$ , es decir,

$$v_o = -5 \times v_{in}$$

El diseño de un amplificador inversor se basa en el modelo ideal de un amplificador operacional y por tanto explica las corrientes de polarización y el voltaje de ramas de entrada del amplificador operacional  $\mu A741$ . En este ejemplo se utilizará el modelo de ramas de un amplificador operacional para analizar el circuito. Este análisis nos dirá cuáles son los efectos de las corrientes de polarización y del voltaje de ramas de entrada sobre el desempeño de este circuito.

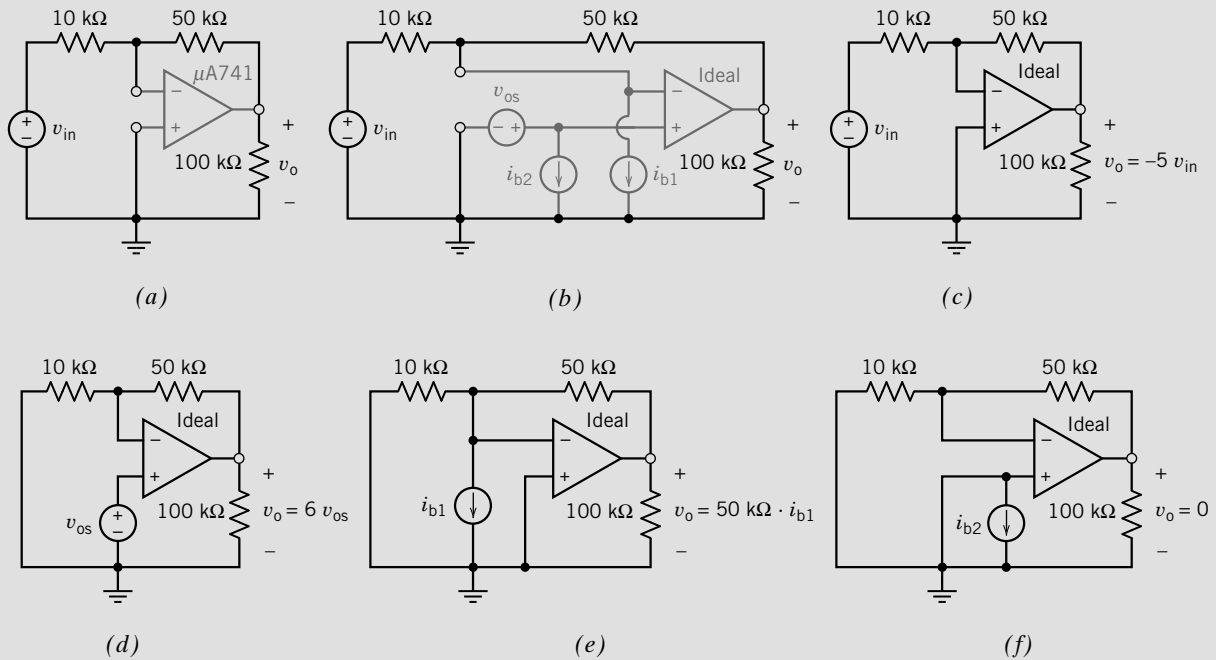


FIGURA 6.7-2 (a) Un amplificador inversor y (b) un circuito equivalente que explican el voltaje de entrada de ramas y corrientes de polarización del amplificador operacional. (c)-(f) Análisis mediante la superposición.

### Solución

En la figura 6.7-2b, el amplificador operacional ha sido reemplazado por el modelo de ramas de un amplificador operacional. Observe que el amplificador operacional en la figura 6.7-2b es el amplificador operacional ideal que forma parte del modelo del amplificador que se utilizó para explicar las ramas. El circuito en la figura 6.7-2b contiene cuatro entradas que corresponden a las cuatro fuentes independientes,  $v_{in}$ ,  $i_{b1}$ ,  $i_{b2}$  y  $v_{os}$ . (La entrada  $v_{in}$  se obtiene de la conexión de una fuente de voltaje al circuito. Por el contrario, las “entradas”  $i_{b1}$ ,  $i_{b2}$  y  $v_{os}$  son el resultado de imperfecciones del amplificador operacional. Estas entradas son parte del modelo del amplificador operacional y no requieren ser agregadas al circuito.) Se puede utilizar la superposición para una buena ventaja en el análisis de este circuito. Las figuras 6.7-2c y 6.7-2f ilustran este proceso. En cada una de las figuras, todas excepto una entrada se han establecido en cero, y se ha calculado la salida referente a aquella entrada.

La figura 6.7-2c muestra el circuito que se utilizó para calcular la respuesta a  $v_{in}$  sola. Las demás entradas,  $i_{b1}$ ,  $i_{b2}$  y  $v_{os}$ , se han establecido en cero. Recuerde que las fuentes de corriente cero actúan como circuitos abiertos y las fuentes de voltaje cero actúan como corto circuitos. La figura 6.7-2c se obtiene a partir de la figura 6.7-2b por el reemplazo de las fuentes de corriente  $i_{b1}$ ,  $i_{b2}$  por circuitos abiertos y el reemplazo de la fuente de voltaje  $v_{os}$



por un cortocircuito. El amplificador operacional en la figura 6.7-2c es el amplificador operacional ideal que forma parte del modelo de ramas. Del análisis del amplificador inversor en la figura 6.7-2c resulta

$$v_o = -5 \times v_{in}$$

A continuación, considere la figura 6.7-2d. Este circuito se ha utilizado para calcular la respuesta a  $v_{os}$  sola. Las demás entradas,  $v_{in}$ ,  $i_{b1}$  e  $i_{b2}$ , se han establecido en cero. La figura 6.7-2d se obtiene de la figura 6.7-2b por el reemplazo de las fuentes de corriente  $i_{b1}$  e  $i_{b2}$  por circuitos abiertos y el reemplazo de la fuente de voltaje  $v_{in}$  por un cortocircuito. De nuevo, el amplificador operacional es el amplificador operacional ideal a partir del modelo de ramas. El circuito en la figura 6.7-2d es uno que ya hemos visto antes; es el amplificador no inversor (figura 6.5-1b). El análisis de este amplificador no inversor da por resultado

$$v_o = \left(1 + \frac{50 \text{ k}\Omega}{10 \text{ k}\Omega}\right) \times v_{sr} = 6 v_{os}$$

A continuación, considere la figura 6.7-2e. Este circuito se ha utilizado para calcular la respuesta a  $i_{b1}$  sola. Las demás entradas,  $v_{in}$ ,  $v_{os}$  e  $i_{b2}$ , se han establecido en cero. La figura 6.7-2e se obtiene de la figura 6.7-2b por el reemplazo de la fuente de corriente  $i_{b2}$  y por un circuito abierto y el reemplazo de las fuentes de voltaje  $v_{in}$  y  $v_{os}$  por circuitos en corto. Observe que el voltaje a través del resistor de 10-k $\Omega$  es cero porque este resistor está conectado entre dos nodos de entrada del amplificador operacional ideal. La ley de Ohm dice que la corriente en el resistor de 10-k $\Omega$  debe ser cero. La corriente en el resistor 50-k $\Omega$  es  $i_{b1}$ . Finalmente, preste atención a las direcciones de referencia,

$$v_o = 50 \text{ k}\Omega \times i_{b1}$$

La figura 6.7-2f se utilizó para calcular la respuesta a  $i_{b2}$  sola. Las demás entradas,  $v_{in}$ ,  $v_{os}$  e  $i_{b1}$ , se han establecido en cero. La figura 6.7-2f se obtiene de la figura 6.7-2b por el reemplazo de la fuente de corriente  $i_{b1}$  por un circuito abierto y el reemplazo de las fuentes de voltaje  $v_{in}$  y  $v_{os}$  por circuitos en corto. Al reemplazar  $v_{os}$  por un cortocircuito se inserta un cortocircuito a través de las fuentes de corriente  $i_{b2}$ . Nuevamente, el voltaje a través del resistor de 10-k $\Omega$  es cero, por lo tanto la corriente en el resistor de 10-k $\Omega$  debe ser cero. La ley de Kirchhoff muestra que la corriente en el resistor de 50-k $\Omega$  también es cero. Finalmente,

$$v_o = 0$$

La salida ocasionada por el trabajo conjunto de las cuatro entradas es la suma de las salidas ocasionadas por cada entrada trabajando solas. Por lo tanto,

$$v_o = -5 \times v_{in} + 6 \times v_{os} + (50 \text{ k}\Omega)i_{b1}$$

cuando la entrada del amplificador inversor,  $v_{in}$ , es cero, la salida  $v_o$  también debe ser cero. Sin embargo,  $v_o$  es no cero cuando tenemos una finita  $v_{os}$  o un  $i_{b1}$ . Sea

$$\text{voltaje de ramas de salida} = 6 \times v_{os} + (50 \text{ k}\Omega)i_{b1}$$

Entonces

$$v_o = -5 \cdot v_{ent} + \text{voltaje de ramas de salida}$$

Recuerde que cuando se modela el amplificador operacional como un amplificador operacional ideal, del análisis de este amplificador inversor resulta

$$v_o = -5 \times v_{in}$$

La comparación de estas dos últimas ecuaciones muestra que las corrientes de polarización y el voltaje de ramas de entrada ocasionan el voltaje de ramas de salida. Modelar el amplificador operacional como un amplificador operacional ideal contribuye a suponer que el voltaje de ramas de salida no es importante y que se puede pasar por alto. El uso del modelo de amplificador operacional que explica las ramas es más certero pero también más complicado.

¿Qué tan grande es el voltaje de ramas de salida de este amplificador inversor? El voltaje de ramas de entrada de un amplificador operacional  $\mu A741$  será de a lo sumo 5 mV, y la corriente de polarización lo será de 500 nA, de modo que

$$\text{voltaje de ramas de salida} \leq 6 \times 5 \text{ mV} + (50 \text{ k}\Omega) 500 \text{ nA} = 55 \text{ mV}$$

Observemos que se puede pasar por alto el efecto del voltaje de ramas sólo cuando  $|5 v_{in}| > 500 \text{ mV}$ , o bien  $|v_{in}| > 100 \text{ mV}$ . El error de ramas de salida se puede reducir utilizando un amplificador operacional mejor, es decir, uno que asegure corrientes de polarización más pequeñas y voltaje de ramas de entrada.

Ahora dirijamos nuestra atención a parámetros diferentes de amplificadores operacionales prácticos. El modelo de amplificador operacional que se muestra en la figura 6.7-1c explica la resistencia de entrada finita, la resistencia de salida no cero, y la ganancia de voltaje finita de los amplificadores operacionales prácticos pero no la corriente de polarización no cero y el voltaje de ramas de entrada no cero. Este modelo consta de dos resistores y una VCVS (fuente de corriente de voltaje controlado).

El modelo de ganancia finita se revierte en un amplificador operacional ideal cuando la ganancia,  $A$ , se vuelve infinita. Para ver que esto es así, observe que en la figura 6.7-1c

$$v_s = A(v_2 - v_1) + R_s i_s$$

por lo tanto

$$v_2 - v_1 = \frac{v_s - R_s i_s}{A}$$

Los modelos en la figura 6-7-1, así como el modelo del amplificador operacional ideal, son válidos sólo cuando  $v_o$  e  $i_o$  satisfacen la ecuación 6.3-1. Por consiguiente,

$$|v_o| \leq v_{sat} \quad \text{y} \quad |i_o| \leq i_{sat}$$

Entonces

$$|v_2 - v_1| \leq \frac{v_{sat} + R_o i_{sat}}{A}$$

Por consiguiente,

$$\lim_{A \rightarrow \infty} (v_2 - v_1) = 0$$

A continuación, como

$$i_1 = -\frac{v_2 - v_1}{R_i} \quad \text{e} \quad i_2 = \frac{v_2 - v_1}{R_i}$$

concluimos que

$$\lim_{A \rightarrow \infty} i_1 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{A \rightarrow \infty} i_2 = 0$$

Así,  $i_1$ ,  $i_2$  y  $v_2 - v_1$  satisfacen la ecuación 6.7-1. En otras palabras, el modelo de ganancia finita del amplificador operacional revierte el amplificador operacional ideal conforme la ganancia se hace infinita. La ganancia para los amplificadores operacionales prácticos va de 100 000 a  $10^7$ .

### EJEMPLO 6.7-2 Ganancia finita

En la figura 6.7-3 se utiliza un seguidor de voltaje como amplificador separador. El análisis basado en el amplificador operacional ideal muestra que la ganancia del amplificador separador es

$$\frac{v_o}{v_s} = 1$$

¿Qué efectos tendrán la resistencia de entrada, la resistencia de salida y la ganancia de voltaje finita del amplificador operacional práctico en el desempeño de este circuito? Para responder esta pregunta, reemplace el amplificador operacional por el modelo de amplificador operacional que explica la ganancia de voltaje finita. Ésta nos da el circuito que se muestra en la figura 6.7-3b.

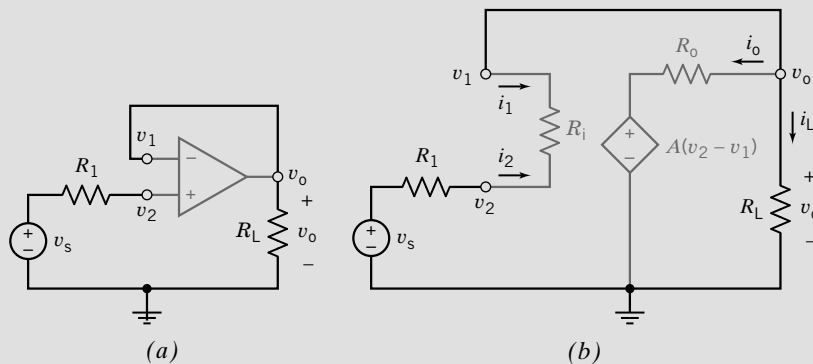


FIGURA 6.7-3 (a) Un seguidor de voltaje que se utilizó como amplificador separador y (b) un circuito equivalente con el modelo del amplificador operacional que explica la ganancia de voltaje finita.

### Solución

Para ser específicos, suponga que  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ;  $R_L = 10 \text{ k}\Omega$ , y los parámetros del amplificador operacional práctico son  $R_i = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $R_o = 100 \Omega$  y  $A = 10^5 \text{ V/V}$ .

Suponga que  $v_o = 10 \text{ V}$ . Podemos encontrar la corriente,  $i_L$  en el resistor de entrada como

$$i_L = \frac{v_o}{R_L} = \frac{10 \text{ V}}{10^4 \Omega} = 10^{-3} \text{ A}$$

Aplique la KCL en el nodo superior de  $R_L$  para obtener

$$i_1 + i_o + i_L = 0$$

Esto arrojará que  $i_1$  será mucho menor que  $i_o$  e  $i_L$ . Es útil hacer la aproximación que haga  $i_1 = 0$ . (Más adelante, en este ejemplo comprobaremos este supuesto.) Entonces,

$$i_o = -i_L$$

A continuación, aplicamos la KVL al enlace que consta de VCVS,  $R_o$  y  $R_L$  para obtener

$$-A(v_2 - v_1) - i_o R_o + i_L R_L = 0$$

Combinando las dos últimas ecuaciones y despejando  $(v_2 - v_1)$  resulta

$$v_2 - v_1 = \frac{i_L(R_o + R_L)}{A} = \frac{10^{-3}(100 + 10\,000)}{10^5} = 1.01 \times 10^{-4} \text{ V}$$

Ahora  $i_1$  se puede calcular utilizando la ley de Ohm:

$$i_1 = \frac{v_1 - v_2}{R_i} = \frac{-1.01 \times 10^{-4} \text{ V}}{100 \text{ k}\Omega} = -1.01 \times 10^{-9} \text{ A}$$

Esta justifica nuestro anterior supuesto de que  $i_1$  se puede pasar por alto comparado con  $i_o$  e  $i_L$ .

Aplicando la KVL al circuito cerrado exterior (*loop*) resulta

$$-v_s - i_1 R_1 - i_1 R_1 + v_o = 0$$

Ahora, hagamos un poco de álgebra para determinar  $v_s$ :

$$\begin{aligned} v_s &= v_o - i_1(R_1 + R_1) = v_o + i_2(R_1 + R_1) \\ &= v_o + \frac{v_2 - v_1}{R_i} \times (R_1 + R_1) \\ &= v_o + \frac{i_L(R_o + R_L)}{A} \times \frac{(R_1 + R_1)}{R_i} \\ &= v_o + \frac{v_o}{R_L} \times \frac{(R_o + R_L)}{A} \times \frac{(R_1 + R_1)}{R_i} \end{aligned}$$

La ganancia de este circuito es

$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{1}{1 + \frac{1}{A} \times \frac{R_o + R_L}{R_L} \times \frac{R_1 + R_1}{R_i}}$$

Esta ecuación muestra que la ganancia será aproximadamente 1 cuando  $A$  sea muy grande,  $R_o \ll R_L$  y  $R_1 \ll R_i$ . En este ejemplo, para lo especificado  $A$ ,  $R_o$  y  $R_i$ , tenemos

$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{1}{1 \times \frac{1}{10^5} \times \frac{100 + 10\,000}{10\,000} \times \frac{10^5 + 1\,000}{10^5}} = \frac{1}{1.00001} = 0.99999$$

Por consiguiente, la resistencia de entrada, la resistencia de salida y la ganancia de voltaje de amplificador operacional práctico tiene sólo un efecto combinado pequeño, esencialmente insignificante sobre el desempeño del amplificador separador.

La tabla 6.7-1 enlista otros dos parámetros de amplificadores operacionales prácticos que aún no se han mencionado. Éstas son la *proporción de rechazo del modo común* (CMRR) y el producto ganancia-ancho de banda. Considere primero la proporción de rechazo del modo común. En el modelo de ganancia finita, el voltaje de la fuente dependiente es

$$A(v_2 - v_1)$$

En la práctica, encontramos que el voltaje de la fuente dependiente se expresa de manera más precisa como

$$A(v_2 - v_1) + A_{cm} \left( \frac{v_1 + v_2}{2} \right)$$

donde

$v_2 - v_1$  se denomina voltaje de entrada diferencial,

$\frac{v_1 + v_2}{2}$  se llama voltaje de entrada de modo común,

y

$A_{cm}$  se llama ganancia de modo común.

En ocasiones la ganancia  $A$  se llama la ganancia diferencial para distinguirla de  $A_{cm}$ . La proporción de rechazo del modo común se define como la razón de  $A$  para  $A_{cm}$

$$\text{CMRR} = \frac{A}{A_{cm}}$$

El voltaje de fuente dependiente se puede utilizar utilizando  $A$  y CMMR como

$$\begin{aligned} A(v_2 - v_1) + A_{cm} \frac{v_1 + v_2}{2} &= A(v_2 - v_1) + \frac{A}{\text{CMRR}} \frac{v_1 + v_2}{2} \\ &= A \left[ \left( 1 + \frac{1}{2 \text{CMRR}} \right) v_2 - \left( 1 - \frac{1}{2 \text{CMRR}} \right) v_1 \right] \end{aligned}$$

La CMRR se puede agregar al modelo de ganancia finita cambiando el voltaje de la fuente dependiente. El cambio apropiado es

reemplace  $A(v_2 - v_1)$  por  $A \left[ \left( 1 + \frac{1}{2 \text{CMRR}} \right) v_2 - \left( 1 - \frac{1}{2 \text{CMRR}} \right) v_1 \right]$

Este cambio hará más preciso al modelo, pero también más complicado. La tabla 6.7-1 muestra que la CMMR es muy grande por lo común. Por ejemplo, un amplificador operacional típico, LF351, tiene  $A = 100 \text{V/mV}$  y la CMMR = 100 V/mV. Esto significa que

$$A \left[ \left( 1 + \frac{1}{2 \text{CMRR}} \right) v_2 - \left( 1 - \frac{1}{2 \text{CMRR}} \right) v_1 \right] = 100\,000.5v_2 - 99\,999.5v_1$$

comparado con

$$A(v_2 - v_1) = 100\,000v_2 - 100\,000v_1$$

En la mayoría de los casos se ocasiona un error insignificante por pasar por alto la CMMR del amplificador operacional. La CMMR no necesita ser tomada en cuenta a menos que se hagan mediciones cuidadosas de voltajes de muy pequeños diferenciales, en presencia de voltajes de modo común muy grandes.

A continuación, consideramos la ganancia producto de banda ancha del amplificador operacional. El modelo de ganancia finita indica que la ganancia,  $A$ , del amplificador operacional es una constante. Suponga que

$$v_1 = 0 \quad \text{y que} \quad v_2 = M \text{ sen } \omega t$$

por lo que

$$v_2 - v_1 = M \text{ sen } \omega t$$

El voltaje de la fuente dependiente en el modelo de ganancia finita será

$$A(v_2 - v_1) = A \times M \text{ sen } \omega t$$

La amplitud,  $A \times M$ , de este voltaje sinusoidal no depende de la frecuencia,  $\omega$ . Los amplificadores operacionales prácticos no funcionan de esta manera. La ganancia de un amplificador práctico es una función de frecuencia, digamos,  $A(\omega)$ . Para muchos amplificadores prácticos,  $A(\omega)$  se puede representar adecuadamente como

$$A(\omega) = \frac{B}{j\omega}$$

No es necesario saber ahora cómo se comporta esta función. Las funciones de esta clase se analizarán en el capítulo 13. Por ahora basta darse cuenta que el parámetro  $B$  se utiliza para describir la dependencia de la ganancia del amplificador operacional sobre la frecuencia. El parámetro  $B$  se denomina el producto ganancia de banda ancha del amplificador operacional.

**EJERCICIO 6.7-1** El voltaje de ramas de entrada de un amplificador operacional  $\mu A741$  típico es 1 mV, y la corriente de polarización es 80 nA. Suponga que el amplificador operacional en la figura 6.7-2a es un típico  $\mu A741$ . Muestre que el voltaje de ramas de entrada del amplificador inversor será de al menos 10 mV.

**EJERCICIO 6.7-2** Suponga que el resistor de 10 k $\Omega$  en la figura 6.7-2a se cambió a 2 k $\Omega$  y el resistor de 50 k $\Omega$  se cambió a 10 k $\Omega$ . (Estos cambios no modificarán la ganancia del amplificador inversor. Aún seguirá siendo  $-5$ .) Muestre que el voltaje de ramas de salida *máximo* se redujo a 35 mV. (Utilice  $i_b = 500$  nA y  $v_{os} = 5$  mV para calcular el voltaje de ramas de salida máximo que podría haber sido causado por el amplificador  $\mu A741$ .)

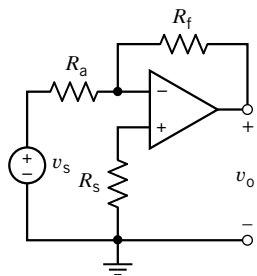


FIGURA E 6.7-4

**EJERCICIO 6.7-3** Suponga que el amplificador operacional  $\mu A741$  en la figura 6.7-2a es reemplazado con un amplificador operacional típico OPA101AM. Muestre que el voltaje de ramas de salida del amplificador inversor será de al menos 0.6 mV.

### EJERCICIO 6.7-4

- Determine la razón de voltaje  $v_o/v_s$  para el circuito del amplificador operacional que se muestra en la figura E 6.7-4.
- Calcule  $v_o/v_s$  para un amplificador práctico con  $A = 10^5$ ,  $R_o = 100 \Omega$  y  $R_i = 500$  k $\Omega$ . Los resistores del circuito son  $R_s = 10$  k $\Omega$ ,  $R_f = 50$  k $\Omega$  y  $R_a = 25$  k $\Omega$ .

*Respuesta:* (b)  $v_o/v_s = -2$

## 6.8 ANÁLISIS DE CIRCUITOS DE AMPLIFICADORES OPERACIONALES MEDIANTE EL USO DE MATLAB

La figura 6.8-1 muestra un amplificador inversor. Modele el amplificador operacional como un amplificador operacional ideal. Luego el voltaje de salida del amplificador inversor se relaciona con el voltaje de entrada por

$$v_o(t) = -\frac{R_2}{R_1} v_s(t) \quad (6.8-1)$$

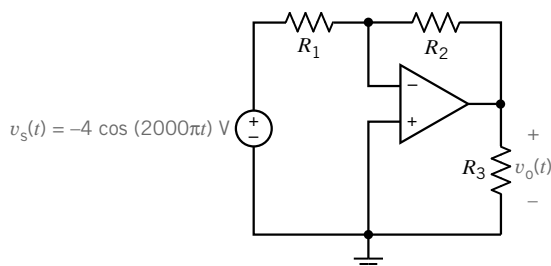


FIGURA 6.8-1 Un amplificador inversor.

Suponga que  $R_1 = 2$  k $\Omega$ ,  $R_2 = 50$  k $\Omega$  y  $v_f = -4 \cos(2000\pi t)$  V. Usando estos valores en la ecuación 6.8-1 resulta  $v_s(t) = 100 \cos(2000\pi t)$  V. Ésta no es una respuesta práctica. Es probable que el amplificador operacional se sature y, por consiguiente, el amplificador operacional ideal no es un modelo apropiado del amplificador operacional. Cuando la saturación de voltaje se incluye en el modelo del amplificador operacional, el amplificador inversor se describe por

$$v_o(t) = \begin{cases} v_{\text{sat}} & \text{cuando } -\frac{R_2}{R_1} v_s(t) > v_{\text{sat}} \\ -\frac{R_2}{R_1} v_s(t) & \text{cuando } -v_{\text{sat}} < -\frac{R_2}{R_1} v_s(t) < v_{\text{sat}} \\ -v_{\text{sat}} & \text{cuando } -\frac{R_2}{R_1} v_s(t) < -v_{\text{sat}} \end{cases} \quad (6.8-2)$$

donde  $v_{\text{sat}}$  indica el voltaje de saturación del amplificador operacional. La ecuación 6.8-2 es un modelo un poco más certero, pero más complicado, del amplificador inversor que la ecuación 6.8-1. Desde luego, preferimos el modelo sencillo, y utilizamos el modelo más complicado sólo cuando tenemos razón para creer que las respuestas basadas en el modelo más sencillo no son acertadas.

Las figuras 6.8-2 y 6.8-3 ilustran el uso de MATLAB para analizar el amplificador inversor cuando el modelo de multiplicador operacional incluye saturación de voltaje. La figura 6.8-2 muestra el archivo de entrada de MATLAB, y la figura 6.8-3 muestra el trazo de los voltajes de entrada y de salida del amplificador inversor.

```
% Saturate.m simulates op amp voltage saturation
%-----
% Enter values of the parameters that describe the circuit.
%-----
                                % circuit parameters
R1=2e3;                          % resistance, ohms
R2=50e3;                          % resistance, ohms
R3=20e3;                          % resistance, ohms

                                % op amp parameter
vsat=15;                          % saturation voltage, V

                                % source parameters
M=4;                              % amplitude, V
f=1000;                          % frequency, Hz
w=2*pi*f;                        % frequency, rad/s
theta=(pi/180)*180;              % phase angle, rad

%-----
% Divide the time interval (0, tf) into N increments
%-----
tf=2/f;                          % final time
N=200;                            % number of increments
t=0:tf/N:tf;                     % time, s

%-----
% at each time t=k*(tf/N), calculate vo from vs
%-----
vs = M*cos(w*t+theta);           % input voltage

for k=1:length(vs)
    if    (-(R2/R1)*vs(k) < -vsat) vo(k) = -vsat; % -----
    elseif (-(R2/R1)*vs(k) > vsat) vo(k) = vsat; % eqn.
    else   vo(k) = -(R2/R1)*vs(k);                % 6.8-2
    end                                           % -----
end

%-----
% Plot Vo and vs versus t
%-----
plot(t, vo, t, vs)                % plot the transfer characteristic
axis([0 tf -20 20])
xlabel('time, s')
ylabel('vo(t), V')
```

FIGURA 6.8-2 Archivo de entrada de MATLAB que corresponde al circuito que se muestra en la figura 6.8-1.

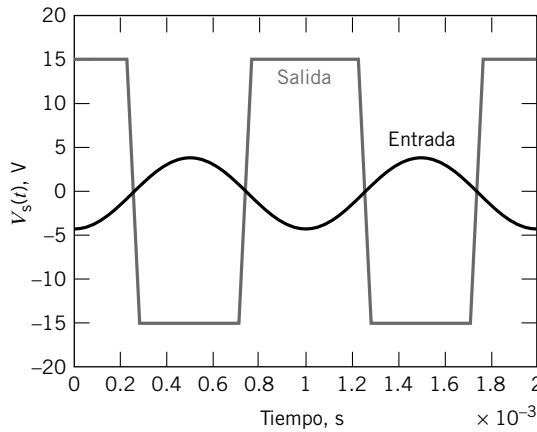


FIGURA 6.8-3 Trazos de los voltajes de entrada y de salida del circuito que se muestra en la figura 6.8-1.

## 6.9 ANÁLISIS DE CIRCUITOS DE AMPLIFICADORES OPERACIONALES MEDIANTE EL USO DE PSpICE

Considere un circuito de amplificador operacional que tiene una entrada,  $v_i$ , y una salida,  $v_o$ . Tracemos el voltaje de salida como una función del voltaje de entrada, utilizando PSpice. Para ello necesitamos hacer lo siguiente:

1. Dibujar el circuito en el taller de OrCAD Capture.
2. Especificar una simulación de Sweep de CD.
3. Correr la simulación.
4. Trazar los resultados de la simulación.

La simulación de Sweep de CD proporciona una manera de variar la entrada de un circuito y luego trazar la salida como una función de la entrada.

### EJEMPLO 6.9-1 Uso de PSpice para analizar un circuito de amplificador operacional

La entrada del circuito que se muestra en la figura 6.9-1 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i$ . La respuesta es el voltaje,  $v_o$ . Utilice PSpice para trazar el voltaje de salida como una función del voltaje de entrada.

#### Solución

Empezamos por el trazo del circuito en el taller de OrCAD como se muestra en la figura 6.9-2 (vea el apéndice A). El Amp Op en la figura 6.9-2 está representado por la parte de PSpice llamada OPAMO desde la biblioteca ANALOG. La salida de circuito es un voltaje de nodo. Es conveniente dar un nombre al voltaje de salida en PSpice. En la figura 6.9-2, una parte de PSpice llamada conector de hoja suelta, se utiliza para etiquetar el nodo de salida como “o”. Etiquetar el nodo de salida de esta manera le da a la salida de circuito el nombre PSpice de  $V(o)$ .

Llevaremos a cabo una simulación de Sweep de CD. (En la barra de menús de OrCAD Capture, seleccione PSpice; luego, haga clic en la opción New Simulation Profile, luego en CD Sweep desde la lista desplegable Analysis Type. Especifique la variable de Sweep para el voltaje de entrada seleccionando Voltage Source e identificando la fuente de voltaje como  $V_i$ . Especifique un barrido lineal y el rango deseado de voltajes de entrada.) En la barra de menús de OrCAD Capture seleccione PSpice y haga clic en la opción Run Simulation Profile para correr la simulación.

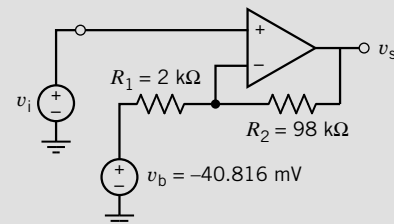


FIGURA 6.9-1 El circuito considerado en el ejemplo 6.9-1.

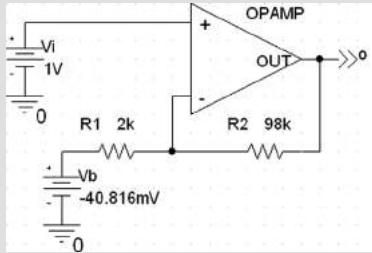


FIGURA 6.9-2 El circuito de la figura 6.9-1 como se dibujó en el taller de OrCAD.

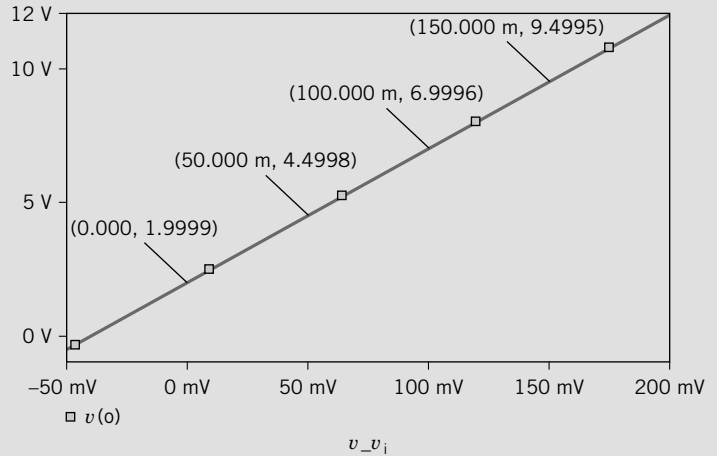


FIGURA 6.9-3 Trazo del voltaje de salida como una función del voltaje de entrada.

Luego de una simulación de CD Sweep exitosa, OrCAD abrirá automáticamente una ventana Schematics. De la barra de menús de Schematics, seleccione Trace y haga clic en la opción Add Trace para desplegar el cuadro de diálogo Add Traces. Seleccione V(s) de la lista Simulation Output Variables. Cierre el cuadro de diálogo Add Traces. La figura 6.9-3 muestra el trazo resultante luego de quitar la rejilla y algunos puntos de etiquetado. El trazo es una línea recta. En consecuencia, la salida del circuito se relaciona con la entrada del circuito por una ecuación de la forma

$$v_o = mv_i + b$$

donde los valores de la inclinación  $m$  y la intersección  $b$  se pueden determinar a partir de los puntos etiquetados en la figura 6.9-3. En particular,

$$m = \frac{6.9996 - 4.4998}{0.100 - 0.050} = 49.996 \approx 50 \frac{V}{V}$$

y  $1.9999 = 59.996(0) + b \Rightarrow b = 1.9999 \approx 2 \text{ V}$

la salida del circuito se relaciona con la entrada del circuito por la ecuación

$$v_o = 50v_i + 2$$

## 6.10 ¿CÓMO LO PODEMOS COMPROBAR...?

A los ingenieros se les suele solicitar comprobar que la solución de un problema sea la correcta. Por ejemplo, las soluciones propuestas para problemas de diseño se deben comprobar para confirmar que se ha cumplido con todas las especificaciones. Además, se deben revisar los resultados de la computadora para protegerse contra errores de captura de datos, así como las exigencias de los comerciantes, las cuales se deben analizar a fondo.

También a los estudiantes de ingeniería se les pide que verifiquen la exactitud de sus trabajos. Por ejemplo, tomarse un breve lapso antes de terminar un examen permitiría dar una vista rápida e identificar esas soluciones que podrían requerir un poco más de aplicación.

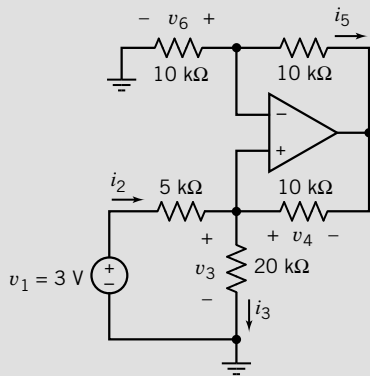
El ejemplo siguiente ilustra técnicas útiles para comprobar las soluciones a los diversos problemas analizados en este capítulo.

### EJEMPLO 6.10-1 ¿Cómo podemos comprobar los circuitos del Amp Op?

El circuito en la figura 6.10-1a se analizó escribiendo y despejando el siguiente conjunto de ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} \frac{v_6}{10} + i_5 &= 0 \\ 10i_5 &= v_4 \end{aligned}$$





(a)

```

i2 := 0   i3 := 0   v4 := 0   i5 := 0   v6 := 0
Given
v6/10 + i5 ≈ 0      10 · i5 ≈ v4      v4/10 + i3 ≈ i2
3 ≈ 5 · i2 + 10 · i3      20 · i3 ≈ v6
.
Find (i2, i3, v4, i5, v6) = [ -0.6
                             0.6
                             -12
                             -1.2
                             12 ]

```

(b)

FIGURA 6.10-1 (a) Un circuito de ejemplo y (b) análisis por computadora utilizando Mathcad.

$$\frac{v_4}{10} + i_3 = i_2$$

$$3 = 5i_2 + 10i_3$$

$$20i_3 = v_6$$

(Estas ecuaciones utilizan unidades de voltios, miliamperios y kiloohmios.) Para despejar estas ecuaciones se utilizó una computadora y el programa Mathcad, como se muestra en la figura 6.10-1b. La solución de estas ecuaciones indica que

$$i_2 = -0.6 \text{ mA}, \quad i_3 = 0.6 \text{ mA}, \quad v_4 = -12 \text{ V},$$

$$i_5 = -1.2 \text{ mA}, \quad \text{y} \quad v_6 = 12 \text{ V}$$

¿Cómo podemos comprobar que estos valores de voltajes y corrientes están correctos?

### Solución

Considere el  $v_3$ . Con la ley de Ohm,

$$v_3 = 20i_3 = 20(0.6) = 12 \text{ V}$$

Recuerde que las resistencias están en  $\text{k}\Omega$  y las corrientes en miliamperios. Aplicando la KVL al enlace que consta de fuente de voltaje y los resistores de  $5 \text{ k}\Omega$  y  $20 \text{ k}\Omega$  resulta

$$v_3 = 3 - 5i_2 = 3 - 5(-0.6) = 6 \text{ V}$$

Desde luego,  $v_3$  no puede ser de 12 ni de 6, de modo que los valores obtenidos por  $i_2$ ,  $i_3$ ,  $i_4$ ,  $i_5$  y  $v_6$  no pueden ser correctos. Si comprobamos las ecuaciones simultáneas, encontramos que el valor de un resistor ha sido capturado totalmente mal. La ecuación de KVL correspondiente al enlace que consta de fuente de voltaje y resistores de  $5 \text{ k}\Omega$  y  $20 \text{ k}\Omega$  debe ser

$$3 = 5i_2 + 20i_3$$

Observe que  $10i_3$  se usó mal en la cuarta línea del programa de Mathcad de la figura 6.10-1. Luego de haber hecho la corrección,  $i_2$ ,  $i_3$ ,  $i_4$ ,  $i_5$  y  $v_6$  se calcula que sean

$$i_2 = -0.2 \text{ mA}, \quad i_3 = 0.2 \text{ mA}, \quad v_4 = -4 \text{ V},$$

$$i_5 = 0.4 \text{ mA} \quad \text{y} \quad v_6 = 4 \text{ V}$$

Ahora

$$v_3 = 20i_3 = 20(0.2) = 4$$

y

$$v_3 = 3 - 5i_2 = 3 - 5(-0.2) = 4$$

Este acuerdo indica que los valores nuevos de  $i_2$ ,  $i_3$ ,  $i_4$ ,  $i_5$  y  $v_6$  son correctos. Como comprobación adicional, considere  $v_5$ . Primero, la ley de Ohm da por resultado

$$v_5 = 10i_5 = 10(-0.4) = -4$$

A continuación, aplicando la KVL al circuito cerrado que consta de dos resistores de  $10\text{-k}\Omega$  y la entrada del amplificador operacional resulta

$$v_5 = 0 + v_4 = 0 + (-4) = -4$$

Esto aumenta nuestra confianza en que los nuevos valores de  $i_2$ ,  $i_3$ ,  $i_4$ ,  $i_5$  y  $v_6$  son correctos.

## 6.11 EJEMPLO DE DISEÑO

### CIRCUITO DE INTERFASE DE TRANSDUCTOR

Un cliente desea automatizar un sistema de medidas de presión, el cual requiere convertir la salida del transductor de presión en una entrada de computadora. Esta conversión se puede hacer utilizando un circuito integrado estándar llamado convertidor analógico a digital (CAD). El CAD requiere un voltaje de entrada entre 0 V y 10 V, en tanto que la salida del transductor de presión varía entre  $-250$  mV y  $250$  mV. Diseñe un circuito para la interfase entre el transductor de presión con el CAD. Es decir, diseñe un circuito que traslade el rango  $-250$  mV a  $250$  mV al rango 0 V a 10 V.

#### Describe la situación y los supuestos

La situación se presenta en la figura 6.11-1

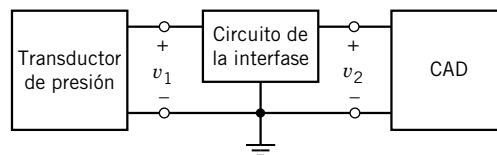


FIGURA 6.11-1 División de fases de un transductor de presión con un convertidor analógico a digital (CAD).

Las especificaciones establecen que

$$-250 \text{ mV} \leq v_1 \leq 250 \text{ mV}$$

$$0 \text{ V} \leq v_2 \leq 10 \text{ V}$$

Se necesita una relación sencilla entre  $v_1$  y  $v_2$  de modo que la información sobre la presión no sea oscura. Considere

$$v_2 = a \times v_1 + b$$

Los coeficientes,  $a$  y  $b$ , se pueden calcular solicitando que  $v_2 = 0$  cuando  $v_1 = -250$  mV y que  $v_2 = 10$  V cuando  $v_1 = 250$  mV, es decir,

$$0 \text{ V} = a(-250 \text{ mV}) + b$$

$$10 \text{ V} = a(250 \text{ mV}) + b$$

Despejando estas ecuaciones simultáneas tenemos  $a = 20$  V/V y  $b = 5$  V.

#### Establezca el objetivo

Diseñar un circuito que tenga voltaje de entrada  $v_1$  y voltaje de salida  $v_2$ . Estos voltajes deben estar relacionados por

$$v_2 = 20 v_1 + 5 \text{ V} \quad (6.11-1)$$

#### Genere un plan

La figura 6.11-2 muestra un plan (o una estructura) para diseñar el circuito de la interfase. Los amplificadores operacionales se polarizan utilizando alimentadores de potencia  $+15$  V y  $-15$  V. La entrada constante de 5 V se genera a partir de la alimentación de potencia de 15 V al multiplicar por una ganancia de  $1/3$ . El voltaje de entrada,  $v_1$ , se multiplica por una ganancia de 20. La suma (adición) agrega las salidas de los dos amplificadores para obtener  $v_2$ .

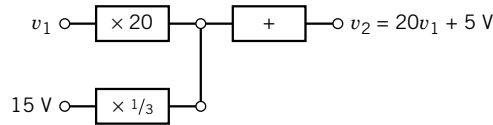


FIGURA 6.11-2 Una estructura (o plano) para el circuito de la interfase.

Cada bloque de la figura 6.11-2 se implementará utilizando un circuito de amplificador operacional.

### Actúe sobre el plan

La figura 6.11-3 muestra un circuito de interfase propuesta. Se han hecho algunos ajustes al plan. El sumador se implementó utilizando el sumando amplificador inversor de la figura 6.5-1*d*. Las entradas a este sumando amplificador inversor deben ser  $-20v_1$  y  $-5$  V en vez de  $20v_1$  y  $5$  V. En consecuencia, se utiliza un amplificador inversor para multiplicar  $v_1$  por  $-20$ . Un seguidor de voltaje previene al sumando amplificador de la carga del divisor de voltaje. Para hacer que los signos funcionen correctamente, el alimentador de potencia de  $-15$  V proporciona la entrada al divisor de voltaje.

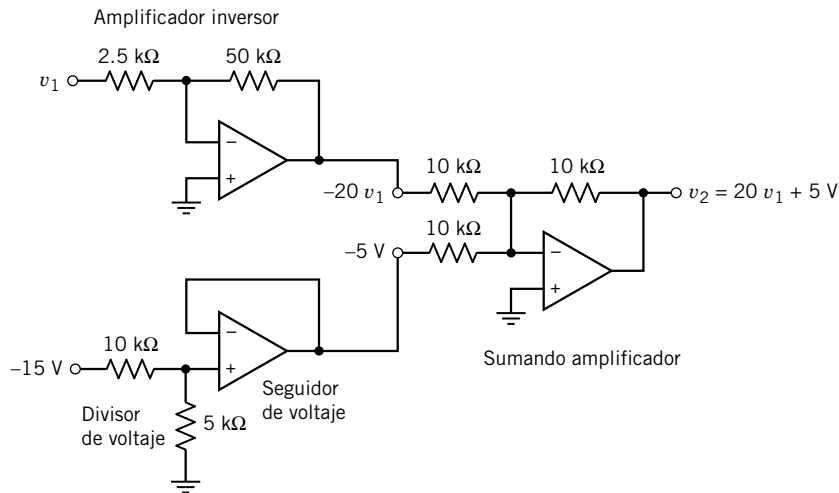


FIGURA 6.11-3 Implementación de un circuito de interfase.

El circuito que se muestra en la figura 6.11-3 no es el único circuito que resuelve este reto de diseño. Hay varios circuitos que implementan

$$v_2 = 20v_1 + 5 \text{ V}$$

Nos daremos por satisfechos con haber encontrado un circuito que haga el trabajo.

### Verifique la solución propuesta

El circuito que se muestra en la figura 6.11-3 se simuló utilizando PSpice. El resultado de esta simulación es el trazo del  $v_2$  versus  $v_1$  que se muestra en la figura 6.11-4. Dado que este trazo muestra una línea recta,  $v_2$  se relaciona con  $v_1$  por la ecuación de una línea recta

$$v_2 = mv_1 + b$$

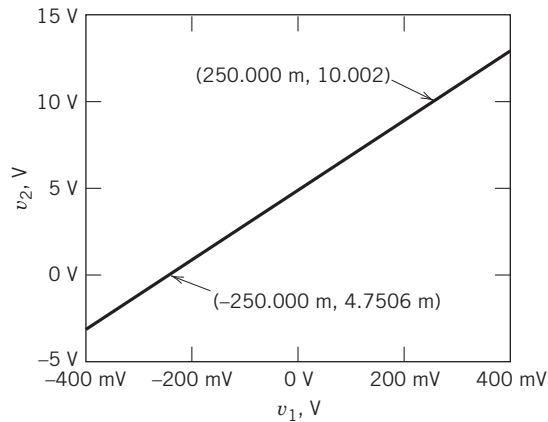


FIGURA 6.11-4 Simulación de PSpice del circuito que se muestra en la figura 6.11-3.

donde  $m$  es la inclinación de la línea y  $b$  es la intersección de la línea con el eje vertical. Se han etiquetado dos puntos en la línea para mostrar que  $v_2 = 10.002$  V cuando  $v_1 = 0.250$  V y que  $v_2 = 0.0047506$  V cuando  $v_1 = -0.250$  V. La inclinación,  $m$ , y la intersección,  $b$ , se pueden calcular a partir de estos puntos. La inclinación la da

$$m = \frac{10.002 - (0.0047506)}{0.250 - (-0.250)} = 19.994$$

La intersección la da

$$b = 10.002 - 19.994 \times 0.0250 = 5.003$$

Por lo que

$$v_2 = 19.994v_1 + 5.003 \quad (6.11-2)$$

Al comparar las ecuaciones 6.11-1 y 6.11-2 se verifica que la solución propuesta es correcta.

## 6.12 RESUMEN

- Se dispone de varios modelos para los amplificadores operacionales. Los modelos sencillos son fáciles de usar. Los modelos precisos son más complicados. El modelo más sencillo del amplificador operacional es el amplificador operacional ideal.
- Las corrientes dentro de las terminales de entrada de un amplificador operacional son cero, y los voltajes en los nodos de entrada de un amplificador operacional ideal son iguales.
- Conviene utilizar ecuaciones nodales para analizar circuitos que contengan amplificadores operacionales ideales.
- Los amplificadores operacionales se utilizan para construir circuitos que desempeñen operaciones matemáticas. Muchos de estos circuitos se han utilizado con tanta frecuencia que se les han dado nombres incluso. El amplificador inversor proporciona una respuesta de la forma  $v_o = Kv_1$ , donde  $K$  es una constante positiva. Otro útil circuito de amplificador operacional es el amplificador no inversor con una ganancia de  $K = 1$ , a veces denominado seguidor de voltaje o separador. La salida del seguidor de voltaje sigue fielmente el voltaje de entrada. El seguidor de voltaje reduce la carga al aislar su terminal de salida de su terminal de entrada.
- La figura 6.5-1 es un catálogo de algunos amplificadores operacionales de uso frecuente.
- Los amplificadores operacionales prácticos tienen propiedades que no se incluyen en el amplificador operacional ideal. Entre ellas están el voltaje de ramas de entrada, la corriente de polarización, la ganancia de cd, la resistencia de entrada y la resistencia de salida. Se necesitan modelos más complejos para tener presentes estas propiedades.
- Se puede utilizar PSpice para reducir la molestia de analizar circuitos de amplificadores operacionales con modelos complicados.

## PROBLEMAS

## Sección 6.3 El amplificador operacional ideal

**P 6.3-1** Determine el valor del voltaje medido por el voltímetro en la figura P 6.3-1.

*Respuesta:*  $-4\text{ V}$

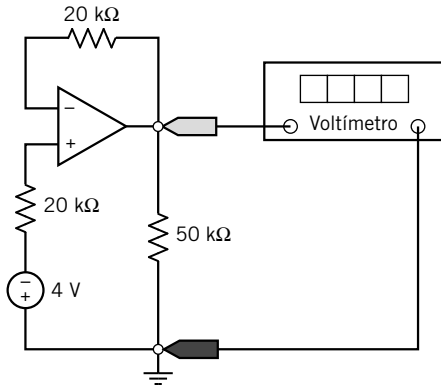


Figura P 6.3-1

**P 6.3-2** Encuentre  $v_o$  e  $i_o$  para el circuito de la figura P 6.3-2.

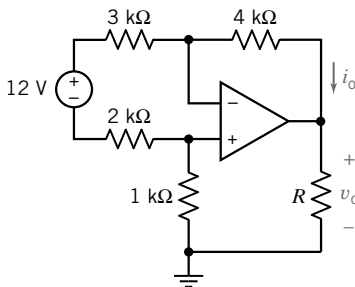


Figura P 6.3-2

**P 6.3-3** Encuentre  $v_o$  e  $i_o$  para el circuito de la figura P 6.3-3.

*Respuesta:*  $v_o = -30\text{ V}$  e  $i_o = 3.5\text{ mA}$

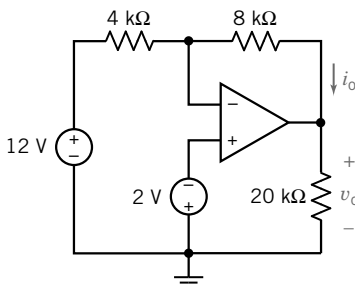


Figura P 6.3-3

**P 6.3-4** Encuentre  $v$  e  $i$  para el circuito de la figura P 6.3-4.

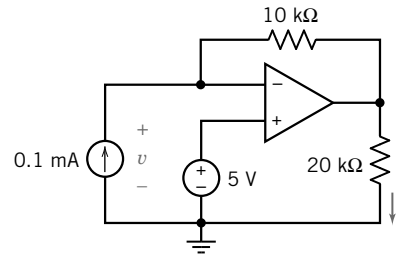


Figura P 6.3-4

**P 6.3-5** Encuentre  $v_o$  e  $i_o$  para el circuito de la figura P 6.3-5.

*Respuesta:*  $v_o = -15\text{ V}$  e  $i_o = 7.5\text{ mA}$

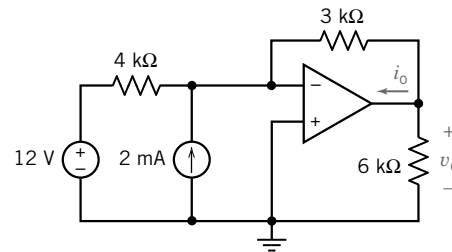


Figura P 6.3-5

**P 6.3-6** Determine el valor del voltaje medido por el voltímetro en la figura P 6.3-6.

*Respuesta:*  $7.5\text{ V}$

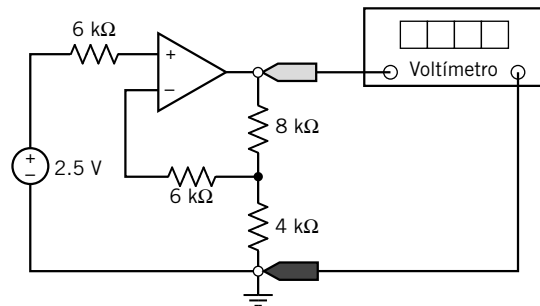


Figura P 6.3-6

**P 6.3-7** Encuentre  $v_o$  e  $i_o$  para el circuito de la figura P 6.3-7.

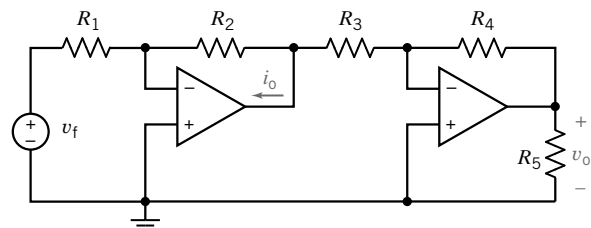


Figura P 6.3-7

**P 6.3-8** Determine la corriente  $i_o$  para el circuito que se muestra en la figura P 6.3-8.

**Respuesta:**  $i_o = 2.5 \text{ mA}$

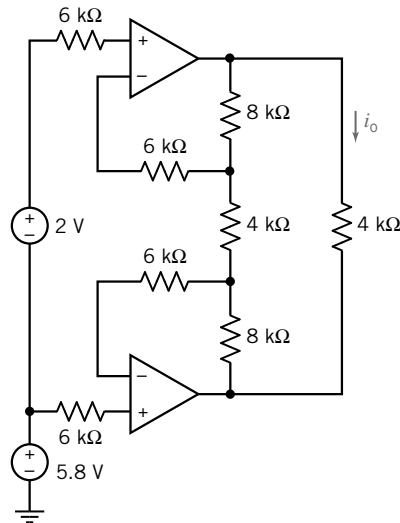


Figura P 6.3-8

**P 6.3-9** Determine el voltaje  $v_o$  para el circuito que se muestra en la figura P 6.3-9.

**Respuesta:**  $v_o = -8 \text{ V}$

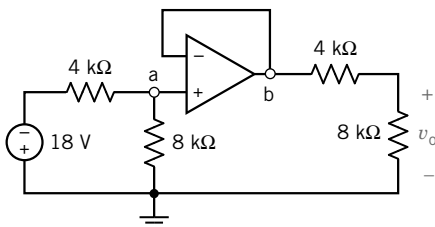


Figura P 6.3-9

**P 6.3-10** El circuito que se muestra en la figura P 6.3-10 tiene una entrada,  $i_s$ , y una salida,  $v_o$ . Muestre que la salida es proporcional a la entrada. Diseñe el circuito de modo que la ganancia sea  $\frac{v_o}{i_s} = 20 \frac{\text{V}}{\text{mA}}$ .

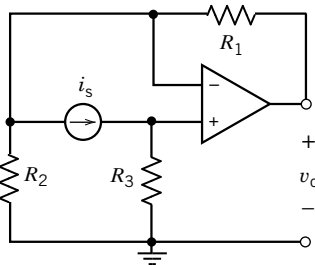


Figura P 6.3-10

**P 6.3-11** El circuito que se muestra en la figura P 6.3-11 tiene una entrada,  $v_s$ , y una salida,  $v_o$ . Muestre que la salida es proporcional a la entrada. Diseñe el circuito de modo que la ganancia sea  $v_o = 5 v_s$ .

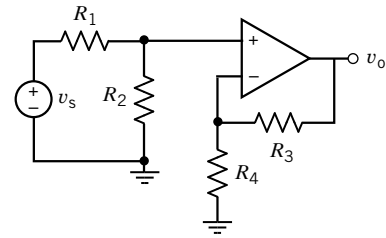


Figura P 6.3-11

**P 6.3-12** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 6.3-12 es el voltaje,  $v_s$ . La salida es el voltaje  $v_o$ . La salida se relaciona con la entrada por la ecuación  $v_o = m v_s + b$ , donde  $m$  y  $b$  son constantes. Determine los valores de  $m$  y  $b$ .

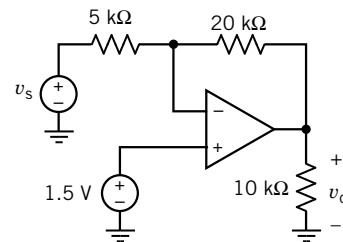


Figura P 6.3-12

**P 6.3-13** La salida del circuito que se muestra en la figura P 6.3-13 es  $v_o = 3.5 \text{ V}$ . Determine el valor de (a) la resistencia  $R$ , (b) la potencia alimentada por cada fuente independiente, y (c) la potencia  $P_{oa} = i_{oa} \times v_o$  alimentada por el amplificador operacional.

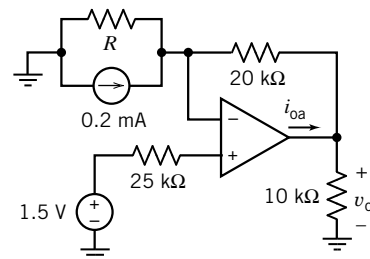


Figura P 6.3-13

**P 6.3-14** Determine los voltajes de nodo en los nodos a, b, c, y d del circuito que se muestra en la figura 6.3-14.

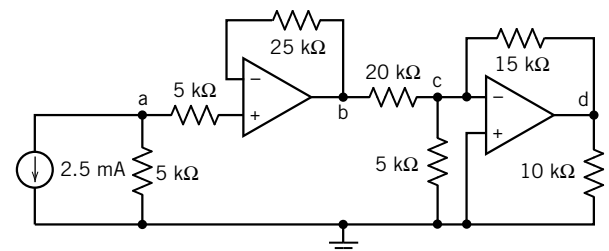


Figura P 6.3-14

**P 6.3-15** Determine los voltajes de nodo en los nodos a, b, c, y d del circuito que se muestra en la figura 6.3-15.

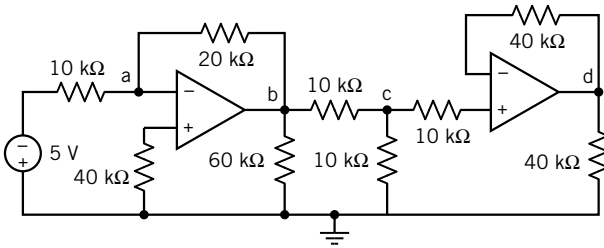


Figura P 6.3-15

**Sección 6.4 Análisis nodal de circuitos que contienen amplificadores operacionales**

**P 6.4-1** Determine los voltajes de nodo para el circuito que se muestra en la figura 6.4-1.

*Respuesta:*  $v_a = 2\text{ V}$ ,  $v_b = -0.25\text{ V}$ ,  $v_c = -5\text{ V}$ ,  $v_d = -2.5\text{ V}$  y  $v_e = -0.25\text{ V}$

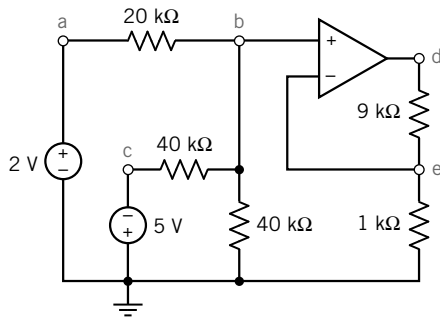


Figura P 6.4-1

**P 6.4-2** Encuentre  $v_o$  e  $i_o$  para el circuito de la figura 6.4-2.

*Respuesta:*  $v_o = -4\text{ V}$ , e  $i_o = 1.33\text{ mA}$

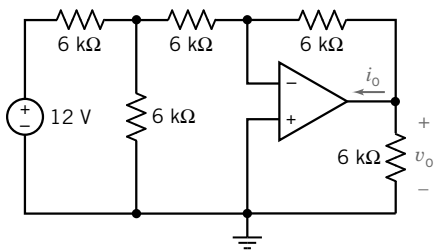


Figura P 6.4-2

**P 6.4-3** Si  $R_1 = 4.8\text{ k}\Omega$  y  $R_2 = R_4 = 30\text{ k}\Omega$ , encuentre  $v_o/v_s$  para el circuito que se muestra en la figura 6.4-3 cuando  $R_3 = 1\text{ k}\Omega$ .

*Respuesta:*  $v_o/v_s = -200$

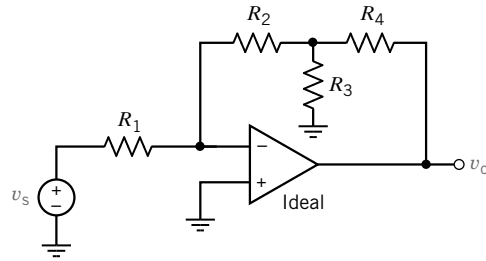


Figura P 6.4-3

**P 6.4-4** La salida del circuito que se muestra en la figura P 6.4-4 es  $v_o$ . Las entradas son  $v_1$  y  $v_2$ . Exprese la salida como una función de las entradas y las resistencias del resistor.

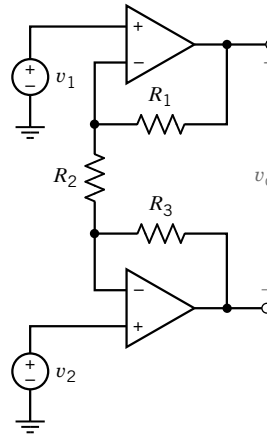


Figura P 6.4-4

**P 6.4-5** Las salidas del circuito que se muestran en la figura P 6.4-5 son  $v_o$  e  $i_o$ . Las entradas son  $v_1$  y  $v_2$ . Exprese las salidas como funciones de las entradas y las resistencias del resistor.

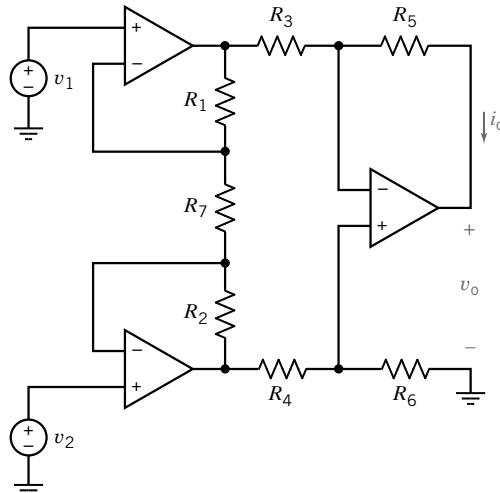


Figura P 6.4-5

**P 6.4-6** Determine los voltajes de nodo para el circuito que se muestra en la figura P 6.4-6.

*Respuesta:*  $v_a = -0.75 \text{ V}$ ,  $v_b = 0 \text{ V}$  y  $v_c = -0.9375 \text{ V}$

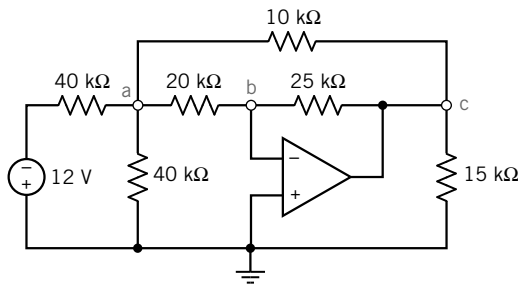


Figura P 6.4-6

**P 6.4-7** Encuentre  $v_o$  e  $i_o$  para el circuito que se muestra en la figura P 6.4-7.

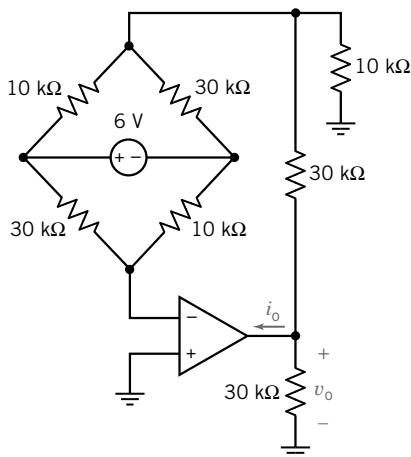


Figura P 6.4-7

**P 6.4-8** Encuentre  $v_o$  e  $i_o$  para el circuito que se muestra en la figura P 6.4-8.

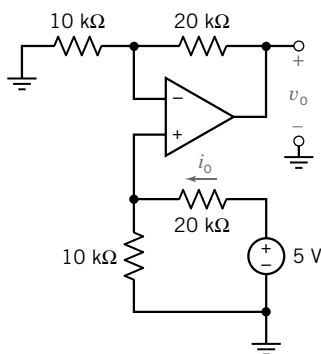


Figura P 6.4-8

**P 6.4-9** Determine los voltajes de nodo para el circuito que se muestra en la figura P 6.4-9.

*Respuesta:*  $v_a = 12 \text{ V}$ ,  $v_b = -4 \text{ V}$ ,  $v_c = -4 \text{ V}$ ,  $v_d = -4 \text{ V}$ ,  $v_e = -3.2 \text{ V}$ ,  $v_f = -4.8 \text{ V}$  y  $v_g = -3.2 \text{ V}$

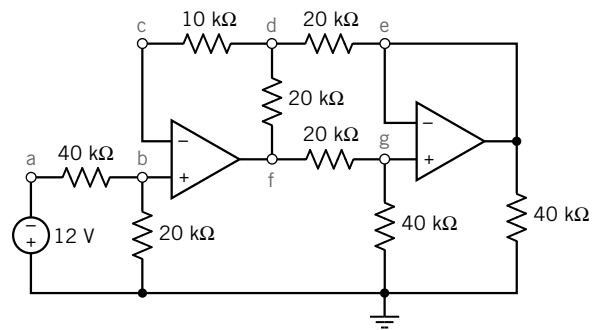


Figura P 6.4-9

**P 6.4-10** El circuito que se muestra en la figura P 6.4-9 incluye un indicador de tensión sencillo. El resistor  $R$  cambia su valor por  $\Delta R$  cuando es agitado o torcido. Derive una relación para la ganancia de voltaje  $v_o/v_s$ , y muestre que es proporcional con el cambio fraccional en  $R$ , a saber,  $\Delta R/R_s$ .

*Respuesta:*  $v_s = \frac{R_o}{R_s + R_1} \frac{\Delta R}{R_o}$

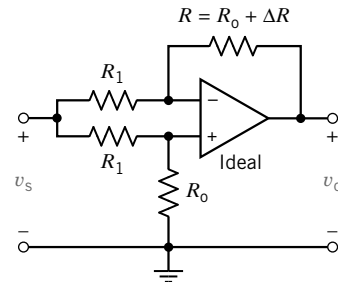


Figura P 6.4-10 Circuito de indicador de tensión

**P 6.4-11** Encuentre  $v_o$  para el circuito que se muestra en la figura P 6.4-11.

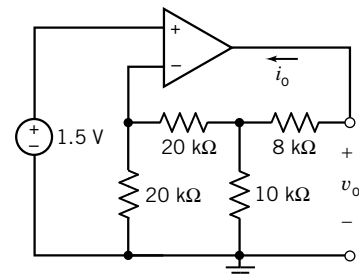


Figura P 6.4-11

**P 6.4-12** El circuito que se muestra en la figura P 6.4-12 tiene una salida,  $v_o$  y dos entradas,  $v_1$  y  $v_2$ . Muestre que cuando  $\frac{R_3}{R_4} = \frac{R_6}{R_5}$ , la salida es proporcional a la diferencia de las entradas,  $v_1 - v_2$ . Especifique los valores de resistencia para que  $v_o = 5(v_1 - v_2)$ .



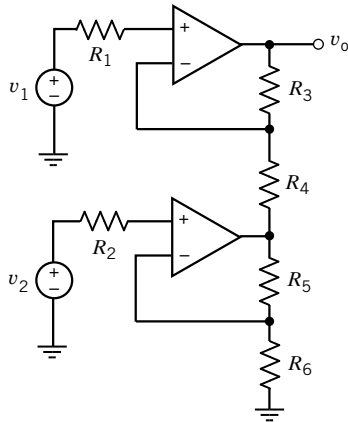


Figura P 6.4-12

**P 6.4-13** El circuito que se muestra en la figura P 6.4-13 tiene una salida,  $v_o$ , y una entrada,  $v_i$ . Muestre que la salida es proporcional a la entrada. Especifique los valores de resistencias para que  $v_o = 20 v_s$ .

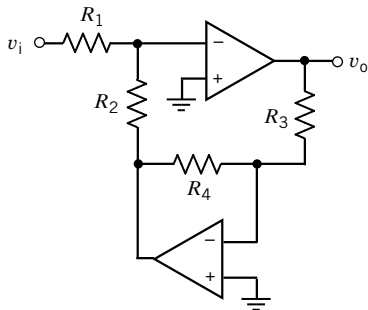


Figura P 6.4-13

**P 6.4-14** El circuito que se muestra en la figura P 6.4-14 tiene una entrada,  $v_s$ , y una salida,  $v_o$ . Muestre que la salida es proporcional a la entrada. Diseñe el circuito de modo que  $v_o = 20 v_s$ .

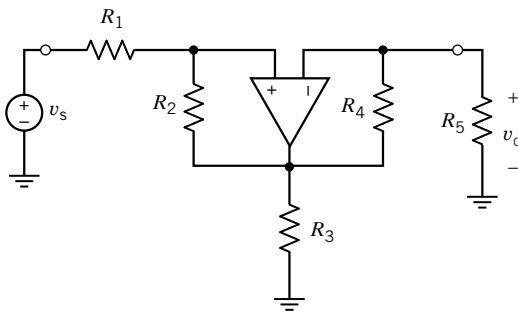


Figura P 6.4-14

**P 6.4-15** El circuito que se muestra en la figura P 6.4-15 tiene una entrada,  $v_s$ , y una salida,  $v_o$ . El circuito contiene siete resistores que tiene una resistencia igual,  $R$ . Expresé la ganancia del circuito,  $v_o/v_s$  en términos de la resistencia  $R$ .

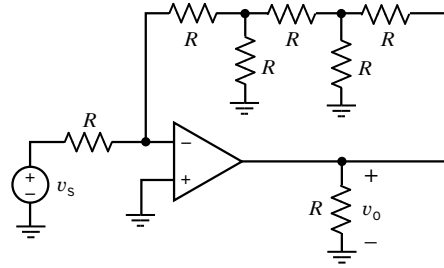


Figura P 6.4-15

**P 6.4-16** El circuito que se muestra en la figura P 6.4-16 tiene una entrada,  $v_s$ , y una salida,  $v_o$ . Expresé la ganancia,  $v_o/v_s$ , en términos de las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  y  $R_5$ . Diseñe el circuito de modo que  $v_o = 20 v_s$ .

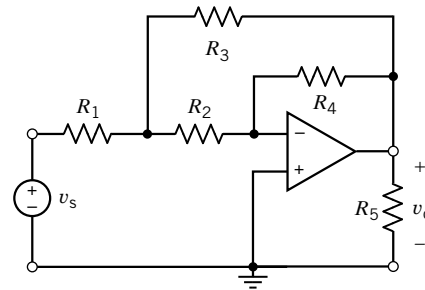


Figura P 6.4-16

**P 6.4-17** El circuito que se muestra en la figura P 6.4-17 tiene una entrada,  $v_s$ , y una salida,  $v_o$ . Expresé la ganancia del circuito,  $v_o/v_s$ , en términos de las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $R_5$  y  $R_6$ . Diseñe el circuito de modo que  $v_o = 20 v_s$ .

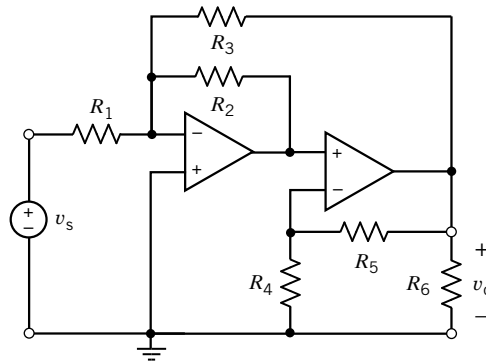


Figura P 6.4-17

**P 6.4-18** El circuito que se muestra en la figura P 6.4-18 tiene una entrada,  $v_s$ , y una salida,  $i_o$ . Expresé la ganancia del circuito,  $i_o/v_s$ , en términos de las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_5$ . (Este circuito contiene un par de resistencias que tienen resistencia  $R_1$  y otro par que tiene resistencia  $R_2$ .) Diseñe el circuito de modo que  $i_o = 0.02 v_s$ .

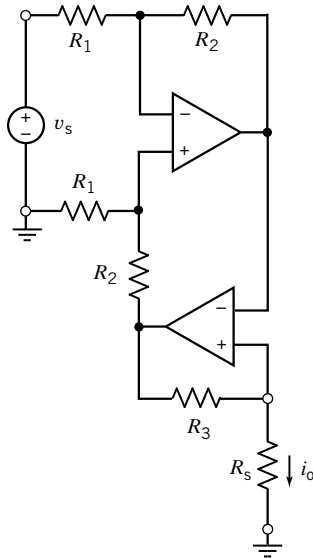


Figura P 6.4-18

**P 6.4-19** El circuito que se muestra en la figura P 6.4-19 tiene una entrada,  $v_s$ , y una salida,  $v_o$ . El circuito contiene una resistencia no especificada  $R$ .

- (a) Exprese la ganancia del circuito  $v_o/v_s$ , en términos de la resistencia  $R$ .
- (b) Determine el rango de valores de la ganancia que se puede obtener especificando un valor para la resistencia  $R$ .
- (c) Diseñe el circuito de modo que  $v_o = -3 v_s$ .

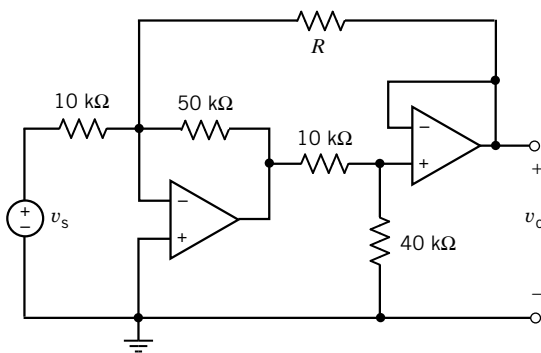


Figura P 6.4-19

**P 6.4-20** El circuito que se muestra en la figura P 6.4-20 tiene una entrada,  $v_s$ , y una salida,  $v_o$ . El circuito contiene una resistencia no especificada  $R$ .

- (a) Exprese la ganancia del circuito  $v_o/v_s$ , en términos de la resistencia  $R$ .
- (b) Determine el rango de valores de la ganancia que se puede obtener especificando un valor para la resistencia  $R$ .
- (c) Diseñe el circuito de modo que  $v_o = -5 v_s$ .

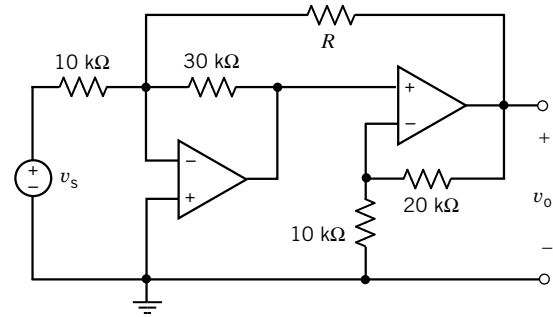


Figura P 6.4-20

**P 6.4-21** El circuito que se muestra en la figura P 6.4-21 tiene tres entradas,  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ . La salida de los circuitos es  $v_o$ . La salida se relaciona con las entradas por

$$v_o = av_1 + bv_2 + cv_3$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes. Determine los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

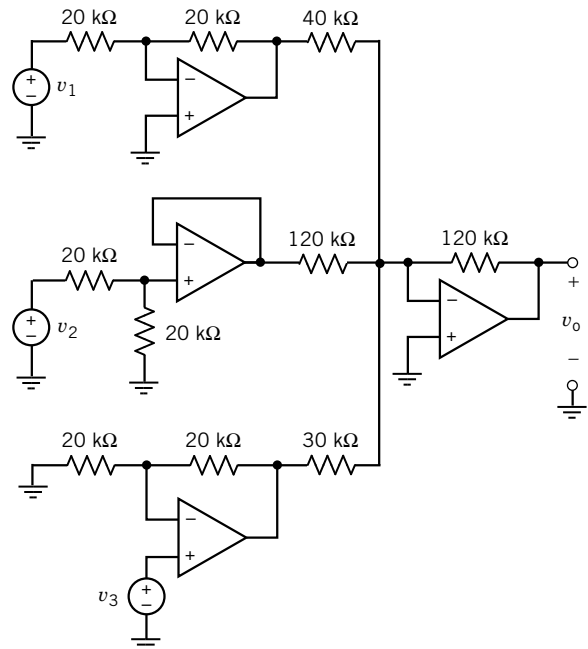


Figura P 6.4-21

**P 6.4-22** El circuito que se muestra en la figura P 6.4-22 tiene dos entradas,  $v_1$  y  $v_2$ . La salida del circuito es  $v_o$ . La salida se relaciona con las entradas por

$$v_o = av_1 + bv_2$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes. Determine los valores de  $a$  y  $b$ .

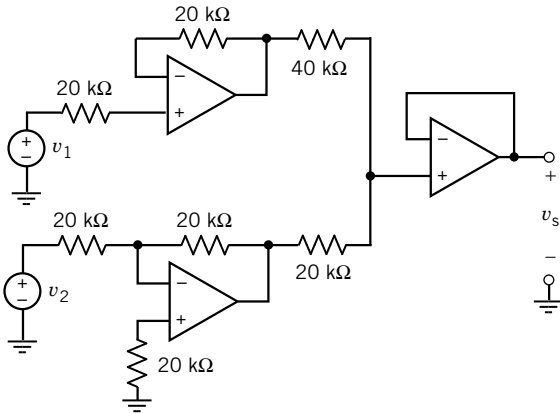


Figura P 6.4-23

**P 6.4-23** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 6.4-23 es el voltaje de la fuente de voltaje  $v_s$ . La salida es el voltaje de nodos  $v_o$ . La salida se relaciona con la entrada por la ecuación  $v_o = kv_s$ , donde  $k = \frac{v_o}{v_s}$  se denomina ganancia del circuito. Determine el valor de la ganancia  $k$ .

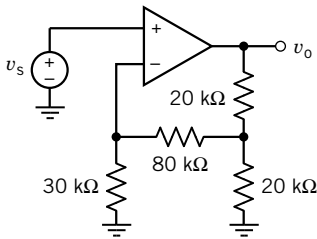


Figura P 6.4-24

**P 6.4-24** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 6.4-24 es la corriente de la fuente de corriente  $i_s$ . La salida es el voltaje de nodos  $v_o$ . La salida se relaciona con la entrada por la ecuación  $v_o = mi_s + b$  donde  $m$  y  $b$  son constantes. Determine los valores de  $m$  y  $b$ .

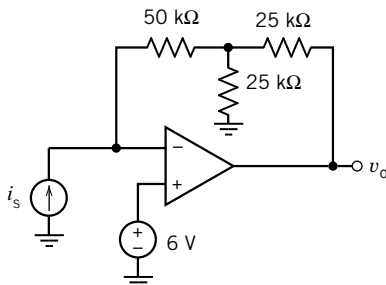


Figura P 6.4-24

**P 6.4-25** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 6.4-25 es el voltaje de los nodos  $v_s$ . La salida es el voltaje de los nodos  $v_o$ . La salida se relaciona con la entrada por la ecuación  $v_o = kv_s$ , donde  $k = \frac{v_o}{v_s}$  se denomina ganancia del circuito. Determine el valor de la ganancia  $k$ .

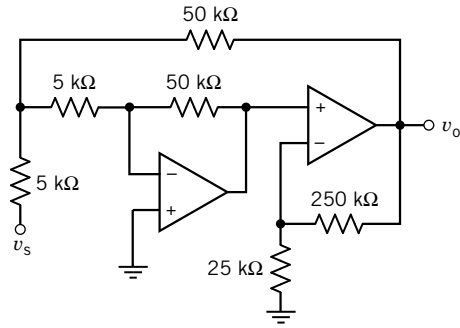


Figura P 6.4-25

**P 6.4-26** Los valores de los voltajes de nodos  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_o$  en la figura P 6.4-26 son  $v_1 = 6.25$ ,  $v_2 = 3.75$  y  $v_o = -15$  V. Determine el valor de las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ .

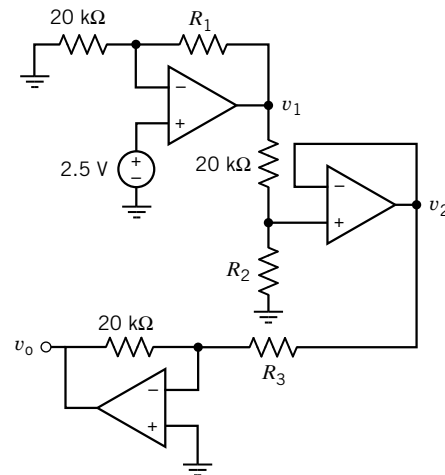


Figura P 6.4-26

**P 6.4-27** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 6.4-27 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i$ . La salida es el voltaje de los nodos,  $v_o$ . La salida se relaciona con la entrada por la ecuación  $v_o = kv_i$  donde  $k = \frac{v_o}{v_i}$  se denomina la ganancia del circuito. Determine el valor de la ganancia  $k$ .

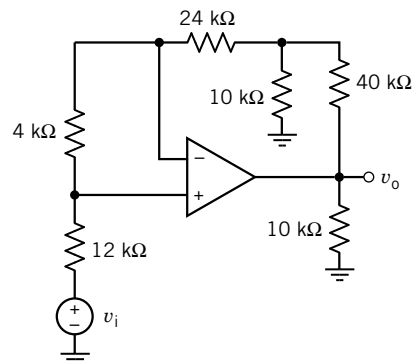


Figura P 6.4-27

**Sección 6.5 Diseño mediante el uso de amplificadores operacionales**

**P 6.5-1** Diseñe el circuito del amplificador operacional de la figura P 6.5-1 de modo que

$$V_{sal} = r \times i_{ent}$$

donde

$$r = 20 \frac{V}{mA}$$

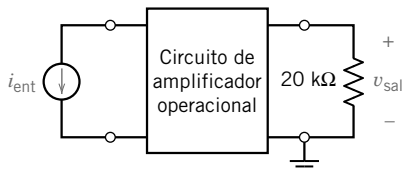


Figura P 6.5-1

**P 6.5-2** Diseñe el circuito del amplificador operacional de la figura P 6.5-2 de modo que

$$i_{sal} = g \times v_{ent}$$

donde

$$g = 2 \frac{mA}{V}$$

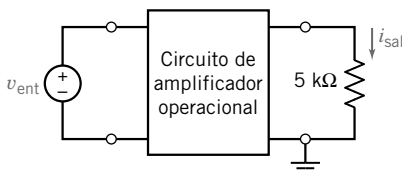


Figura P 6.5-2

**P 6.5-3** Diseñe el circuito del amplificador operacional de la figura P 6.5-3 de modo que

$$V_{sal} = 5 \times v_1 + 2 \times v_2$$

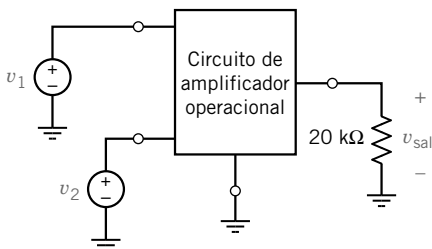


Figura P 6.5-3

**P 6.5-4** Diseñe el circuito del amplificador operacional de la figura P 6.5-4 de modo que

$$V_{sal} = 5 \times (v_1 - v_2)$$

**P 6.5-5** Diseñe el circuito del amplificador operacional de la figura P 6.5-5 de modo que

$$V_{sal} = 5 \times v_1 - 2 \times v_2$$

**P 6.5-6** El divisor de voltaje que se muestra en la figura P 6.5-6 tiene una ganancia de

$$\frac{v_{sal}}{v_{ent}} = \frac{-10 \text{ k}\Omega}{5 \text{ k}\Omega + (-10 \text{ k}\Omega)} = 2$$

Diseñe un circuito de amplificador operacional para implementar el resistor de  $-10 \text{ k}\Omega$ .

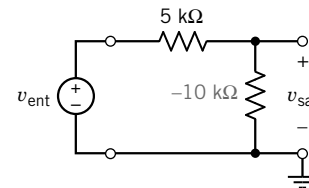


Figura P 6.5-6 Un circuito con un resistor negativo.

**P 6.5-7** Diseñe el circuito del amplificador operacional de la figura P 6.5-7 de modo que

$$i_{ent} = 0 \quad \text{y} \quad v_{sal} = 3 \cdot v_{ent}$$

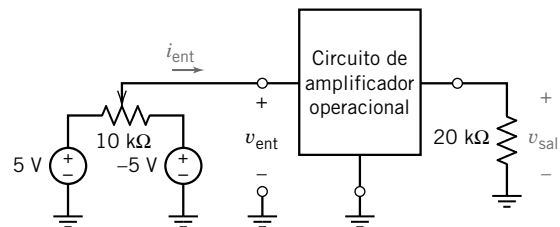


Figura P 6.5-7

**P 6.5-8** Diseñe un circuito de amplificador operacional con salida  $v_o = 6 v_1 + 2 v_2$ , donde  $v_1$  y  $v_2$  son voltajes de entrada.

**P 6.5-9** Determine el voltaje  $v_o$  para el circuito que se muestra en la figura P 6.5-9.

*Sugerencia:* Utilice la superposición.

*Respuesta:*  $v_o = (-3)(3) + (4)(-4) + (4)(8) = 7 \text{ V}$

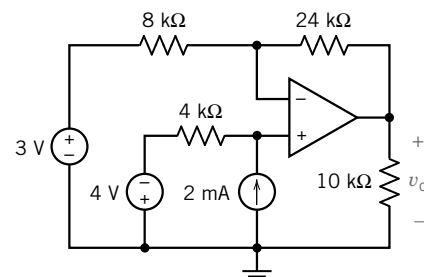


Figura P 6.5-9

**P 6.5-10** Para el circuito del amplificador operacional de la figura P 6.5-10, encuentre y enliste todas las ganancias de voltaje posibles que se puedan lograr al conectar las terminales del resistor tanto a las terminales de voltaje de entrada como a las de salida.

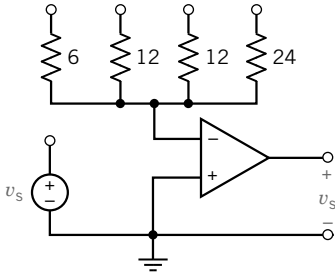


Figura P 6.5-10 Resistencias en kΩ.

**P 6.5-11** El circuito que se muestra en la figura P 6.5-11 se denomina fuente de corriente de Howland. Tiene una entrada,  $v_{ent}$ , y una salida,  $i_{sal}$ . Muestre que cuando se eligen las resistencias de modo que  $R_2R_3 = R_1R_4$ , la salida se relacione con la entrada por la ecuación

$$i_{sal} = \frac{v_{ent}}{R_1}$$

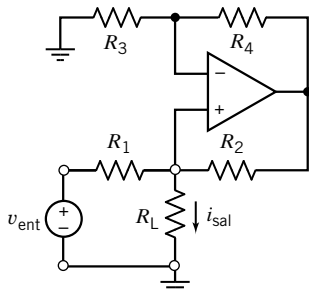


Figura P 6.5-11

**P 6.5-12** El circuito que se muestra en la figura P 6.5-12 se usa para calcular la resistencia de salida de la fuente de corriente de Howland. Tiene una entrada,  $i_t$ , y una salida,  $v_t$ . La resistencia de salida,  $R_o$ , está dada por

$$R_o = \frac{v_t}{i_t}$$

Expresé la resistencia de salida de la fuente de corriente de Howland en términos de las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$ .

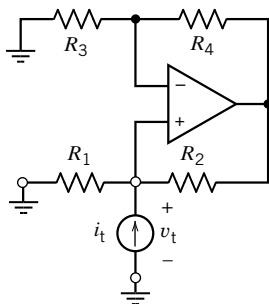


Figura P 6.5-12

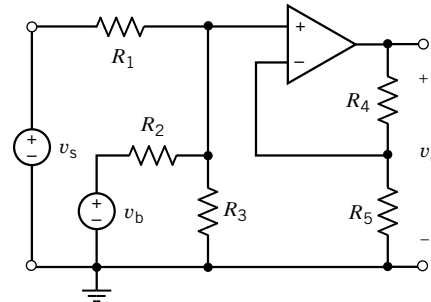
**P 6.5-13** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 6.5-13a es el voltaje,  $v_s$ . La salida es el voltaje  $v_o$ . El voltaje  $v_b$  se utiliza para ajustar la relación entre la entrada y la salida.

(a) Muestre que la salida de este circuito se relaciona con la entrada por la ecuación

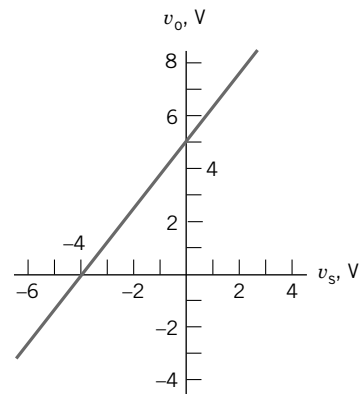
$$v_o = av_s + b$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes que dependen de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $R_5$  y  $v_b$ .

(b) Diseñe el circuito de modo que su entrada y salida tengan la relación especificada por la gráfica que se muestra en la figura P 6.5-13b.



(a)



(b)

Figura P 6.5-13

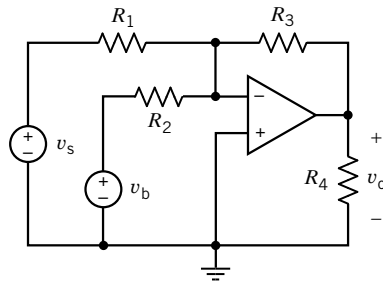
**P 6.5-14** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 6.5-14a es el voltaje,  $v_s$ . La salida es el voltaje  $v_o$ . El voltaje  $v_b$  se utiliza para ajustar la relación entre la entrada y la salida.

(a) Muestre que la salida de este circuito se relaciona con la entrada por la ecuación

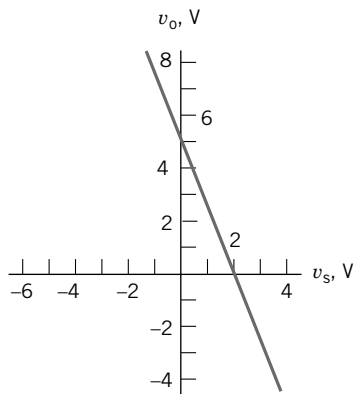
$$v_o = av_s + b$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes que dependen de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  y  $v_b$ .

(b) Diseñe el circuito de modo que su entrada y salida tengan la relación especificada por la gráfica que se muestra en la figura P 6.5-14b.



(a)



(b)

Figura P 6.5-14

**\*P 6.5-15** El circuito que se muestra en la figura P 6.5-15 contiene un amplificador operacional y un potenciómetro. Este circuito se denomina potenciómetro activo (Graeme, 1982) porque la resistencia equivalente,  $R_{eq}$ , toma valores tanto positivos como negativos en cuanto varía la posición del contacto deslizante del potenciómetro.  $R_p$  es la resistencia del potenciómetro. Las expresiones  $aR_p$  y  $(1-a)R_p$  indican las resistencias que aparecen entre las terminales y-w y x-w del potenciómetro, respectivamente. Exprese la resistencia equivalente de la fuente del potenciómetro activo en términos de  $R$ ,  $R_p$  y  $a$ .

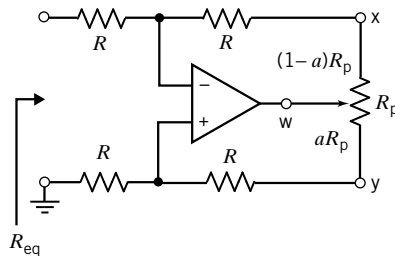


Figura P 6.5-15

**\*P 6.5-16** El circuito que se muestra en la figura P 6.5-16 contiene un amplificador operacional y un potenciómetro. Este circuito tiene una ganancia ajustable,  $v_o/v_1$ , que toma valores tanto positivos como negativos en cuanto varía la posición del contacto deslizante del potenciómetro (Albean, 1997).  $R_p$  es la resistencia del potenciómetro. La expresión  $aR_p$  y  $(1-a)R_p$

indica la parte de  $R_p$  que aparece entre las terminales y-w del potenciómetro.

- (a) Exprese la ganancia en términos de resistencias del resistor  $R_p$  y  $a$ .
- (b) Establezca  $R_1 = R_3 = R_4 = \frac{1}{2}R_p$ . Diseñe el circuito de modo que la ganancia varíe de  $-10$  V a  $10$  V en cuanto la posición del contacto deslizante del potenciómetro varíe a través de todo su rango.

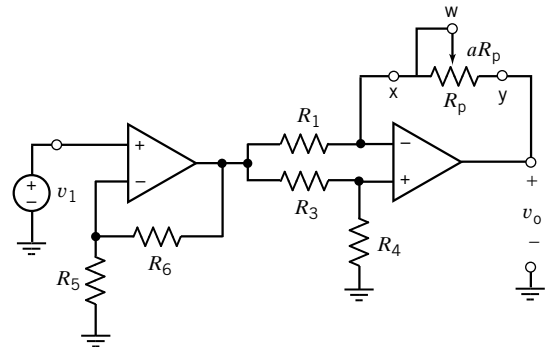


Figura P 6.5-16

**P 6.5-17** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 6.5-17 es el voltaje de la fuente de voltaje  $v_s$ . La salida es el voltaje de nodos  $v_o$ . La salida se relaciona con la entrada por la ecuación  $v_o = k v_s$  donde  $k = \frac{v_o}{v_s}$  se denomina ganancia del circuito. (En la figura P 6.5-17,  $a$  y  $b$  son constantes positivas reales, de modo que las resistencias  $aR$  y  $bR$  son tantas veces  $a$  y  $b$  cuan grandes sean las resistencias  $R$ .) Derive una ecuación que muestre cómo tomar valores de  $a$  y  $b$  que hagan que el circuito tenga una ganancia dada  $k$ . Utilice esta ecuación para diseñar el circuito que tenga una ganancia  $k = 8$  V/V utilizando  $R = 20$  k $\Omega$ .

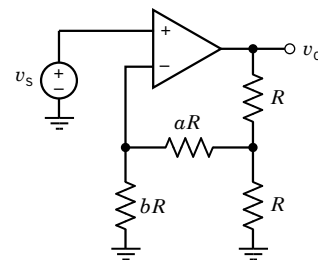


Figura P 6.5-17

**P 6.5-18** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 6.5-18 es la corriente de la fuente de corriente  $i_s$ . La salida es el voltaje de nodos  $v_o$ . La salida se relaciona con la entrada por la ecuación  $v_o = m i_s + b$  donde  $m$  y  $b$  son constantes. (En la figura P 6.5-18,  $c$  y  $d$  son constantes positivas reales, de modo que las resistencias  $cR$  y  $dR$  son tantas veces  $c$  y  $d$  cuan grandes sean las resistencias  $R$ .) Derive una ecuación que muestre cómo tomar valores de  $c$  y  $d$  que hagan que el circuito tenga valores de  $m$  y  $b$ . Utilice esta ecuación para diseñar el circuito que tenga  $m = -125$  V/mA y  $b = 12$  V cuando  $R = 25$  k $\Omega$ .

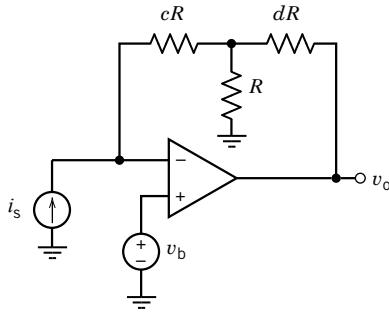


Figura P 6.5-18

**P 6.5-19** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 6.5-19 es el voltaje de la fuente de voltaje  $v_s$ . La salida es el voltaje de nodos  $v_o$ . La salida se relaciona con la entrada por la ecuación  $v_o = mv_s + b$  donde  $m$  y  $b$  son constantes. (a) Especifique valores de  $R_3$  y  $v_a$  que hagan que la salida se relacione con la entrada por la ecuación  $v_o = 4v_s + 7$ . (b) Determine los valores de  $m$  y  $b$  cuando  $R_3 = 20 \text{ k}\Omega$  y  $v_a = 2.5 \text{ V}$ .

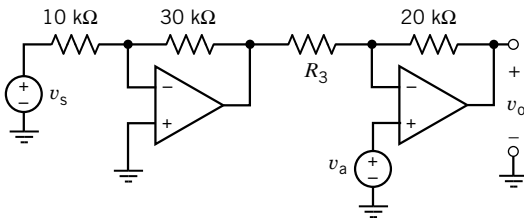


Figura P 6.5-19

**P 6.5-20** El circuito que se muestra en la figura P 6.5-20 utiliza un potenciómetro para implementar un resistor variable que tenga un resistencia  $R$  que varíe sobre el rango

$$0 < R < 200 \text{ k}\Omega$$

La ganancia de este circuito es  $G = \frac{v_o}{v_s}$ . Variar la resistencia  $R$  sobre su rango hace que el valor de la ganancia  $G$  varíe sobre el rango

$$G_{\min} \leq \frac{v_o}{v_s} \leq G_{\max}$$

Determine los valores mínimo y máximo de las ganancias  $G_{\min}$  y  $G_{\max}$ .

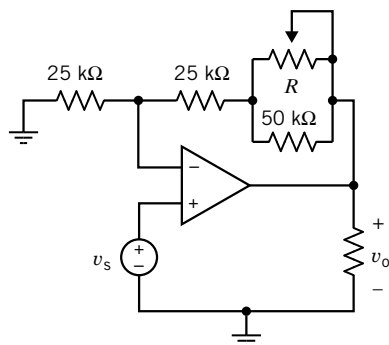
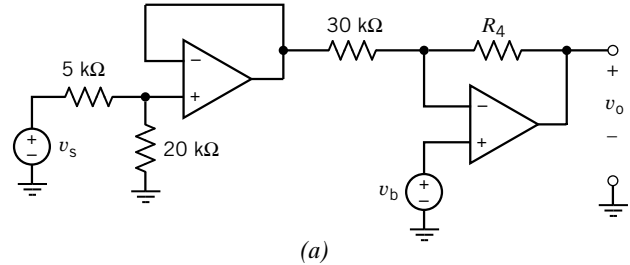
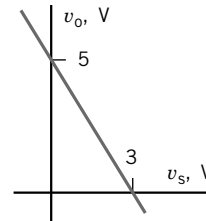


Figura P 6.5-20

**P 6.5-21** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 6.5-21a es el voltaje  $v_s$ . La salida es el voltaje  $v_o$ . El voltaje  $v_b$  se utiliza para ajustar la relación entre la entrada y la salida. Determine los valores de  $R_4$  y  $v_b$  que hacen que la entrada y la salida del circuito tengan la relación especificada por la gráfica que se muestra en la figura P 6.5-21b.



(a)



(b)

Figura P 6.5-21

**Sección 6.6 Circuitos de amplificadores operacionales y ecuaciones algebraicas lineales**

**P 6.6-1** Diseñe un circuito para implementar la ecuación

$$z = 4w + \frac{x}{4} - 3y$$

El circuito deberá tener una salida que corresponda a  $z$ , y tres entradas, que correspondan a  $w$ ,  $x$  y  $y$ .

**P 6.6-2** Diseñe un circuito para implementar la ecuación

$$0 = 4w + x + 10 - (6y + 2z)$$

La salida del circuito deberá corresponder a  $z$ .

**Sección 6.7 Características de los amplificadores operacionales prácticos**

**P 6.7-1** Considere el amplificador inversor que se muestra en la figura P 6.7-1. El amplificador operacional es un OP-07E típico (tabla 6.7-1). Utilice los modelos de ramas del amplificador operacional para calcular el voltaje de ramas de salida. (Recuerde que la entrada,  $v_{in}$ , se establece en cero al calcular el voltaje de ramas de salida).

Respuesta: 0.45 mV

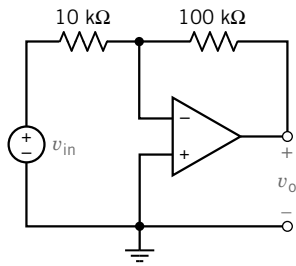


Figura P 6.7-1

**P 6.7-2** Considere el amplificador no inversor que se muestra en la figura P 6.7-2. El amplificador operacional es un LF351 típico (tabla 6.7-1). Utilice los modelos de ramas del amplificador operacional para calcular el voltaje de ramas de salida. (Recuerde que la entrada,  $v_{in}$ , se establece en cero al calcular el voltaje de ramas de salida).

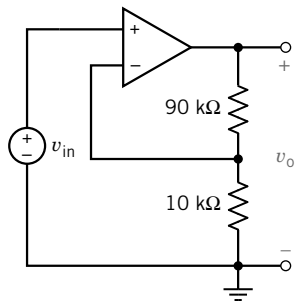


Figura P 6.7-2

**P 6.7-3** Considere el amplificador inversor que se muestra en la figura P 6.7-3. Utilice el modelo de ganancia finita del amplificador operacional (figura 6.7-1c) para calcular la ganancia del amplificador inversor. Muestre que

$$\frac{v_o}{v_{in}} = \frac{R_{in}(R_s - AR_2)}{(R_1 + R_{in})(R_o + R_2) + R_1 R_{in}(1 + A)}$$

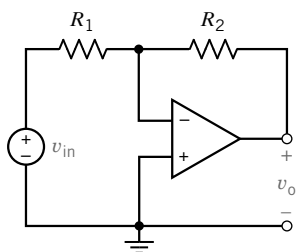


Figura P 6.7-3

**P 6.7-4** Considere el amplificador inversor que se muestra en la figura P 6.7-3. Suponga que el amplificador operacional es ideal,  $R_1 = 5 \text{ k}\Omega$  y  $R_2 = 50 \text{ k}\Omega$ . La ganancia del amplificador inversor será

$$\frac{v_o}{v_{in}} = -10$$

Utilice los resultados del problema P 6.7-3 para encontrar la ganancia del amplificador operacional en cada uno de los siguientes casos:

- (a) El amplificador operacional es ideal, pero se usan resistores de 2% y  $R_1 = 5.1 \text{ k}\Omega$  y  $R_2 = 49 \text{ k}\Omega$ .
- (b) El amplificador operacional se representa utilizando el modelo de la ganancia finita con  $A = 200\,000$ ,  $R_i = 2 \text{ M}\Omega$ , y  $R_o = 75 \Omega$ ;  $R_1 = 5 \text{ k}\Omega$  y  $R_2 = 50 \text{ k}\Omega$ .
- (c) El amplificador operacional se representa utilizando el modelo de ganancia finita con  $A = 200\,000$ ,  $R_i = 2 \text{ M}\Omega$ , y  $R_o = 75 \Omega$ ;  $R_1 = 5.1 \text{ k}\Omega$  y  $R_2 = 49 \text{ k}\Omega$ .

**P 6.7-5** El circuito en la figura P 6.7-5 se denomina amplificador de diferencia y se utiliza para circuitos de instrumentación. La salida de un elemento de medición se representa por la señal de modo común  $v_{cm}$  y la señal de diferencial ( $v_n + v_p$ ). Utilizando un amplificador operacional, muestre que

$$v_o = -\frac{R_4}{R_1}(v_n + v_p)$$

cuando

$$\frac{R_4}{R_1} = \frac{R_3}{R_2}$$

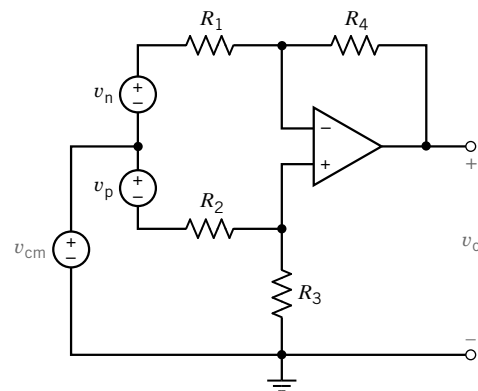


Figura P 6.7-5

**Sección 6.10 ¿Cómo lo podemos comprobar...?**

**P 6.10-1** El análisis del circuito de la figura P 6.10-1 muestra que  $i_o = -1 \text{ mA}$  y  $v_o = 7 \text{ V}$ . ¿Este análisis es correcto?



**Sugerencia:** ¿Se satisfizo la KCL en el nodo de salida del amplificador operacional?

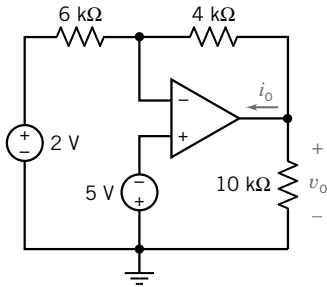


Figura P 6.10-1

**P 6.10-2** Su compañero de laboratorio midió el voltaje de salida del circuito que se muestra en la figura P 6.10-2 de  $v_o = 9.6$  V. ¿Este voltaje de salida es correcto para este circuito?

**Sugerencia:** Pida a su compañero de laboratorio que compruebe la polaridad del voltaje que haya medido.

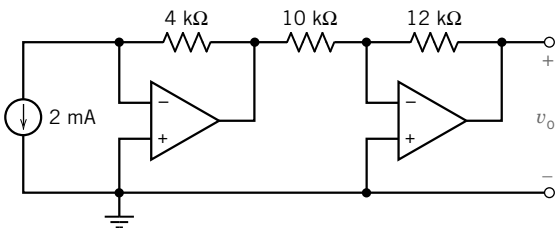


Figura P 6.10-2

**P 6.10-3** El análisis nodal del circuito que se muestra en la figura P 6.10-3 indica que  $v_o = -12$  V. ¿Es correcto este análisis?

**Sugerencia:** Trace nuevamente el circuito para identificar un amplificador inversor y un amplificador no inversor.

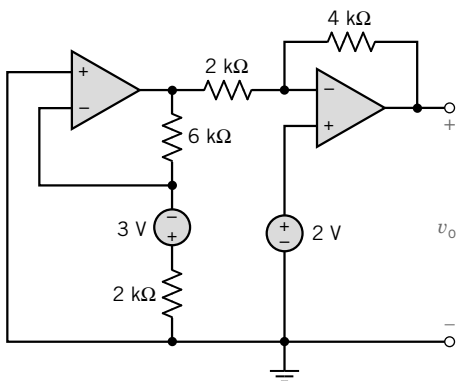


Figura P 6.10-3

**P 6.10-4** El análisis por computadora del circuito que se muestra en la figura P 6.10-4 indica que los voltajes de nodos son  $v_a = -5$  V,  $v_b = 0$  V,  $v_c = 2$  V,  $v_d = 5$  V,  $v_e = 2$  V,  $v_f = 2$  V y  $v_g = 11$  V. ¿Es correcto este análisis? Justifique su respuesta. Suponga que el amplificador operacional es ideal.

**Sugerencia:** Compruebe que las corrientes del resistor indicadas por esos voltajes de nodos satisfacen la KCL en los nodos b, c, d y f.

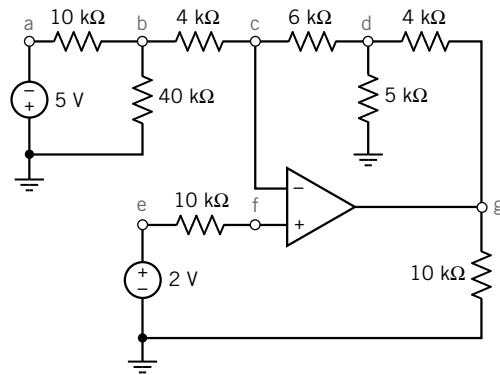


Figura P 6.10-4

**P 6.10-5** El análisis por computadora del sumando amplificador no inversor que se muestra en la figura P 6.10-5 indica que los voltajes de nodos son  $v_a = 2$  V,  $v_b = -0.25$  V,  $v_c = -5$  V,  $v_d = -2.5$  V y  $v_e = -0.25$  V.

- ¿Es correcto este análisis?
- ¿Este análisis verifica que el circuito es un sumando amplificador no inversor? Justifique sus respuestas. Suponga que el amplificador operacional es ideal.

**Primera sugerencia:** Compruebe que las corrientes de resistor indicadas por estos voltajes de nodos satisfacen la KCL en los nodos b y e.

**Segunda sugerencia:** Compare la figura 6.5-1e para ver que  $R_a = 10$  kΩ y  $R_b = 1$  kΩ. Determine  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_4$  a partir de los valores de la resistencia. Compruebe que  $v_d = K_4(K_1v_a + K_2v_c)$ .

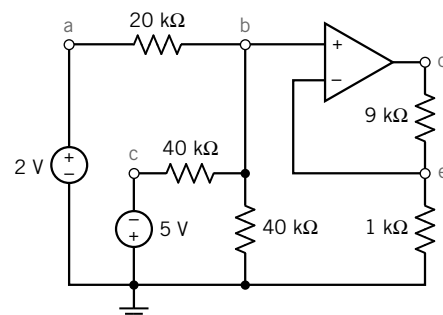


Figura P 6.10-5

## Problemas de PSpice

**PS 6-1** El circuito en la figura PS 6-1 tiene tres entradas:  $v_w$ ,  $v_x$  y  $v_y$ . El circuito tiene una salida,  $v_z$ . La ecuación

$$v_z = av_w + bv_x + cv_y$$

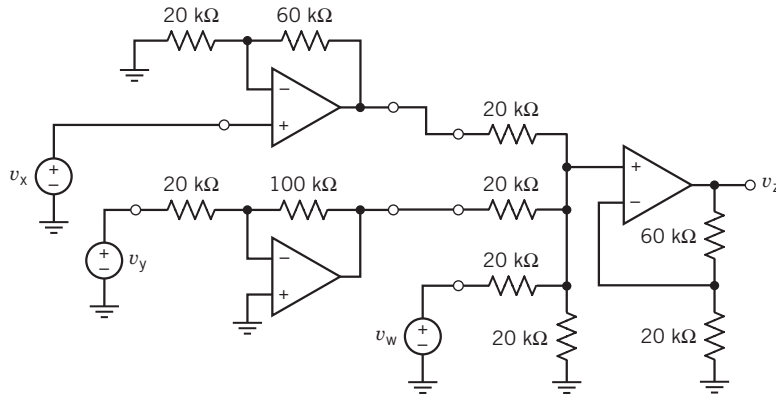


Figura PS 6-1

expresa la salida como una función de las entradas. Los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes reales.

- (a) Utilice PSpice y el principio de superposición para determinar los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ .
- (b) Suponga  $v_w = 2V$ ,  $v_x = x$ ,  $v_y = y$ , y queremos que la salida sea  $v_z = z$ . Expresé  $z$  como una función de  $x$  y  $y$ .

**Sugerencia:** La salida la da  $v_z = a$  cuando  $v_w = 1V$ ,  $v_x = 0V$  y  $v_y = 0V$ .

**Respuesta:** (a)  $v_z = v_w + 4v_x - 5v_y$  (b)  $z = 4x - 5y + 2$

**PS 6-2** La entrada al circuito en la figura PS 6-2 es  $v_s$ , y la salida es  $v_o$ . (a) Utilice la superposición para expresar  $v_o$  como una función de  $v_s$ . (b) Utilice la característica Sweep CD de PSpice para trazar  $v_o$  como una función de  $v_s$ . (c) Verifique si los resultados de las partes (a) y (b) concuerdan.

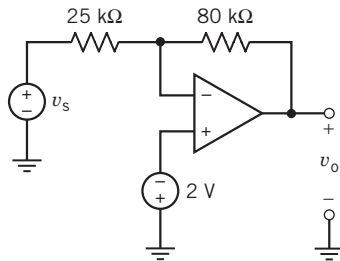


Figura PS 6-2

**PS 6-3** Un circuito con sus nodos identificados como se muestra en la figura PS 6-3. Determine  $v_{34}$ ,  $v_{23}$  e  $i_o$ .

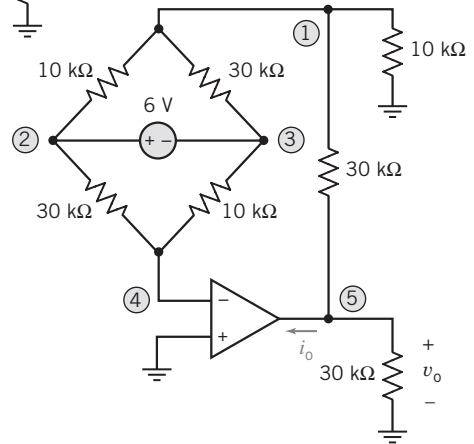


Figura PS 6-3 Circuito de puente.

**PS 6-4** Utilice PSpice para analizar la VCCS que se muestra en la figura PS 6-4. Considere dos casos:

- (a) El amplificador operacional es ideal.
- (b) El amplificador operacional es un  $\mu A741$  típico representado por el modelo de ramas y de ganancia finita.

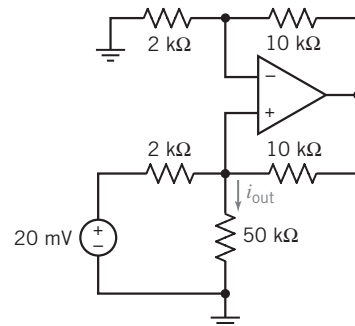


Figura PS 6-4 Una VCCS.

## Problemas de diseño

**PD 6-1** Diseñe el circuito del amplificador operacional de la figura PD 6-1 de modo que

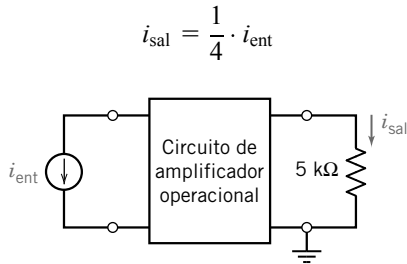


Figura PD 6-1

**PD 6.2** La figura PD 6-2a muestra un circuito que tiene una entrada,  $v_i$ , y una salida,  $v_o$ . La figura PD 6-2b muestra una gráfica que especifica una relación entre  $v_o$  y  $v_i$ . Diseñe un circuito que tenga entrada,  $v_i$ , y salida,  $v_o$ , que tengan la relación especificada por la gráfica en la figura PD 6-2b.

*Sugerencia:* Se requiere una entrada constante. Suponga que hay una fuente de 5 V disponible.

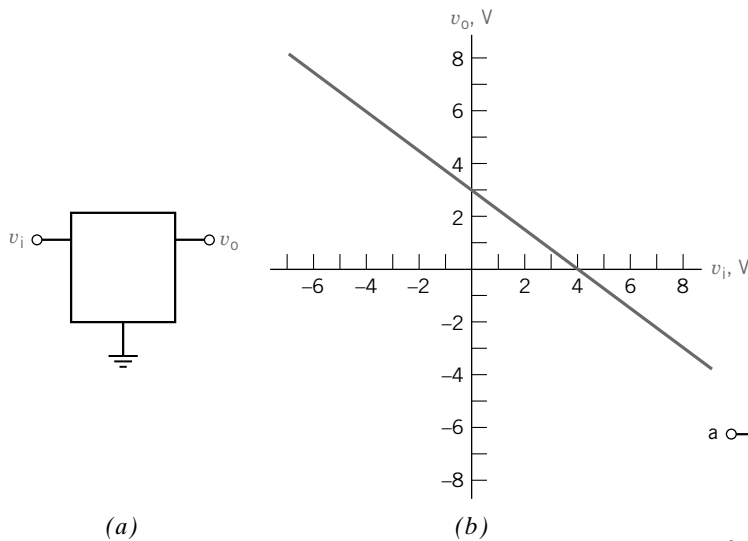


Figura PD 6-2

**PD 6-3** Diseñe un circuito que tenga una entrada,  $v_i$ , y una salida,  $v_o$ , que estén relacionadas por las ecuaciones (a)  $v_o = 12v_i + 6$ , (b)  $v_o = 12v_i - 6$ , (c)  $v_o = -12v_i + 6$  y (d)  $v_o = -12v_i - 6$ .

*Sugerencia:* Se requiere una entrada constante. Suponga que hay una fuente de 5 V disponible.

**PD 6-4** Diseñe un circuito que tenga tres entradas,  $v_1, v_2, v_3$  y dos salidas,  $v_a, v_b$  relacionadas por la ecuación

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 3 & -2 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

*Sugerencia:* Se requiere una entrada constante. Suponga que hay una fuente de 5 V disponible.

**PD 6-5** Un micrófono tiene un voltaje desbloqueado  $v_s = 20$  mV, como se muestra en la figura PD 6-5a. Se dispone de un amplificador operacional, como se muestra en la figura PD 6-5b. Se desea que proporcione un voltaje de salida de 4 V. Diseñe un circuito inversor y un circuito no inversor y contraonga la resistencia de entrada comprendida en las terminales x-y por el micrófono. ¿Cuál configuración recomendaría usted para lograr un buen desempeño a pesar de la resistencia  $R_s$  del micrófono?

*Sugerencia:* Planeamos conectar la terminal a a la terminal x, y la terminal b a la terminal y, o viceversa.

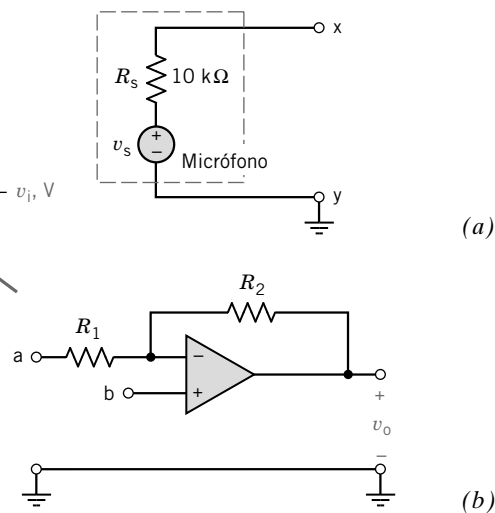


Figura PD 6-5 Circuito de micrófono y amp op ideal.

# Elementos que almacenan energía



## CAPÍTULO

# 7

### EN ESTE CAPÍTULO

- |     |   |      |   |
|-----|---|------|---|
| 7.1 | Introducción  | 7.10 | Uso de MATLAB para trazar el voltaje o la corriente de un condensador o un inductor |
| 7.2 | Condensadores   | 7.11 | ¿Cómo lo podemos comprobar...?  |
| 7.3 | Almacenamiento de energía en un condensador                               | 7.12 | <b>EJEMPLO DE DISEÑO</b> — Integrador e interruptor                                 |
| 7.4 | Condensadores en serie y en paralelo                                      | 7.13 | Resumen   |
| 7.5 | Inductores  |      | Problemas   |
| 7.6 | Almacenamiento de energía en un inductor                                  |      | Problemas de PSpice   |
| 7.7 | Inductores en serie y en paralelo   |      | Problemas de diseño   |
| 7.8 | Condiciones iniciales de circuitos permanentes                            |      |   |
| 7.9 | Circuitos de amplificador operacional y ecuaciones diferenciales lineales |      |   |

## 7.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo presenta otros dos elementos de circuitos, el condensador y el inductor. Las ecuaciones constitutivas para los dispositivos implican la integración o la diferenciación. En consecuencia:

- Los circuitos eléctricos que contienen condensadores y/o inductores están representados por ecuaciones diferenciales. Los circuitos que no contienen condensadores o inductores están representados por ecuaciones algebraicas. Decimos que los circuitos que contienen condensadores y/o inductores son circuitos **dinámicos**, en tanto que los circuitos que no contienen condensadores ni inductores son circuitos **estáticos**.
- Los circuitos que contienen condensadores y/o inductores son capaces de almacenar energía.
- Los circuitos que contienen condensadores y/o inductores tienen memoria. Los voltajes y corrientes en un momento particular dependen no sólo de otros voltajes o corrientes en el instante mismo de tiempo, sino también de los valores previos de esas corrientes o voltajes.

Además, veremos que:

- Al no haber corrientes o voltajes libres, los voltajes del condensador o las corrientes del inductor son funciones continuas de tiempo.
- En un circuito de cd los condensadores actúan como circuitos abiertos y los inductores como circuitos en corto.
- Un conjunto de condensadores en serie o en paralelo se puede reducir a un condensador equivalente. Un conjunto de inductores en serie o en paralelo se puede reducir a un inductor equivalente. Hacer esto no modifica la corriente o el voltaje del elemento de ningún otro elemento del circuito.

- Se pueden usar un AO y un condensador para construir circuitos que realicen operaciones matemáticas de integración o diferenciación. A estos circuitos importantes se les ha llamado, apropiadamente, el integrador y el diferenciador.
- Los voltajes y las corrientes de los elementos de un circuito que contiene condensadores e inductores pueden ser funciones complicadas de tiempo. MATLAB es útil para el trazo de estas funciones.

## 7.2 CONDENSADORES

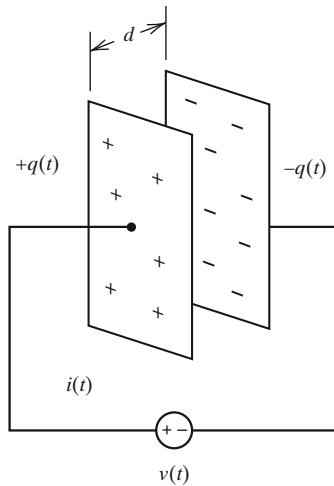


FIGURA 7.2-1 Un condensador conectado a una fuente de voltaje.

Un condensador es un elemento de circuito que almacena energía en un campo eléctrico. Se puede construir un condensador utilizando dos placas conductoras paralelas separadas por una distancia  $d$ , como se muestra en la figura 7.2-1. La carga eléctrica se almacena en las placas, y existe un campo eléctrico uniforme entre las placas conductoras siempre que haya un voltaje a través del condensador. El espacio entre las placas está ocupado pro completo por un material dieléctrico. Para un dieléctrico, algunos condensadores utilizan papel impregnado en tanto que otros utilizan hojas de mica, cerámica, película de metal o simplemente aire. Una propiedad del material dieléctrico, denominada constante dieléctrica, describe la relación entre la intensidad del campo eléctrico y el voltaje del condensador. Los condensadores están representados por un parámetro denominado *capacitancia*. La capacitancia de un condensador es proporcional a la constante dieléctrica y al área superficial de las placas, y es inversamente proporcional a la distancia entre las placas. En otras palabras, la capacitancia  $C$  de un condensador está dada por

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

donde  $\epsilon$  es la constante dieléctrica,  $A$  el área de las placas y  $d$  la distancia entre placas. La unidad de capacitancia es el culombio por voltio y se denomina faradio (F) en honor de Michael Faraday.

El voltaje de un condensador  $v(t)$  deposita una carga  $+q(t)$  en una placa y una carga  $-q(t)$  en la otra. Decimos que la carga  $q(t)$  se almacena en el condensador. La carga almacenada por un condensador es proporcional al voltaje del condensador,  $v(t)$ . Por lo tanto, se escribe

$$q(t) = Cv(t) \quad (7.2-1)$$

donde la constante de proporcionalidad,  $C$ , es la capacitancia del condensador.

**Capacitancia** es una medida de la capacidad de almacenar energía en forma de carga separada o de un campo eléctrico.

En general, el voltaje del condensador  $v(t)$  varía como una función de tiempo. En consecuencia,  $q(t)$ , la carga almacenada por el condensador también varía como una función de tiempo. La variación de la carga del condensador con respecto al tiempo implica una corriente de condensador,  $i(t)$ , dada por

$$i(t) = \frac{d}{dt}q(t)$$

Diferenciamos la ecuación 7.2.-1 para obtener.

$$i(t) = C \frac{d}{dt}v(t) \quad (7.2-2)$$

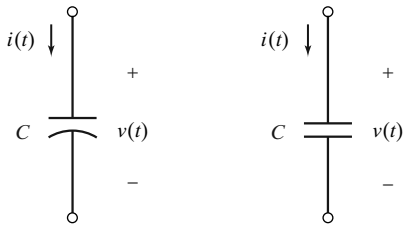


FIGURA 7.2-2 Símbolos del circuito de un condensador

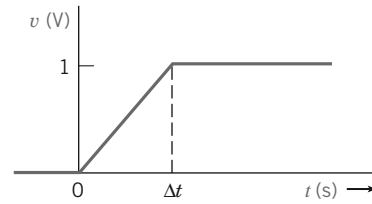


FIGURA 7.2-3 Forma de onda de voltaje en el cual el cambio en el voltaje ocurre sobre un incremento de tiempo,  $\Delta t$ .

La ecuación 7.2-2 es la relación entre la corriente y el voltaje de un condensador. La corriente y el voltaje de la ecuación 7.2-2 se apegan a la convención pasiva. La figura 7.2-2 muestra dos símbolos alternativos para representar condensadores en diagramas de circuitos. En las figuras 7.2-2 (a) y (b), la corriente y el voltaje del condensador se apegan a la convención de signo pasivo y están relacionados por la ecuación 7.2-2.

Ahora considere la forma de onda que se muestra en la figura 7.2-3, en la cual el voltaje cambia de un voltaje constante de cero a otro voltaje constante de 1 sobre un incremento de tiempo,  $\Delta t$ . Utilizando la ecuación 7.2-2, obtenemos

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{C}{\Delta t} & 0 < t < \Delta t \\ 0 & t > \Delta t \end{cases}$$

Entonces, obtenemos un pulso de peso igual a  $C/\Delta t$ . En cuanto  $\Delta t$  disminuya, la corriente aumentará. Obviamente,  $\Delta t$  no puede decaer a cero, de lo contrario, experimentaríamos una corriente infinita. Una corriente infinita es imposible porque se requeriría una potencia infinita. Por lo tanto, no es posible un cambio instantáneo ( $\Delta t = 0$ ) de voltaje a través del condensador. En otras palabras, no podemos tener una discontinuidad en  $v(t)$ .

El voltaje a través de un **condensador** no puede cambiar de manera instantánea.

Ahora encontremos el voltaje  $v(t)$  en términos de la corriente  $i(t)$  por la integración de ambos lados de la ecuación 7.2-2. Obtenemos

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (7.2-3)$$

Esta ecuación dice que el voltaje del condensador  $v(t)$  se puede encontrar por la integración de la corriente del condensador desde el tiempo  $-\infty$  hasta el tiempo  $t$ . Para ello se requiere que conozcamos el valor de la corriente del condensador desde el tiempo  $\tau = -\infty$  hasta el tiempo  $\tau = t$ . En ocasiones, no conocemos el valor de la corriente en todo el camino de vuelta a  $\tau = -\infty$ . En cambio, fracturamos la integral en dos partes:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0) \quad (7.2-4)$$

Esta ecuación dice que el voltaje del condensador  $v(t)$  se puede encontrar por la integración de la corriente del condensador desde algún tiempo conveniente  $-\infty$  hasta el tiempo  $t$  siempre que conozcamos también el voltaje del condensador en el tiempo  $t_0$ . Ahora se nos pide que sólo conozcamos la corriente del condensador desde el tiempo  $\tau = t_0$  hasta el tiempo  $\tau = t$ . El tiempo  $t_0$  se llama **tiempo inicial**, y el voltaje del condensador  $v(t_0)$  se denomina **condición inicial**. A veces es conveniente seleccionar  $t_0 = 0$  como el tiempo inicial.

Los condensadores están disponibles comercialmente en varios tipos y valores de capacitancia. Los tipos de condensador se describen en términos de material dieléctrico y de técnica de construcción. Los condensadores miniatura de película de metal se muestran en la figura 7.2-4. En la

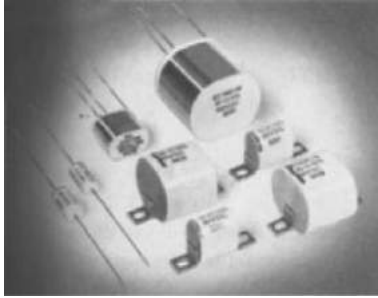


FIGURA 7.2-4 Condensadores miniatura de película de metal en un rango de 1 mF a 50 mF. Cortesía de Electronic Concepts Inc.

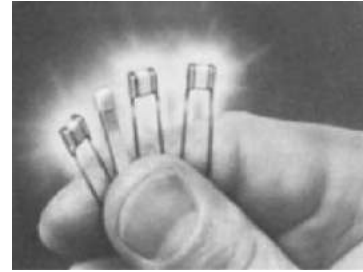


FIGURA 7.2-5 Condensadores miniatura de policarbonato sellado herméticamente en rangos que van de 1  $\mu$ F a 50  $\mu$ F. Cortesía de Electronic Concepts Inc.

figura 7.2-5 se muestran los condensadores miniatura de policarbonato sellado herméticamente. Los valores de capacitancia van desde picofaradios (pF) hasta microfaradios ( $\mu$ F). Cuando dos piezas de cable aislado de una pulgada de largo se tuercen entre sí, tendrán una capacitancia de casi 1 pF. Por otra parte, un condensador alimentador de potencia de casi una pulgada de diámetro y algunas pulgadas de largo puede tener una capacitancia de 0.01 F.

Los condensadores actuales cuentan con alguna resistencia. Por suerte, es fácil incluir efectos resistivos aproximados en los modelos del circuito. En los condensadores, el material dieléctrico entre placas no es un aislante perfecto y tiene algo de conductividad. Esto se puede representar por una muy alta resistencia en paralelo con el condensador. Los condensadores comunes pueden conservar una carga durante horas, y la resistencia en paralelo es entonces de cientos de megaohmios. Ésta es la razón por la cual la resistencia asociada al condensador suele pasarse por alto.

### EJEMPLO 7.2-1 Corriente y voltaje del condensador

Encuentre la capacitancia para un condensador  $C = 1$  mF cuando el voltaje a través del condensador se representa por la señal que se muestra en la figura 7.2-6.

#### Solución

El voltaje (con unidades de voltios) lo da

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 10t & 0 \leq t \leq 1 \\ 20 - 10t & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

Entonces, como  $i = C dv/dt$ , cuando  $C = 10^{-3}$  F, obtenemos

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 10^{-2} & 0 < t < 1 \\ -10^{-2} & 1 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

Por consiguiente, la corriente resultante es una serie de dos pulsos de magnitudes de  $10^{-2}$  A y de  $-10^{-2}$  A, respectivamente, como se muestra en la figura 7.2-7.

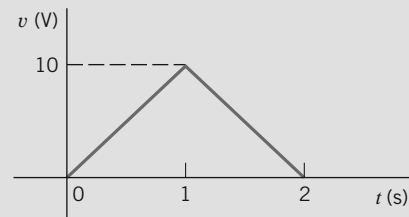


FIGURA 7.2-6 Forma de onda del voltaje a través de un condensador para el ejemplo 7.2-1. Las unidades son voltios y segundos.

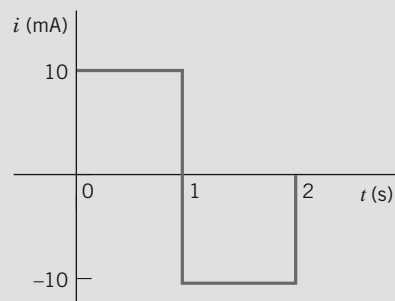


FIGURA 7.2-7 Corriente en el ejemplo 7.2-1.

**EJEMPLO 7.2.2** Corriente y voltaje del condensador

Encuentre el voltaje  $v(t)$  para un condensador  $C = 1/2$  F cuando la corriente es como se muestra en la figura 7.2-8 y  $v(0) = 0$ .

**Solución**

Primero, escribimos la ecuación para  $i(t)$  como

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & 2 < t \end{cases}$$

Luego, como

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

y  $C = 1/2$ , tenemos

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 2 \int_0^t \tau d\tau & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 \int_1^t (1) d\tau + v(1) & 1 \leq t \leq 2 \\ v(2) & 2 \leq t \end{cases}$$

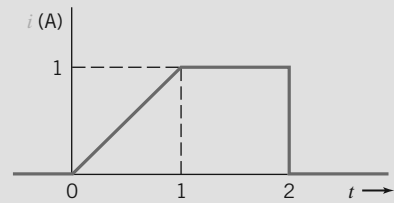
con unidades de voltios. Por consiguiente, para  $0 < t \leq 1$ , tenemos

$$v(t) = t^2$$

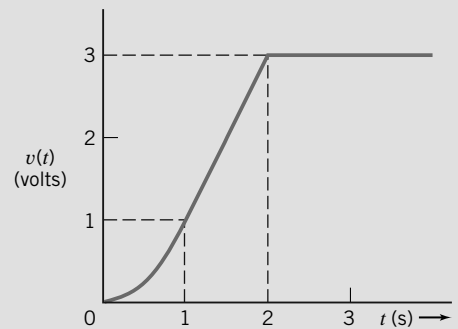
Para el periodo  $1 \leq t \leq 2$ , observamos que  $v(1) = 1$  y, entonces, tenemos

$$v(t) = 2(t - 1) + 1 = (2t - 1) \text{ V}$$

La forma de onda del voltaje resultante se muestra en la figura 7.2-9. El voltaje cambia con  $t^2$  durante el primer 1 s, cambia linealmente con  $t$  durante el periodo de 1 a 2 s, y se mantiene constante igual a 3 V después de  $t = 2$  s.



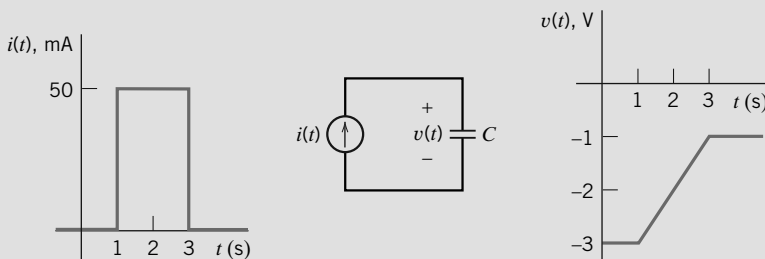
**FIGURA 7.2-8** Forma de onda del circuito para el ejemplo 7.2-2. Las unidades son amperios y segundos.



**FIGURA 7.2-9** Forma de onda del voltaje para el ejemplo 7.2-2.

**EJEMPLO 7.2-3** Corriente y voltaje del condensador

La figura 7.2-10 muestra un circuito junto con dos trazos. Los trazos representan la corriente y el voltaje del condensador en el circuito. Determine el valor de la capacitancia del condensador.



**FIGURA 7.2-10** El circuito y los trazos considerados en el ejemplo 7.2-3.



**Solución**

La corriente y el voltaje del condensador están relacionados por

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0) \quad (7.2-5)$$

o bien 
$$v(t) - v(t_0) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \quad (7.2-6)$$

Como  $i(t)$  y  $v(t)$  están representados gráficamente por trazos más que por ecuaciones, es útil interpretar la ecuación 7.2-6 utilizando

$$v(t) - v(t_0) = \text{la diferencia entre los valores del voltaje en los tiempos } t \text{ y } t_0$$

y 
$$\int_{t_0}^t i(\tau) d\tau = \text{el área bajo el trazo de } i(t) \text{ versus } t \text{ para tiempos entre } t \text{ y } t_0$$

Tome los valores convenientes  $t$  y  $t_0$ , por ejemplo,  $t_0 = 1$  s y  $t = 3$  s. Entonces,

$$v(t) - v(t_0) = -1 - (-3) = 2 \text{ V}$$

y 
$$\int_{t_0}^t i(\tau) d\tau = \int_1^3 0.05 d\tau = (0.05)(3 - 1) = 0.1 \text{ A} \cdot \text{s}$$

Utilizando la ecuación 7.2-6 nos da

$$2 = \frac{1}{C}(0.1) \Rightarrow C = 0.05 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V}} = 0.05 \text{ F} = 50 \text{ mF}$$

**EJEMPLO 7.2-4** Corriente y voltaje del condensador**EJEMPLO INTERACTIVO**

La figura 7.2-11 muestra un circuito junto con dos trazos. Los trazos representan la corriente y el voltaje del condensador en el circuito. Determine los valores de las constantes,  $a$  y  $b$ , que se usan para etiquetar el trazo de la corriente del condensador.

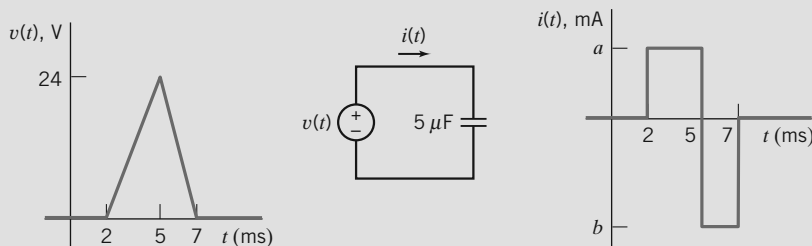


FIGURA 7.2-11 El circuito y los trazos considerados en la figura 7.2-4.

**Solución**

La corriente y el voltaje del condensador están relacionados por

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v(t) \quad (7.2-7)$$

Como  $i(t)$  y  $v(t)$  están representados gráficamente, por trazos más que por ecuaciones, es útil interpretar la ecuación 7.2-7 como

$$\text{el valor de } i(t) = C \times \text{la pendiente de } v(t)$$

Para determinar el valor de  $a$ , tome un tiempo cuando  $i(t) = a$  y la pendiente de  $v(t)$  se determina fácilmente. Por ejemplo, en el tiempo  $t = 3$  ms,

$$\frac{d}{dt}v(0.003) = \frac{0 - 24}{0.002 - 0.005} = 8\,000 \frac{\text{V}}{\text{s}}$$

(La notación  $\frac{d}{dt}v(0.003)$  indica que la derivada  $\frac{d}{dt}v(t)$  se evalúa en el tiempo  $t = 0.003$  s.) Si utilizamos la ecuación 7.2-7 tendremos

$$a = (5 \times 10^{-6})(8000) = 40 \text{ mA}$$

Para determinar el valor de  $b$ , tome  $t = 6$  ms;

$$\frac{d}{dt}v(0.006) = \frac{24 - 0}{0.005 - 0.007} = 12 \times 10^3 \frac{\text{V}}{\text{s}}$$

Utilizar la ecuación 7.2-7 nos da

$$b = (5 \times 10^{-6})(12 \times 10^3) = 60 \text{ mA}$$

### EJEMPLO 7.2-5 Corriente y voltaje del condensador

La entrada al circuito que se muestra en la figura 7.2-12 es la corriente

$$i(t) = 3.75e^{-1.2t} \text{ A para } t > 0$$

La salida es el voltaje del condensador

$$v(t) = 4 - 1.25e^{-1.2t} \text{ V para } t > 0$$

Encuentre el valor de la capacitancia,  $C$ .

#### Solución

El voltaje del condensador se relaciona con la corriente del condensador por

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v(0)$$

Es decir,

$$4 - 1.25e^{-1.2t} = \frac{1}{C} \int_0^t 3.75e^{-1.2\tau} d\tau + v(0) = \frac{3.75}{C(-1.2)} e^{-1.2\tau} \Big|_0^t + v(0) = \frac{-3.125}{C} (e^{-1.2t} - 1) + v(0)$$

Igualando los coeficientes de  $e^{-1.2t}$  nos da

$$1.25 = \frac{3.125}{C} \Rightarrow C = \frac{3.125}{1.25} = 2.5 \text{ F}$$

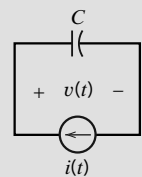


FIGURA 7.2-12  
El circuito considerado en el ejemplo 7.2-5.

**EJERCICIO 7.2-1** Determine la corriente  $i(t)$  para  $t > 0$  para el circuito de la figura E 7.2-1b cuando  $v_f(t)$  es el voltaje que se muestra en la figura E 7.2-1a.

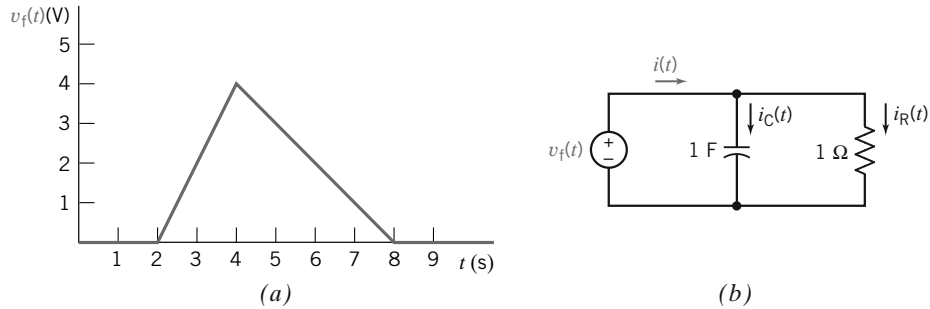


FIGURA E 7.2-1 (a) El voltaje de la fuente de voltaje. (b) El circuito.

**Sugerencia:** Determine  $i_C(t)$  e  $i_R(t)$  por separado, luego aplique la KCL.

$$\text{Respuesta: } v(t) = \begin{cases} 2t - 2 & 2 < t < 4 \\ 7 - t & 4 < t < 8 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

### 7.3 ALMACENAMIENTO DE ENERGÍA EN UN CONDENSADOR

Considere un condensador que se ha conectado a una batería de voltaje  $v$ . Una corriente fluye y una carga se almacena en las placas del condensador como se muestra en la figura 7.3-1. A fin de cuentas, el voltaje a través del condensador es constante, y la corriente a través del condensador es cero. El condensador ha almacenado energía en virtud de la separación de cargas entre las placas del condensador. Estas cargas tienen una fuerza eléctrica que actúa en ellas.

Se dice que las fuerzas que actúan en las cargas almacenadas en un condensador son el resultado de un campo eléctrico. Un *campo eléctrico* se define como la fuerza que actúa sobre una unidad de carga positiva en una región especificada. Dado que las cargas tienen una fuerza que actúa en ellas a lo largo de una dirección  $x$ , reconocemos que el condensador ha almacenado ahora en el campo eléctrico la energía requerida originalmente para separar las cargas.

La energía almacenada en un condensador es

$$w_c(t) = \int_{-\infty}^t v i \, d\tau$$

Recuerde que  $v$  e  $i$  son funciones de tiempo y se podrían escribir como  $v(t)$  e  $i(t)$ . Porque

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

tenemos

$$w_c = \int_{-\infty}^t v C \frac{dv}{dt} \, d\tau = C \int_{v(-\infty)}^{v(t)} v \, dv = \frac{1}{2} C v^2 \Big|_{v(-\infty)}^{v(t)}$$

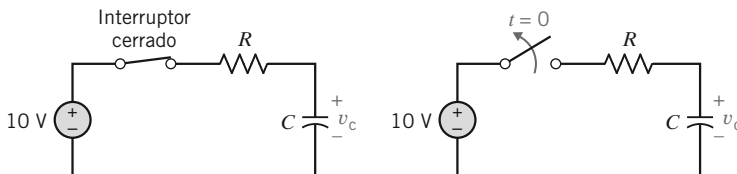


FIGURA 7.3-1 Un circuito (a) donde el condensador está cargado y  $v_c = 10$  V, y (b) el interruptor está abierto en  $t = 0$ .

Como el condensador no estaba cargado en  $t = -\infty$ , establezca  $v(-\infty) = 0$ . Por consiguiente,

$$w_c(t) = \frac{1}{2} C v^2(t) \text{ J} \quad (7.3-1)$$

Por lo tanto, conforme un condensador se está cargando y  $v(t)$  está cambiando, la energía almacenada,  $w_c$ , está cambiando. Observe que  $w_c(t) > 0$  para todo  $v(t)$ , por lo que se dice que el elemento debe ser pasivo.

Como  $q = Cv$ , debemos reescribir la ecuación 7.3-1 como

$$w_c = \frac{1}{2C} q^2(t) \text{ J} \quad (7.3-2)$$

El condensador es un elemento de almacenamiento que guarda pero no disipa energía. Por ejemplo, considere un condensador de 100 mF que tenga un voltaje de 100 V a través de sí. La energía almacenada es

$$w_c = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{1}{2} (0.1)(100)^2 = 500 \text{ J}$$

Mientras el condensador no esté conectado a ningún otro elemento, la energía de 500 J se mantiene almacenada. Ahora que si conectamos el condensador a las terminales del resistor, esperamos que una corriente fluya hasta que la energía se disipe en forma de calor por el resistor. Una vez disipada la energía, la corriente es cero y el voltaje a través del condensador es cero.

Como vimos en la sección anterior, el requerimiento de conservación de la carga implica que el voltaje en un condensador sea continuo. Por lo tanto, el voltaje y la carga en un condensador no pueden cambiar de manera instantánea. Esta sentencia se resume en la ecuación

$$v(0^+) = v(0^-)$$

donde el tiempo justo antes de  $t = 0$  se denomina  $t = 0^-$  y el tiempo inmediatamente después  $t = 0$  se denomina  $t = 0^+$ . El tiempo entre  $t = 0^-$  y  $t = 0^+$  es infinitamente pequeño. Sin embargo, el voltaje no cambia abruptamente.

Para ilustrar la continuidad del voltaje para un condensador, considere el circuito que se muestra en la figura 7.3-1. Para el circuito en la figura 7.3-1a el interruptor se ha cerrado durante un tiempo largo y el voltaje del condensador se ha vuelto  $v_c = 10$  V. En el tiempo  $t = 0$ , abrimos el interruptor, como se muestra en la figura 7.3-1b. Dado que el voltaje en el condensador es continuo,

$$v_c(0^+) = v_c(0^-) = 10 \text{ V}$$

### EJEMPLO 7.3-1 Energía almacenada por un condensador

Se carga un condensador de 10 mF a 100 V, como se muestra en la figura 7.3-2. Encuentre la energía almacenada por el condensador y el voltaje del condensador en  $t = 0^+$  luego de haber abierto el interruptor.

#### Solución

El voltaje del condensador es  $v = 100$  V en  $t = 0^-$ . Como el voltaje en  $t = 0^+$  no se puede cambiar del voltaje en  $t = 0^-$ , tenemos

$$v(0^+) = v(0^-) = 100 \text{ V}$$

La energía almacenada por el condensador en  $t = 0^+$  es

$$w_c = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{1}{2} (10^{-2})(100)^2 = 50 \text{ J}$$

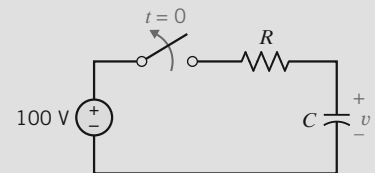


FIGURA 7.3-2 Circuito del ejemplo 7.3-1 con  $C = 10$  mF.

### EJEMPLO 7.3-2 Potencia y energía para un condensador

El voltaje a través de un condensador de 5 mF varía como se muestra en la figura 7.3-3. Determine y trace la corriente, la potencia y la energía del condensador.

#### Solución

La corriente está determinada desde  $i_c = C dv/dt$  y se muestra en la figura 7.3-4a. La potencia es  $v(t)i(t)$ , el producto de la curva de corriente (figura 7.3-4a) y la curva del voltaje (figura 7.3-3), y se muestra en la figura 7.3-4b. El condensador recibe energía durante los primeros dos segundos y luego transmite energía para el periodo  $2 < t < 3$ .

La energía es  $w = \int p dt$  y se puede encontrar como el área bajo la curva  $p(t)$ . La curva para la energía se muestra en la figura 7.3-4c. Observe que el condensador almacena energía de manera creciente desde  $t = 0$  s hasta  $t = 2$  s, alcanzando una energía máxima de 25 J. Entonces el condensador transmite una energía total de 18.75 J al circuito exterior desde  $t = 2$  s hasta  $t = 3$  s. Finalmente, el condensador conserva una energía constante de 6.5 J después de que  $t = 3$  s.

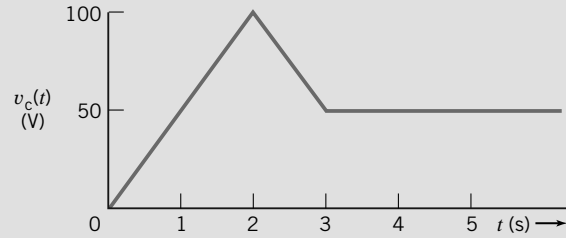
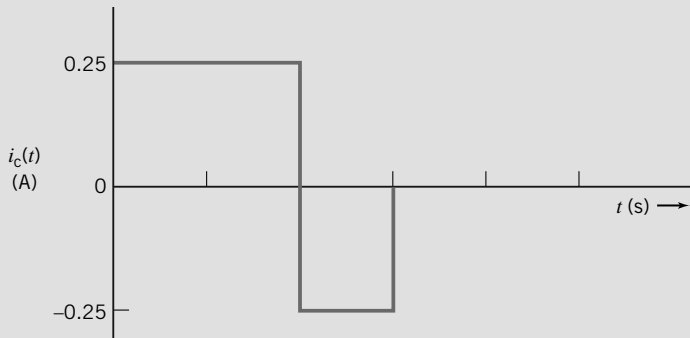
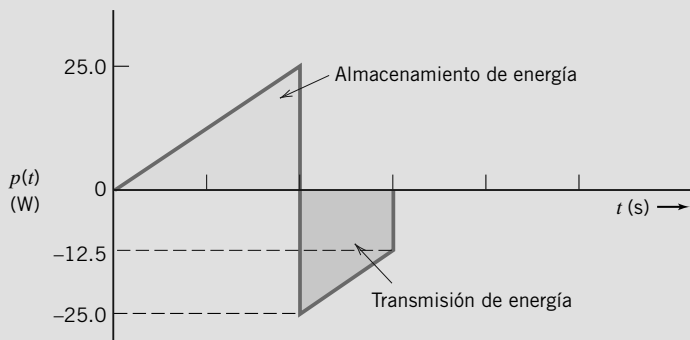


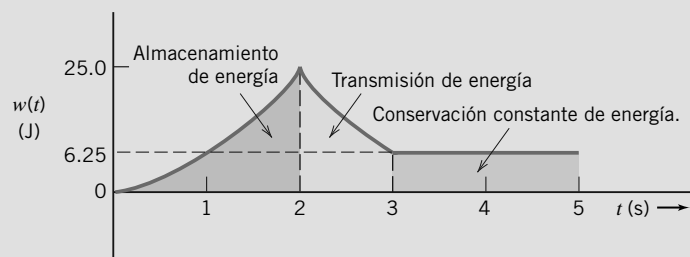
FIGURA 7.3-3 El voltaje a través de un condensador.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 7.3-4 La corriente, la potencia y la energía de un condensador del ejemplo 7.3-2.

**EJERCICIO 7.3-1** Se ha cargado a 100 V un condensador de 200  $\mu\text{F}$ . Encuentre la energía almacenada por el condensador. Encuentre el voltaje del condensador en  $t = 0^+$  si  $v(0^-) = 100 \text{ V}$ .

**Respuesta:**  $w(1) = 1 \text{ J}$ , y  $v(0^+) = 100 \text{ V}$

**EJERCICIO 7.3-2** En un condensador de 100  $\mu\text{F}$  fluye una corriente constante de  $i = 2 \text{ A}$  después de que se cerró un interruptor en  $t = 0$ . El voltaje del condensador era igual a cero en  $t = 0^-$ . Encuentre la energía almacenada en (a)  $t = 1 \text{ s}$  y (b)  $t = 100 \text{ s}$ .

**Respuesta:**  $w(1) = 20 \text{ kJ}$  y  $w(100) = 200 \text{ MJ}$

## 7.4 CONDENSADORES EN SERIE Y EN PARALELO

Primero, consideremos la conexión en paralelo de condensadores  $N$  como se muestra en la figura 7.4-1. Deseamos determinar el circuito equivalente para los condensadores  $N$  en paralelo como se muestra en la figura 7.4-2.

Al aplicar la KCL, tenemos

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_N$$

Porque  $i_n = C_n \frac{dv}{dt}$

y  $v$  aparece a través de cada condensador, obtenemos

$$\begin{aligned} i &= C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + C_3 \frac{dv}{dt} + \dots + C_N \frac{dv}{dt} \\ &= (C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_N) \frac{dv}{dt} \\ &= \left( \sum_{n=1}^N C_n \right) \frac{dv}{dt} \end{aligned} \tag{7.4-1}$$

Para el circuito equivalente que se muestra en la figura 7.4-2,

$$i = C_p \frac{dv}{dt} \tag{7.4-2}$$

Comparando las ecuaciones 7.4-1 y 7.4-2, es claro que

$$C_p = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_N = \sum_{n=1}^N C_n$$

Por lo tanto, la capacitancia equivalente de un conjunto de condensadores  $N$  en paralelo es simplemente la suma de las capacitancias individuales. Debemos tener presente que todos los condensadores en paralelo tendrán la misma condición inicial,  $v(0)$ .

Determinemos ahora la capacitancia equivalente  $C_s$  de un conjunto de capacitancias  $N$  conectadas en serie, como se muestra en la figura 7.4-3. El circuito equivalente para las series de condensadores se muestra en la figura 7.4-4.

Aplicando la KVL al circuito cerrado de la figura 7.4-3, tenemos

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_N \tag{7.4-3}$$

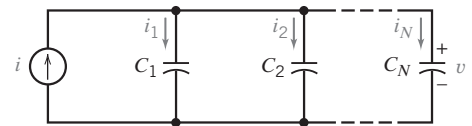


FIGURA 7.4-1 Conexión en paralelo de condensadores  $N$ .

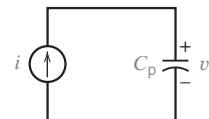


FIGURA 7.4-2 Circuito equivalente para condensadores  $N$  en paralelo.

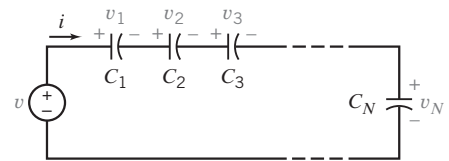


FIGURA 7.4-3 Conexión en serie de condensadores  $N$ .

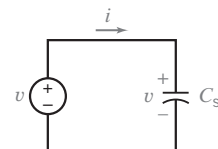


FIGURA 7.4-4 Circuito equivalente para condensadores  $N$  en serie.

Porque, en general

$$v_n(t) = \frac{1}{C_n} \int_{t_0}^t i \, d\tau + v_n(t_0)$$

donde  $i$  es común para todos los condensadores, obtenemos

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{C_1} \int_{t_0}^t i \, d\tau + v_1(t_0) + \cdots + \frac{1}{C_N} \int_{t_0}^t i \, d\tau + v_N(t_0) \\ &= \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N} \right) \int_{t_0}^t i \, d\tau + \sum_{n=1}^N v_n(t_0) \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n} \int_{t_0}^t i \, d\tau + \sum_{n=1}^N v_n(t_0) \end{aligned} \quad (7.4-4)$$

De la ecuación 7.4-3, observamos que en  $t = t_0$ ,

$$v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + \cdots + v_N(t_0) = \sum_{n=1}^N v_n(t_0) \quad (7.4-5)$$

Sustituyendo la ecuación 7.4-5 en la ecuación 7.4-4, obtenemos

$$v = \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n} \right) \int_{t_0}^t i \, d\tau + v(t_0) \quad (7.4-6)$$

Aplicando la KVL al circuito cerrado del circuito equivalente de la figura 7.4-4 resulta

$$v = \frac{1}{C_s} \int_{t_0}^t i \, d\tau + v(t_0) \quad (7.4-7)$$

Al comparar las ecuaciones 7.4-6 y 7.4-7, encontramos que

$$\frac{1}{C_s} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n} \quad (7.4-8)$$

Para el caso de dos condensadores en serie, la ecuación 7.4-8 es

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

o bien

$$C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (7.4-9)$$

### EJEMPLO 7.4-1 Condensadores en paralelo y en serie

Encuentre la capacitancia equivalente para el circuito de la figura 7.4-5 donde  $C_1 = C_2 = C_3 = 2 \text{ mF}$ ,  $v_1(0) = 10 \text{ V}$  y  $v_2(0) = v_3(0) = 20 \text{ V}$ .

#### Solución

Dado que  $C_2$  y  $C_3$  están en paralelo, las reemplazamos con  $C_p$ , donde

$$C_p = C_2 + C_3 = 4 \text{ mF}$$

El voltaje en  $t = 0$  a través de la capacitancia equivalente  $C_p$  es igual al voltaje a través de  $C_2$  o de  $C_3$ , el cual es  $v_2(0) = v_3(0) = 20 \text{ V}$ . Como resultado de  $C_2$  y  $C_3$  con  $C_p$ , obtenemos el circuito que se muestra en la figura 7.4-6.

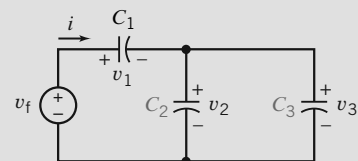


FIGURA 7.4-5 Circuito para el ejemplo 7.4-1.

Ahora queremos reemplazar la serie de dos condensadores  $C_1$  y  $C_p$  con un condensador equivalente. Utilizando la relación de la ecuación 7.4-9 obtenemos

$$C_s = \frac{C_1 C_p}{C_1 + C_p} = \frac{(2 \times 10^{-3})(4 \times 10^{-3})}{(2 \times 10^{-3}) + (4 \times 10^{-3})} = \frac{8}{6} \text{ mF}$$

El voltaje en  $t = 0$  a través de  $C_s$  es

$$v(0) = v_1(0) + v_p(0)$$

donde  $v_p(0) = 20 \text{ V}$ , el voltaje a través de la capacitancia  $C_p$  en  $t = 0$ . Por lo tanto, obtenemos

$$v(0) = 10 + 20 = 30 \text{ V}$$

Así, obtenemos el circuito equivalente que se muestra en la figura 7.4-7.

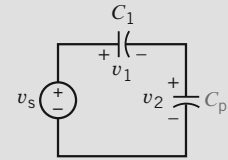


FIGURA 7.4-6  
Circuito resultante de la figura 7.4-5 al reemplazar  $C_2$  y  $C_3$  con  $C_p$ .

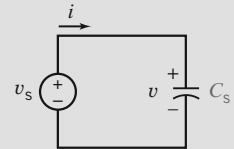


FIGURA 7.4-7  
Circuito equivalente para el circuito del ejemplo 7.4-1.

**EJERCICIO 7.4-1** Encuentre la capacitancia equivalente para el circuito de la figura E 7.4-1

**Respuesta:**  $C_{eq} = 4 \text{ mF}$

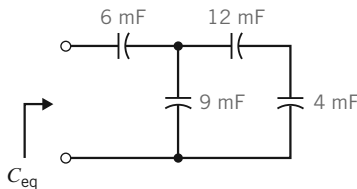


FIGURA E 7.4-1

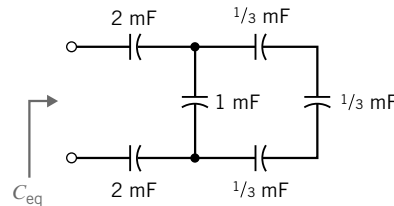


FIGURA E 7.4-2

**EJERCICIO 7.4-2** Determine la capacitancia equivalente  $C_{eq}$  para el circuito que se muestra en la figura E 7.4-2.

**Respuesta:**  $10/19 \text{ mF}$

## 7.5 INDUCTORES

Un inductor es un elemento de circuito que almacena energía en un campo magnético. Se puede construir un inductor enrollando un cable en una bobina alrededor de un centro magnético, como se muestra en la figura 7.5-1. Los inductores están representados por un parámetro llamado *inductancia*. La inductancia de un inductor depende de su tamaño, materiales y método de construcción. Por ejemplo, la inductancia del inductor que se muestra en la figura 7.5-1 está dada por

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l}$$

donde  $N$  es el número de vueltas, es decir, las veces que el cable se enreda alrededor del centro;  $A$  es el área transversal del centro en metros cuadrados;  $l$  la longitud en metros del devanado, y  $\mu$  es una propiedad del centro magnético conocido como permeabilidad. La unidad de inductancia se denomina henry (H) en honor del físico estadounidense Joseph Henry. Los inductores prácticos tienen inductancias que



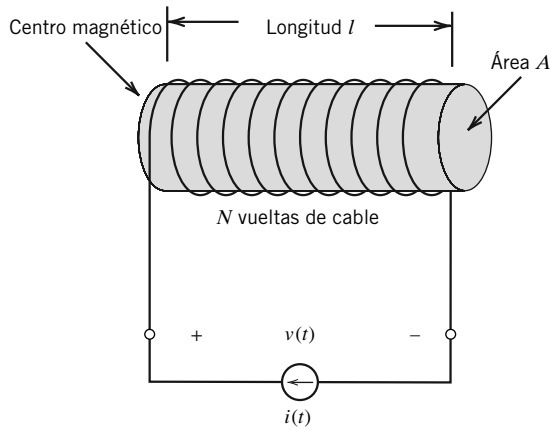


FIGURA 7.5-1 Inductor conectado a una fuente de corriente.



FIGURA 7.5-2 Bobina con una inductancia grande. Cortesía de MuRata company.



FIGURA 7.5-3 Elementos con inductancias arreglados en diversas formas de bobinas. Cortesía de Dale Electronic Inc.

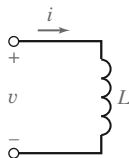


FIGURA 7.5-4 Símbolo de circuito para un inductor.

van de  $1 \mu\text{H}$  a  $10 \text{ H}$ . En la figura 7.5-2 se muestra un ejemplo de bobina con una inductancia grande. Los inductores están devanados de varias formas, como se muestra en la figura 7.5-3.

**Inductancia** es una medida de la capacidad de un dispositivo de almacenar energía en la forma de un campo magnético.

En la figura 7.5-1 se utiliza una fuente de corriente para causar una corriente de bobina  $i(t)$ . Encontramos que el voltaje  $v(t)$  a través de la bobina es proporcional a la razón de cambio de la corriente de la bobina. Es decir,

$$v(t) = L \frac{d}{dt} i(t) \quad (7.5-1)$$

donde la constante de proporcionalidad es  $L$ , la inductancia del inductor.

Integrando ambos lados de la ecuación 7.5-1, obtenemos

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau \quad (7.5-2)$$

Esta ecuación dice que la corriente del inductor  $i(t)$  se puede encontrar al integrar el voltaje del inductor desde el tiempo  $-\infty$  hasta el tiempo  $\tau = t$ . A veces no conocemos el valor del voltaje que regresa a  $\tau = -\infty$ . En cambio, dividimos la integral en dos partes:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} v(\tau) d\tau + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \quad (7.5-3)$$

Esta ecuación dice que la corriente del inductor  $i(t)$  se puede encontrar al integrar el voltaje del inductor desde algún tiempo conveniente  $\tau = t_0$  hasta el tiempo  $\tau = t$ , siempre que también conozcamos la corriente del inductor en tiempo  $t_0$ . Ahora se nos pide que sólo conozcamos el voltaje del inductor desde el tiempo  $\tau = t_0$  hasta el tiempo  $\tau = t$ . El tiempo  $t_0$  se denomina **tiempo inicial**, y la corriente del inductor  $i(t_0)$  se denomina **condición inicial**. Con frecuencia es conveniente seleccionar  $t_0 = 0$  como el tiempo inicial.

Las ecuaciones 7.5-1 y 7.5-3 describen la relación entre la corriente y el voltaje de un inductor. La corriente y el voltaje en estas ecuaciones se apegan a la convención pasiva. El símbolo de circuito para un inductor se muestra en la figura 7.5-4. La corriente y el voltaje del inductor en la figura 7.5-4 se apegan a la convención pasiva y se relacionan por las ecuaciones 7.5-1 y 7.5-3.

Considere el voltaje de un inductor cuando la corriente cambia en  $t = 0$  de cero a una corriente que se incrementa de manera constante y que finalmente rebasa los niveles, como se muestra en la figura 7.5-5. Determinemos el voltaje del inductor.

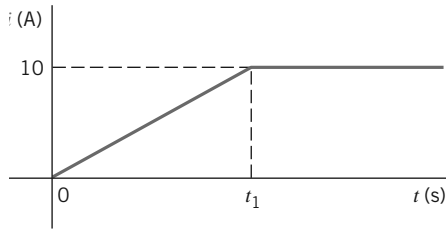


FIGURA 7.5-5 Una forma de onda de corriente. La corriente está en amperios.

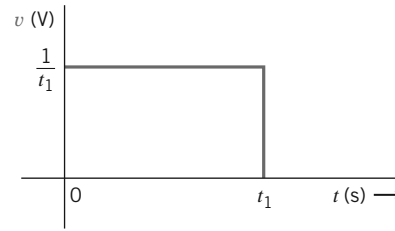


FIGURA 7.5-6 Respuesta del voltaje para la forma de onda de la corriente de la figura 7.5-5 cuando  $L = 0.1$  H.

Podríamos describir la corriente (en amperios) por

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{10t}{t_1} & 0 \leq t \leq t_1 \\ 10 & t \geq t_1 \end{cases}$$

Consideremos un inductor de 0.1 H y encontremos la forma de onda del voltaje. Dado que  $v = L(di/dt)$ , tenemos (en voltios)

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{t_1} & 0 < t < t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases}$$

La forma de onda de pulso de voltaje resultante se muestra en la figura 7.5-6. Observe que en cuanto  $t_1$  disminuye, la magnitud del voltaje aumenta. Desde luego, no podemos dejar que  $t_1 = 0$  porque el voltaje requerido sería entonces infinito, y requeriríamos una potencia infinita en las terminales del inductor. Así, los cambios instantáneos en la corriente a través de un inductor no son posibles.

La corriente en una inductancia no puede cambiar de manera instantánea.

Un inductor ideal es una bobina devanada con cable libre de resistencia. Los inductores prácticos incluyen la resistencia real del cable de cobre que se utiliza en la bobina. Por esta razón, los inductores prácticos son con mucho elementos ideales y por lo común se modelan mediante una inductancia ideal en serie con una resistencia pequeña.

### EJEMPLO 7.5-1 Corriente y voltaje del inductor

Encuentre el voltaje a través de un inductor,  $L = 0.1$  H, cuando la corriente en el inductor es

$$i(t) = 20te^{-2t} \text{ A}$$

para  $t > 0$  e  $i(0) = 0$ .

#### Solución

El voltaje para  $t < 0$  es

$$v(t) = L \frac{di}{dt} = (0.1) \frac{d}{dt} (20te^{-2t}) = 2(-2te^{-2t} + e^{-2t}) = 2e^{-2t}(1 - 2t) \text{ V}$$

El voltaje es igual a 2 V cuando  $t = 0$ , como se muestra en la figura 7.5-7b. La forma de onda de la corriente se muestra en la figura 7.57a. Observe que la corriente alcanza un valor máximo, y el voltaje es cero en  $t = 0.5$  s.

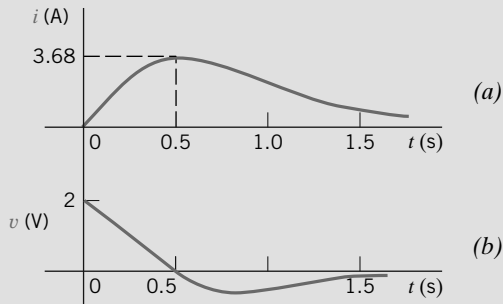


FIGURA 7.5-7 Formas de onda de la corriente y del voltaje para el ejemplo 7.5-1.

### EJEMPLO 7.5-2 Corriente y voltaje del inductor

### EJEMPLO INTERACTIVO

La figura 7.5-8 muestra un circuito junto con dos trazos. Los trazos representan la corriente y el voltaje del inductor en el circuito. Determine el valor de la inductancia del inductor.

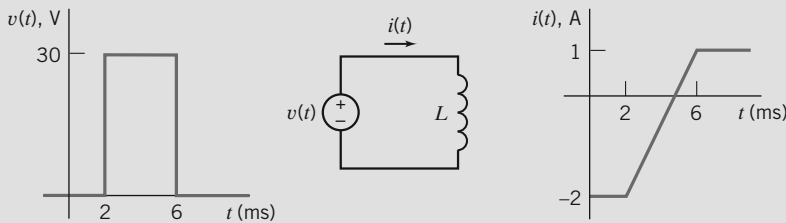


FIGURA 7.5-8 El circuito y los trazos considerados en el ejemplo 7.5-2.

### Solución

La corriente y el voltaje del inductor están relacionados por

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i(t_0) \quad (7.5-4)$$

o bien, 
$$i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \quad (7.5-5)$$

Como  $i(t)$  y  $v(t)$  están representados gráficamente, por trazos más que por ecuaciones, es útil interpretar la ecuación 7.5-5 utilizando

$$i(t) - i(t_0) = \text{la diferencia entre los valores de la corriente en tiempos } t \text{ y } t_0$$

y 
$$\int_{t_0}^t v(\tau) d\tau = \text{el área bajo el trazo de } v(t) \text{ versus } t \text{ para tiempos entre } t \text{ y } t_0$$

Tome valores convenientes  $t$  y  $t_0$ , por ejemplo,  $t_0 = 2$  ms y  $t = 6$  ms. Entonces,

$$i(t) - i(t_0) = 1 - (-2) = 3 \text{ A}$$

y 
$$\int_{t_0}^t v(\tau) d\tau = \int_{0.002}^{0.006} 30 d\tau = (30)(0.006 - 0.002) = 0.12 \text{ V} \cdot \text{s}$$

Si utilizamos la ecuación 7.5-5 da por resultado

$$3 = \frac{1}{L} (0.12) \Rightarrow L = 0.040 \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}} = 0.040 \text{ H} = 40 \text{ mH}$$

### EJEMPLO 7.5-3 Corriente y voltaje del inductor

La entrada al circuito que se muestra en la figura 7.5-9 es el voltaje

$$v(t) = 4e^{-20t} \text{ V para } t > 0$$

La salida es la corriente

$$i(t) = -1.2e^{-20t} - 1.5 \text{ A para } t > 0$$

La corriente del inductor inicial es  $i_L(0) = -3.5 \text{ A}$ . Determine los valores de la inductancia,  $L$ , y de la resistencia,  $R$ .

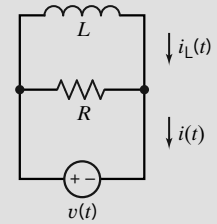


FIGURA 7.5-9 El circuito considerado en el ejemplo 7.5-3.

#### Solución

Aplique la KCL en cualquier nodo para obtener

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} + i_L(t) = \frac{v(t)}{R} + \left[ \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau + i(0) \right]$$

Es decir

$$\begin{aligned} -1.2e^{-20t} - 1.5 &= \frac{4e^{-20t}}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t 4e^{-20\tau} d\tau - 3.5 = \frac{4e^{-20t}}{R} + \frac{4}{L(-20)}(e^{-20t} - 1) - 3.5 \\ &= \left( \frac{4}{R} - \frac{1}{5L} \right) e^{-20t} + \frac{1}{5L} - 3.5 \end{aligned}$$

Igualar coeficientes nos da

$$-1.5 = \frac{1}{5L} - 3.5 \Rightarrow L = 0.1 \text{ H}$$

y

$$-1.2 = \frac{4}{R} - \frac{1}{5L} = \frac{4}{R} - \frac{1}{5(0.1)} = \frac{4}{R} - 2 \Rightarrow R = 5 \Omega$$

**EJERCICIO 7.5-1** Determine el voltaje  $v(t)$  para  $t > 0$  para el circuito de la figura E 7.5-1b donde  $i_f(t)$  es la corriente que se muestra en la figura E 7.5-1a.

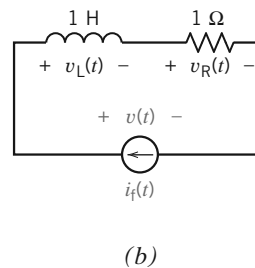
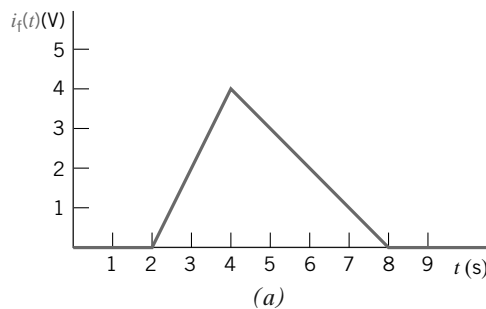


FIGURA E 7.5-1 (a) La corriente de la fuente de corriente. (b) El circuito.

**Sugerencia:** Determine  $v_L(t)$  y  $v_R(t)$  por separado, entonces utilice la KVL.

$$\text{Respuesta: } v(t) = \begin{cases} 2t - 2 & 2 < t < 4 \\ 7 - t & 4 < t < 8 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

## 7.6 ALMACENAMIENTO DE ENERGÍA EN UN INDUCTOR

La potencia en un inductor es

$$p = vi = \left( L \frac{di}{dt} \right) i \quad (7.6-1)$$

La energía almacenada en el inductor se almacena en su campo magnético. La energía almacenada en el inductor durante el intervalo  $t_0$  a  $t$  resulta de la ecuación

$$w = \int_{t_0}^t p \, d\tau = L \int_{i(t_0)}^{i(t)} i \, di$$

Al integrar la corriente entre  $i(t_0)$  e  $i(t)$ , obtenemos

$$w = \frac{L}{2} [i^2(t)]_{i(t_0)}^{i(t)} = \frac{L}{2} i^2(t) - \frac{L}{2} i^2(t_0) \quad (7.6-2)$$

Por lo común seleccionamos  $t_0 = -\infty$  para el inductor, y entonces la corriente  $i(\infty) = 0$ . Por lo que tenemos

$$w = \frac{1}{2} Li^2 \quad (7.6-3)$$

Observe que  $w(t) \geq 0$  para toda  $i(t)$ , por lo que el inductor es un elemento pasivo. El inductor no genera ni disipa energía, solamente la almacena. Es importante tener presente que los inductores y los condensadores son fundamentalmente diferentes de otros dispositivos que se vieron en capítulos anteriores, porque éstos tienen memoria.

### EJEMPLO 7.6-1 Voltaje y corriente del inductor

Encuentre la corriente en un inductor,  $L = 0.1$  H, cuando el voltaje a través del inductor es

$$v = 10te^{-5t} \text{ V}$$

Suponga que la corriente es cero para  $t \leq 0$ .

#### Solución

En la figura 7.6-1 se presenta el voltaje como una función de tiempo. Observe que el voltaje alcanza un máximo de  $t = 0.2$  s. La corriente es

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t v \, d\tau + i(t_0)$$

Dado que el voltaje es cero para  $t < 0$ , la corriente en el inductor en  $t = 0$  es  $i(0) = 0$ . Entonces tenemos

$$i = 10 \int_0^t \tau e^{-5\tau} \, d\tau = 100 \left[ \frac{-e^{-5\tau}}{25} (1 + 5\tau) \right]_0^t = 4(1 - e^{-5t}(1 + 5t)) \text{ A}$$

En la figura 7.6-1b se presenta la corriente como una función de tiempo.

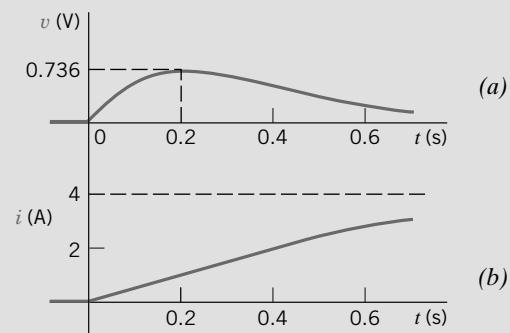


FIGURA 7.6-1 Voltaje y corriente para el ejemplo 7.6-1.

**EJEMPLO 7.6-2** Potencia y energía para un inductor

Encuentre la potencia y la energía para un inductor de 0.1 H cuando la corriente y el voltaje son como se muestra en las figuras 7.6-2a, b.

**Solución**

Primero escribimos la expresión para la corriente y el voltaje. La corriente es

$$\begin{aligned} i &= 0 & t < 0 \\ &= 20t & 0 \leq t \leq 1 \\ &= 20 & 1 \leq t \end{aligned}$$

El voltaje se expresa como

$$\begin{aligned} v &= 0 & t < 0 \\ &= 2 & 0 < t < 1 \\ &= 0 & 1 < t \end{aligned}$$

Puede verificar el voltaje utilizando  $v = L(di/dt)$ . Entonces la potencia es

$$p = vi = 40t \text{ W}$$

para  $0 \leq t < 1$  y cero para todo otro tiempo.

Entonces, la energía en julios es

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}Li^2 \\ &= 0.05(20t)^2 & 0 \leq t \leq 1 \\ &= 0.05(20)^2 & 1 < t \end{aligned}$$

y cero para todo  $t < 0$ .

La potencia y la energía se muestran en las figuras 7.6-2c, d.

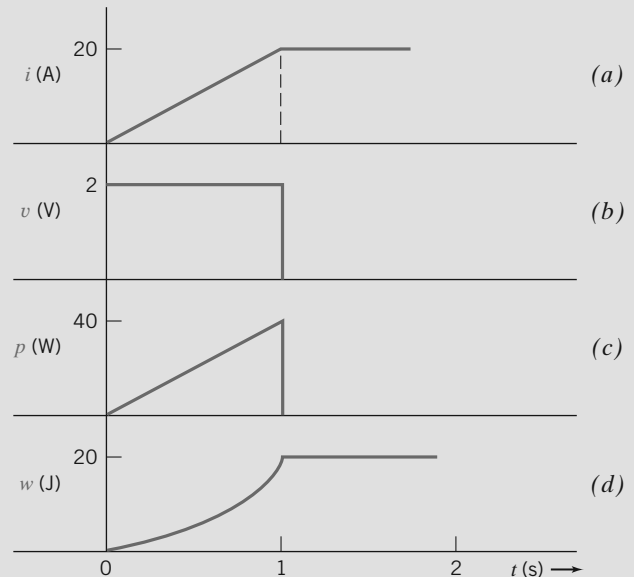


FIGURA 7.6-2 Corriente, voltaje, potencia y energía para el ejemplo 7.6-2.

**EJEMPLO 7.6-3** Potencia y energía para un inductor

Encuentre la potencia y la energía almacenados en un inductor de 0.1 H cuando  $i = 20te^{-2t}$  A, y  $v = 2e^{-2t}(1 - 2t)$  V para  $t \geq 0$ , e  $i = 0$  para  $t < 0$  (vea el ejemplo 7.5-1).

**Solución**

La potencia es

$$p = iv = (20te^{-2t})[2e^{-2t}(1 - 2t)] = 40te^{-4t}(1 - 2t) \text{ W} \quad t > 0$$

Entonces la energía es

$$w = \frac{1}{2}Li^2 = 0.05(20te^{-2t})^2 = 20t^2e^{-4t} \text{ J} \quad t > 0$$

Observe que  $w$  es positivo para todos los valores de  $t > 0$ . La energía almacenada en el inductor se muestra en la figura 7.6-3.

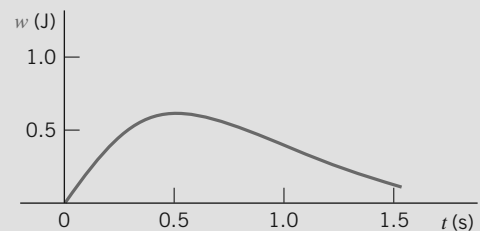
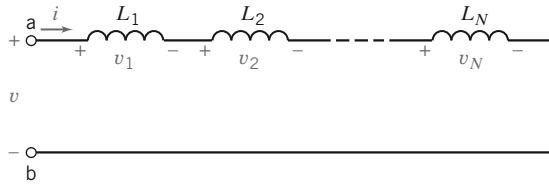


FIGURA 7.6-3 La energía almacenada en el inductor del ejemplo 7.6-3.

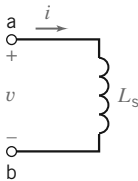
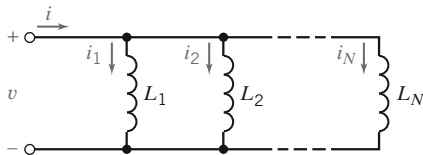
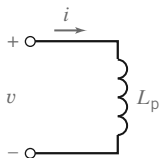
FIGURA 7.7-1 Serie de inductores  $N$ .

## 7.7 INDUCTORES EN SERIE Y EN PARALELO

Una conexión en serie y en paralelo se puede reducir a un inductor simple equivalente. Considere una conexión en serie de inductores  $N$  como se muestra en la figura 7.7-1. El voltaje a través de la conexión en serie es

$$\begin{aligned} v &= v_1 + v_2 + \cdots + v_N \\ &= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \cdots + L_N \frac{di}{dt} \\ &= \left( \sum_{n=1}^N L_n \right) \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

Dado que el inductor en serie equivalente  $L_s$ , como se muestra en la figura 7.7-2 está representado por

FIGURA 7.7-2 Inductor equivalente  $L_s$  para inductores  $N$  en serie.FIGURA 7.7-3 Conexión de inductores  $N$  en paralelo.FIGURA 7.7-4 Inductor equivalente  $L_p$  para la conexión de inductores  $N$  en paralelo.

Cuando las ecuaciones 7.7-2 y 7.7-3 se establecen iguales entre sí, tenemos

$$\frac{1}{L_p} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{L_n} \quad (7.7-4)$$

$$v = L_s \frac{di}{dt}$$

requerimos que

$$L_s = \sum_{n=1}^N L_n \quad (7.7-1)$$

Por consiguiente, un inductor equivalente para una serie de inductores es la suma de inductores  $N$ .

Ahora considere el conjunto de inductores  $N$  en paralelo, como se muestra en la figura 7.7-3. La corriente  $i$  es igual a la suma de las corrientes en los inductores  $N$ :

$$i = \sum_{n=1}^N i_n$$

Sin embargo, como

$$i_n = \frac{1}{L_n} \int_{t_0}^t v \, d\tau + i_n(t_0)$$

podemos obtener la expresión

$$i = \sum_{n=1}^N \frac{1}{L_n} \int_{t_0}^t v \, d\tau + \sum_{n=1}^N i_n(t_0) \quad (7.7-2)$$

El inductor equivalente  $L_p$ , como se muestra en la figura 7.7-4, está representado en la ecuación

$$i = \frac{1}{L_p} \int_{t_0}^t v \, d\tau + i(t_0) \quad (7.7-3)$$

y

$$i(t_0) = \sum_{n=1}^N i_n(t_0) \quad (7.7-5)$$

### EJEMPLO 7.7-1 Inductores en serie y en paralelo

Encuentre la inductancia equivalente para el circuito de la figura 7.7-5. Todas las corrientes del inductor son cero en  $t_0$ .

#### Solución

Primero, encontramos la inductancia equivalente para los inductores de 5 mH y 20 mH en paralelo.

De la ecuación 7.7-4 obtenemos

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

o bien

$$L_p = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = \frac{5 \times 20}{5 + 20} = 4 \text{ mH}$$

Este inductor equivalente está en serie con los inductores de 2 mH y 3 mH. Por consiguiente, utilizando la ecuación 7.7-1, obtenemos

$$L_{eq} = \sum_{n=1}^N L_n = 2 + 3 + 4 = 9 \text{ mH}$$

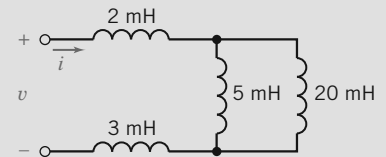


FIGURA 7.7-5 El circuito del ejemplo 7.7-1.

**EJERCICIO 7.7-1** Encuentre la inductancia equivalente del circuito de la figura E 7.7-1.

**Respuesta:**  $L_{eq} = 14 \text{ mH}$

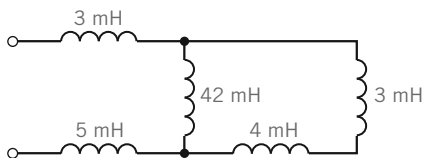


FIGURA E 7.7-1

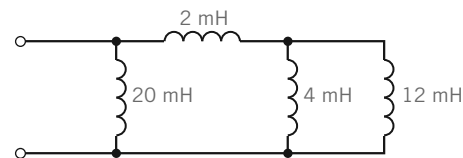


FIGURA E 7.7-2

**EJERCICIO 7.7-2** Encuentre la inductancia equivalente del circuito de la figura E 7.7-2.

**Respuesta:**  $L_{eq} = 4 \text{ mH}$

## 7.8 CONDICIONES INICIALES DE LOS CIRCUITOS PERMANENTES

En esta sección consideraremos los circuitos permanentes (“switcheados”). Estos circuitos tienen las características siguientes.

1. Todas las entradas de los circuitos, es decir los voltajes de la fuente de voltaje independiente y las corrientes de las fuentes de corriente independientes, son funciones constantes de tiempo.



- El circuito incluye uno o más interruptores que abren o cierran el circuito en tiempo  $t_0$ . Indicamos el tiempo inmediatamente antes de que el interruptor abra o cierre como  $t_0^-$  y el tiempo inmediatamente después de que el interruptor abra o cierra como  $t_0^+$ . Solemos suponer que  $t_0 = 0$ .
- El circuito incluye al menos un capacitor o un inductor.
- Suponemos que los interruptores de un circuito han estado mucho tiempo en posición de  $t = t_0$ , el tiempo de interrupción. Diremos que un circuito como éste está en *estado estable* inmediatamente antes del tiempo de interrupción. Un circuito que contiene solamente fuentes constantes y se encuentra en estado estable se denomina *circuito cd*. Todas las corrientes y los voltajes de un elemento de circuito en un circuito cd son funciones constantes de tiempo.

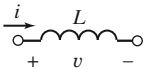
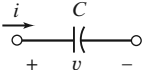
Nos interesan en particular la corriente y el voltaje de los elementos de almacenaje de energía luego de que el interruptor se abre o se cierra. (Recuerde que en la sección 2.9 se dice que los interruptores abiertos actúan como circuitos abiertos y que los interruptores cerrados actúan como circuitos en corto.) En la tabla 7.8-1 se resumen las características importantes del comportamiento de un inductor y un condensador. En particular, observe que ni un voltaje de condensador ni una corriente de inductor pueden cambiar de manera instantánea. (Recuerde que en las secciones 7.2 y 7.5 se menciona que tales cambios requerirían una potencia infinita, algo que no es físicamente posible.) Sin embargo, sí es posible que se puedan dar cambios instantáneos en el voltaje de un inductor o en la corriente de un condensador.

Suponga que un circuito de cd contiene un inductor. La corriente del inductor, como cualquier otro voltaje y corriente en el circuito cd, será una función constante de tiempo. El voltaje del inductor es proporcional a la derivada de la corriente del inductor,  $v = L(di/dt)$  de modo que el voltaje del inductor es cero. En consecuencia, el inductor actúa como un cortocircuito.

Un **inductor** en un **circuito de cd** se comporta como un **cortocircuito**.

Del mismo modo, el voltaje de un condensador en un circuito de cd será una función constante de tiempo. La corriente del condensador es proporcional a la derivada del voltaje del condensador,  $i = C(dv/dt)$ , de modo que la corriente del condensador es cero. En consecuencia, el condensador actúa como un circuito abierto.

**Tabla 7.8-1 Características de los elementos de almacenaje de energía**

VARIABLE	INDUCTORES	CONDENSADORES
Señal de convención pasiva		
Voltaje	$v = L \frac{di}{dt}$	$v = \frac{1}{C} \int_0^t i d\tau + v(0)$
Corriente	$i = \frac{1}{L} \int_0^t v d\tau + i(0)$	$i = C \frac{dv}{dt}$
Potencia	$p = Li \frac{di}{dt}$	$p = Cv \frac{dv}{dt}$
Energía	$w = \frac{1}{2} Li^2$	$w = \frac{1}{2} Cv^2$
No se permite un cambio instantáneo en	Corriente de	Voltaje de
Se permitirá un cambio instantáneo en	Voltaje de	Corriente de
Este elemento actúa como un (vea nota abajo)	Cortocircuito para una corriente constante en sus terminales	Circuito abierto para un voltaje constante a través de sus terminales.

Nota: Suponga que el elemento es un circuito con una condición de estado estable.

Un **condensador** en un **circuito de cd** se comporta como un **circuito abierto**.

Nuestro plan para analizar circuitos permanentes tiene dos pasos:

1. Analizar el circuito de cd antes del tiempo  $t_0$  para determinar los voltajes del condensador y las corrientes del inductor. Con este análisis tomaremos ventaja del hecho de que los condensadores se comportan como circuitos abiertos y los inductores lo hacen como circuitos en corto cuando están en circuitos de cd.
2. Reconocer que los voltajes del condensador y las corrientes del inductor no pueden cambiar de manera instantánea, por lo que los voltajes del condensador y las corrientes del inductor en tiempo  $t_0^+$  tienen los mismos valores que tenían en el tiempo  $t_0^-$ .

Los ejemplos siguientes ilustran este plan.

### EJEMPLO 7.8-1 Condiciones iniciales en un circuito permanente

Considere el circuito de la figura 7.8-1. Antes de  $t = 0$ , el interruptor ha estado cerrado mucho tiempo. Determine los valores del voltaje del condensador y la corriente del inductor inmediatamente antes de que el interruptor se abra en tiempo  $t = 0$ .

#### Solución

1. Para encontrar  $v_c(0^-)$  e  $i_L(0^-)$ , consideramos el circuito antes de que se abra el interruptor, es decir, para  $t < 0$ . La entrada del circuito, el voltaje de la fuente de voltaje, es constante. Incluso, antes de que el interruptor se abra el circuito está en estado estable. Como el circuito es un circuito de cd, el condensador actuará como un circuito abierto, y el inductor lo hará como un cortocircuito. En la figura 7.8-2 reemplazamos el condensador por un circuito abierto con un voltaje de  $v_c(0^-)$  y el inductor por un cortocircuito con una corriente  $i_L(0^-)$ . Primero, observemos que

$$i_L(0^-) = \frac{10}{5} = 2 \text{ A}$$

A continuación, aplicando el principio del divisor de voltaje, vemos que

$$v_c(0^-) = \left(\frac{3}{5}\right)10 = 6 \text{ V}$$

2. El voltaje del condensador y la corriente del inductor no pueden cambiar de manera instantánea, por lo que

$$v_c(0^+) = v_c(0^-) = 6 \text{ V}$$

y

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2 \text{ A}$$

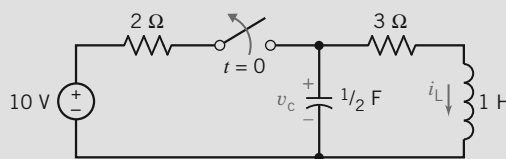


FIGURA 7.8-1 Circuito con un inductor y un condensador. El interruptor está cerrado mucho tiempo antes de abrirlo en  $t = 0$ .

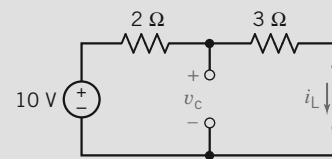


FIGURA 7.8-2 Circuito de la figura 7.8-1 para  $t < 0$ .

### EJEMPLO 7.8-2 Condiciones iniciales en un circuito permanente

Encuentre  $i_L(0^+)$ ,  $v_c(0^+)$ ,  $dv_c(0^+)/dt$  y  $di_L(0^+)/dt$  para el circuito de la figura 7.8-3. Usaremos  $dv_c(0^+)/dt$  para indicar  $dv_c(t)/dt|_{t=0^+}$ .

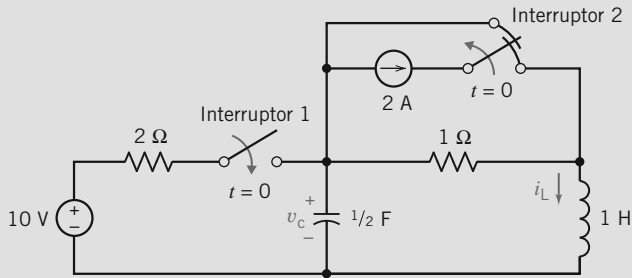


FIGURA 7.8-3 Circuito para el ejemplo 7.8-2. El interruptor 1 está cerrado en  $t = 0$  y el interruptor 2 se abre en  $t = 0$ .

Suponga que el interruptor 1 ha estado abierto y el interruptor 2 ha estado cerrado mucho tiempo y en condiciones prevalecientes de estado estable en  $t = 0^-$ .

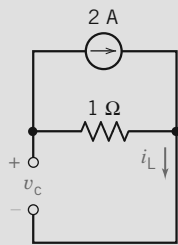


FIGURA 7.8-4 Circuito de la figura 7.8-3 en  $t = 0^-$ .

### Solución

Primero, dibujamos nuevamente el circuito para  $t = 0^-$  reemplazando el inductor con un cortocircuito y el condensador con un circuito abierto, como se muestra en la figura 7.8-4. Entonces observamos que

$$i_L(0^-) = 0$$

y

$$v_c(0^-) = -2 \text{ V}$$

Por consiguiente, tenemos

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$$

y

$$v_c(0^+) = v_c(0^-) = -2 \text{ V}$$

Para encontrar  $dv_c(0^+)/dt$  y  $di_L(0^+)/dt$ , desechamos el circuito en  $t = 0$  y dibujamos nuevamente el circuito de la figura 7.8-3, como se muestra en la figura 7.8-5. (No trazamos la fuente de corriente porque su interruptor está abierto).

Como deseamos encontrar  $dv_c(0^+)/dt$ , recordamos que

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

Por lo tanto

$$\frac{dv_c(0^+)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C}$$

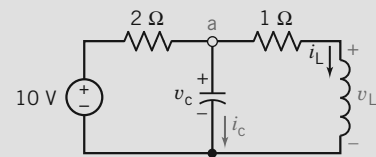


FIGURA 7.8-5 Circuito de la figura 7.8-3 en  $t = 0^+$  con el interruptor cerrado y la fuente de corriente desconectada.

Del mismo modo, como para el inductor

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

podemos obtener  $di_L(0^+)/dt$  como

$$\frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{v_L(0^+)}{L}$$

Aplicando la KVL al enlace de la derecha de la figura 7.8-5 obtenemos

$$v_L - v_c + 1i_L = 0$$

Por consiguiente, en  $t = 0^+$ ,

$$v_L(0^+) = v_c(0^+) - i_L(0^+) = -2 - 0 = -2 \text{ V}$$

Así que obtenemos

$$\frac{di_L(0^+)}{dt} = -2 \text{ A/s}$$

Del mismo modo, para encontrar  $i_c$ , escribimos la KCL en el nodo a para obtener

$$i_c + i_L + \frac{v_c - 10}{2} = 0$$

En consecuencia, en  $t = 0^+$ ,

$$i_c(0^+) = \frac{10 - v_c(0^+)}{2} - i_L(0^+) = 6 - 0 = 6 \text{ A}$$

Por consiguiente,

$$\frac{dv_c(0^+)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C} = \frac{6}{1/2} = 12 \text{ V/s}$$

Así, encontramos que en el tiempo de interrupción  $t = 0$ , la corriente en el inductor y el voltaje en el condensador se mantienen constantes. Sin embargo, el voltaje del inductor se modificó instantáneamente de  $v_L(0^-) = 0$  a  $v_L(0^+) = -2 \text{ V}$ , y determinamos que  $di_L(0^+)/dt = -2 \text{ A/s}$ . También, la corriente del condensador se modificó de manera instantánea desde  $i_c(0^-) = 0$  hasta  $i_c(0^+) = 6 \text{ A}$ , y encontramos que  $dv_c(0^+)/dt = 12 \text{ V/s}$ .

## 7.9 CIRCUITOS DE AMPLIFICADORES OPERACIONALES Y ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Esta sección describe un procedimiento para el diseño de circuitos de amplificadores operacionales que implementen ecuaciones diferenciales lineales como

$$2 \frac{d^3}{dt^3} y(t) + 5 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 4 \frac{d}{dt} y(t) + 3y(t) = 6x(t) \quad (7.9-1)$$

La solución de esta ecuación es una función,  $y(t)$ , que depende tanto de la función  $x(t)$  como de un conjunto de condiciones iniciales. Es conveniente utilizar las condiciones iniciales:

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) = 0, \quad \frac{d}{dt} y(t) = 0 \quad \text{y} \quad y(t) = 0 \quad (7.9-2)$$

Habiendo especificado estas condiciones iniciales, esperamos una función única  $y(t)$  que corresponda a cualquier función dada  $x(t)$ . En consecuencia, trataremos  $x(t)$  como la entrada a la ecuación diferencial y  $y(t)$  como la salida.

La sección 6.6 presentó la noción de operaciones de diagramación como bloques y ecuaciones como diagramas de bloques. La sección 6.6 también presentó bloques para representar las operaciones de suma y multiplicación por una constante. La figura 7.9-1 ilustra dos bloques adicionales, que representan la integración y la diferenciación.

Suponga que de algún modo pudiéramos obtener  $\frac{d^3}{dt^3} y(t)$ . Podríamos entonces integrarlas tres veces para obtener  $\frac{d^2}{dt^2} y(t)$ ,  $\frac{d}{dt} y(t)$  y  $y(t)$ , como se ilustra en la figura 7.9-2.

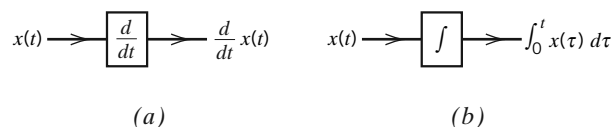


FIGURA 7.9-1 Representaciones de diagramas en bloque de (a) diferenciación y (b) integración.

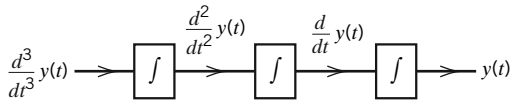


FIGURA 7.9-2 El primer diagrama parcial de bloques.

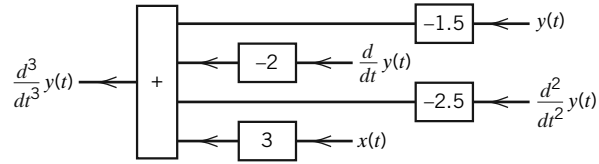


FIGURA 7.9-3 Un diagrama de bloques que representa la ecuación 7.9-3.

Ahora debemos obtener  $\frac{d^3}{dt^3}y(t)$ . Para ello, despejemos la ecuación 7.9-1 para  $\frac{d^3}{dt^3}y(t)$  y obtener

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) = 3x(t) - \left[ 2.5 \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2 \frac{d}{dt}y(t) + 1.5y(t) \right] \quad (7.9-3)$$

A continuación, represente la ecuación 7.9-3 mediante un diagrama de bloque como el diagrama que se muestra en la figura 7.9-3. Finalmente, los diagramas de bloque en las figuras 7.9-2 y 7.9-3 se pueden combinar como se muestra en la figura 7.9-4 para obtener el diagrama de bloque de la figura 7.9-1.

Nuestra siguiente tarea es implementar el diagrama de bloques como un circuito de amplificador operacional. La figura 7.9-5 proporciona circuitos de amplificadores operacionales para implementar tanto la diferenciación como la integración. Para ver cómo funciona la integración, considere la figura 7.9-6. Los nodos del integrador en la figura 7.9-6 se han etiquetado antes de escribir las ecuaciones nodales. Sean  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  lo que indique los voltajes de nodos en los nodos 1, 2 y 3, respectivamente.

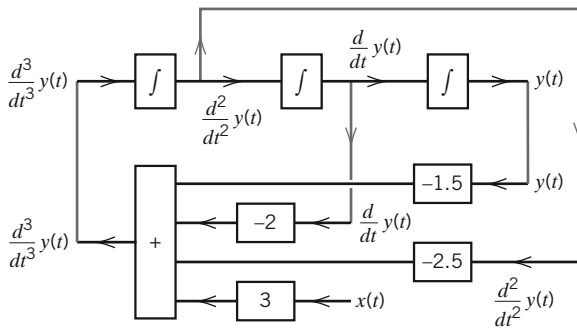


FIGURA 7.9-4 Un diagrama de bloques que representa la ecuación 7.9-1.

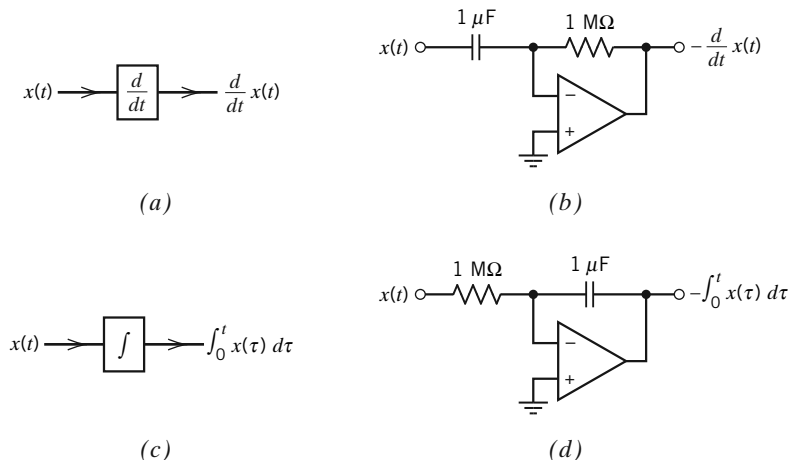


FIGURA 7.9-5 Representaciones de diagramas de bloques de (a) diferenciación y (c) integración. Corresponden a los circuitos de amplificadores operacionales que (b) diferencian y (d) integran.

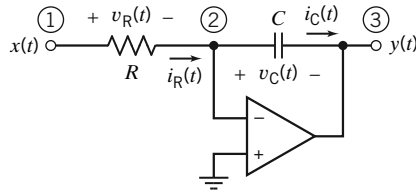


FIGURA 7.9-6 El integrador.

La entrada al integrador es  $x(t)$ , el voltaje de nodos en el nodo 1. Entonces,  $v_1 = x(t)$ . La salida del integrador es  $y(t)$ , el voltaje de nodos en el nodo 3. Así,  $v_3 = y(t)$ . La entrada no inversora del amplificador operacional ideal está adjunta al nodo de referencia, y la salida inversora está conectada al nodo 2. Los voltajes de nodos en estos dos nodos deben ser iguales, así que  $v_2 = 0$ .

El voltaje a través del resistor está relacionado con los voltajes de nodos en los nodos del resistor por

$$v_R(t) = v_1(t) - v_2(t) = x(t) - 0 = x(t)$$

Se calcula que la corriente del resistor, aplicando la ley de Ohm, sea

$$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{x(t)}{R}$$

El valor de la corriente que fluye en una entrada de un amplificador operacional ideal es cero, por lo que aplicando la KCL en el nodo 2 nos da

$$i_C(t) = i_R(t) = \frac{x(t)}{R}$$

El voltaje a través del condensador se relaciona con los voltajes de nodos en los nodos del condensador por

$$v_C(t) = v_2(t) - v_3(t) = 0 - y(t) = -y(t) \quad (7.9-4)$$

El voltaje del condensador se relaciona con la corriente del condensador por

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau + v_C(0)$$

Recuerde que  $y(0) = 0$ . Por lo tanto,  $v_C(0) = 0$ , y

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{x(\tau)}{R} d\tau = \frac{1}{RC} \int_0^t x(\tau) d\tau$$

Finalmente, utilizando la ecuación 7.9-4 nos da

$$y(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t x(\tau) d\tau = -k \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (7.9-5)$$

donde  $k = \frac{1}{RC}$ .

La ecuación 7.9-5 indica que el integrador tiene dos cosas. Primera, la entrada se integra. Segunda, la integral se multiplica por una constante negativa,  $k$ . En la figura 7.9-5d, los valores de  $R$  y  $C$  se han seleccionado para hacer que  $k = -1$ . Al multiplicar una función por  $-1$  se refleja la gráfica de la función a través del eje del tiempo. Este reflejo se denomina inversión, y se dice que el circuito es un circuito inversor. En consecuencia, el integrador que se muestra en la figura 7.9-5d en ocasiones se denomina integrador inversor. A este circuito lo llamaremos integrador a menos que queramos atender a la inversión, en cuyo caso denominaremos al circuito como integrador inversor.

El análisis del sumando integrador que se muestra en la figura 7.9-7 es semejante al análisis del integrador. Las entradas al sumando integrador son  $x_1(t)$ , el voltaje de nodos en el nodo 1 y  $x_2(t)$ ,

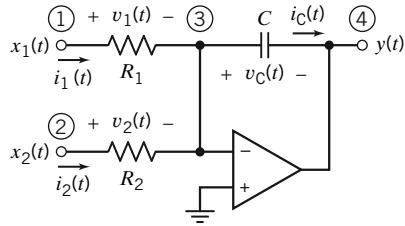


FIGURA 7.9-7 El sumando integrador.

el voltaje de nodos en el nodo 2. La salida del integrador es  $y(t)$ , el voltaje de nodos en el nodo 4. El amplificador operacional ideal hace que el voltaje en el nodo 3 sea cero. Por lo tanto,

$$v_1(t) = x_1(t), \quad v_2(t) = x_2(t), \quad v_3(t) = 0, \quad y \quad v_4(t) = y(t)$$

Aplicando la ley de Ohm se muestra que las corrientes en los resistores deben ser

$$i_1(t) = \frac{v_1(t)}{R_1} = \frac{x_1(t)}{R_1} \quad \text{e} \quad i_2(t) = \frac{v_2(t)}{R_2} = \frac{x_2(t)}{R_2}$$

El valor de la corriente que fluye en una entrada de un amplificador operacional ideal es cero, de modo que aplicar la KCL al nodo 3 resulta

$$i_C(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{x_1(t)}{R_1} + \frac{x_2(t)}{R_2}$$

El voltaje a través del condensador se relaciona con los voltajes de nodos en los nodos del condensador por

$$v_C(t) = v_3(t) - v_4(t) = 0 - y(t) = -y(t) \quad (7.9-6)$$

El voltaje del condensador se relaciona con la corriente del condensador por

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau + v_C(0)$$

Recuerde que  $y(0) = 0$ . Entonces,  $v_C(0) = 0$ , y

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_0^t \left( \frac{x_1(\tau)}{R_1} + \frac{x_2(\tau)}{R_2} \right) d\tau = \int_0^t \left( \frac{x_1(\tau)}{R_1 C} + \frac{x_2(\tau)}{R_2 C} \right) d\tau$$

Finalmente, utilizando la ecuación 7.9-6 resulta

$$y(t) = - \int_0^t \left( \frac{x_1(\tau)}{R_1 C} + \frac{x_2(\tau)}{R_2 C} \right) d\tau = - \int_0^t (k_1 x_1(\tau) + k_2 x_2(\tau)) d\tau \quad (7.9-7)$$

donde  $k_1 = \frac{1}{R_1 C}$  y  $k_2 = \frac{1}{R_2 C}$ .

La ecuación 7.9-7 indica que el sumando integrador hace cuatro cosas. Primera, cada entrada se multiplica por una constante separada:  $x_1$  se multiplica por  $k_1$ , y  $x_2$  se multiplica por  $k_2$ . Segunda, los productos se resumen. Tercera, la suma se integra. Cuarta, la integral se multiplica por  $-1$ . (Como el integrador inversor, este circuito invierte su salida. En ocasiones se le llama sumando integrador inversor. Por suerte, no necesitamos utilizar muy a menudo tal nombre tan largo.)

En la figura 7.9-7, el sumando amplificador acomoda dos entradas. Para acomodar entradas adicionales, agregamos más resistores de entrada, cada uno conectado entre un nodo de entrada y el nodo de entrada inversora del amplificador operacional. (El circuito del amplificador operacional que implementa la ecuación 7.9-1 requerirá un sumando integrador de cuatro entradas.)

Diseñaremos un circuito de amplificador operacional para implementar la ecuación 7.9-1 reemplazando los bloques en el diagrama de bloques de la ecuación 7.9-1 mediante circuitos de amplificador operacional. Este proceso se facilitará si modificamos antes el diagrama de bloques para acomodar los integradores *inversores*. Las figuras 7.9-8 y 7.9-9 muestran versiones modificadas de

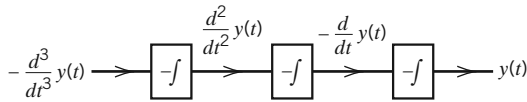


FIGURA 7.9-8 El diagrama de bloques de la figura 7.9-2 ajustado para acomodar integradores inversores.

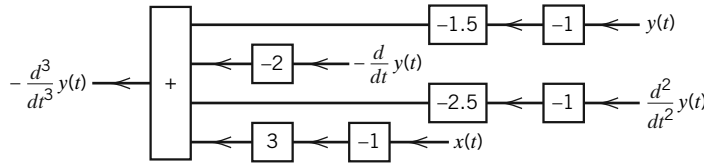


FIGURA 7.9-9 El diagrama de bloques de la figura 7.9-3 ajustado para acomodar las consecuencias de utilizar integradores inversores.

diagramas de bloques de las figuras 7.9-2 y 7.9-3. Reemplace todos los integradores en la figura 7.9-2 por integradores inversores para obtener la figura 7.9-8. Es necesario establecer la entrada igual a  $-\frac{d^3}{dt^3}y(t)$  en vez de  $\frac{d^3}{dt^3}y(t)$  para hacer que la salida sea igual a  $y(t)$  en vez de  $-y(t)$ .

El diagrama de bloques en la figura 7.9-9 produce  $-\frac{d^3}{dt^3}y(t)$  de  $\frac{d^2}{dt^2}y(t)$ ,  $-\frac{d}{dt}y(t)$  y  $y(t)$ . Los diagramas de bloque en las figuras 7.9-8 y 7.9-9 se pueden combinar como se muestra en la figura 7.9-10 para obtener el diagrama de bloques de la ecuación 7.9-1.

Un sumando integrador puede multiplicar cada una de sus entradas por una constante separada, sumar los productos e integrar la suma. El diagrama de bloques que se muestra en la figura 7.9-11 destaca los bloques que se pueden implementar por un sumando integrador de cuatro entradas único.

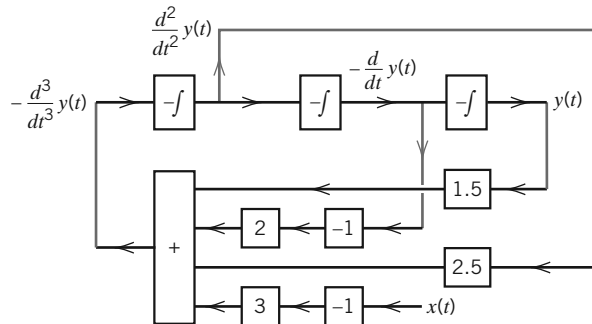


FIGURA 7.9-10 El diagrama de bloques que representa la ecuación 7.9-1 ajustado para acomodar integradores inversores.

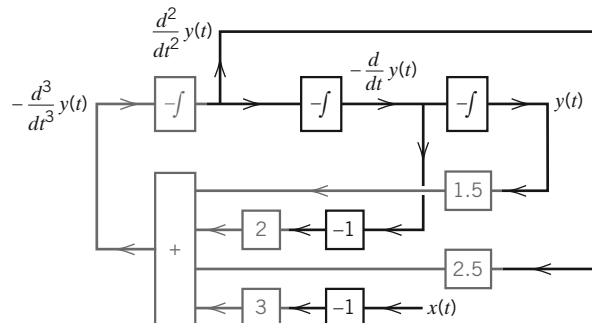


FIGURA 7.9-11 El diagrama de bloques que representa la ecuación 7.9-1 destacando la parte implementada por el sumando integrador.





## 7.10 USO DE MATLAB PARA TRAZAR EL VOLTAJE Y LA CORRIENTE DE UN CONDENSADOR O UN INDUCTOR

Suponga que la corriente en un condensador de 2-F es

$$i(t) = \begin{cases} 4 & t \leq 2 \\ t + 2 & 2 \leq t \leq 6 \\ 20 - 2t & 6 \leq t \leq 14 \\ -8 & t \geq 14 \end{cases} \quad (7.10-1)$$

donde las unidades de corriente son A y las unidades de tiempo son s. Cuando el voltaje inicial del condensador es  $v(0) = -5$  V, el voltaje del condensador se puede calcular utilizando

$$v(t) = \frac{1}{2} \int_0^t i(\tau) d\tau - 5 \quad (7.10-2)$$

La ecuación 7.10-1 indica que  $i(t) = 4$  A, en tanto que  $t < 2$  s. Utilizar esta corriente en la ecuación 7.10-2 nos da

$$v(t) = \frac{1}{2} \int_0^t 4 d\tau - 5 = 2t - 5 \quad (7.10-3)$$

cuando  $t < 2$  s. A continuación, la ecuación 7.10-1 indica que  $i(t) = t + 2$  s. Utilizando esta corriente en la ecuación 7.10-2 nos da

$$v(t) = \frac{1}{2} \left( \int_2^t (t+2) d\tau + \int_0^2 4 d\tau \right) - 5 = \frac{1}{2} \int_2^t (t+2) d\tau - 1 = \frac{t^2}{4} + t - 4 \quad (7.10-4)$$

cuando  $2 < t < 6$  s. Continuando de esta forma, calculamos

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{2} \left( \int_6^t (20-2t) d\tau + \int_2^6 (t+2) d\tau + \int_0^2 4 d\tau \right) - 5 \\ &= \frac{1}{2} \int_6^t (20-2t) d\tau + 11 = -\frac{t^2}{2} + 10t - 31 \end{aligned} \quad (7.10-5)$$

cuando  $6 < t < 14$  s, y

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{2} \left( \int_{14}^t -8 d\tau + \int_6^{14} (20-2t) d\tau + \int_2^6 (t+2) d\tau + \int_0^2 4 d\tau \right) - 5 \\ &= \frac{1}{2} \int_{14}^t -8 d\tau + 11 = 67 - 4t \end{aligned} \quad (7.10-6)$$

cuando  $t > 14$  s.

Las ecuaciones 7.10-3 a 7.10-6 se pueden resumir de esta forma

$$v(t) = \begin{cases} 2t - 5 & t \leq 2 \\ \frac{t^2}{4} + t - 4 & 2 \leq t \leq 6 \\ -\frac{t^2}{2} + 10t - 31 & 6 \leq t \leq 14 \\ 67 - 4t & t \geq 14 \end{cases} \quad (7.10-7)$$

```
function i = CapCur(t)
    if t < 2
        i = 4;
    elseif t < 6
        i = t + 2;
    elseif t < 14
        i = 20 - 2*t;
    else
        i = -8;
    end
```

(a)

```
function v = CapVol(t)
    if t < 2
        v = 2*t - 5;
    elseif t < 6
        v = 0.25*t*t + t - 4;
    elseif t < 14
        v = -.5*t*t + 10*t - 31;
    else
        v = 67 - 4*t;
    end
```

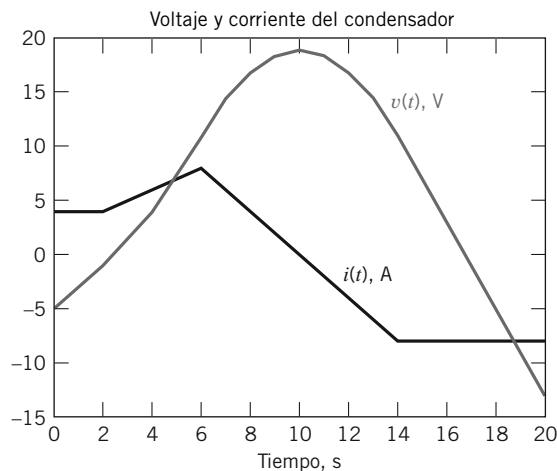
(b)

```
t = 0:1:20;
for k = 1:length(t)
    i(k) = CapCur(k-1);
    v(k) = CapVol(k-1);
end
plot(t, i, t, v)
text(12, 10, 'v(t), V')
text(10, -5, 'i(t), A')
title('Capacitor Voltage and Current')
xlabel('time, s')
```

(c)

**FIGURA 7.10-1** Archivos de entrada de MATLAB que representan (a) la corriente del condensador y (b) el voltaje del condensador; (c) el archivo de entrada de MATLAB se usa para trazar la corriente y el voltaje del condensador.

Las ecuaciones 7.10-1 y 7.10-7 proporcionan una representación analítica de la corriente y el voltaje del condensador. MATLAB proporciona una forma conveniente de obtener una representación gráfica de estas funciones. Las figuras 7.10-1a, b muestran los archivos de entrada que representan la corriente y el voltaje del condensador. Observe que el archivo de entrada de MATLAB que representa al corriente, figura 7.10-1a, es muy semejante a la ecuación 7.10-1; aunque el archivo de entrada de MATLAB representa el voltaje, la figura 7.10-1b es muy parecida a la ecuación 7.10-7. La figura 7.10-1c muestra el archivo de entrada de MATLAB que se usó para trazar la corriente y el voltaje del condensador. La figura 7.10-2 muestra los trazos resultantes de la corriente y el voltaje del condensador.



**FIGURA 7.10-2** Un trazo del voltaje y de la corriente del condensador.

## 7.11 ¿CÓMO LO PODEMOS COMPROBAR...?

A los ingenieros se les suele solicitar comprobar que la solución de un problema sea la correcta. Por ejemplo, las soluciones propuestas para problemas de diseño se deben comprobar para confirmar que se ha cumplido con todas las especificaciones. Además, se deben revisar los resultados de la computadora para protegerse contra errores de captura de datos, así como las exigencias de los comerciantes, las cuales se deben analizar a fondo.

También a los estudiantes de ingeniería se les pide que verifiquen la exactitud de sus trabajos. Por ejemplo, tomarse un breve lapso antes de terminar un examen permitiría dar una vista rápida e identificar esas soluciones que podrían requerir un poco más de aplicación.

El ejemplo siguiente ilustra técnicas útiles para comprobar las soluciones a los diversos problemas analizados en este capítulo.

### EJEMPLO 7.11-1 ¿Cómo podemos comprobar el voltaje y la corriente de un condensador?

Una solución de tarea en casa indica que la corriente y el voltaje de un condensador de 2-F son

$$i(t) = \begin{cases} 4 & t < 2 \\ t + 2 & 2 < t < 6 \\ 20 - 2t & 6 < t < 14 \\ -8 & t > 14 \end{cases} \quad (7.11-1)$$

y

$$v(t) = \begin{cases} 2t - 5 & t < 2 \\ \frac{t^2}{4} + t - 4 & 2 < t < 6 \\ -\frac{t^2}{2} + 10t - 21 & 6 < t < 14 \\ 67 - 4t & t > 14 \end{cases} \quad (7.11-2)$$

donde las unidades de corriente son A, las unidades de voltaje son V, y las unidades de tiempo son s. **¿Cómo podemos comprobar** que esta solución de tarea en casa es correcta?

#### Solución

El voltaje del condensador no puede cambiar de manera instantánea. El voltaje del condensador está dado por

$$v(t) = 2t - 5 \quad (7.11-3)$$

cuando  $t < 2$  s y por

$$v(t) = \frac{t^2}{4} + t - 4 \quad (7.11-4)$$

cuando  $2 < t < 6$  s. Dado que el condensador no se puede modificar instantáneamente, las ecuaciones 7.11-3 y 7.11-4 deben dar ambas el mismo valor para  $v(2)$ , el voltaje del condensador en el tiempo  $t = 2$  s. Al despejar la ecuación 7.11-3 nos da

$$v(2) = 2(2) - 5 = -1 \text{ V}$$

Y al despejar la ecuación 7.11-4 resulta

$$v(2) = \frac{2^2}{4} + 2 - 4 = -1 \text{ V}$$

Estos valores concuerdan, por lo tanto no encontramos error. A continuación, comprobemos  $v(6)$ , el voltaje del condensador en el tiempo  $t = 6$  s. El voltaje del condensador está dado por

$$v(t) = -\frac{t^2}{2} + 10t - 21 \quad (7.11-5)$$

cuando  $6 < t < 14$  s. las ecuaciones 7.11-4 y 7.11-5 deben dar el mismo valor para  $v(6)$ . Despejar la ecuación 7.11-4 da

$$v(6) = \frac{6^2}{4} + 6 - 4 = 11 \text{ V}$$

Aun cuando despejar la ecuación 7.11-5 da

$$v(6) = -\frac{6^2}{2} + 10(6) - 21 = 21 \text{ V}$$

Estos valores no concuerdan. Eso significa que  $v(t)$  cambia de manera instantánea en  $t = 6$  s, por lo que  $v(t)$  no puede ser el voltaje a través del condensador. La solución de la tarea en casa no es correcta.

## 7.12 EJEMPLO DE DISEÑO

### INTEGRADOR E INTERRUPTOR

Este reto de diseño implica un integrador y un interruptor de voltaje controlado.

Un integrador es un circuito que desempeña operaciones matemáticas de integración. La salida de un integrador, digamos  $v_o(t)$ , se relaciona con la entrada de un integrador, es decir  $v_s(t)$ , por la ecuación

$$v_o(t_2) = K \cdot \int_{t_1}^{t_2} v_s(t) dt + v_o(t_1) \quad (7.12-1)$$

La constante  $K$  se denomina ganancia de un integrador.

Los integradores tienen muchas aplicaciones. Una de ellas es que un integrador mide un intervalo. Suponga  $v_s(t)$  es un voltaje constante,  $V_s$ . Entonces,

$$v_o(t_2) = K \cdot (t_2 - t_1) \cdot V_s + v_o(t_1) \quad (7.12-2)$$

La ecuación indica que la salida del integrador en el tiempo  $t_2$  es una medida del intervalo  $t_2 - t_1$ .

Los interruptores se pueden controlar electrónicamente. La figura 7.12-1 ilustra un interruptor SPST controlado electrónicamente. En ocasiones, el símbolo que se muestra en la figura 7.12-1a se utiliza para enfatizar el hecho de que un interruptor sea controlado de manera electrónica. El voltaje del nodo  $v_c(t)$  se denomina voltaje de control. La figura 7.12-1b muestra un voltaje de control típico. Este interruptor de voltaje controlado está cerrado cuando  $v_c(t) = v_H$  y abierto cuando  $v_c(t) = v_L$ . El interruptor que se muestra en la figura 7.12-1 está abierto antes del tiempo  $t_1$ . Se cierra en el tiempo  $t_1$  y se mantiene cerrado hasta el tiempo  $t_2$ . El interruptor se abre en el tiempo  $t_2$  y se mantiene abierto.

Considere la figura 7.12-2. El voltaje  $v_c(t)$  controla el interruptor. El integrador convierte el intervalo  $t_2 - t_1$  en un voltaje que se muestra al utilizar el voltímetro. El intervalo que se

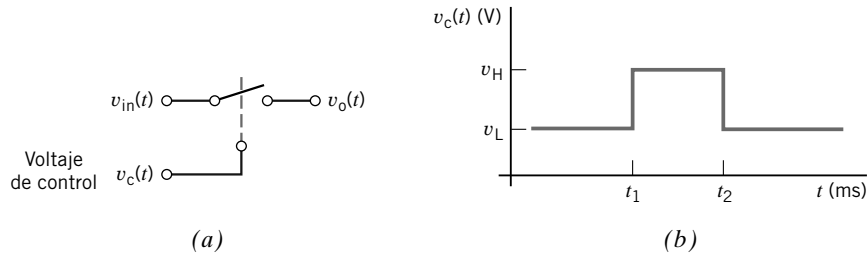


FIGURA 7.12-1 El interruptor de voltaje controlado. (a) Símbolo del interruptor. (b) Voltaje de control común.

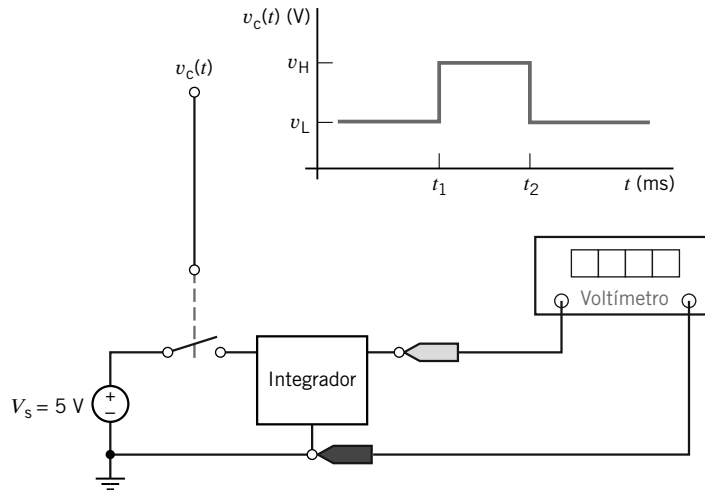


FIGURA 7.12-2 Uso de un integrador para medir un intervalo.

va a medir puede ser tan pequeño como 5 ms o tan grande como 200 ms. El reto es diseñar el integrador. Entre los componentes disponibles están:

- Resistores estándar de 2% (vea Apéndice D).
- Condensadores de  $1 \mu\text{F}$ ,  $0.2 \mu\text{F}$  y  $0.1 \mu\text{F}$ .
- Amplificadores operacionales.
- Alimentadores de potencia de +15-V y -15-V.
- Potenciómetros de 1-k $\Omega$ , 10-k $\Omega$  y 100-k $\Omega$ .
- Interruptores SPST de voltaje controlado.

### Describe la situación y los supuestos

Es conveniente establecer la salida del integrador en cero en el tiempo  $t_1$ . La relación entre el voltaje de salida del integrador y el intervalo de tiempo debe ser sencilla. En consecuencia, sea

$$v_o(t_2) = \frac{10 \text{ V}}{200 \text{ ms}} \cdot (t_2 - t_1) \quad (7.12-3)$$

La figura 7.12-2 indica que  $V_s = 5 \text{ V}$ . Comparando las ecuaciones 7.12-2 y 7.12-3, resulta

$$K \cdot V_s = \frac{10 \text{ V}}{200 \text{ ms}} \text{ y, por consiguiente, } K = 10 \frac{1}{\text{s}} \quad (7.12-4)$$

**Establezca el objetivo**

Diseñe un integrador que satisfaga tanto a

$$K = 10 \frac{1}{\text{s}} \quad \text{como a} \quad v_o(t_1) = 0 \quad (7.12-5)$$

**Genere un plan**

Empleemos el integrador que se describió en la sección 7.9. Al agregar un interruptor como se muestra en la figura 7.12-3 se satisface la condición  $v_o(t_1) = 0$ . El análisis realizado en la sección 7.9 mostró que

$$v_o(t_2) = -\frac{1}{RC} \cdot \int_{t_1}^{t_2} v_s(t) dt \quad (7.12-6)$$

De modo que hay que seleccionar  $R$  y  $C$  para satisfacer

$$\frac{1}{RC} = K = 10 \frac{1}{\text{s}} \quad (7.12-7)$$

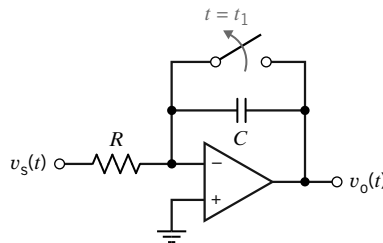


FIGURA 7.12-3 Un integrador usando un amplificador operacional.

**Actúe sobre el plan**

Cualquiera de los condensadores disponibles podría funcionar. Seleccione  $C = 1 \mu\text{F}$ . Luego,

$$R = \frac{1}{10 \frac{\text{V}}{\text{s}} \cdot 1 \mu\text{F}} = 100 \text{ k}\Omega \quad (7.12-8)$$

El diseño final se muestra en la figura 7.12-4.

**Verifique la solución propuesta**

El voltaje de salida del integrador está dado por

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC} \int_{t_1}^t v_s(\tau) d\tau + v_o(0) = \frac{-1}{(100 \cdot 10^3)(10^{-6})} \int_{t_1}^t 5 d\tau = -50(t - t_1)$$

donde las unidades de voltaje son V y las unidades de tiempo son s. El intervalo de tiempo se puede calcular desde el voltaje de salida, mediante

$$-(t - t_1) = \frac{v_o(t)}{50}$$

Por ejemplo, un voltaje de salida de  $-4 \text{ V}$  indica un intervalo de  $\frac{4}{50} \text{ s} = 80 \text{ ms}$ .

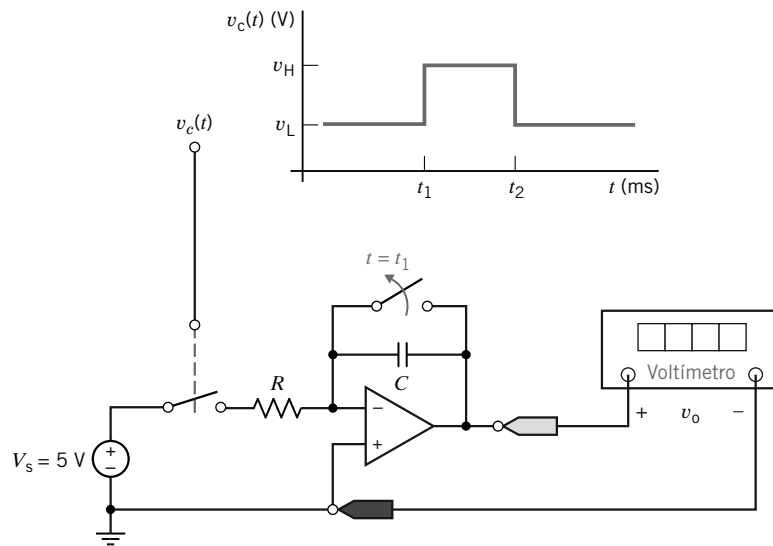


FIGURA 7.12-4 Uso de un integrador de amplificador operacional para medir un intervalo.

### 7.13 RESUMEN

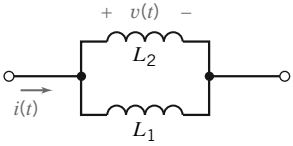
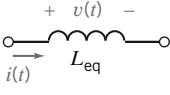
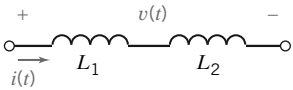
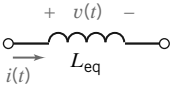
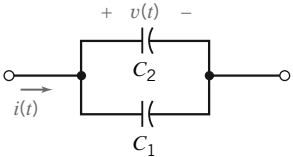
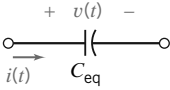
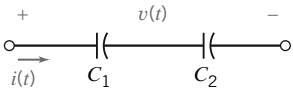
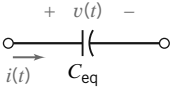
- La tabla 7.13-1 resume las ecuaciones de elementos para condensadores e inductores. (Observe que el voltaje y la corriente a que se refieren en estas ecuaciones se apegan a la convención pasiva.) A diferencia de los elementos de circuitos que encontramos en capítulos anteriores, las ecuaciones de elementos para condensadores e inductores implican derivadas e integrales.
- Los circuitos que contienen condensadores y/o inductores son capaces de almacenar energía. La energía almacenada en el campo eléctrico de un condensador es igual a  $\frac{1}{2} C v^2(t)$ , donde  $v(t)$  es el voltaje a través del condensador. La energía almacenada en el campo eléctrico de un inductor es igual a  $\frac{1}{2} L i^2(t)$ , donde  $i(t)$  es la corriente en el inductor.
- Los circuitos que contienen condensadores e inductores tienen memoria. Los voltajes y las corrientes en ese circuito en un tiempo particular dependen no sólo de otros voltajes y corrientes en ese mismo instante, sino que también de valores anteriores de esas corrientes y voltajes. Por ejemplo, el voltaje a través de un condensador en el tiempo  $t$  depende del voltaje a través de ese condensador en un tiempo anterior  $t_0$  y sobre el valor de la corriente del condensador entre  $t_0$  y  $t_1$ .
- Un conjunto de condensadores en serie o en paralelo se puede reducir a un condensador equivalente. Un conjunto de inductores en serie o en paralelo se puede reducir fácilmente a un inductor equivalente. La tabla 7.13-2 resume las ecuaciones requeridas para hacerlo.

Tabla 7.13-1 Ecuaciones de elementos para condensadores e inductores

CONDENSADOR	INDUCTOR
$i(t) = C \frac{d}{dt} v(t)$	$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i(t_0)$
$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0)$	$v(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$



Tabla 7.13-2 Condensadores e inductores en paralelo y en serie

CIRCUITOS EN SERIE O EN PARALELO	CIRCUITO EQUIVALENTE	ECUACIÓN
		$L_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$
		$L_{eq} = L_1 + L_2$
		$C_{eq} = C_1 + C_2$
		$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$

- Al no haber corrientes libres, el voltaje a través de un condensador no se puede modificar de manera instantánea. Del mismo modo, al no haber voltajes libres la corriente en un inductor no puede cambiar instantáneamente. Por el contrario, la corriente en un condensador y el voltaje a través de un inductor son capaces de modificarse de manera instantánea.
- A veces consideramos circuitos que contienen condensadores e inductores y tienen solamente entradas constantes. (Todos los voltajes de las fuentes de voltaje independientes y todas las corrientes de las fuentes de corriente independientes son constantes.) Cuando un circuito de esta índole se encuentra en estado estable, todas las corrientes y voltajes en ese circuito serán constantes. En particular, el voltaje a través de cualquier condensador será constante. La corriente en ese condensador será cero debido a la derivada en la ecuación para la corriente del condensador. Del mismo modo, la

corriente a través de cualquier inductor será constante y el voltaje a través de todo inductor será cero. En consecuencia, los condensadores actuarán como circuitos abiertos y los inductores lo harán como circuitos en corto. Observe que esta situación ocurre solamente cuando todas las entradas al circuito son constantes.

- Se pueden utilizar un amplificador operacional y un condensador para hacer circuitos que desempeñen operaciones matemáticas de integración y diferenciación. Apropiadamente, estos circuitos importantes se llaman el integrador y el diferenciador.
- Los voltajes y corrientes de elementos en un circuito que contenga condensadores e inductores pueden ser funciones complicadas de tiempo. MATLAB es útil para el trazo de estas funciones.

## PROBLEMAS

### Sección 7.2 Condensadores

**P 7.2-1** Un condensador de  $15\text{-}\mu\text{F}$  tiene un voltaje de  $5\text{ V}$  a través de sí en  $t = 0$ . Si una corriente constante de  $25\text{ mA}$  fluye a través del condensador, ¿cuánto le tomará al condensador cargarse hasta  $150\text{ }\mu\text{C}$ ?

*Respuesta:*  $t = 3\text{ ms}$

**P 7.2-2** El voltaje,  $v(t)$ , a través de un condensador y la corriente,  $i(t)$ , en ese condensador se apegan a la convención pasiva. Determine la corriente,  $i(t)$ , cuando la capacitancia es  $C = 0.125\text{ F}$ , y el voltaje es  $v(t) = 12\cos(2t + 30^\circ)\text{ V}$ .

*Sugerencia:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A \cos(\omega t + \theta) &= -A \sin(\omega t + \theta) \cdot \frac{d}{dt}(\omega t + \theta) \\ &= -A\omega \sin(\omega t + \theta) \\ &= A\omega \cos\left(\omega t + \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

*Respuesta:*  $i(t) = 3\cos(2t + 120^\circ)\text{ A}$

**P 7.2-3** El voltaje,  $v(t)$ , a través de un condensador y la corriente,  $i(t)$ , en ese condensador se apegan a la convención pasiva. Determine la capacitancia cuando el voltaje es  $v(t) = 12\cos(500t - 45^\circ)\text{ V}$  y la corriente es  $i(t) = 3\cos(500t + 45^\circ)\text{ mA}$ .

Respuesta:  $C = 0.5 \mu\text{F}$

**P 7.2-4** Determine  $v(t)$  para el circuito que se muestra en la figura P 7.2-4a(t), cuando  $i_s(t)$  es como se muestra en la figura P 7.2-4b y  $v_o(0^-) = -1 \text{ mV}$ .

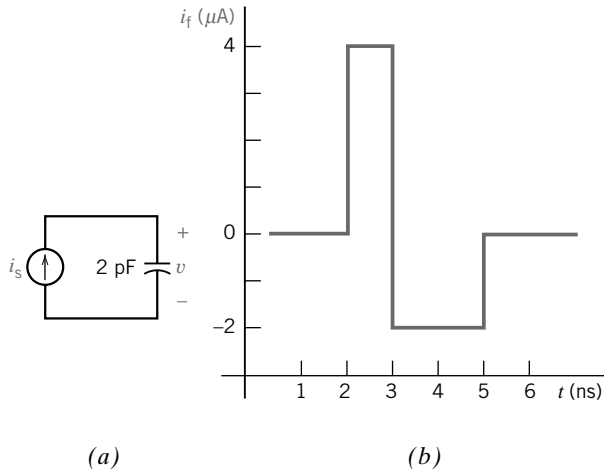


Figura P 7.2-4 (a) Circuito y (b) forma de onda de la fuente de corriente.

**P 7.2-5** El voltaje,  $v(t)$ , y la corriente,  $i(t)$ , de un condensador de  $1 \text{ F}$  se apegan a la convención pasiva. Además,  $v(0) = 0 \text{ V}$  e  $i(0) = 0 \text{ A}$ . (a) Determine  $v(t)$  cuando  $i(t) = x(t)$ , donde  $x(t)$  se muestra en la figura P 7.2-5 e  $i(t)$  tiene unidades de A. (b) Determine  $i(t)$  cuando  $v(t) = x(t)$ , donde  $x(t)$  se muestra en la figura P 7.2-5 y  $v(t)$  tiene unidades de V.

Sugerencia:  $x(t) = 4t - 4$  cuando  $1 < t < 2$  y  $x(t) = -4t + 12$  cuando  $2 < t < 3$ .

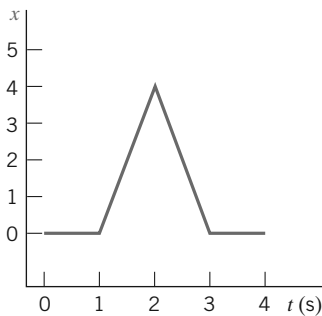


Figura P 7.2-5

**P 7.2-6** El voltaje,  $v(t)$ , y la corriente,  $i(t)$ , de un condensador de  $0.5 \text{ F}$  se apegan a la convención pasiva. Además,  $v(0) = 0 \text{ V}$  e  $i(0) = 0 \text{ A}$ . (a) Determine  $v(t)$  cuando  $i(t) = x(t)$ , donde  $x(t)$  se muestra en la figura P 7.2-6 e  $i(t)$  tiene unidades de A. (b) Determine  $i(t)$  cuando  $v(t) = x(t)$ , donde  $x(t)$  se muestra en la figura P 7.2-5 y  $v(t)$  tiene unidades de V.

Sugerencia:  $x(t) = 0.2t - 0.4$  cuando  $2 < t < 6$ .

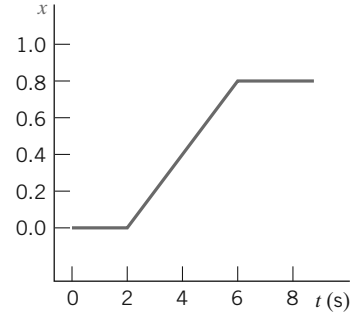


Figura P 7.2-6

**P 7.2-7** El voltaje a través de un condensador de  $40 \mu\text{F}$  es de  $25 \text{ V}$  en  $t(0)$ . Si la corriente a través del condensador es una función de tiempo dada por  $i(t) = 6e^{-6t} \text{ mA}$  para  $t < 0$ , encuentre  $v(t)$  para  $t > 0$ .

Respuesta:  $v(t) = 50 - 25e^{-6t} \text{ V}$

**P 7.2-8** Encuentre  $i$  para el circuito de la figura P 7.2-8 si  $v = 5(1 - 2e^{-2t}) \text{ V}$ .

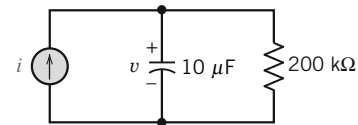


Figura P 7.2-8

**P 7.2-9** Determine  $v(t)$  para  $t \geq 0$  para el circuito de la figura P 7.2-9a cuando  $i_s(t)$  es la corriente que se muestra en la figura P 7.2-9b y  $v(0) = 1 \text{ V}$ .

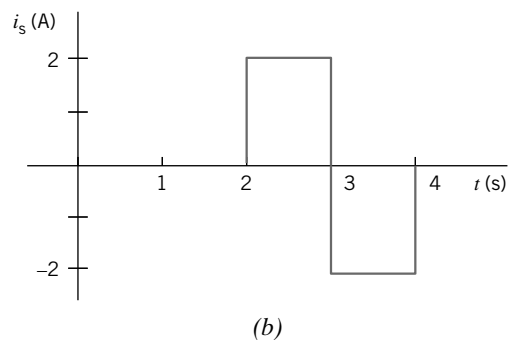
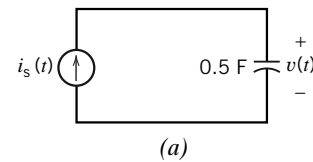


Figura P 7.2-9

**P 7.2-10** Determine  $v(t)$  para  $t \geq 0$  para el circuito de la figura P 7.2-10a cuando  $v(0) = -4 \text{ V}$  e  $i_s(t)$  es la corriente que se muestra en la figura P 7.2-10b.

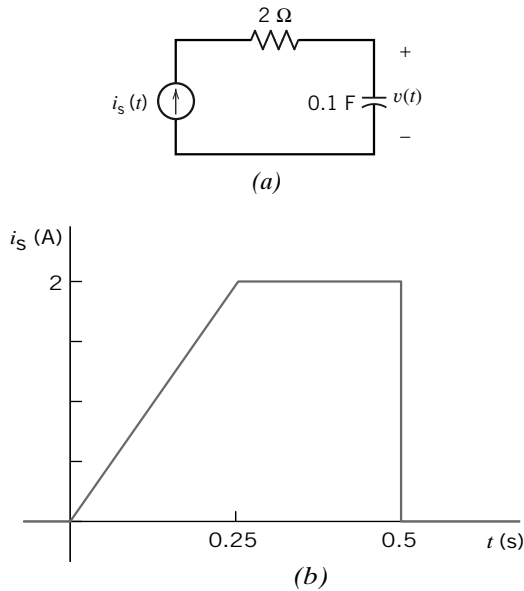


Figura P 7.2-10

**P 7.2-11** Determine  $i(t)$  para  $t \geq 0$  para el circuito de la figura P 7.2-11a cuando  $v_s(t)$  es el voltaje que se muestra en la figura P 7.2-11b.

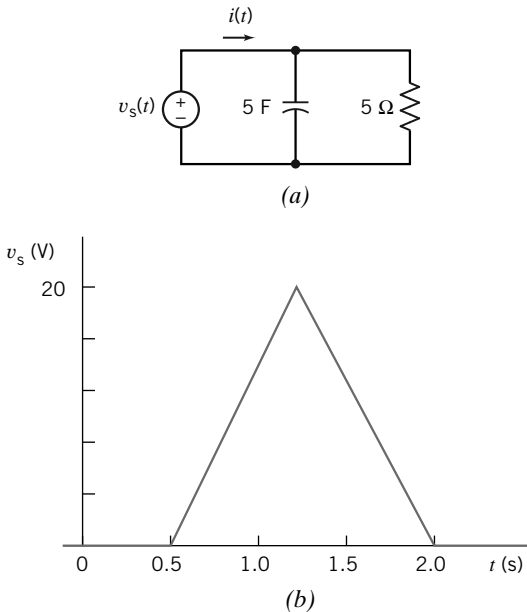


Figura P 7.2-11

**P 7.2-12** El voltaje del condensador en el circuito que se muestra en la figura P 7.2-12 está dado por

$$v(t) = 12 - 10e^{-2t} \text{ V para } t \geq 0$$

Determine  $i(t)$  para  $t > 0$ .

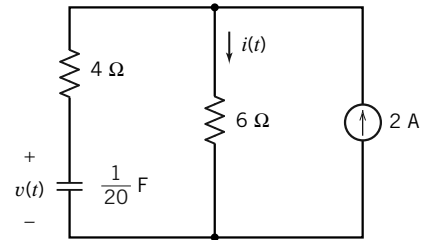


Figura P 7.2-12

**P 7.2-13** El voltaje del condensador en el circuito que se muestra en la figura P 7.2-13 está dado por

$$v(t) = 2.4 + 5.6e^{-5t} \text{ V para } t \geq 0$$

Determine  $i(t)$  para  $t > 0$ .

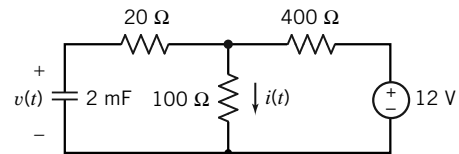


Figura P 7.2-13

**P 7.2-14** El voltaje del condensador en el circuito que se muestra en la figura P 7.2-14 está dado por

$$v(t) = 10 - 8e^{-5t} \text{ V para } t \geq 0$$

Determine  $i(t)$  para  $t > 0$ .

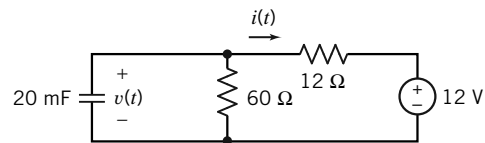


Figura P 7.2-14

**P 7.2-15** Determine el voltaje  $v(t)$  para  $t > 0$  para el circuito de la figura P 7.2-15b cuando  $i_s(t)$  es la corriente que se muestra en la figura P 7.2-15a. El voltaje del condensador en tiempo  $t = 0$  es  $v(0) = -12 \text{ V}$ .

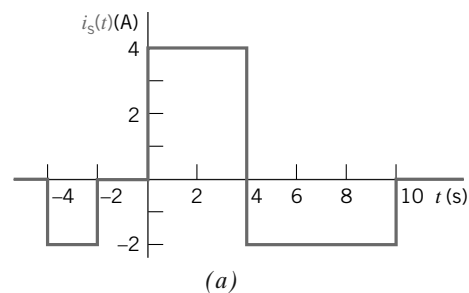


Figura P 7.2-15 (a) El voltaje de la fuente de voltaje. (b) El circuito.

**P 7.2-16** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 7.2-16 es la corriente

$$i(t) = 3.75e^{-1.2t} \text{ A para } t > 0$$

La salida es el voltaje del condensador

$$v(t) = 4 - 1.25e^{-1.2t} \text{ V para } t > 0$$

Encuentre el valor de la capacitancia,  $C$ .

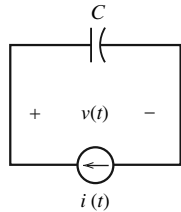


Figura P 7.2-16

**P 7.2-17** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 7.2-17 es la corriente

$$i(t) = 3e^{-25t} \text{ A para } t > 0$$

El voltaje inicial del condensador es  $v_c(0) = -2 \text{ V}$ . Determine la corriente de la fuente de corriente,  $v(t)$ , para  $t > 0$ .

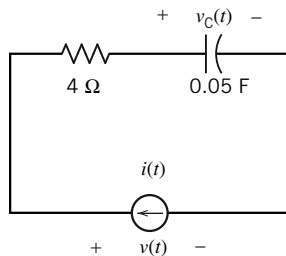


Figura P 7.2-17

**P 7.2-18** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 7.2-18 es la corriente

$$i(t) = 3e^{-25t} \text{ A para } t > 0$$

La salida es el voltaje

$$v(t) = 9.6e^{-25t} + 0.4 \text{ V para } t > 0$$

El voltaje inicial del condensador es  $v_c(0) = -2 \text{ V}$ . Determine los valores de la capacitancia,  $C$ , y la resistencia,  $R$ .

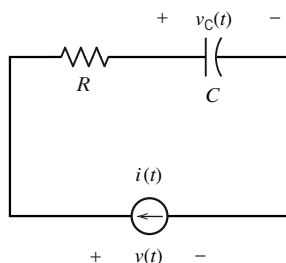


Figura P 7.2-18

**P 7.2-19** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 7.2-19 es el voltaje

$$v(t) = 8 + 5e^{-10t} \text{ V para } t > 0$$

Determine la corriente,  $i(t)$ , para  $t > 0$ .

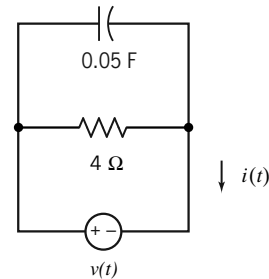


Figura P 7.2-19

**P 7.2-20** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 7.2-20 es el voltaje

$$v(t) = 3 + 4e^{-2t} \text{ A para } t > 0$$

La salida es la corriente  $i(t) = 0.3 - 1.6e^{-2t} \text{ V para } t > 0$ .

Determine los valores de la resistencia y de la capacitancia.

*Respuestas:*  $R = 10 \text{ } \Omega$  y  $C = 0.25 \text{ F}$

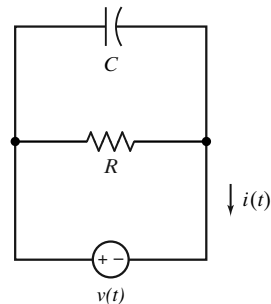


Figura P 7.2-20

**P 7.2-21** Considere el condensador que se muestra en la figura P 7.2-21. La corriente y el voltaje están dados por

$$i(t) = \begin{cases} 0.5 & 0 < t < 0.5 \\ 2 & 0.5 < t < 1.5 \\ 0 & t > 1.5 \end{cases}$$

$$y \quad v(t) = \begin{cases} 2t + 8.6 & 0 \leq t \leq 0.5 \\ at + b & 0.5 \leq t \leq 1.5 \\ c & t \geq 1.5 \end{cases}$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes reales. (La corriente está dada en amperios, el voltaje en voltios y el tiempo en segundos.) Determine los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

*Respuestas:*  $a = 8 \text{ V/s}$ ,  $b = 5.6 \text{ V}$  y  $c = 17.6 \text{ V}$

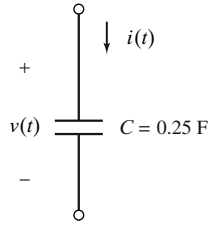


Figura P 7.2-21

**P 7.2-22** En el tiempo  $t = 0$ , el voltaje a través del condensador se muestra en la figura P 7.2-22 es  $v(0) = -20$  V. Determine los valores del voltaje del condensador en los tiempos 1 ms, 3 ms y 7 ms.

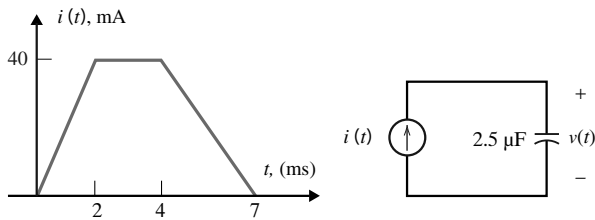


Figura P 7.2-22

### Sección 7.3 Almacenamiento de energía en un condensador

**P 7.3-1** La corriente,  $i$ , a través de un condensador se muestra en la figura P 7.3-1. Cuando  $v(0) = 0$  y  $C = 0.5$  F, determine y trace  $v(t)$ ,  $p(t)$  y  $w(t)$  para  $0 \leq t < 6$  s.

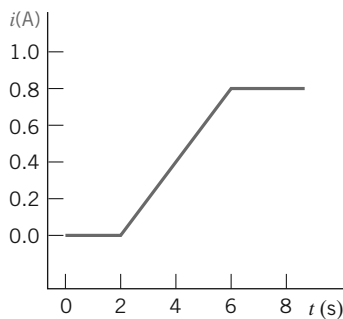


Figura P 7.3-1

**P 7.3-2** En un circuito de potencia de pulso, el voltaje de un condensador de  $10 \mu\text{F}$  es cero para  $t < 0$  y

$$v = 5(1 - e^{-4000t}) \text{ V} \quad t \geq 0$$

Determine la corriente del capacitor y la energía almacenada en el condensador en  $t = 0$  ms y  $t = 10$  ms.

**P 7.3-3** Si  $v_c(t)$  está dada por la forma de onda que se muestra en la figura P 7.3-3, bosqueje la corriente del condensador para  $-1 \text{ s} < t < 2 \text{ s}$ . Bosqueje la potencia y la energía para el condensador sobre el mismo intervalo de tiempo cuando  $C = 1 \text{ mF}$ .

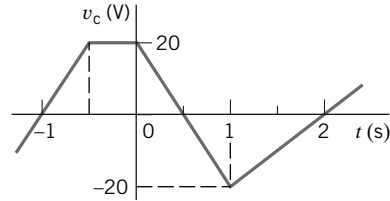


Figura P 7.3-3

**P 7.3-4** La corriente a través de un condensador de  $2 \mu\text{F}$  es  $50 \cos(10t + \pi/6) \mu\text{A}$  todo el tiempo. El voltaje promedio a través del condensador es cero. ¿Cuál es el valor máximo de la energía almacenada en el condensador? ¿Cuál es el primer valor no negativo de  $t$  en el cual se almacenó la máxima energía?

**P 7.3-5** Se utilizó un condensador en la unidad de flash de luz electrónica de una cámara. Se utilizó una batería pequeña con un voltaje constante de 6 V para cargar un condensador con una corriente constante de  $10 \mu\text{A}$ . ¿Cuánto le toma cargar al capacitor cuando  $C = 10 \mu\text{F}$ ? ¿Cuál es la energía almacenada?

**P 7.3-6** El voltaje inicial del condensador del circuito que se muestra en la figura P 7.3-6 es  $v_c(0^-) = 3$  V. Determine (a) el voltaje  $v(t)$  y (b) la energía almacenada en el condensador en  $t = 0.2$  s y  $t = 0.8$  s cuando

$$i(t) = \begin{cases} 3e^{5t} \text{ A} & 0 < t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \text{ s} \end{cases}$$

**Respuestas:**

(a)  $18e^{-5t} \text{ V}, 0 \leq t < 1$

(b)  $w(0.2) = 6.65 \text{ J}$  y  $w(0.8) = 2.68 \text{ kJ}$

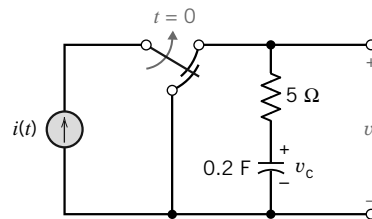


Figura P 7.3-6

### Sección 7.4 Condensadores en serie y en paralelo

**P 7.4-1** Encuentre la corriente  $i(t)$  para el circuito de la figura P 7.4-1.

**Respuesta:**  $i(t) = -1.2 \text{ sen } 100t \text{ mA}$

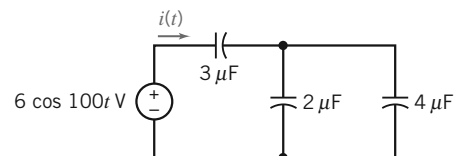


Figura P 7.4-1

**P 7.4-2** Encuentre la corriente  $i(t)$  para el circuito de la figura P 7.4-2.

**Respuesta:**  $i(t) = -1.5e^{-250t}$  mA

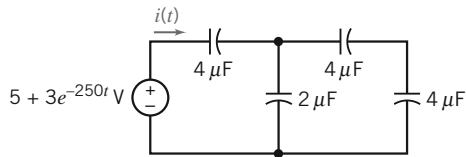


Figura P 7.4-2

**P 7.4-3** El circuito de la figura P 7.4-3 contiene cinco condensadores idénticos. Encuentre el valor de la capacitancia  $C$ .

**Respuesta:**  $C = 10 \mu\text{F}$

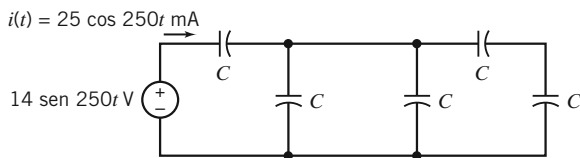


Figura P 7.4-3

**P 7.4-4** El circuito que se muestra en la figura P 7.4-4 contiene siete condensadores, cada cual con una capacitancia  $C$ . El voltaje de fuente lo da

$$v(t) = 4 \cos(3t) \text{ V}$$

Encuentre la corriente  $i(t)$  cuando  $C = 1 \text{ F}$ .

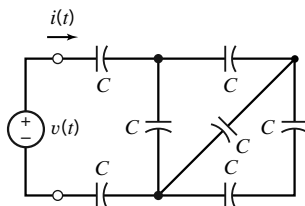


Figura P 7.4-4

**P 7.4-5** Determine el valor de la capacitancia  $C$ . En el circuito que se muestra en la figura 7.4-5, dado que  $C_{\text{eq}} = 8 \text{ F}$ .

**Respuesta:**  $C = 20 \text{ F}$

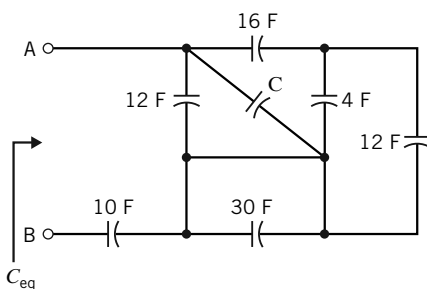


Figura P 7.4-5

**P 7.4-6** Determine el valor de la capacitancia equivalente,  $C_{\text{eq}}$ , en el circuito que se muestra en la figura P 7.4-6.

**Respuesta:**  $C_{\text{eq}} = 10 \text{ F}$

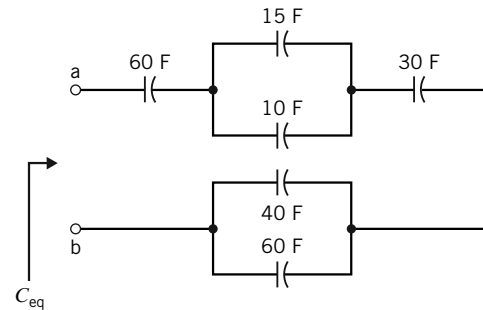


Figura P 7.4-6

**P 7.4-7** El circuito que se muestra en la figura P 7.4-7 consta de nueve condensadores que tienen la misma capacitancia,  $C$ . Determine el valor de la capacitancia  $C$ , dado que  $C_{\text{eq}} = 50 \text{ mF}$ .

**Respuesta:**  $C = 90 \mu\text{F}$

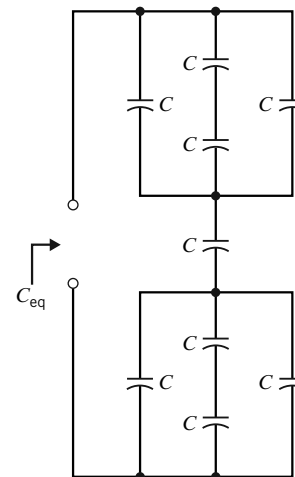


Figura P 7.4-7

**P 7.4-8** El circuito de la figura P 7.4-8 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se abra en el tiempo  $t = 0$ . El voltaje  $v(t)$  está dado por

$$v(t) = \begin{cases} 3.6 \text{ V} & \text{para } t \leq 0 \\ 3.6e^{-2.5t} \text{ V} & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

- Determine la energía almacenada por cada condensador antes de que el interruptor se abra.
- Determine la energía almacenada por cada condensador en 1 s luego de abrirse el interruptor.

Los condensadores en paralelo se pueden reemplazar por un condensador equivalente.

- (c) Determine la energía almacenada por el condensador equivalente antes de que se abra el interruptor.
- (d) Determine la energía almacenada por el condensador equivalente 1 s después de abrirse el interruptor.

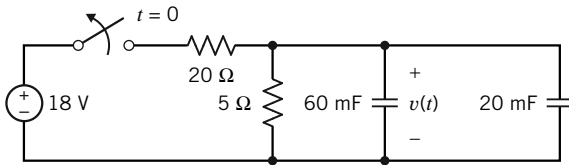


Figura P 7.4-8

**P 7.4-9** El circuito de la figura P 7.4-9 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre. Los voltajes del condensador están en cero antes de que el interruptor se cierre en el tiempo ( $v_1(0) = v_2(0) = 0$ ). La corriente  $i(t)$  está dada por

$$i(t) = \begin{cases} 0 \text{ A} & \text{para } t < 0 \\ 2.4e^{-30t} \text{ A} & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

- (a) Determine los voltajes del condensador  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$ , para  $t \geq 0$ .
- (b) Determine la energía almacenada por cada condensador 20 s luego de abrirse el interruptor.

Los condensadores en serie se pueden reemplazar por un condensador equivalente.

- (c) Determine el voltaje a través del condensador equivalente + en la parte alta para  $t \geq 0$ .
- (d) Determine la energía almacenada por el condensador equivalente 20 ms luego de abrirse el interruptor.

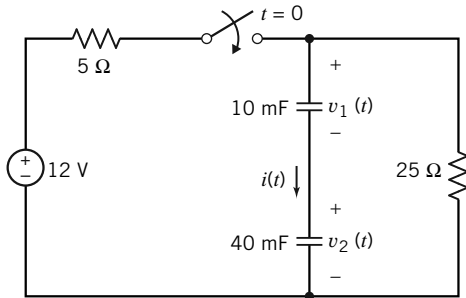


Figura P 7.4-9

**P 7.4-10** Encuentre la relación para la división de corriente entre dos condensadores en paralelo como se muestra en la figura P 7.4-10.

**Respuesta:**  $i_n = iC_n/(C_1 + C_2)$ ,  $n = 1, 2$

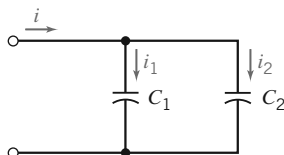


Figura P 7.4-10

## Sección 7.5 Inductores

**P 7.5-1** Nikola Tesla (1857-1943), ingeniero electricista estadounidense, experimentó con la inducción eléctrica. Tesla construyó una bobina grande con una gran inductancia, la cual se muestra en la figura P 7.5-1. La bobina estaba conectada a una corriente de fuente de

$$i_s = 100 \sin 400t \text{ A}$$

de modo que la corriente del inductor  $i_L = i_s$ . Encuentre el voltaje a través del inductor y explique la descarga en el aire, la cual se muestra en la figura. Suponga que  $L = 200 \text{ H}$  y que la distancia de la descarga promedio es de 2 m. Observe que la intensidad dieléctrica del aire es de  $3 \times 10^6 \text{ V/m}$ .



**Figura P 7.5-1** Nikola Tesla se sienta impasible mientras las bobinas de inducción de corriente alterna descargan millones de voltios con un rugido que se oía a 10 millas de distancia (hacia 1910). Cortesía de Burndy Library.

**P 7.5-2** El modelo de un motor eléctrico consta de una combinación en serie de un resistor y un inductor. Una corriente  $i(t) = 4te^{-t} \text{ A}$  fluye a través de la combinación en serie de un resistor de  $10\text{-}\Omega$  y un inductor de  $0.1 \text{ H}$ . Encuentre el voltaje a través de la combinación.

**Respuesta:**  $v(t) = 0.4e^{-t} + 39.6te^{-t} \text{ V}$

**P 7.5-3** El voltaje,  $v(t)$ , y la corriente,  $i(t)$ , de un inductor de  $1\text{-H}$  se apegan a la convención pasiva. Además,  $v(0) = 0 \text{ V}$  e  $i(0) = 0 \text{ A}$ .

- (a) Determine  $v(t)$  cuando  $i(t) = x(t)$ , donde  $x(t)$  se muestra en la figura P 7.5-3 e  $i(t)$  tiene unidades de A.
- (b) Determine  $i(t)$  cuando  $v(t) = x(t)$ , donde  $x(t)$  se muestra en la figura P 7.5-3 y  $v(t)$  tiene unidades de V.

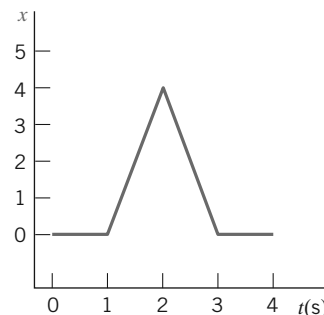


Figura P 7.5-3

**Sugerencia:**  $x(t) = 4t - 4$  cuando  $1 < t < 2$  y  $x(t) = -4t + 12$  cuando  $2 < t < 3$ .

**P 7.5-4** El voltaje,  $v(t)$ , a través de un inductor y la corriente,  $i(t)$ , en ese inductor se apegan a la convención pasiva. Determine el voltaje,  $v(t)$ , cuando la inductancia es  $L = 250$  mH y la corriente es  $i(t) = 120 \text{ sen}(500t - 30^\circ)$  mA.

**Sugerencia:**  $\frac{d}{dt} A \text{ sen}(\omega t + \theta) = A \cos(\omega t + \theta) \cdot \frac{d}{dt}(\omega t + \theta)$   
 $= A\omega \cos(\omega t + \theta)$   
 $= A\omega \text{ sen}\left(\omega t + \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

**Respuesta:**  $v(t) = 15 \text{ sen}(500t + 60^\circ)$  V

**P 7.5-5** Determine  $i_L(t)$  para  $t > 0$  cuando  $i_L(0) = -2 \mu\text{A}$  para el circuito de la figura P 7.5-5a cuando  $v_s(t)$  es como se muestra en la figura P 7.5-5b.

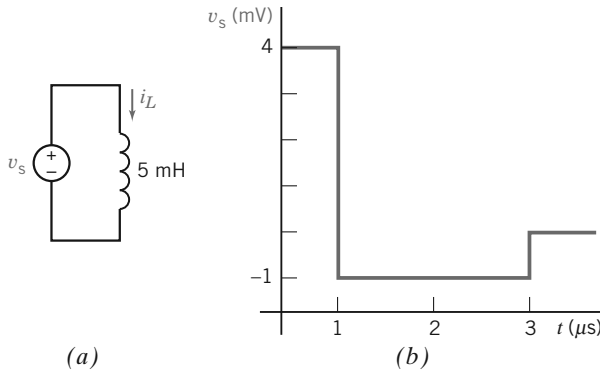


Figura P 7.5-5

**P 7.5-6** Determine  $v(t)$  para  $t > 0$  para el circuito de la figura P 7.5-6a cuando  $i_L(0)$  e  $i_f$  es como se muestra en la figura P 7.5-6b.

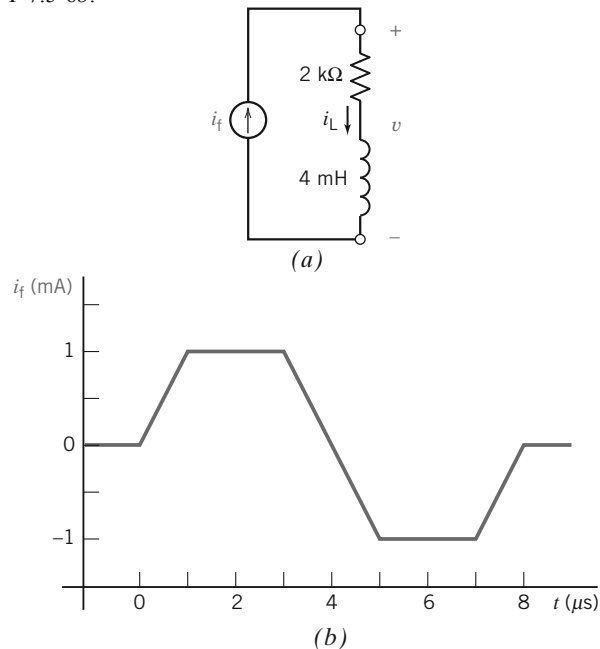


Figura P 7.5-6

**P 7.5-7** El voltaje,  $v(t)$ , y la corriente,  $i(t)$ , de un inductor de  $5 \text{ H}$  se apegan a la convención pasiva. Además,  $v(0) = 0 \text{ V}$  e  $i(0) = 0 \text{ A}$ .

- (a) Determine  $v(t)$  cuando  $i(t) = x(t)$ , donde  $x(t)$  se muestra en la figura P 7.5-7 e  $i(t)$  tiene unidades de A.
- (b) Determine  $i(t)$  cuando  $v(t) = x(t)$ , donde  $x(t)$  se muestra en la figura P 7.5-7 y  $v(t)$  tiene unidades de V.

**Sugerencia:**  $x(t) = 0.2t - 0.4$  cuando  $2 < t < 6$ .

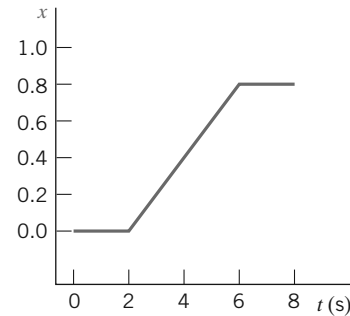


Figura P 7.5-7

**P 7.5-8** Determine  $i(t)$  para  $t \geq 0$  para la corriente de la figura P 7.5-8a cuando  $i(0) = 25 \text{ mA}$  y  $v_s(t)$  es el voltaje que se muestra en la figura P 7.5-8b.

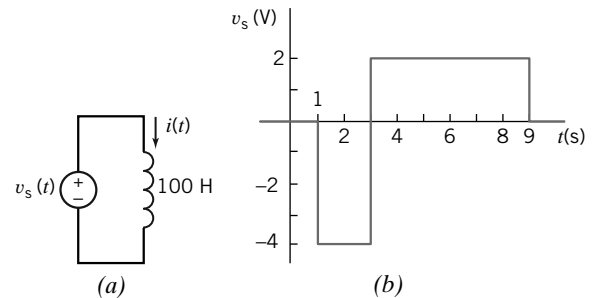


Figura P 7.5-8

**P 7.5-9** Determine  $i(t)$  para  $t \geq 0$  para la corriente de la figura P 7.5-9a cuando  $i(0) = -2 \text{ A}$  y  $v_s(t)$  es el voltaje que se muestra en la figura P 7.5-9b.

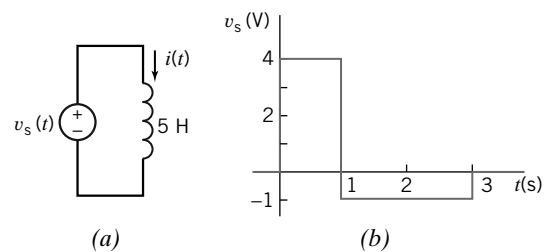


Figura P 7.5-9

**P 7.5-10** Determine  $i(t)$  para  $t \geq 0$  para la corriente de la figura P 7.5-10a cuando  $i(0) = 1 \text{ A}$  y  $v_s(t)$  es el voltaje que se muestra en la figura P 7.5-10b.



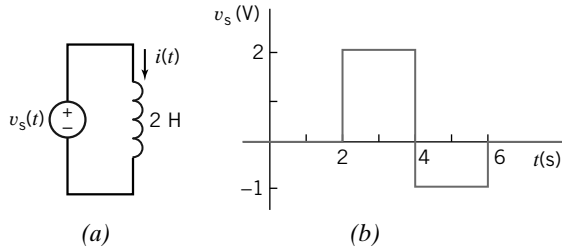


Figura P 7.5-10

**P 7.5-11** Determine  $i(t)$  para  $t \geq 0$  para el circuito de la figura P 7.5-11a cuando  $i(0) = 25\text{ mA}$  y  $v_s(t)$  es el voltaje que se muestra en la figura P 7.5-11b.

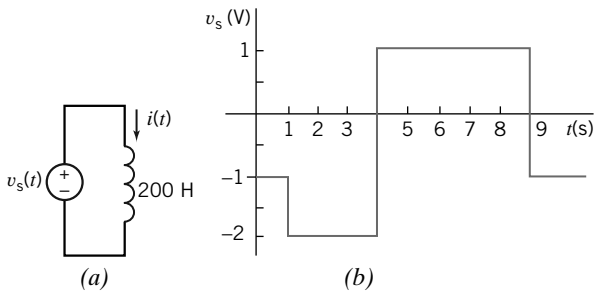


Figura P 7.5-11

**P 7.5-12** La corriente del inductor en el circuito que se muestra en la figura P 7.5-12 está dada por

$$i(t) = 6 + 4e^{-8t}\text{ A} \quad \text{para } t \geq 0$$

Determine  $v(t)$  para  $t \geq 0$ .

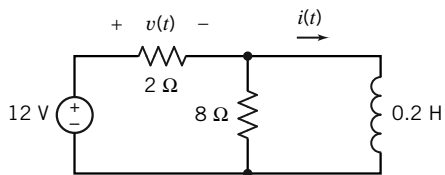


Figura P 7.5-12

**P 7.5-13** La corriente del inductor en el circuito que se muestra en la figura P 7.5-13 está dada por

$$i(t) = 5 - 3e^{-4t}\text{ A} \quad \text{para } t \geq 0$$

Determine  $v(t)$  para  $t \geq 0$ .

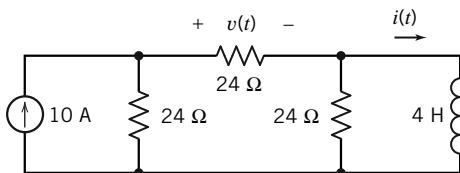


Figura P 7.5-13

**P 7.5-14** La corriente del inductor en el circuito que se muestra en la figura P 7.5-14 está dada por

$$i(t) = 3 + 2e^{-3t}\text{ A} \quad \text{para } t \geq 0$$

Determine  $v(t)$  para  $t \geq 0$ .

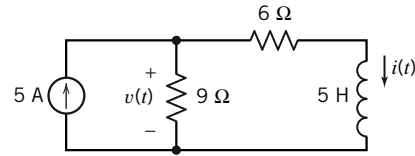


Figura P 7.5-14

**\*P 7.5-15** La corriente del inductor en el circuito que se muestra en la figura P 7.5-15 está dada por

$$i(t) = 240 + 193e^{-6.25t} \cos(9.27t - 102^\circ)\text{ mA} \quad \text{para } t \geq 0$$

Determine el voltaje del condensador  $v(t)$  para  $t > 0$ .

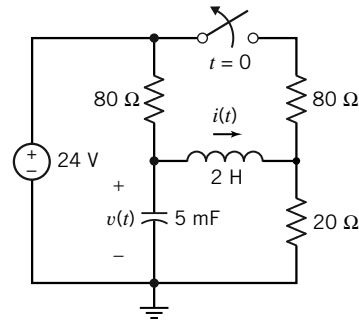
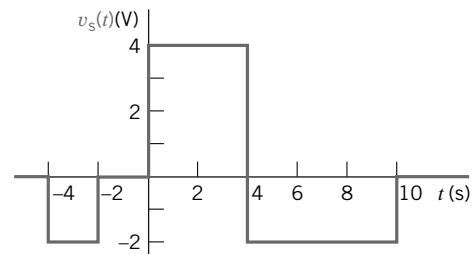
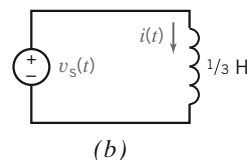


Figura P 7.5-15

**P 7.5-16** Determine la corriente  $i(t)$  para  $t > 0$  para el circuito de la figura P 7.5-16b cuando  $v_s(t)$  es el voltaje que se muestra en la figura P 7.5-16a. La corriente del inductor en tiempo  $t = 0$  es  $i(0) = -12\text{ A}$ .



(a)



(b)

Figura P 7.5-16 (a) El voltaje de la fuente de voltaje. (b) El circuito.

**P 7.5-17** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 7.5-17 es el voltaje

$$v(t) = 15e^{-4t} \text{ V para } t > 0$$

La corriente inicial en el inductor es  $i(0) = 2 \text{ A}$ . Determine la corriente del inductor,  $i(t)$  para  $t > 0$ .

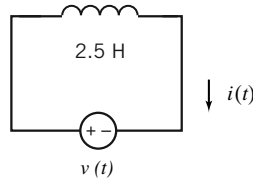


Figura P 7.5-17

**P 7.5-18** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 7.5-18 es el voltaje

$$v(t) = 4e^{-20t} \text{ V para } t > 0$$

La salida es la corriente

$$i(t) = -1.2e^{-20t} - 1.5 \text{ A para } t > 0$$

La corriente inicial en el inductor es  $i_L(0) = -3.5 \text{ A}$ . Determine los valores de la inductancia,  $L$ , y la resistencia  $R$ .

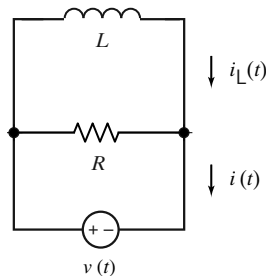


Figura P 7.5-18

**P 7.5-19** Considere el inductor que se muestra en la figura P 7.5-19. La corriente y el voltaje están dados por

$$i(t) = \begin{cases} 5t - 4.6 & 0 \leq t \leq 0.2 \\ at + b & 0.2 \leq t \leq 0.5 \\ c & t \geq 0.5 \end{cases}$$

$$y \quad v(t) = \begin{cases} 12.5 & 0 < t < 0.2 \\ 25 & 0.2 < t < 0.5 \\ 0 & t > 0.5 \end{cases}$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes reales. (La corriente está dada en amperios, el voltaje en voltios y el tiempo en segundos.) Determine los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

**Respuestas:**  $a = 10 \text{ A/s}$ ,  $b = -5.6 \text{ A}$  y  $c = -0.6 \text{ A}$

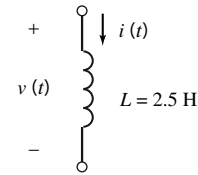


Figura P 7.5-19

**P 7.5-20** En el momento  $t = 0$ , la corriente en el inductor que se muestra en la figura P 7.5-20 es  $i(0) = 45 \text{ mA}$ . Determine los valores de la corriente del inductor en tiempos de 1 ms, 4 ms y 6 ms.

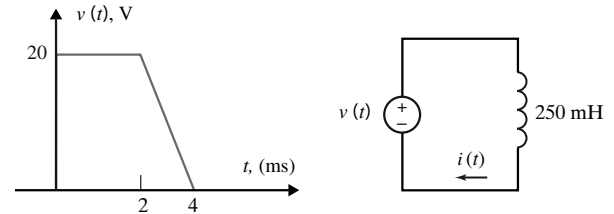


Figura P 7.5-20

**P 7.5-21** Uno de los tres elementos que se muestran en la figura P 7.5-21 es un resistor, otro es un condensador y uno más es un inductor. Dados

$$i(t) = 0.25 \cos(2t) \text{ A,}$$

y  $v_a(t) = -10 \sin(2t) \text{ V}$ ,  $v_b(t) = 10 \sin(2t) \text{ V}$  y  $v_c(t) = 10 \cos(2t) \text{ V}$ , determine la resistencia del resistor, la capacitancia del condensador, y la inductancia del inductor. (Requerimos valores positivos de resistencia, capacitancia e inductancia.)

**Respuestas:** Resistencia =  $40 \Omega$ , capacitancia =  $0.0125 \text{ F}$  e inductancia =  $20 \text{ H}$ .

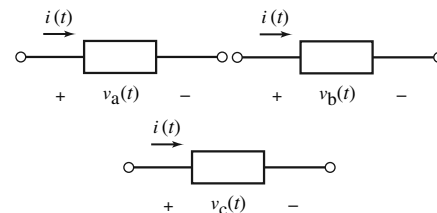


Figura P. 7.5-21

**P 7.5-22** Uno de los tres elementos que se muestran en la figura P 7.5-21 es un resistor, otro es un condensador y uno más es un inductor. Dado que

$$v(t) = 24 \cos(5t) \text{ V}$$

e  $i_a(t) = 3 \cos(5t) \text{ A}$ ,  $i_b(t) = 12 \sin(5t) \text{ A}$  e  $i_c(t) = -1.8 \sin(5t) \text{ A}$ , determine la resistencia del resistor, la capacitancia del condensador y la inductancia del inductor. (Requerimos valores positivos de resistencia, capacitancia e inductancia.)

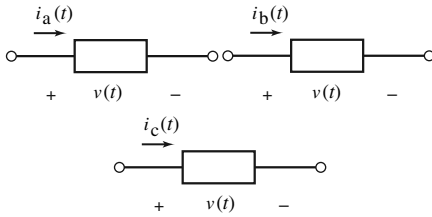


Figura P. 7.5-22

### Sección 7.6 Almacenaje de energía en un inductor

**P 7.6-1** La corriente,  $i(t)$ , en un inductor de 100 H conectado a un circuito de teléfono cambia de acuerdo con

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 4t & 0 \leq t \leq 1 \\ 4 & t \geq 1 \end{cases}$$

donde las unidades de tiempo son segundos y las unidades de corriente son amperios. Determine la potencia,  $p(t)$ , absorbida por el inductor, y la energía,  $w(t)$  almacenada por el inductor.

$$\text{Respuestas: } p(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1.6t & 0 < t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases} \text{ y}$$

$$w(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 0.8t^2 & 0 < t < 1 \\ 0.8 & t \geq 1 \end{cases}$$

Las unidades de  $p(t)$  son W y las unidades de  $w(t)$  son J.

**P 7.6-2** La corriente,  $i(t)$ , en un inductor de 5-H es

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 4 \sin 2t & t \geq 0 \end{cases}$$

donde las unidades de tiempo son segundos y las unidades de corriente son amperios. Determine la potencia,  $p(t)$ , absorbida por el inductor y la energía,  $w(t)$ , almacenada en el inductor.

*Sugerencia:*  $2(\cos A)(\sin B) = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

**P 7.6-3** El voltaje,  $v(t)$ , a través de un inductor de 25-mH se utiliza en un experimento de potencia de fusión es

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 6 \cos 100t & t \geq 0 \end{cases}$$

donde las unidades de tiempo son s y las unidades de voltaje son V. La corriente en este inductor es cero antes de que el voltaje cambie en  $t = 0$ . Determine la potencia,  $p(t)$ , absorbida por el inductor, y la energía,  $w(t)$ , almacenada en el inductor.

*Sugerencia:*  $2(\cos A)(\sin B) = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

*Respuesta:*  $p(t) = 7.2 \sin 200t \text{ W}$  y  $w(t) = 3.6[1 - \cos 200t] \text{ mJ}$

**P 7.6-4** La corriente en un inductor,  $L = 1/4 \text{ H}$ , es  $i = 4te^{-t} \text{ A}$  para  $t \geq 0$  e  $i = 0$  para  $t < 0$ . Encuentre el voltaje, la potencia y la energía en este inductor.

*Respuesta parcial:*  $w = 2t^2e^{-2t} \text{ J}$

**P 7.6-5** La corriente a través del inductor de un circuito de deflexión de un tubo de televisión se muestra en la figura P 7.6-5 cuando  $L = 1/2 \text{ H}$ . Encuentre el voltaje, la potencia y la energía en el inductor.

*Respuesta parcial:*

$$\begin{aligned} p &= 2t \text{ para } 0 \leq t < 1 \\ &= 2(t-2) \text{ para } 1 < t < 2 \\ &= 0 \text{ para otro } t \end{aligned}$$

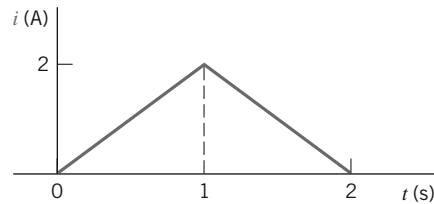


Figura P 7.6-5

### Sección 7.7 Inductores en serie y en paralelo

**P 7.7-1** Encuentre la corriente  $i(t)$  para el circuito de la figura P 7.7-1

*Respuesta:*  $i(t) = 15 \sin 100t \text{ mA}$

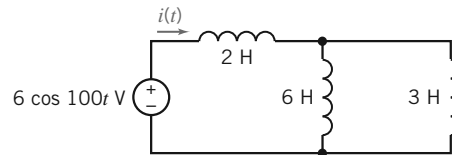


Figura P 7.7-1

**P 7.7-2** Encuentre el voltaje  $v(t)$  para el circuito de la figura P 7.7-2

*Respuesta:*  $v(t) = -6e^{-250t} \text{ mV}$

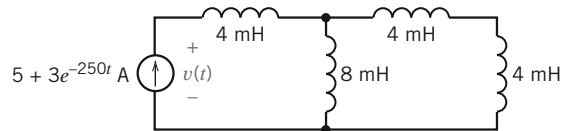


Figura P 7.7-2

**P 7.7-3** El circuito de la figura P 7.7-3 contiene cuatro inductores idénticos. Encuentre el valor de la inductancia  $L$ .

*Respuesta:*  $L = 2.86 \text{ H}$

$$i(t) = 14 \sin 250t \text{ mA}$$

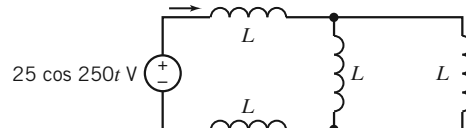


Figura P 7.7-3

**P 7.7-4** El circuito que se muestra en la figura P 7.7-4 contiene siete inductores, cada uno con una inductancia  $C$ . El voltaje de la fuente está dado por

$$v(t) = 4 \cos(3t) \text{ V}$$

Encuentre la corriente  $i(t)$  cuando  $L = 4 \text{ H}$ .

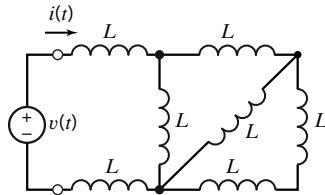


Figura P 7.7-4

**P 7.7-5** Determine el valor de la inductancia  $L$  en el circuito que se muestra en la figura P 7.7-5, dado que  $L_{eq} = 18 \text{ H}$ .

*Respuesta:*  $L = 20 \text{ H}$

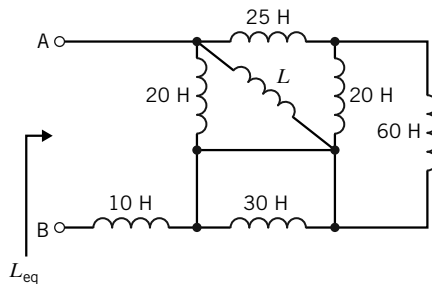


Figura P 7.7-5

**P 7.7-6** Determine el valor de la inductancia equivalente  $L_{eq}$  para el circuito que se muestra en la figura P 7.7-6.

*Respuesta:*  $L_{eq} = 120 \text{ H}$

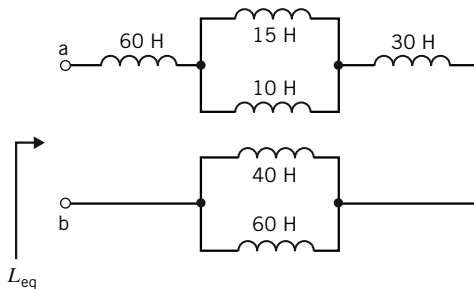


Figura P 7.7-6

**P 7.7-7** El circuito que se muestra en la figura P 7.7-7 contiene diez inductores, cada uno con una inductancia  $L$ . Determine el valor de la inductancia  $L$ , dado que  $L_{eq} = 12 \text{ mH}$ .

*Respuesta:*  $L = 35 \text{ mH}$

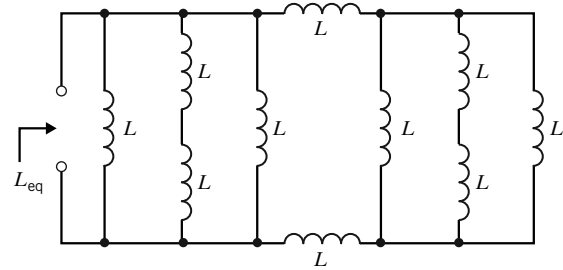


Figura P 7.7-7

**P 7.7-8** El circuito que se muestra en la figura P 7.7-8 se encuentra en estado estable antes de que se cierre el interruptor. Las corrientes del inductor son cero antes de que se cierre el interruptor ( $i_1(0) = i_2(0) = 0$ ).

El voltaje  $v(t)$  está dado por

$$v(t) = \begin{cases} 0 \text{ V} & \text{para } t < 0 \\ 4e^{-5t} \text{ V} & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

- (a) Determine las corrientes del inductor,  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$ , para  $t \geq 0$ .
- (b) Determine la energía almacenada por cada inductor de 200 ms después de que se cierra el interruptor.

Los inductores paralelos se pueden reemplazar por un inductor equivalente.

- (c) Determine la corriente en el inductor equivalente, en dirección inferior, para  $t \geq 0$ .
- (d) Determine la energía almacenada por el inductor equivalente 200 ms después de que se cierra el interruptor.

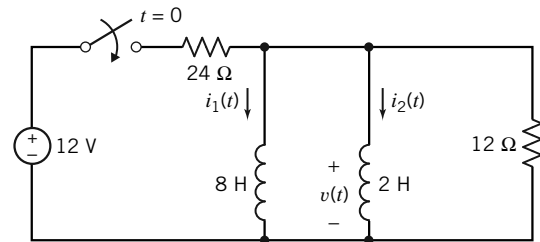


Figura P 7.7-8

**P 7.7-9** El circuito que se muestra en la figura P 7.7-9 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se abra en tiempo  $t = 0$ . La corriente  $i(t)$  está dado por

$$i(t) = \begin{cases} 0.8 \text{ A} & \text{para } t \leq 0 \\ 0.8e^{-2t} \text{ A} & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Determine la energía almacenada por cada inductor antes que se abra el interruptor.
- (b) Determine la energía almacenada por cada inductor de 200 ms después de que se abre el interruptor.

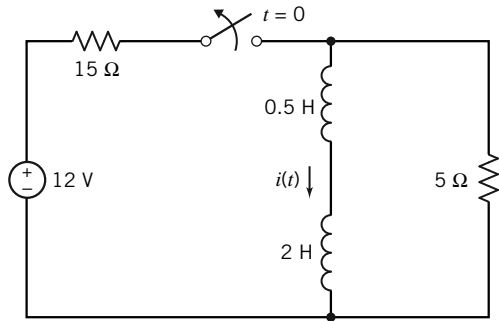


Figura P 7.7-9

Los inductores en serie se pueden reemplazar por un inductor equivalente.

- (c) Determine la energía almacenada por el inductor equivalente antes de que se abra el interruptor.  
 (d) Determine la energía almacenada por el inductor equivalente 200 ms después de que se abre el interruptor.

**P 7.7-10** Determine la razón de corriente  $i_1/i$  para el circuito que se muestra en la figura P 7.7-10. Suponga que las corrientes iniciales son cero en  $t_0$ .

*Respuesta:*  $\frac{i_1}{i} = \frac{L_1}{L_1 + L_2}$

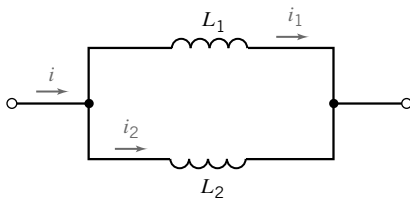


Figura P 7.7-10

**P 7.7-11** Considere la combinación de elementos de circuito que se muestran en la figura P 7.7-11.

- (a) Suponga que el elemento A es un condensador de  $20\text{-}\mu\text{F}$ , el elemento B es un condensador de  $5\text{-}\mu\text{F}$  y el elemento C es un condensador de  $20\text{-}\mu\text{F}$ . Determine la capacitancia equivalente.  
 (b) Suponga que el elemento A es un inductor de  $50\text{-mH}$ , el elemento B es un inductor de  $30\text{-mH}$  y el elemento C es un inductor de  $20\text{-mH}$ . Determine la inductancia equivalente.  
 (c) Suponga que el elemento A es un resistor de  $9\text{-k}\Omega$ , el elemento B es un resistor de  $6\text{-k}\Omega$  y el elemento C es un resistor de  $10\text{-k}\Omega$ . Determine la resistencia equivalente.

*Respuestas:* (a)  $C_{\text{eq}} = 20\text{-}\mu\text{F}$ , (b)  $L_{\text{eq}} = 16\text{-mH}$  y (c)  $R_{\text{eq}} = 6\text{-k}\Omega$ .

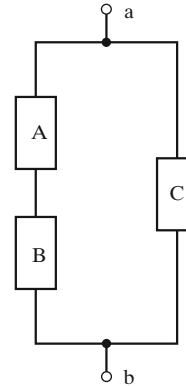


Figura P 7.7-11

**P 7.7-12** Considere la combinación de elementos de circuito que se muestran en la figura P 7.7-12.

- (a) Suponga que el elemento A es un condensador de  $8\text{-}\mu\text{F}$ , el elemento B es un condensador de  $16\text{-}\mu\text{F}$  y el elemento C es un condensador de  $12\text{-}\mu\text{F}$ . Determine la capacitancia equivalente.  
 (b) Suponga que el elemento A es un inductor de  $20\text{-mH}$ , el elemento B es un inductor de  $5\text{-mH}$  y el elemento C es un inductor de  $8\text{-mH}$ . Determine la inductancia equivalente.  
 (c) Suponga que el elemento A es un resistor de  $20\text{-k}\Omega$ , el elemento B es un resistor de  $30\text{-k}\Omega$  y el elemento C es un resistor de  $16\text{-k}\Omega$ . Determine la resistencia equivalente.

*Respuestas:* (a)  $C_{\text{eq}} = 8\text{-}\mu\text{F}$ , (b)  $L_{\text{eq}} = 12\text{-mH}$  y (c)  $R_{\text{eq}} = 28\text{-k}\Omega$ .

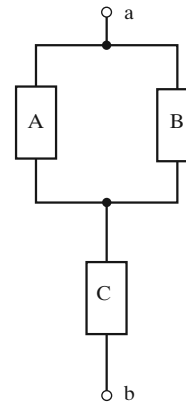


Figura P 7.7-12

### Sección 7.8 Condiciones iniciales de circuitos permanentes

**P 7.8-1** El interruptor en la figura P 7.8-1 ha estado abierto mucho tiempo antes de cerrarlo en el tiempo  $t = 0$ . Encuentre  $v_C(0^+)$  e  $i_C(0^+)$ , los valores del voltaje del condensador y la corriente del inductor de manera inmediata después de que el interruptor se cierre. Sea  $v_C(\infty)$  e  $i_C(\infty)$  indiquen los valores del voltaje del condensador y la corriente del inductor luego de que el interruptor ha estado cerrado mucho tiempo. Encuentre  $v_C(\infty)$  e  $i_C(\infty)$ .

**Respuestas:**  $v_c(0^+) = 12 \text{ V}$ ,  $i_L(0^+) = 0$ ,  $v_c(\infty) = 4 \text{ V}$  e  $i_L(\infty) = 1 \text{ mA}$

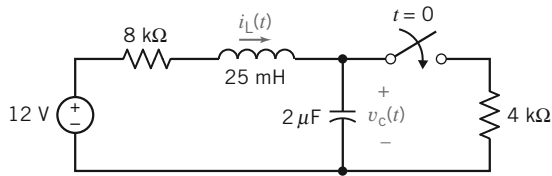


Figura P 7.8-1

**P 7.8-2** El interruptor en la figura P 7.8-2 ha estado abierto mucho tiempo antes de cerrarlo en el tiempo  $t = 0$ . Encuentre  $v_c(0^+)$  e  $i_L(0^+)$ , los valores del voltaje del condensador y la corriente del inductor de manera inmediata después de que el interruptor se cierre. Sea que  $v_c(\infty)$  e  $i_c(\infty)$  indiquen los valores del voltaje del condensador y la corriente del inductor luego de que el interruptor ha estado cerrado mucho tiempo. Encuentre  $v_c(\infty)$  e  $i_c(\infty)$ .

**Respuestas:**  $v_c(0^+) = 6 \text{ V}$ ,  $i_L(0^+) = 1 \text{ mA}$ ,  $v_c(\infty) = 3 \text{ V}$  e  $i_c(\infty) = 1.5 \text{ mA}$

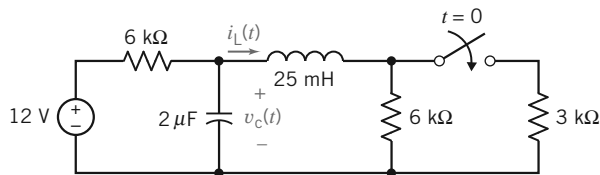


Figura P 7.8-2

**P 7.8-3** El interruptor en la figura P 7.8-2 ha estado abierto mucho tiempo antes de cerrarlo en el tiempo  $t = 0$ . Encuentre  $v_c(0^+)$  e  $i_c(0^+)$ , los valores del voltaje del condensador y la corriente del inductor de manera inmediata después de que el interruptor se cierre. Sea que  $v_c(\infty)$  e  $i_c(\infty)$  indiquen los valores del voltaje del condensador y la corriente del inductor luego de que el interruptor ha estado cerrado mucho tiempo. Encuentre  $v_c(\infty)$  e  $i_c(\infty)$ .

**Respuestas:**  $v_c(0^+) = 0 \text{ V}$ ,  $i_L(0^+) = 0$ ,  $v_c(\infty) = 8 \text{ V}$  e  $i_L(\infty) = 0.5 \text{ mA}$

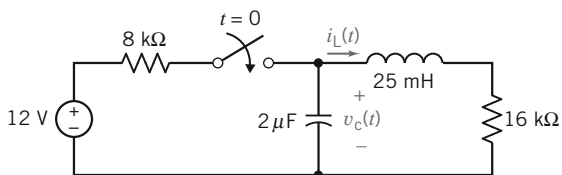


Figura P 7.8-3

**P 7.8-4** Encuentre  $v_c(0^+)$  y  $dv_c(0^+)/dt$  si  $v(0^-) = 15 \text{ V}$  para el circuito de la figura P 7.8-4.

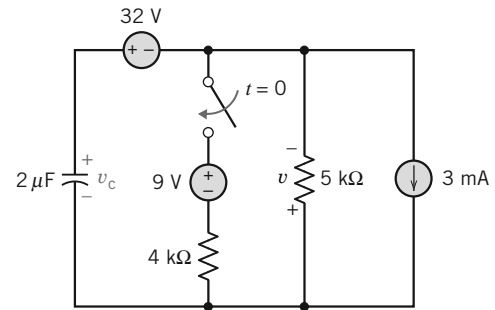


Figura P 7.8-4

**P 7.8-5** Para el circuito que se muestra en la figura P 7.8-5, encuentre  $dv_c(0^+)/dt$ ,  $di_L(0^+)/dt$  e  $i(0^+)$  si  $v(0^-) = 16 \text{ V}$ . Suponga que el interruptor estuvo cerrado mucho tiempo antes de  $t = 0$ .

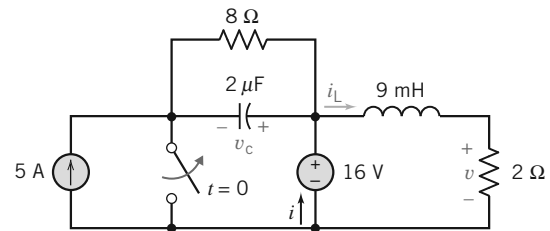


Figura P 7.8-5

**P 7.8-6** Para el circuito de la figura P 7.8-6, determine la corriente y el voltaje de cada elemento pasivo en  $t = 0^-$  y  $t = 0^+$ . La fuente de corriente es  $i_s = 0$  para  $t < 0$  e  $i_s = 4 \text{ A}$  para  $t \geq 0$ .

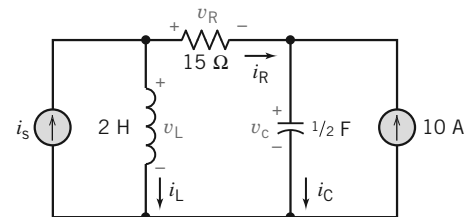


Figura P 7.8-6

**P 7.8-7** El circuito que se muestra en la figura P 7.8-7 está en estado estable cuando el interruptor se cierra en tiempo  $t = 0$ . Determine  $v_1(0^-)$ ,  $v_1(0^+)$ ,  $i_2(0^-)$  e  $i_2(0^+)$ .

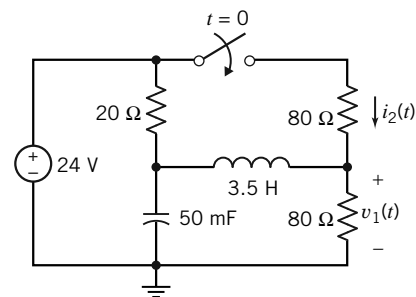


Figura P 7.8-7

**P 7.8-8** El circuito que se muestra en la figura P 7.8-8 está en estado estable cuando el interruptor se abre en tiempo  $t = 0$ . Determine  $v_1(0^-)$ ,  $v_1(0^+)$ ,  $i_2(0^-)$ ,  $i_2(0^+)$ ,  $i_3(0^+)$ ,  $v_4(0^-)$  y  $v_4(0^+)$ .

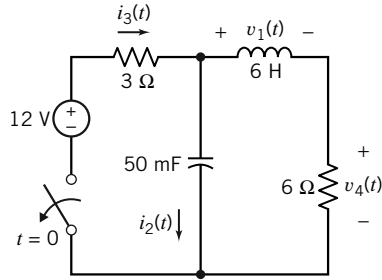


Figura P 7.8-8

**\*P 7.8-9** El circuito que se muestra en la figura P 7.8-9 está en estado estable cuando el interruptor se abre en tiempo  $t = 0$ . Determine  $v_1(0^-)$ ,  $v_1(0^+)$ ,  $i_2(0^-)$  e  $i_2(0^+)$ .

**Sugerencia:** Modelar el interruptor abierto como un circuito abierto nos lleva a la conclusión de que la corriente del inductor cambia de manera instantánea, lo cual requeriría un voltaje infinito. Podemos utilizar un modelo más preciso del interruptor abierto, una resistencia grande, para evitar el voltaje infinito.

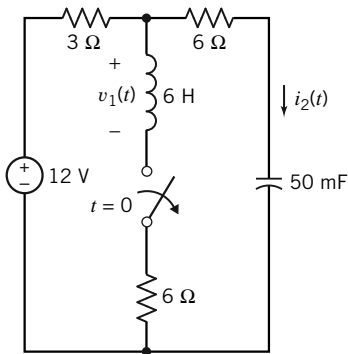


Figura P 7.8-9

**P 7.8-10** El circuito que se muestra en la figura P 7.8-10 se encuentra en estado estable cuando el interruptor se cierra en tiempo  $t = 0$ . Determine  $v_1(0^-)$ ,  $v_1(0^+)$ ,  $i_2(0^-)$  e  $i_2(0^+)$ .

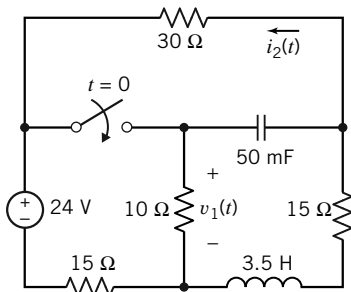


Figura P 7.8-10

**P 7.8-11** El circuito que se muestra en la figura P 7.8-11 ha llegado al estado estable antes de que el interruptor se abra en tiempo  $t = 0$ . Determine los valores de  $i_L(t)$ ,  $v_C(t)$  y  $v_R(t)$  inmediatamente antes de que el interruptor se abra y el valor de  $v_R$  inmediatamente después de que el interruptor se abra.

**Respuestas:**  $i_L(0^-) = 1.25$  A,  $v_C(0^-) = 20$  V,  $v_R(0^-) = -5$  V y  $v_R(0^+) = -4$  V

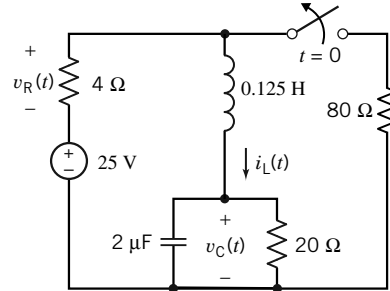


Figura P 7.8-11

**P 7.8-12** El circuito que se muestra en la figura P 7.8-12 ha llegado al estado estable antes de que el interruptor se cierre en tiempo  $t = 0$ .

- Determine los valores de  $i_L(t)$ ,  $v_C(t)$  y  $v_R(t)$  inmediatamente antes de que se cierre el interruptor.
- Determine el valor de  $v_R(t)$  inmediatamente después de que se cierre el interruptor.

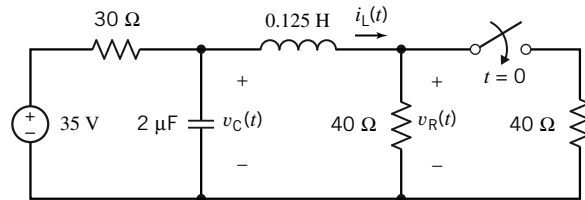


Figura P 7.8-12

**P 7.8-13** El circuito que se muestra en la figura P 7.8-13 ha llegado al estado estable antes de que el interruptor se abra en tiempo  $t = 0$ . Determine los valores de  $i_L(t)$ ,  $v_C(t)$  y  $v_R(t)$  inmediatamente antes de que se abra el interruptor, y el valor de  $v_R(t)$  inmediatamente después de que se abra el interruptor.

**Respuestas:**  $i_L(0^-) = 0.4$  A,  $v_C(0^-) = 16$  V,  $v_R(0^-) = 0$  V y  $v_R(0^+) = -12$  V

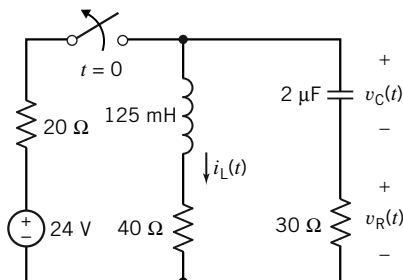


Figura P 7.8-13

**Sección 7.9 Circuitos de amplificador operacional y ecuaciones diferenciales lineales**

**P 7.9-1** Diseñe un circuito con una entrada,  $x(t)$ , y una salida,  $y(t)$ , que se relacionen por esta ecuación diferencial:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 4 \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = \frac{5}{2} x(t)$$

**P 7.9-2** Diseñe un circuito con una entrada,  $x(t)$ , y una salida,  $y(t)$ , que se relacionen por esta ecuación diferencial:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} y(t) + y(t) = -\frac{5}{2} x(t)$$

**P 7.9-3** Diseñe un circuito con una entrada,  $x(t)$ , y una salida,  $y(t)$ , que se relacionen por esta ecuación diferencial:

$$2 \frac{d^3}{dt^3} y(t) + 16 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 8 \frac{d}{dt} y(t) + 10y(t) = -4x(t)$$

**P 7.9-4** Diseñe un circuito con una entrada,  $x(t)$ , y una salida,  $y(t)$ , que se relacionen por esta ecuación diferencial:

$$\frac{d^3}{dt^3} y(t) + 16 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 8 \frac{d}{dt} y(t) + 10y(t) = 4x(t)$$

**Sección 7.11 ¿Cómo lo podemos comprobar...?**

**P 7.11-1** Una solución de tarea en casa indica que la corriente y el voltaje de un inductor de 100-H son

$$i(t) = \begin{cases} 0.025 & t < 1 \\ -\frac{t}{25} + 0.065 & 1 < t < 3 \\ \frac{t}{50} - 0.115 & 3 < t < 9 \\ 0.065 & t < 9 \end{cases}$$

y

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ -4 & 1 < t < 3 \\ 2 & 3 < t < 9 \\ 0 & t > 9 \end{cases}$$

donde las unidades de la corriente son A, las unidades del voltaje son V, y las unidades de tiempo son s. Compruebe que la corriente del inductor no se cambia de manera instantánea.

**P 7.11-2** Una solución de tarea en casa indica que la corriente y el voltaje de un inductor de 100-H son

$$i(t) = \begin{cases} -\frac{t}{200} + 0.025 & t < 1 \\ -\frac{t}{100} + 0.03 & 1 < t < 4 \\ \frac{t}{100} - 0.03 & 4 < t < 9 \\ 0.015 & t < 9 \end{cases}$$

y

$$v(t) = \begin{cases} -1 & t < 1 \\ -2 & 1 < t < 4 \\ 1 & 4 < t < 9 \\ 0 & t > 9 \end{cases}$$

donde las unidades de la corriente son A, las unidades del voltaje son V, y las unidades de tiempo son s. ¿Es correcta esta solución de tarea en casa? Justifique su respuesta.

**Problemas de diseño**

**PD 7-1** Considere un elemento de un circuito único, es decir, un solo resistor, condensador o inductor. El voltaje,  $v(t)$ , y la corriente,  $i(t)$ , del elemento de circuito se apegan a la convención pasiva. Considere los casos siguientes:

- (a)  $v(t) = 4 + 2e^{-3t}$  V e  $i(t) = -3e^{-3t}$  A para  $t > 0$
- (b)  $v(t) = -3e^{-3t}$  V e  $i(t) = 4 + 2e^{-3t}$  A para  $t > 0$
- (c)  $v(t) = 4 + 2e^{-3t}$  V e  $i(t) = 2 + e^{-3t}$  A para  $t > 0$

Para cada caso especifique el elemento de circuito que sea un condensador, resistor o inductor, y dé el valor de esta capacitancia, resistencia o inductancia.

**PD 7-2** La figura PD 7-2 muestra una fuente de voltaje y elementos de circuito no especificados. Cada elemento de circuito es un resistor, un condensador o un inductor únicos. Considere los casos siguientes.

- (a)  $i(t) = 1.131 \cos(2t + 45^\circ)$  A
- (b)  $i(t) = 1.131 \cos(2t - 45^\circ)$  A

Para cada caso, especifique cada elemento de circuito que sea un condensador, resistor o inductor, y dé el valor de esta capacitancia, resistencia, o inductancia.

*Sugerencia:*  $\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi$

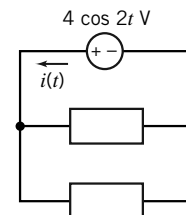


Figura PD 7-2



**PD 7-3** La figura PD 7-3 muestra una fuente de voltaje y elementos de circuito no especificados. Cada elemento de circuito es un resistor, un condensador o un inductor únicos. Considere los casos siguientes.

(a)  $v(t) = 11.31 \cos(2t + 45^\circ)$  V

(b)  $v(t) = 11.31 \cos(2t - 45^\circ)$  V

Para cada caso, especifique cada elemento de circuito que sea un condensador, resistor o inductor, y dé el valor de esta capacitancia, resistencia o inductancia.

**Sugerencia:**  $\cos(\theta + \phi) = \cos\theta \cos\phi - \sin\theta \sin\phi$

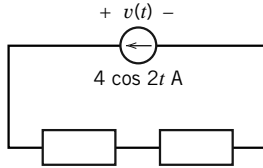


Figura PD 7-3

**PD 7-4** Una unidad de flash de alta velocidad para fotografía deportiva requiere un voltaje de flash  $v(0^+) = 3$  V y

$$\left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0} = 24 \text{ V/s}$$

La unidad de flash utiliza un circuito que se muestra en la figura PD 7-4. El interruptor 1 ha estado cerrado por mucho tiempo, y el interruptor 2 ha estado abierto mucho tiempo en  $t = 0$ . En realidad, ese mucho tiempo, en este caso, son 3 s.

Determine el voltaje de la batería requerida,  $v_B$ , cuando  $C = 1/8$  F.

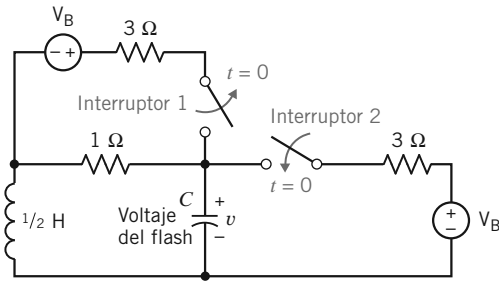


Figura PD 7-4

**PD 7-5** Para el circuito que se muestra en la figura PD 7-5, seleccione un valor de  $R$  de modo que la energía almacenada en el inductor sea igual a la energía almacenada en el condensador en estado estable.

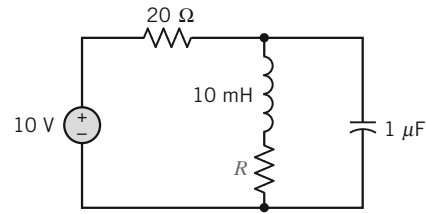


Figura PD 7-5

# Respuesta total de los circuitos RL y RC



## CAPÍTULO

# 8

### EN ESTE CAPÍTULO

- |     |  |      |   |
|-----|--|------|---|
| 8.1 | Introducción   | 8.9  | Uso de PSpice para analizar circuitos de primer orden     |
| 8.2 | Circuitos de primer orden  | 8.10 | ¿Cómo lo podemos comprobar...?                            |
| 8.3 | Respuesta de un circuito de primer orden a una entrada constante   | 8.11 | <b>EJEMPLO DE DISEÑO</b> — Una computadora y su impresora |
| 8.4 | Conmutación secuencial   | 8.12 | Resumen   |
| 8.5 | Estabilidad de circuitos de primer orden                           |      | Problemas   |
| 8.6 | Fuente de paso unitario  |      | Problemas de PSpice                                       |
| 8.7 | Respuesta de un circuito de primer orden a una fuente no constante |      | Problemas de diseño                                       |
| 8.8 | Operadores diferenciales   |      |   |

## 8.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo consideramos la respuesta de los circuitos *RL* (*circuito con inductor*) y *RC* (*circuito con condensador*) a cambios abruptos. El cambio abrupto puede ser una modificación en el circuito, como cuando se abre o se cierra un interruptor. De manera alternativa, el cambio abrupto puede ser una modificación a la entrada al circuito, como cuando el voltaje de una fuente de voltaje es una función discontinua de tiempo.

Los circuitos *RL* y *RC* se llaman circuitos de primer orden. En este capítulo haremos lo siguiente:

- Desarrollar un vocabulario que nos ayudará a hablar sobre la respuesta de un circuito de primer orden.
- Analizar circuitos de primer orden con entradas que sean constantes después de algún tiempo en particular,  $t_0$ .
- Presentar el concepto de un circuito estable y utilizarlo para identificar circuitos estables de primer orden.
- Analizar circuitos de primer orden que presenten más de un cambio abrupto.
- Presentar la función de paso y utilizarla para determinar la respuesta de paso de un circuito de primer orden.
- Analizar los circuitos de primer orden con entradas que sean no constantes.

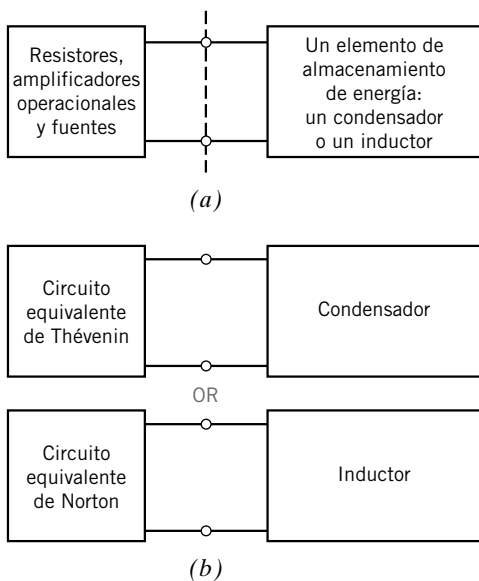
## 8.2 CIRCUITOS DE PRIMER ORDEN

Los circuitos que contienen condensadores e inductores se pueden representar con ecuaciones diferenciales. El orden de la ecuación diferencial suele ser igual al número de condensadores más el número de inductores en el circuito.

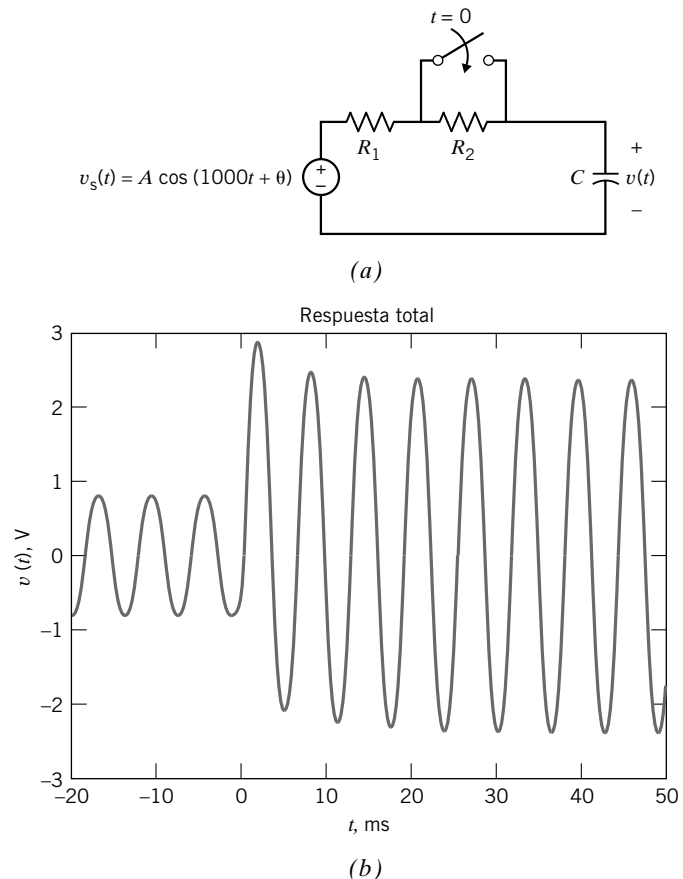
Los circuitos que contienen solamente un inductor pero no condensadores, o bien solamente un condensador pero no inductores, se pueden representar con una ecuación diferencial de primer orden. Estos circuitos se denominan **circuitos de primer orden**.

Los circuitos equivalentes de Thévenin y Norton simplifican el análisis de circuitos de primer orden, ya que muestran que todos los circuitos de primer orden son equivalentes a uno de dos circuitos simples de primer orden. La figura 8.2-1 muestra cómo se ha llevado a cabo esto. En la figura 8.2-1a, un circuito de primer orden está dividido en dos partes. Una parte es el condensador o el inductor único que esperamos encontrar en un circuito de primer orden. La otra parte es el resto del circuito, todo lo demás, excepto el condensador o el inductor. Si es un condensador, entonces el resto del circuito es reemplazado por su circuito equivalente de Thévenin. El resultado es un circuito sencillo de primer orden, un circuito en serie que consta de una fuente de voltaje, un resistor y un condensador. Por otra parte, si el elemento de almacenaje de energía es un inductor, entonces el resto del circuito es reemplazado por su circuito equivalente de Norton. El resultado es otro circuito sencillo de primer orden, un circuito en paralelo que consiste en una fuente de corriente, un resistor y un inductor. En realidad, todos los circuitos de primer orden son equivalentes a uno de estos dos circuitos sencillos de primer orden.

Considere el circuito de primer orden que se muestra en la figura 8.2-2a. La entrada a este circuito es el voltaje  $v_s(t)$ . La salida, o respuesta, de este circuito es el voltaje a través del condensador. Este circuito está en estado estable antes de que el interruptor se cierre en el tiempo  $t = 0$ . El cierre del interruptor altera este circuito. Al final, la alteración termina y el circuito está de nuevo en estado



**FIGURA 8.2-1** Un plan para analizar circuitos de primer orden. (a) Primero, retire del resto del circuito el elemento de almacenamiento de energía. (b) A continuación, reemplace el circuito conectado al condensador por su circuito equivalente de Thévenin, o reemplace el circuito conectado a un inductor por su circuito equivalente de Norton.



**FIGURA 8.2-2** (a) Un circuito y (b) su respuesta total.

estable. La condición de estado estable con el interruptor cerrado probablemente sea diferente de la condición de estado estable con el interruptor abierto. La figura 8.2-2b muestra un trazo de voltaje de condensador comparado con el tiempo.

Cuando la entrada a un circuito es sinusoidal, la respuesta de estado estable también es sinusoidal. Es más, la frecuencia de la senoide de respuesta debe ser la misma que la frecuencia de la senoide de entrada. El circuito que se muestra en la figura 8.2-2a se encuentra en estado estable antes de que se cierre el interruptor. El voltaje del condensador de estado estable será

$$v(t) = B \cos(1000t + \phi), \quad t < 0 \quad (8.2-1)$$

El interruptor se cierra en el tiempo  $t = 0$ . El valor del voltaje del condensador al tiempo en que el interruptor se cierra es

$$v(0) = B \cos(\phi), \quad t = 0 \quad (8.2-2)$$

Después de que el interruptor se cierre, la respuesta constará de dos partes: una parte transitoria que finalmente terminará, y una parte estable. La parte estable de la respuesta será sinusoidal y tendrá la frecuencia de la entrada. Para un circuito de primer orden, la parte transitoria de la respuesta es exponencial. En realidad, consideramos por separado los circuitos de primer orden para tomar ventaja de la forma sencilla de la respuesta transitoria de estos circuitos. Luego de que se abre el interruptor, el voltaje del condensador es

$$v(t) = Ke^{-t/\tau} + M \cos(1000t + \delta) \quad (8.2-3)$$

Observe que  $Ke^{-t/\tau}$  se va a cero en cuanto  $t$  se hace grande. Ésta es la parte transitoria de la respuesta, la cual se termina, y queda la respuesta de estado estable,  $M \cos(1000t + \delta)$ .

Como tema de vocabulario, la “parte transitoria de la respuesta” suele abreviarse a **respuesta transitoria**, y la “parte de estado estable de la respuesta” se abrevia como “respuesta de estado estable”. La respuesta,  $v(t)$ , dada por la ecuación 8.2-3, se denomina **respuesta total**, para diferenciarla de las respuestas transitoria y de estado estable.

$$\text{respuesta total} = \text{respuesta transitoria} + \text{respuesta de estado estable}$$

(Los ingenieros utilizan el término *respuesta transitoria* de dos maneras diferentes. En ocasiones se refiere a la “parte transitoria de la respuesta total”, y en otras se refiere a la respuesta total, la cual incluye una parte transitoria. En particular, PSpice utiliza el término *respuesta transitoria* para referirse a la respuesta total. Esto puede ser confuso, por lo que el término *respuesta transitoria* se debe usar con gran cuidado.)

En general, la respuesta total de un circuito de primer orden se puede representar como la suma de dos partes: la **respuesta natural** y la **respuesta forzada**:

$$\text{respuesta total} = \text{respuesta natural} + \text{respuesta forzada}$$

La respuesta natural es la solución general de la ecuación diferencial que representa el circuito de primer orden, cuando la entrada está establecida en cero. La respuesta forzada es una solución particular de la ecuación diferencial que representa el circuito.

La respuesta total de un circuito de primer orden dependerá de un condición inicial, usualmente del voltaje de un condensador o de la corriente de un inductor en un tiempo particular. Sea  $t_0$  que indique el tiempo en el cual se da la condición inicial. La respuesta natural de un circuito de primer orden será de la forma

$$\text{respuesta natural} = Ke^{-(t-t_0)/\tau}$$

Cuando  $t_0 = 0$ , entonces

$$\text{respuesta natural} = Ke^{-t/\tau}$$

La constante  $K$  en la respuesta natural depende de la condición inicial, por ejemplo, el voltaje del condensador en el tiempo  $t_0$ .

En este capítulo consideraremos tres casos. En ellos, la entrada al circuito luego de la perturbación será (1) una constante, por ejemplo.

$$v_s(t) = V_0$$

o bien (2) una exponencial, por ejemplo,

$$v_s(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$

o bien una senoide, por ejemplo,

$$v_s(t) = V_0 \cos(\omega t + \theta)$$

Estos tres casos son especiales porque la respuesta forzada tendrá la misma forma que la entrada. Por ejemplo, en la figura 8.2-2, tanto la repuesta forzada como la entrada son sinusoidales, y la frecuencia de la respuesta forzada es la misma que la frecuencia de la entrada. Para las otras entradas, la respuesta forzada puede no tener la misma forma que la entrada. Por ejemplo, cuando la entrada es una onda cuadrada, la respuesta forzada no es una onda cuadrada.

Cuando la entrada es una constante o una senoide, la respuesta forzada también se denomina respuesta de estado estable, y la respuesta natural se denomina respuesta transitoria.

Aquí está nuestro plan para encontrar la respuesta total de circuitos de primer orden:

Paso 1: Encontrar la respuesta forzada antes de la perturbación. Evaluar este respuesta en el tiempo  $t = t_0$  para obtener la condición inicial del elemento de almacenamiento de energía.

Paso 2: Encontrar la respuesta forzada después de la perturbación.

Paso 3: Agregar la respuesta natural  $= K e^{-t/\tau}$  a la respuesta forzada para obtener la respuesta total. Utilice la condición inicial para evaluar la constante  $K$ .

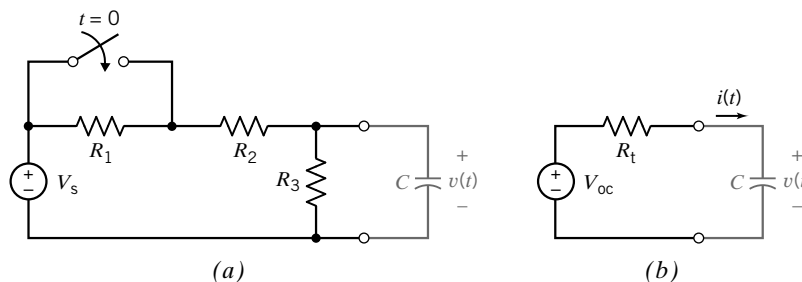
### 8.3 RESPUESTA DE UN CIRCUITO DE PRIMER ORDEN A UNA ENTRADA CONSTANTE

En esta sección encontramos la respuesta total de un circuito de primer orden cuando la entrada al circuito es constante después del tiempo  $t_0$ . La figura 8.3 ilustra esta situación. En la figura 8.3-1a encontramos un circuito de primer orden que contiene un condensador único y sin inductores. Éste es un circuito de estado estable antes de que se cierre el interruptor, lo perturba el estado estable. El tiempo en que el estado estable se perturba se indica como  $t_0$ . En la figura 8.3-1a,  $t_0 = 0$ . Al cerrar el interruptor se elimina el resistor  $R_1$  del circuito. (Un circuito cerrado se modela por un cortocircuito.) Un cortocircuito en paralelo con un resistor es equivalente a un cortocircuito.) Luego de que se cierra el interruptor, el circuito se puede representar como se muestra en la figura 8.3-1b, en la cual la parte del circuito que está conectada al condensador ha sido reemplazada por su circuito equivalente de Thévenin. Por lo tanto,

$$V_{oc} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} V_s \quad \text{y} \quad R_t = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

Representemos ahora el circuito en la figura 8.3-1b por una ecuación diferencial. La corriente del condensador está dada por

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v(t)$$



**FIGURA 8.3-1**  
 (a) un circuito de primer orden, conteniendo un condensador. (b) Luego de que el interruptor se cierra, el circuito conectado al condensador es reemplazado por su circuito equivalente de Thévenin.

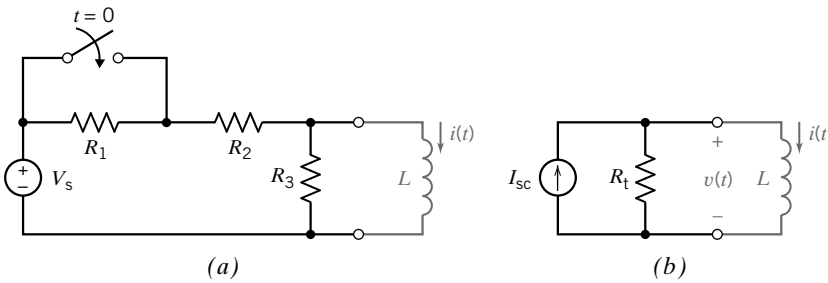


FIGURA 8.3-2 (a) un circuito de primer orden que contiene un inductor. (b) Luego que el interruptor se cierra, el circuito conectado al inductor es reemplazado por su circuito equivalente de Norton.

La misma corriente,  $i(t)$  pasa a través del resistor. Aplicamos la KVL a la figura 8.3-1K para obtener

$$V_{oc} = R_t i(t) + v(t) = R_t \left( C \frac{d}{dt} v(t) \right) + v(t)$$

Por consiguiente,

$$\frac{d}{dt} v(t) + \frac{v(t)}{R_t C} = \frac{V_{oc}}{R_t C} \quad (8.3-1)$$

La derivada de mayor orden en esta ecuación es de primer orden, por lo que ésta es una ecuación diferencial de primer orden.

A continuación, atendamos al circuito que se muestra en la figura 8.3-2a. Este circuito contiene un inductor único pero no cuenta con condensadores. Este circuito está en estado estable antes de que el interruptor se cierre en tiempo  $t_0 = 0$ , perturbando el estado estable. Después de que se cierra el interruptor, el circuito se puede representar como se muestra en la figura 8.3-2b, en la cual la parte del circuito que está conectada al inductor ha sido reemplazada por su circuito equivalente de Norton. Calculamos

$$I_{sc} = \frac{V_s}{R_2} \quad \text{y} \quad R_t = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

Representemos el circuito en la figura 8.3-2b por una ecuación diferencial. El voltaje del inductor está dado por

$$v(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$$

El voltaje  $v(t)$ , aparece a través del resistor. Aplicamos la KCL al nodo en la figura 8.3-2b para obtener

$$I_{sc} = \frac{v(t)}{R_t} + i(t) = \frac{L \frac{d}{dt} i(t)}{R_t} + i(t)$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt} i(t) + \frac{R_t}{L} i(t) = \frac{R_t}{L} I_{sc} \quad (8.3-2)$$

Como antes, ésta es una ecuación diferencial de primer orden.

Las ecuaciones 8.3-1 y 8.3-2 tienen la misma forma. Es decir,

$$\frac{d}{dt} x(t) + \frac{x(t)}{\tau} = K \quad (8.3-3)$$

El parámetro  $\tau$  se denomina constante de tiempo. Despejaremos esta ecuación diferencial separando e integrando las variables. Luego utilizaremos la solución de la ecuación 8.3-3 para obtener soluciones de las ecuaciones 8.3-1 y 8.3-2.

Podemos reescribir la ecuación 8.3-3 como

$$\frac{dx}{dt} = \frac{K\tau - x}{\tau}$$

o bien, separando las variables,

$$\frac{dx}{x - K\tau} = -\frac{dt}{\tau}$$

Al formar la integral indefinida tenemos

$$\int \frac{dx}{x - K\tau} = -\frac{1}{\tau} \int dt + D$$

donde  $D$  es una constante de integración. Al realizar la integración, tenemos

$$\ln(x - K\tau) = -\frac{t}{\tau} + D$$

Al despejar  $x$  nos da

$$x(t) = K\tau + Ae^{-t/\tau}$$

donde  $A = e^D$ , lo cual está determinado desde la condición inicial,  $x(0)$ . Para encontrar  $A$ , sea  $t = 0$ . Entonces

$$x(0) = K\tau + Ae^{-0/\tau} = K\tau + A$$

o bien

$$A = x(0) - K\tau$$

Por consiguiente, obtenemos

$$x(t) = K\tau + [x(0) - K\tau]e^{-t/\tau}$$

Porque

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = K\tau \quad (8.3-4)$$

La ecuación 8.3-4 se puede reescribir como

$$x(t) = x(\infty) + [x(0) - x(\infty)]e^{-t/\tau}$$

Tomar la derivada de  $x(t)$  con respecto a  $t$  conduce a un procedimiento para medir o calcular la constante de tiempo:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{1}{\tau}[x(0) - x(\infty)]e^{-t/\tau}$$

Ahora sea  $t = 0$  para lograr

$$\left. \frac{d}{dt}x(t) \right|_{t=0} = -\frac{1}{\tau}[x(0) - x(\infty)]$$

o bien

$$\tau = \frac{x(\infty) - x(0)}{\left. \frac{d}{dt}x(t) \right|_{t=0}} \quad (8.3-5)$$

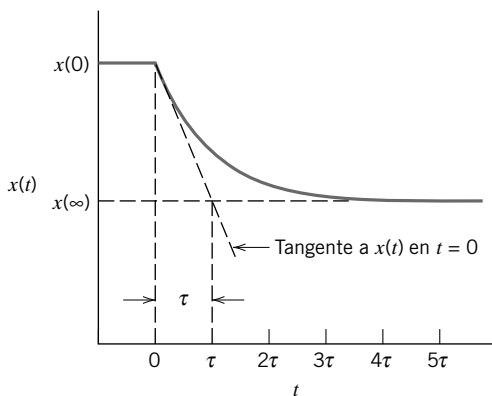


FIGURA 8.3-3 Técnica de gráfica para medir la constante de tiempo de un circuito de primer orden.

La figura 8.3-3 muestra un trazo de  $x(t)$  comparado con  $t$ . Podemos determinar los valores de (1) la inclinación del trazo en tiempo  $t = 0$ ; (2) el valor inicial de  $x(t)$ , y (3) el valor final de  $x(t)$  desde este trazo. Se puede utilizar la ecuación 8.3-5 para calcular la constante de tiempo a partir de estos valores. De manera equivalente, la figura 8.3-3 muestra cómo medir la constante de tiempo desde un trazo de  $x(t)$  comparado con  $t$ .

A continuación, aplicamos estos resultados al circuito  $RC$  en la figura 8.3-1. Comparando las ecuaciones 8.3-1 y 8.3-3, vemos que

$$x(t) = v(t), \quad \tau = R_1C \quad \text{y} \quad K = \frac{V_{oc}}{R_1C}$$

Al hacer estas sustituciones en la ecuación 8.3-4 nos da

$$v(t) = V_{oc} + (v(0) - V_{oc})e^{-t/(R_1C)} \quad (8.3-6)$$

El segundo término en el lado derecho de la ecuación 8.3-6 se termina en cuanto  $t$  aumenta. Ésta es la respuesta transitoria o natural. En  $t = 0$ ,  $e^{-0} = 1$ . Sea  $t = 0$  en la ecuación 8.3-6 resulta  $v(0) = v(0)$ , como se requería. Cuando  $t = 5\tau$ ,  $e^{-5} = 0.0067 \approx 0$ , por lo que en el tiempo  $t = 5\tau$ , el voltaje del condensador será

$$v(5\tau) = 0.9933 V_{oc} + 0.0067 v(0) \approx V_{oc}$$

Éste es el estado estable o respuesta forzada. La respuesta forzada es de la misma forma, una constante, como la entrada al circuito. La suma de las respuestas natural y forzada es la respuesta total:

$$\text{respuesta total} = v(t), \text{ respuesta forzada} = V_{oc}$$

y

$$\text{respuesta natural} = (v(0) - V_{oc})e^{-t/(R_1C)}$$

A continuación, compare las ecuaciones 8.3-2 y 8.3-3 para encontrar la solución del circuito  $RL$  en la figura 8.3-2. Vemos que

$$x(t) = i(t), \quad \tau = \frac{L}{R_t} \quad \text{y} \quad K = \frac{L}{R_t} I_{sc}$$

Al hacer estas sustituciones en la ecuación 8.3-4 nos da

$$i(t) = I_{sc} + (i(0) - I_{sc})e^{-(R_t/L)t} \quad (8.3-7)$$

Una vez más, la respuesta total es la suma de la repuesta forzada (estado estable) y la respuesta (natural) transitoria:

$$\text{respuesta total} = i(t), \text{ respuesta forzada} = I_{sc}$$

y

$$\text{respuesta natural} = (i(0) - I_{sc})e^{-(R_t/L)t}$$

### EJEMPLO 8.3-1 Circuito de primer orden con un condensador

Encuentre el voltaje del condensador después de que se abra el interruptor en el circuito que se muestra en la figura 8.3-4a. ¿Cuál es el valor del voltaje del condensador de 50 ms después de que se abre el interruptor?

#### Solución

La fuente de voltaje de 2 voltios fuerza al voltaje del condensador a ser de 2 voltios hasta que se abra el interruptor. Como el voltaje del condensador no se puede modificar de manera instantánea, el voltaje del condensador será de 2 voltios inmediatamente después de que se abra el interruptor. Por lo tanto, la condición inicial es

$$v(0) = 2 \text{ V}$$

La figura 8.3-4b muestra el circuito luego de que se abre el interruptor. Comparando este circuito con el circuito  $RC$  de la figura 8.31b, vemos que

$$R_t = 10 \text{ k}\Omega \quad \text{y} \quad V_{oc} = 8 \text{ V}$$

La constante de tiempo para este circuito de primer orden que contiene un condensador es

$$\tau = R_t C = (10 \times 10^3)(2 \times 10^{-6}) = 20 \times 10^{-3} = 20 \text{ ms}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 8.3-6 nos da

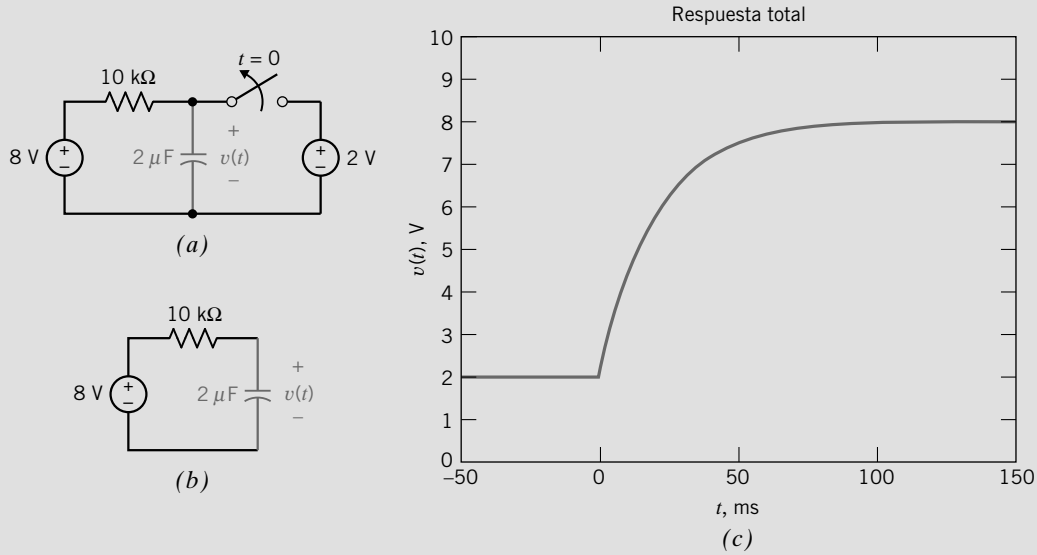
$$v(t) = 8 - 6e^{-t/20} \text{ V} \quad (8.3-8)$$

donde  $t$  tiene unidades de ms. Para encontrar el voltaje de 50 ms después de que se abra el interruptor, sea  $t = 50$ . Entonces,

$$v(50) = 8 - 6e^{-50/20} = 7.51 \text{ V}$$



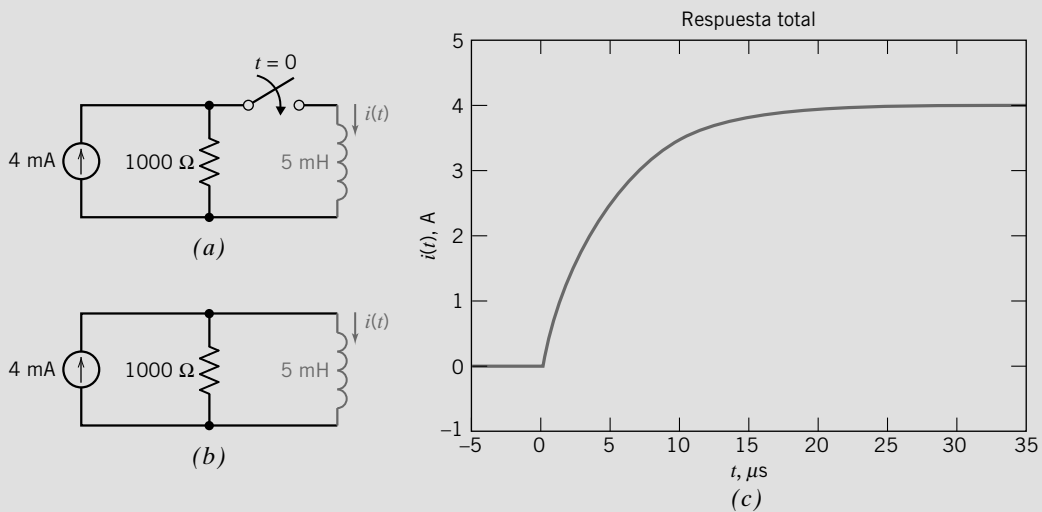
La figura 8.3-4c muestra el trazo del voltaje del condensador como una función de tiempo.



**FIGURA 8.3-4** (a) Un circuito de primer orden y (b) un circuito equivalente que es válido después de que el interruptor se abre. (c) Un trazo de la respuesta total,  $v(t)$  dado en la ecuación 8.3-8.

### EJEMPLO 8.3-2 Circuito de primer orden con un inductor

Encuentre la corriente del inductor después de que se cierra el interruptor en el circuito que se muestra en la figura 8.3-5a. ¿Cuánto le tomará a la corriente del inductor alcanzar 2 mA?



**FIGURA 8.3-5** (a) Un circuito de primer orden y (b) un circuito equivalente que es válido después de que el interruptor se cierra. (c) Un trazo de la respuesta total,  $i(t)$  dado en la ecuación 8.3-9.

**Solución**

La corriente del inductor será de 0 A hasta que se cierre el interruptor. Como la corriente del inductor no puede cambiar de manera instantánea, será de 0 A inmediatamente después de que se cierre el interruptor. Por lo tanto, la condición inicial es

$$i(0) = 0$$

La figura 8.3-5b muestra el circuito luego que el interruptor se ha cerrado. Al comparar este circuito con el circuito RL de la figura 8.32b, vemos que

$$R_t = 1\,000\ \Omega \quad e \quad I_{sc} = 4\ \text{mA}$$

La constante de tiempo de este circuito de primer orden que contiene un inductor es

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{5 \times 10^{-3}}{1000} = 5 \times 10^{-6} = 5\ \mu\text{s}$$

Al sustituir estos valores en la ecuación 8.3-7 nos da

$$i(t) = 4 - 4e^{-t/5}\ \text{mA} \tag{8.3-9}$$

donde  $t$  tiene unidades de microsegundos. Para encontrar el tiempo en que la corriente alcanza 2 mA, sustituya  $i(t) = 2\ \text{mA}$ . Así,

$$2 = 4 - 4e^{-t/5}\ \text{mA}$$

Despejar  $t$  da

$$t = -5 \times \ln\left(\frac{2-4}{-4}\right) = 3.47\ \mu\text{s}$$

La figura 8.3-5c muestra un trazo de la corriente de un inductor como una función de tiempo.

**EJEMPLO 8.3-3** Circuito de primer orden

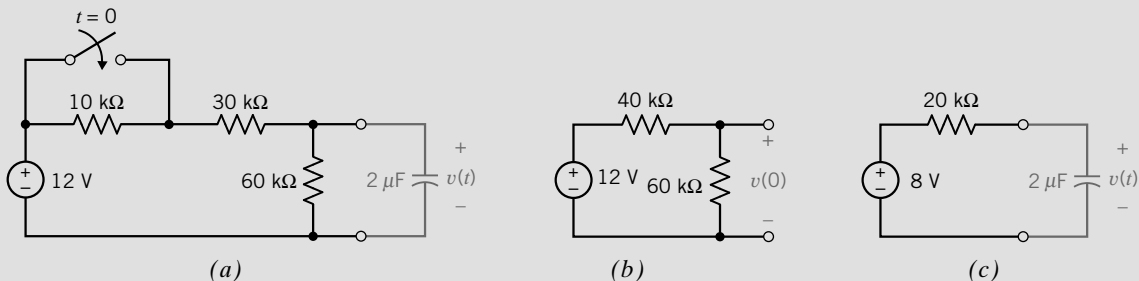
**EJEMPLO INTERACTIVO**

El circuito en la figura 8.3-6a ha estado abierto mucho tiempo, y el circuito ha llegado al estado estable antes de que el interruptor se cierre en tiempo  $t = 0$ . Encuentre el voltaje del condensador para  $t \geq 0$ .

**Solución**

El interruptor ha estado abierto mucho tiempo y el circuito ha llegado al estado estable antes de que el interruptor se cierre en tiempo  $t = 0$ . El circuito habrá alcanzado el estado estable antes de que el interruptor se cierre. Dado que la entrada a este circuito es una constante, todas las corrientes y los voltajes del elemento serán constantes cuando el circuito esté en estado estable. En particular, el voltaje del condensador será constante. La corriente del condensador será

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v(t) = C \frac{d}{dt} (\text{una constante}) = 0$$



**FIGURA 8.3-6** (a) Circuito de primer orden. El circuito equivalente para (b)  $t < 0$  y (c)  $t > 0$ .

El voltaje del condensador se desconoce, pero la corriente del condensador es cero. Es decir, el condensador actúa como un circuito abierto cuando la entrada es constante y el circuito está en estado estable. (Por un argumento semejante, los inductores actúan como circuitos en corto cuando la entrada es constante y el circuito se encuentra en estado estable.)

La figura 8.3-6b muestra el circuito equivalente apropiado en tanto que el circuito esté abierto. Un interruptor abierto actúa como un circuito abierto; por lo tanto los resistores de  $10\text{-k}\Omega$  y de  $30\text{-k}\Omega$  están en serie. Han sido reemplazados por un resistor de  $40\text{-k}\Omega$  equivalente. La entrada al circuito es una constante (12 voltios), y el circuito está en estado estable; por consiguiente, el condensador actúa como un circuito abierto. El voltaje a través de un circuito abierto es el voltaje del condensador. Dado que nos interesa la condición inicial, el voltaje del condensador se ha etiquetado como  $v(0)$ . El análisis del circuito en la figura 8.3-6b mediante la división del voltaje, da

$$v(0) = \frac{60 \times 10^3}{40 \times 10^3 + 60 \times 10^3} 12 = 7.2 \text{ V}$$

La figura 8.3-6c muestra el circuito equivalente adecuado después de que el interruptor se cierra. Cerrar el interruptor disminuye el resistor de  $10\text{-k}\Omega$ , eliminándolo del circuito. (Un cortocircuito en paralelo con cualquier resistor es equivalente a un cortocircuito.) La parte del circuito que está conectada al condensador ha sido reemplazada por su circuito equivalente de Thévenin. Después de que se ha cerrado el interruptor,

$$V_{oc} = \frac{60 \times 10^3}{30 \times 10^3 + 60 \times 10^3} 12 = 8 \text{ V}$$

y

$$R_t = \frac{30 \times 10^3 \times 60 \times 10^3}{30 \times 10^3 + 60 \times 10^3} = 20 \times 10^3 = 20 \text{ k}\Omega$$

y la constante de tiempo es

$$\tau = R_t \times C = (20 \times 10^3) \times (2 \times 10^{-6}) = 40 \times 10^{-3} = 40 \text{ ms}$$

Sustituir estos valores en la ecuación 8.3-6 da por resultado

$$v(t) = 8 - 0.8e^{-t/40} \text{ V}$$

donde  $t$  tiene unidades de ms.

### EJEMPLO 8.3-4 Circuito de primer orden

### EJEMPLO INTERACTIVO

El interruptor en la figura 8.3-7a ha estado abierto mucho tiempo, y el circuito ha llegado al estado estable antes de que el interruptor se cierre en tiempo  $t = 0$ . Encuentre la corriente del inductor para  $t \geq 0$ .

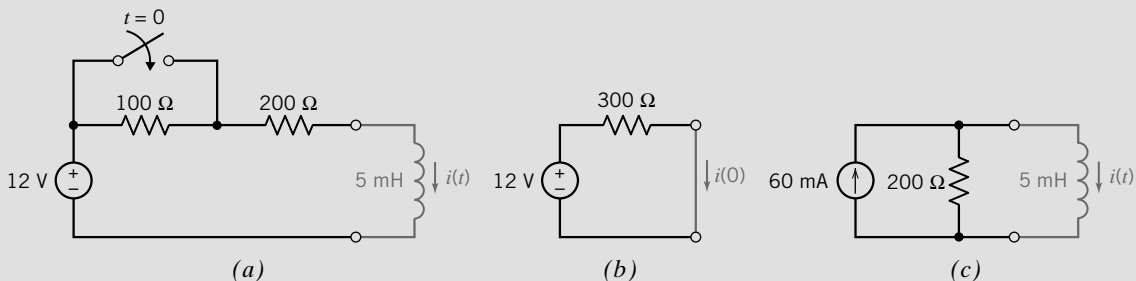


FIGURA 8.3-7 (a) Un circuito de primer orden. El circuito equivalente para (b)  $t < 0$  y (c)  $t > 0$ .

### Solución

La figura 8.3-7b muestra el circuito equivalente adecuado en tanto el interruptor se abra. Los resistores de  $100\text{-}\Omega$  y  $200\text{-}\Omega$  están en serie y han sido reemplazados por un resistor equivalente de  $300\text{-}\Omega$ . La entrada al circuito es una constante (12 voltios) y el circuito está en estado estable; por consiguiente, el inductor actúa como un cortocircuito. La corriente en este cortocircuito es la corriente del inductor. Como lo que nos interesa es la condición inicial, la corriente inicial del inductor ha sido etiquetada como  $i(0)$ . Esta corriente se ha calculado utilizando la ley de Ohm:

$$i(0) = \frac{12}{300} = 40 \text{ mA}$$

La figura 8.3-7c muestra el circuito equivalente después de que el interruptor se cierra. Cerrar el interruptor disminuye el resistor de  $100\text{-}\Omega$ , eliminándolo del circuito. La parte del circuito que está conectada al inductor ha sido reemplazada por su circuito equivalente de Norton. Después de que se ha cerrado el interruptor,

$$I_{sc} = \frac{12}{200} = 60 \text{ mA} \quad \text{y} \quad R_t = 200 \text{ }\Omega$$

y la constante de tiempo es

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{5 \times 10^{-3}}{200} = 25 \times 10^{-6} = 25 \text{ }\mu\text{s}$$

Sustituir estos valores en la ecuación 8.3-7 da por resultado

$$i(t) = 60 - 20e^{-t/25} \text{ mA}$$

donde  $t$  tiene unidades de microsegundos.

### EJEMPLO 8.3-5 Circuito de primer orden

El circuito en la figura 8.3-8a está en estado estable antes de que se abra el interruptor. Encuentre la corriente  $i(t)$  para  $t > 0$ .

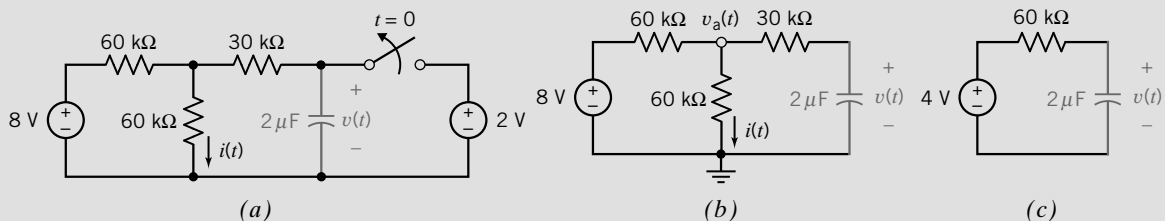


FIGURA 8.3-8 (a) Un circuito de primer orden; (b) el circuito, luego que el interruptor se abre, y (c) el circuito equivalente después de que el interruptor se abre.

### Solución

La respuesta o salida de un circuito puede ser cualquier corriente o voltaje del elemento. A veces la respuesta no es el voltaje del condensador o la corriente del inductor. En la figura 8.3-8a la respuesta es la corriente  $i(t)$  en un resistor, más que el voltaje del condensador. En este caso se requieren dos pasos para resolver el problema. El primero es encontrar el voltaje del condensador mediante el método ya descrito en este capítulo. Una vez conocido el voltaje del condensador, escriba ecuaciones nodales o de enlace para expresar la respuesta en términos de la entrada y del voltaje del condensador.

Primero encontramos el voltaje del condensador. Antes de que se abra el interruptor, el voltaje del condensador es igual al voltaje de la fuente de 2 voltios. La condición inicial es

$$v(0) = 2 \text{ V}$$

La figura 8.3-8b muestra cómo estará el circuito después de que se haya abierto el interruptor. La parte del circuito conectada al condensador ha sido reemplazada por su circuito equivalente de Thévenin en la figura 8.3-8c. Los

parámetros del circuito equivalente de Thévenin son

$$V_{oc} = \frac{60 \times 10^3}{60 \times 10^3 + 60 \times 10^3} 8 = 4 \text{ V}$$

$$y \quad R_t = 30 \times 10^3 + \frac{60 \times 10^3 \times 60 \times 10^3}{60 \times 10^3 + 60 \times 10^3} = 60 \times 10^3 = 60 \text{ k}\Omega$$

La constante de tiempo es

$$\tau = R_t \times C = (60 \times 10^3) \times (2 \times 10^{-6}) = 120 \times 10^{-3} = 120 \text{ ms}$$

Sustituir estos valores en la ecuación 8.3-6 resulta

$$v(t) = 4 - 2e^{-t/120} \text{ V}$$

donde  $t$  tiene unidades de ms.

Ahora que ya se conoce el voltaje del condensador, volvamos al circuito de la figura 8.3-8b. Observe que el voltaje de nodos en el nodo de en medio en lo alto del circuito ha sido etiquetado como  $v_a(t)$ . La ecuación nodal correspondiente a este nodo es

$$\frac{v_a(t) - 8}{60 \times 10^3} + \frac{v_a(t)}{60 \times 10^3} + \frac{v_a(t) - v(t)}{30 \times 10^3} = 0$$

Sustituir la expresión para el voltaje del condensador resulta

$$\frac{v_a(t) - 8}{60 \times 10^3} + \frac{v_a(t)}{60 \times 10^3} + \frac{v_a(t) - (4 - 2e^{-t/120})}{30 \times 10^3} = 0$$

o bien

$$v_a(t) - 8 + v_a(t) + 2[v_a(t) - (4 - 2e^{-t/120})] = 0$$

Al despejar  $v_a(t)$ , obtenemos

$$v_a(t) = \frac{8 + 2(4 - 2e^{-t/120})}{4} = 4 - e^{-t/120} \text{ V}$$

Finalmente, calculamos  $i(t)$  aplicando al ley de Ohm:

$$i(t) = \frac{v_a(t)}{60 \times 10^3} = \frac{4 - e^{-t/120}}{60 \times 10^3} = 66.7 - 16.7e^{-t/120} \mu\text{A}$$

donde  $t$  tiene unidades de ms.

### EJEMPLO 8.3-6 Circuito de primer orden con $t_0 \neq 0$

Encuentre el voltaje del condensador después de que el interruptor se abre en el circuito que se muestra en la figura 8.3-9a. ¿Cuál es el valor del voltaje del condensador de 50 ms luego de que el interruptor se abre?

#### Solución

Este ejemplo es semejante al ejemplo 8.3-1. La diferencia entre los dos ejemplos es el tiempo en que se abre el interruptor. En el ejemplo 8.3-1 el interruptor se abre en tiempo  $t = 0$ , y en este ejemplo se abre en tiempo  $t = 50 \text{ ms} = 0.05 \text{ s}$ .

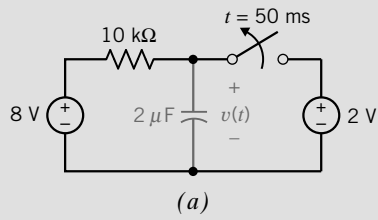
La fuente de voltaje de 2 voltios fuerza el voltaje del condensador a ser de 2 voltios hasta que se abra el interruptor. En consecuencia,

$$v(t) = 2 \text{ V} \quad \text{para } t \leq 0.05 \text{ s}$$

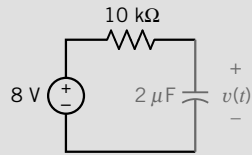
En particular, la condición inicial es

$$v(0.05) = 2 \text{ V}$$

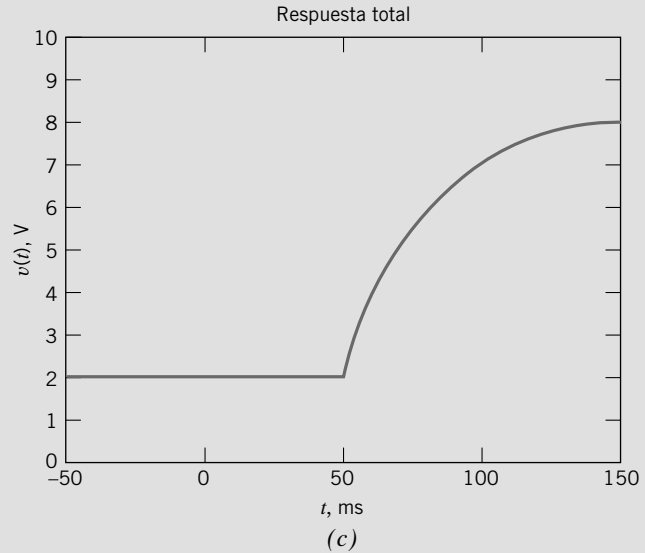
La figura 8.3-9b muestra el circuito luego de que se abre el interruptor. Comparando este circuito con el circuito  $RC$



(a)



(b)



(c)

**FIGURA 8.3-9** (a) Circuito de primer orden y (b) un circuito equivalente que es válido después de que se abre el interruptor. (c) Trazo de la respuesta total,  $v(t)$ , dado por la ecuación 8.3-10.

en la figura 8.3-1b, vemos que

$$R_t = 10 \text{ k}\Omega \quad \text{y} \quad V_{oc} = 8 \text{ V}$$

La constante de tiempo para este circuito de primer orden que contiene un condensador es

$$\tau = R_t C = 0.020 \text{ s}$$

En este ejemplo, un trazo del voltaje del condensador tendrá la misma forma como lo fue en el trazo del voltaje del condensador en el ejemplo 8.3-1, sólo que el voltaje del condensador en este ejemplo decaerá 50 ms porque el interruptor abrirá 50 ms más tarde. Para justificar este retardo, reemplazamos  $t$  por  $t - 50$  ms en la ecuación que representa el voltaje del condensador. En consecuencia, en este ejemplo el voltaje del condensador está dado por

$$v(t) = 8 - 6e^{-(t-50)/20} \text{ V} \tag{8.3-10}$$

donde  $t$  tiene unidades de ms. (Compare las ecuaciones 8.3-8 y 8.3-10.) Para encontrar el voltaje de 50 ms después de que se abre el interruptor, sea  $t = 100$  ms. Entonces,

$$v(100) = 8 - 6e^{-(100-50)/20} = 7.51 \text{ V}$$

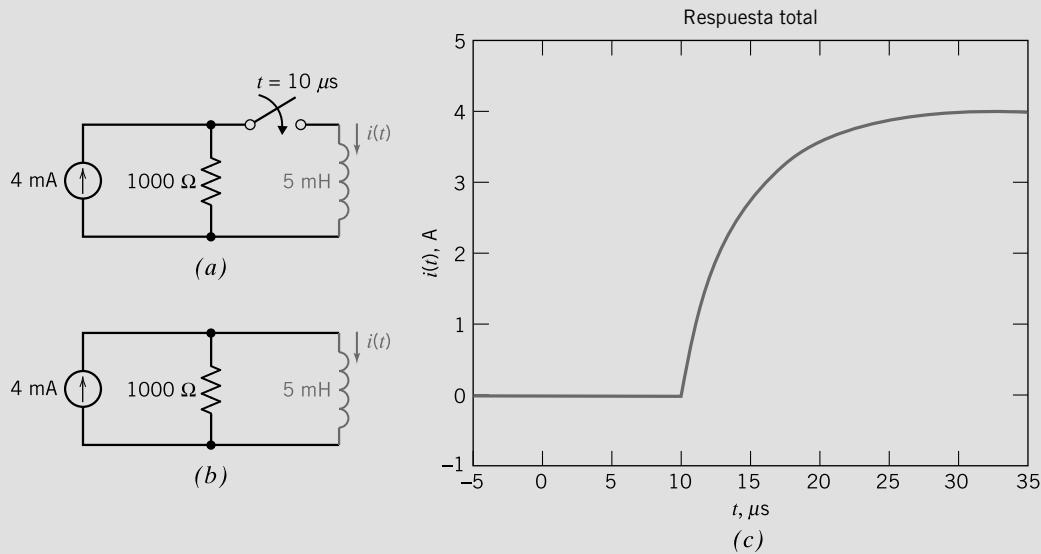
El valor del voltaje del condensador de 50 ms luego de que se abre el interruptor es el mismo aquí como lo fue en el ejemplo 8.3-1. La figura 8.3-9c muestra un trazo del voltaje del condensador como una función de tiempo. Como se esperaba, este trazo es una copia retrasada del trazo que se muestra en la figura 8.3-4c.

### EJEMPLO 8.3-7 Circuito de primer orden con $t_0 \neq 0$

Encuentre la corriente del inductor después de que el interruptor se abre en el circuito que se muestra en la figura 8.3-10a. ¿Cuánto le tomará a la corriente del inductor alcanzar 2 mA?

#### Solución

Este ejemplo es semejante al ejemplo 8.3-2. La diferencia entre los dos ejemplos es el tiempo en que se cierra el interruptor. En el ejemplo 8.3-2 el interruptor se cierra en tiempo  $t = 0$ , y en este ejemplo lo hace en tiempo  $t = 10 \mu\text{s}$ .



**FIGURA 8.3-10** (a) Un circuito de primer orden y (b) un circuito equivalente que es válido después de que se cierra el interruptor. (c) Un trazo de la respuesta total,  $i(t)$ , dada por la ecuación 8.3-11.

La corriente del inductor será de 0 A hasta que se cierre el interruptor. Dado que la corriente del inductor no se puede modificar de manera instantánea, será de 0 A inmediatamente después de que el interruptor se cierra. Por lo tanto, la condición inicial es

$$i(10 \mu\text{s}) = 0 \text{ A}$$

La figura 8.3-10b muestra el circuito después de que el interruptor se cierra. Comparando este circuito con el circuito  $RL$  en la figura 8.3-2b, vemos que

$$R_t = 1000 \Omega \quad \text{y} \quad I_{sc} = 4 \text{ mA}$$

La constante de tiempo para este circuito de primer orden que contiene un inductor es

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{5 \times 10^{-3}}{1000} = 5 \times 10^{-6} = 5 \mu\text{s}$$

En este ejemplo, un trazo de la corriente del inductor tendrá la misma forma que tuvo el trazo de la corriente del inductor en el ejemplo 8.3-2, sólo que la corriente del inductor en este ejemplo tendrá un retardo de  $10 \mu\text{s}$  porque el interruptor se cierra  $10 \mu\text{s}$  más tarde. Para justificar este retardo, reemplazamos  $t$  por  $t = 10 \mu\text{s}$  en la ecuación que representa la corriente del inductor. En consecuencia, la corriente del inductor en este ejemplo está dada por

$$i(t) = 4 - 4e^{-(t-10)/5} \text{ mA} \quad (8.3-11)$$

donde  $t$  tiene unidades de microsegundos. (Compare las ecuaciones 8.3-9 y 8.3-11.) para encontrar el tiempo en que la corriente alcanza 2 mA, sustituya  $i(t) = 2 \text{ mA}$ . Entonces

$$2 = 4 - 4e^{-(t-10)/5} \text{ mA}$$

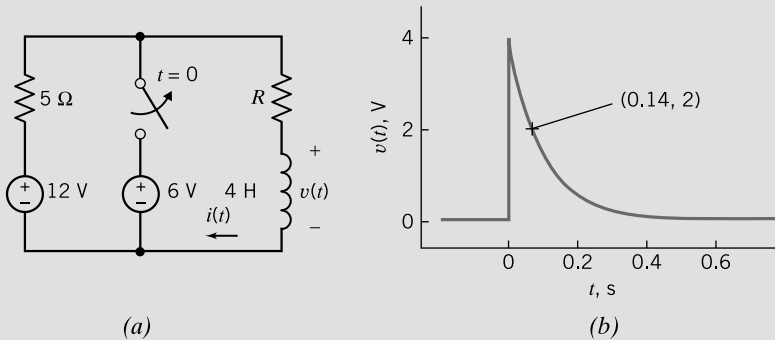
Despejando  $t$  resulta

$$t = -5 \times \ln\left(\frac{2-4}{-4}\right) + 10 = 13.47 \mu\text{s}$$

Dado que el interruptor se cierra en tiempo  $10 \mu\text{s}$ , se requiere un tiempo adicional de  $3.47 \mu\text{s}$  después de que el interruptor se cierre, para que el valor de la corriente alcance 2 mA. La figura 8.3-10c muestra un trazo de la corriente del inductor como una función de tiempo. Como se esperaba, el trazo es una copia retrasada del trazo que se muestra en la figura 8.3-5c.

**EJEMPLO 8.3-8** Respuesta exponencial de un circuito de primer orden

La figura 8.3-11a muestra un trazo del voltaje a través del inductor en la figura 8.3-11b.



**FIGURA 8.3-11** (a) Un circuito de primer orden y (b) trazo del voltaje de un inductor.

- Determine la ecuación que representa el voltaje del inductor como una función de tiempo.
- Determine el valor de la resistencia  $R$ .
- Determine la ecuación que representa la corriente del inductor como una función de tiempo.

**Solución**

- (a) El voltaje del inductor está representado por una ecuación de la forma

$$v(t) = \begin{cases} D & \text{para } t < 0 \\ E + F e^{-at} & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

donde  $D$ ,  $E$ ,  $F$  y  $a$  son constantes desconocidas. Las constantes  $D$ ,  $E$  y  $F$  están descritas por

$$D = v(t) \quad \text{cuando } t < 0, \quad E = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \quad \text{y} \quad E + F = \lim_{t \rightarrow 0^+} v(t)$$

Por el trazo, vemos que

$$D = 0, E = 0 \quad \text{y} \quad E + F = 4 \text{ V}$$

En consecuencia,

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 4e^{-at} & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

Para determinar el valor de  $a$ , tomamos un tiempo en que el circuito no esté en estado estable. Un punto tal se etiqueta en el trazo en la figura 8.3-11. Vemos que  $v(0.14) = 2 \text{ V}$ , es decir, el valor del voltaje es 2 voltios en el tiempo 0.14 segundos. Sustituirlo en la ecuación para  $v(t)$  da como resultado

$$2 = 4e^{-a(0.14)} \Rightarrow a = \frac{\ln(0.5)}{-0.14} = 5$$

Por consiguiente,

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 4e^{-5t} & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

- (b) La figura 8.3-12a muestra el circuito inmediatamente después de que se abre el interruptor. En la figura 8.3-12b, la parte del circuito conectada al inductor ha sido reemplazada por el circuito conveniente de Thévenin. La constante de tiempo del circuito está dada por

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{4}{R + 5}$$



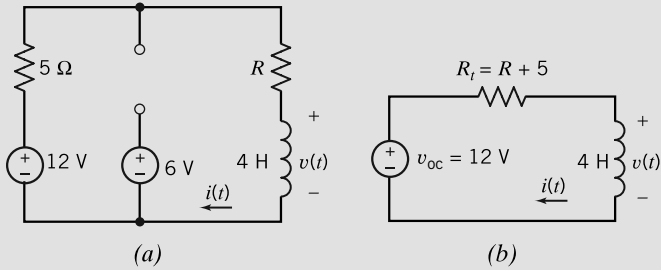


FIGURA 8.3-12 (a) El circuito de primer orden luego de que se abre el interruptor. (b) Un circuito equivalente.

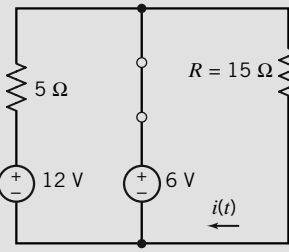


FIGURA 8.3-13 El circuito de primer orden antes de que se abra el interruptor.

Incluso, la constante de tiempo se relaciona con el exponente en  $v(t)$  por  $-5t = -\frac{t}{\tau}$ . En consecuencia,

$$5 = \frac{1}{\tau} = \frac{R+5}{4} \Rightarrow R = 15 \Omega$$

(c) La corriente del inductor se relaciona con el voltaje del inductor por

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau + i(0)$$

La figura 8.3-13 muestra el circuito antes de que se abra el interruptor. El interruptor cerrado está representado por un cortocircuito. El circuito está en estado estable, y las fuentes de voltaje tienen voltajes constantes, de modo que el inductor actúa como un cortocircuito. La corriente del inductor está dada por

$$i(t) = \frac{6}{15} = 0.4 \text{ A}$$

En particular,  $i(0^-) = 0.4 \text{ A}$ . La corriente en un inductor es continua, por lo que  $i(0^+) = i(0^-)$ . En consecuencia,

$$i(0) = 0.4 \text{ A}$$

Volviendo a la ecuación para la corriente del inductor, luego que el interruptor se abre, tenemos

$$i(t) = \frac{1}{4} \int_0^t 4e^{-5\tau} d\tau + 0.4 = \frac{1}{-5} (e^{-5t} - 1) + 0.4 = 0.6 - 0.2e^{-5t}$$

En resumen,

$$i(t) = \begin{cases} 0.4 & \text{para } t < 0 \\ 0.6 - 0.2e^{-5t} & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

**EJERCICIO 8.3-1** El circuito que se muestra en la figura E 8.3-1 se encuentra en estado estable antes de que se cierre el interruptor en tiempo  $t = 0$ . Determine el voltaje del condensador,  $v(t)$ , para  $t \geq 0$ .

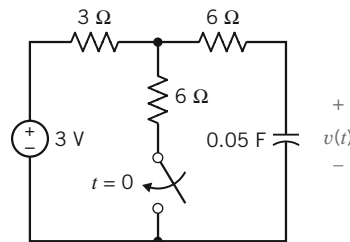


FIGURA E 8.3-1

**Respuesta:**  $v(t) = 2 + e^{-2.5t} \text{ V}$  para  $t > 0$

**EJERCICIO 8.3-2** El circuito que se muestra en la figura E 8.3-2 se encuentra en estado estable antes de que se cierre el interruptor en tiempo  $t = 0$ . Determine la corriente del inductor,  $i(t)$ , para  $t > 0$ .

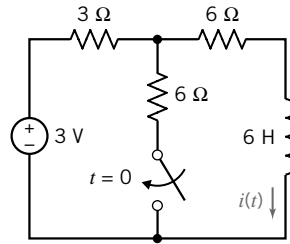


FIGURA E 8.3-2

**Respuesta:**  $i(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}e^{-1.33t}$  A para  $t > 0$

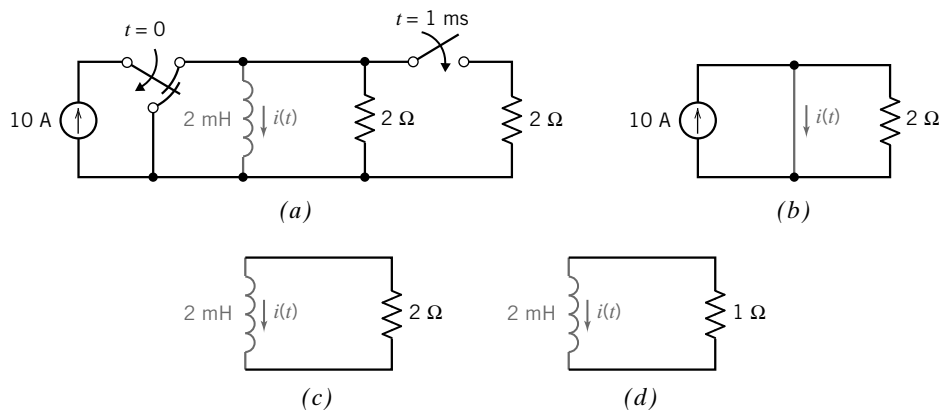
## 8.4 CONMUTACIÓN SECUENCIAL

En ocasiones, los circuitos contienen varios interruptores que no se accionan al mismo tiempo. Por ejemplo, un circuito puede tener dos interruptores donde el primero cambia el estado en tiempo  $t = 0$ , y el segundo interruptor cierra en  $t = 1$  ms.

La **comutación secuencial** ocurre cuando un circuito contiene dos o más interruptores que modifican el estado en instantes diferentes.

Los circuitos con comutación secuencial se pueden resolver utilizando los métodos descritos en secciones anteriores, a partir de que las corrientes del inductor y los voltajes del condensador no se modifican de manera instantánea.

Como un ejemplo de comutación secuencial, considere el circuito que se muestra en la figura 8.4-1a. Este circuito contiene dos interruptores, el primero que cambia el estado en tiempo  $t = 0$ , y el segundo que cierra en  $t = 1$  ms. Suponga que este circuito ha llegado al estado estable antes de que el estado estable antes de que el interruptor cambie el estado en tiempo  $t = 0$ . La figura 8.4-1b muestra el circuito equivalente que es adecuado para  $t < 0$ . Dado que el circuito se encuentra en estado estable y la entrada es constante, el inductor actúa como un cortocircuito y la corriente en este cortocircuito es la corriente del inductor. El cortocircuito fuerza el voltaje a través del resistor a que



**FIGURA 8.4-1** (a) Un circuito con comutación secuencial. (b) El circuito equivalente antes de  $t = 0$ . (c) El circuito equivalente para  $0 < t < 1$  ms. (d) El circuito equivalente después de  $t = 1$  ms.

sea cero, de modo que la corriente en el resistor también sea cero. El resultado es que toda la corriente de fuente fluye en el cortocircuito, e

$$i(t) = 10 \text{ A} \quad t < 0$$

La corriente del inductor será de 10 A inmediatamente antes de que el interruptor cambie el estado en tiempo  $t = 0$ . Esto lo expresamos como

$$i(0^-) = 10 \text{ A}$$

Dado que la corriente del inductor no cambia de manera instantánea, la corriente del inductor será de 10 A inmediatamente después de que el interruptor cambia el estado. Es decir,

$$i(0^+) = 10 \text{ A}$$

Ésta es la condición inicial que se utiliza para calcular la corriente del inductor después de  $t = 0$ . La figura 8.4-1c muestra el circuito equivalente que es el apropiado después de un interruptor cambia el estado en tiempo  $t = 0$ , y antes de que el otro interruptor cierre en tiempo  $t = 1$  ms. Vemos que el equivalente de Norton de la parte del circuito conectada al inductor tiene los parámetros

$$I_{sc} = 0 \text{ A} \quad \text{y} \quad R_t = 2 \Omega$$

La constante de tiempo de este circuito de primer orden es

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{2 \times 10^{-3}}{2} = 1 \times 10^{-3} = 1 \text{ ms}$$

La corriente del inductor es

$$i(t) = i(0)e^{-t/\tau} = 10e^{-t} \text{ A}$$

para  $0 < t < 1$  ms. Observe que  $t$  tiene unidades de ms. Inmediatamente antes de que el otro circuito se cierre en tiempo  $t = 1$  ms, la corriente del inductor será

$$i(1^-) = 10e^{-1} = 3.68 \text{ A}$$

Como la corriente del inductor no cambia de manera instantánea, la corriente del inductor será también de 3.68 A inmediatamente después de que el interruptor cambia el estado, Es decir,

$$i(1^+) = 3.68 \text{ A}$$

Ésta es la condición inicial que se utiliza para calcular la corriente del inductor después de que el interruptor se cierra en  $t = 1$  ms. La figura 8.4-1d muestra el circuito equivalente apropiado. Vemos que el equivalente de Norton de la parte del circuito conectada al inductor tiene los parámetros

$$I_{sc} = 0 \text{ A} \quad \text{y} \quad R_t = 1 \Omega$$

La constante de tiempo de este circuito de primer orden es

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{2 \times 10^{-3}}{1} = 2 \times 10^{-3} = 2 \text{ ms}$$

La corriente del inductor es

$$i(t) = i(t_0)e^{-(t-t_0)/\tau} = 3.68e^{-(t-1)/2} \text{ A}$$

para  $1 \text{ ms} < t$ . Una vez más,  $t$  tiene unidades de ms. Incluso,  $t_0$  indica el tiempo cuando el interruptor cambia el estado: 1 ms en este ejemplo.

La figura 8.4-2 muestra un trazo de la corriente del inductor. La constante de tiempo cambia cuando el segundo interruptor se cierra. El resultado es que la inclinación del trazo cambia en  $t = 1$  ms. Inmediatamente antes de que el interruptor se cierre, la inclinación es  $-3.68 \text{ A/ms}$ . Inmediatamente después de que el interruptor se cierra, la inclinación se vuelve  $-3.68/2 \text{ A/ms}$ .

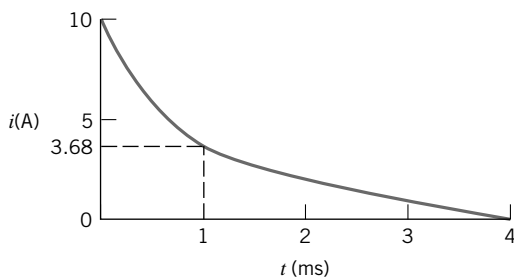


FIGURA 8.4-2 Forma de onda de la corriente para  $t \geq 0$ . La exponencial tiene una constante de tiempo diferente para  $0 \leq t < t_1$  y para  $t \geq t_1$  donde  $t_1 = 1$  ms.

## 8.5 ESTABILIDAD DE CIRCUITOS DE PRIMER ORDEN

Ya mostramos que la respuesta natural de un circuito de primer orden es

$$x_n(t) = Ke^{-t/\tau}$$

y que la respuesta total es la suma de las respuestas natural y forzada:

$$x(t) = x_n(t) + x_f(t)$$

Cuando  $\tau > 0$ , la respuesta natural se desvanece como  $t \rightarrow \infty$ , dejando la respuesta forzada. En este caso, se dice que el circuito es *estable*. Cuando  $\tau < 0$ , la respuesta natural crece sin límite como  $t \rightarrow \infty$ . La respuesta forzada se vuelve insignificante, comparada con la respuesta natural. Se dice que el circuito es *inestable*. Cuando un circuito es estable, la respuesta forzada depende de la entrada del circuito. Eso significa que la respuesta forzada contiene información acerca de la entrada. Cuando el circuito es inestable, la respuesta forzada es insignificante y la información se pierde. En la práctica, la respuesta natural de un circuito inestable no es ilimitada. Esta respuesta crecerá hasta que suceda algo que modifique el circuito. Tal modificación podría provenir de la saturación de un amplificador operacional o de una fuente dependiente. O quizá tal modificación sería la destrucción de un elemento de circuito. En la mayoría de las aplicaciones, el comportamiento de los circuitos inestables es algo indeseable y hay que evitarlo.

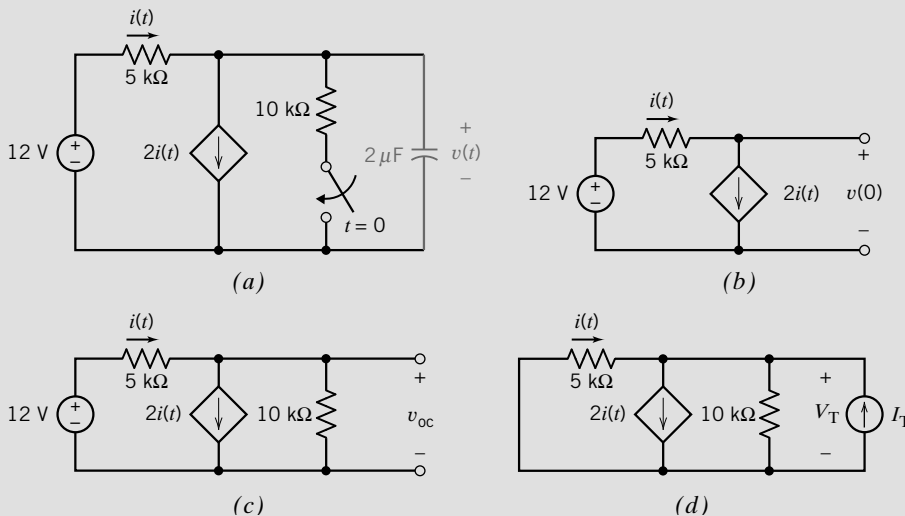
¿Cómo podemos diseñar circuitos de primer orden que sean estables? Si recordamos que  $\tau = R_1C$  o que  $\tau = L/R_t$ , vemos que

Se requiere que  $R_t > 0$  para conformar un circuito de primer orden estable.

Esta condición siempre se satisfará siempre que la parte del circuito conectada al condensador o al inductor conste de solamente resistores y fuentes independientes. Es seguro que tales circuitos sean estables. Por el contrario, un circuito de primer orden que contenga amplificadores operacionales o fuentes dependientes puede ser inestable.

### EJEMPLO 8.5-1 Respuesta de un circuito inestable de primer orden

El circuito de primer orden que se muestra en la figura 8.5-1a se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre en  $t = 0$ . Este circuito contiene una fuente dependiente y por lo tanto puede ser inestable. Encuentre el voltaje del condensador,  $v(t)$ , para  $t > 0$ .



**FIGURA 8.5-1** (a) Un circuito de primer orden que contiene una fuente dependiente. (b) El circuito utilizado para calcular la condición inicial. (c) El circuito utilizado para calcular  $V_{oc}$ . (d) El circuito utilizado para calcular  $R_t$ .

## Solución

La entrada al circuito es una constante, por lo tanto el condensador actúa como un circuito abierto en estado estable. Calculamos la condición inicial del circuito en la figura 8.5-2b. Al aplicar la KCL al nodo alto de la fuente de corriente dependiente, obtenemos

$$-i + 2i = 0$$

Entonces  $i = 0$ . En consecuencia, no hay caída de voltaje a través del resistor, y

$$v(0) = 12 \text{ V}$$

A continuación, determinemos el circuito equivalente de Thévenin para la parte del circuito conectado al condensador. Esto requiere dos cálculos. El primero, calcular el voltaje del circuito abierto mediante el circuito de la figura 8.5-1c. Al escribir una ecuación de KVL para el circuito cerrado que conste de dos resistores y fuente de voltaje, obtenemos,

$$12 = (5 \times 10^3) \times i + (10 \times 10^3) - (i - 2i)$$

Despejando la corriente, encontramos

$$i = 2.4 \text{ mA}$$

Si aplicamos la ley de Ohm al resistor de  $10 \text{ k}\Omega$ , obtenemos

$$V_{oc} = (10 \times 10^3) \times (i - 2i) = 24 \text{ V}$$

Ahora calculamos la resistencia de Thévenin utilizando el circuito que se muestra en la figura 8.5-1d. Aplique la KVL al circuito cerrado que conste de dos resistores para obtener

$$0 = (5 \times 10^3) \times i + (10 \times 10^3) \times (I_T + i - 2i)$$

Despejando la corriente,

$$i = 2I_T$$

Al aplicar la ley de Ohm al resistor de  $10 \text{ k}\Omega$ , obtenemos

$$V_T = 10 \times 10^3 \times (I_T + i - 2i) = -10 \times 10^3 \times I_T$$

La resistencia de Thévenin está dada por

$$R_t = \frac{V_T}{I_T} = -10 \text{ k}\Omega$$

La constante de tiempo es

$$\tau = R_t C = -20 \text{ ms}$$

El circuito es inestable. La respuesta total es

$$v(t) = 24 - 12 e^{t/20}$$

El voltaje del condensador *decrece* de  $v(0) = 12 \text{ V}$  en vez de *incrementarse* a  $v_f = 24 \text{ V}$ . Observe que

$$v(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = -\infty$$

No es apropiado referirse a la respuesta forzada como una respuesta de estado estable cuando el circuito es inestable.

### EJEMPLO 8.5-2 Diseño de circuitos de primer orden que sean estables

El circuito considerado en el ejemplo 8.5-1 ha sido trazado de nuevo en la figura 8.5-2a, con la ganancia de la fuente dependiente representada por la variable  $B$ . ¿Qué restricciones se deben imponer a la ganancia de la fuente dependiente para asegurar que sea estable? Diseñe este circuito para tener una constante de tiempo de  $+20 \text{ ms}$ .

**Solución**

La figura 8.5-2b muestra el circuito que se utilizó para calcular  $R_t$ . Aplicar la KVL al circuito cerrado que consta de dos resistores,

$$5 \times 10^3 \times i + V_T = 0$$

Despejando la corriente resulta

$$i = -\frac{V_T}{5 \times 10^3}$$

Al aplicar la KCL al nodo alto de fuente dependiente, obtenemos

$$-i + Bi + \frac{V_T}{10 \times 10^3} - I_T = 0$$

Al combinar estas ecuaciones, obtenemos

$$\left( \frac{1-B}{5 \times 10^3} + \frac{1}{10 \times 10^3} \right) V_T - I_T = 0$$

La resistencia de Thévenin está dada por

$$R_t = \frac{V_T}{I_T} = -\frac{10 \times 10^3}{2B-3}$$

Se requiere la condición  $B < 3/2$  para asegurarse que  $R_t$  es positiva y que el circuito es estable.

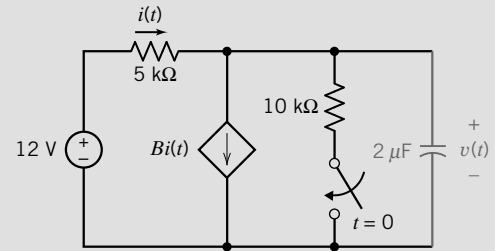
Para obtener una constante de tiempo de +20 ms se requiere

$$R_t = \frac{\tau}{C} = \frac{20 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-6}} = 10 \times 10^3 = 10 \text{ k}\Omega$$

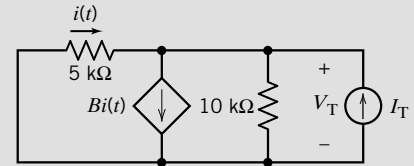
la cual a su vez requiere

$$10 \times 10^3 = -\frac{10 \times 10^3}{2B-3}$$

Por consiguiente,  $B = 1$ . Esto indica que podemos fijar el circuito inestable disminuyendo la ganancia de la fuente dependiente, de 2 A/A a 1 A/A.



(a)



(b)

FIGURA 8.5-2 (a) Circuito de primer orden que contiene una fuente dependiente. (b) El circuito que se utilizó para calcular la resistencia de Thévenin de la parte del circuito conectada al condensador.

**8.6 FUENTE DE PASO UNITARIO**

La función de paso unitario proporciona una manera conveniente de representar un cambio abrupto en un voltaje o una corriente.

Definimos la *función de paso unitario* como una función de tiempo que es cero para  $t < t_0$  y de unidad para  $t > t_0$ . En  $t = t_0$ , el valor cambia de cero a uno. Representamos la función de paso unitario con  $u(t - t_0)$  donde

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases} \quad (8.6-1)$$

El valor de  $u(t - t_0)$  no se define en  $t = t_0$ , donde cambia de manera instantánea de un valor de cero a uno. La función de paso unitario se muestra en la figura 8.6-1. A veces consideraremos  $t_0 = 0$ .

La función de paso unitario no tiene dimensiones. Para representar un voltaje que cambia abruptamente de un valor constante a otro valor constante en tiempo  $t = t_0$ , podemos escribir

$$v(t) = A + B u(t - t_0)$$

lo cual indica que

$$v(t) = \begin{cases} A & t < t_0 \\ A + B & t > t_0 \end{cases}$$

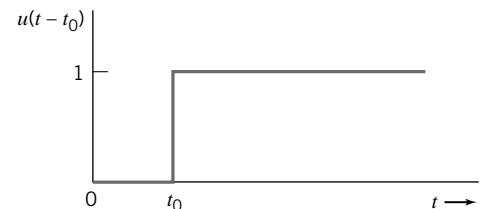


FIGURA 8.6-1 Paso unitario forzando la función,  $u(t - t_0)$ .

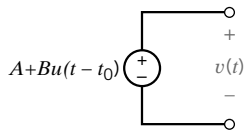


FIGURA 8.6-2 Símbolo para una fuente de voltaje, cuyo voltaje cambia abruptamente en el tiempo  $t = t_0$ .

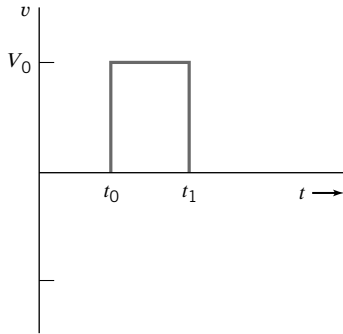
donde  $A$  y  $B$  tienen unidades de voltios. La figura 8.6-2 muestra una fuente de voltaje que tiene este voltaje.

Vale la pena observar que  $u(-t)$  indica que tenemos un valor de 1 para  $t < 0$ , por lo que

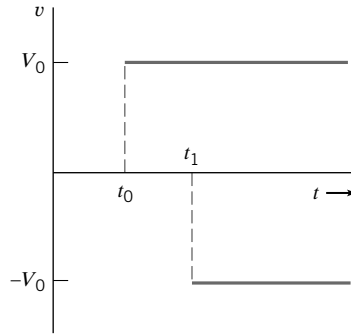
$$u(-t) = \begin{cases} 1 & t < 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

Consideremos ahora la fuente de *pulso*

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ V_0 & t_0 < t < t_1 \\ 0 & t_1 < t \end{cases}$$



(a)



(b)

FIGURA 8.6-3 (a) Pulso de voltaje rectangular. (b) Formas de onda del voltaje de dos pasos que dan por resultado el pulso de voltaje.

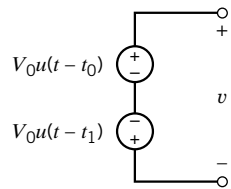


FIGURA 8.6-4 Fuentes de voltaje de dos pasos que dan por resultado un pulso de voltaje rectangular,  $v(t)$ , con una magnitud de  $V_0$  y una duración de  $(t_1 - t_0)$  donde  $t_0 < t_1$ .

la cual se muestra en la figura 8.6-3a. Como se muestra en la figura 8.6-3b, el pulso se puede obtener desde las fuentes de voltaje de dos pasos, el primero del valor  $V_0$  que ocurre en  $t = t_0$ , y el segundo que es igual a  $-V_0$  y ocurre en  $t = t_1$ . Entonces, las fuentes de dos pasos de magnitud  $V_0$  que se muestran en la figura 8.6-4 darán por resultado el pulso deseado. Tenemos  $v(t) = V_0 u(t - t_0) - V_0 u(t - t_1)$  para proporcionar el pulso. Observe lo fácil que es utilizar los símbolos de función de dos pasos para representar esta fuente de pulso. Se dice que el pulso tiene una duración de  $(t_1 - t_0)$  s.

Una **señal de pulso** tiene un valor de no cero constante para una duración de tiempo de  $\Delta t = t_1 - t_0$ .

Reconocemos que la función de paso unitario es un modelo ideal. Los elementos reales no pueden cambiar de manera instantánea. Sin embargo, si el tiempo de conmutación es muy corto comparado con la constante de tiempo del circuito, podemos aproximar la conmutación como instantánea.

### EJEMPLO 8.6-1 Circuito de primer orden

La figura 8.6-5 muestra un circuito de primer orden. La entrada al circuito es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s(t)$ . La salida es la corriente del inductor. La salida es la corriente del inductor,  $i_o(t)$ . Determine la salida de este circuito cuando la entrada es  $v_s(t) = 4 - 8u(t)$  V.

### EJEMPLO INTERACTIVO

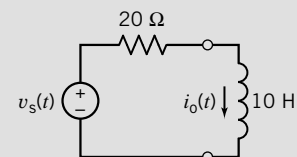


FIGURA 8.6-5 El circuito considerado en el ejemplo 8.6-1.

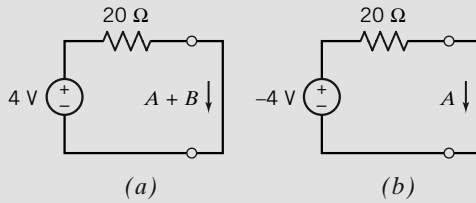
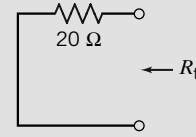


FIGURA 8.6-6 Circuitos que se usaron para calcular la respuesta de estado estable (a) antes de  $t = 0$  y (b) después de  $t = 0$ .

FIGURA 8.6-7 El circuito utilizado para calcular  $R_t$ .



## Solución

El valor de la entrada es una constante, 4 V, antes del tiempo  $t = 0$  y una constante diferente,  $-4$  V, después del tiempo  $t = 0$ . La respuesta del circuito de primer orden para el cambio del valor de la entrada será

$$i_o(t) = A + Be^{-at} \quad \text{para } t > 0 \quad (8.6-2)$$

donde se deben determinar los valores de las tres constantes,  $A$ ,  $B$  y  $a$ .

Los valores de  $A$  y  $B$  se determinan desde las respuestas de estado estable de este circuito antes y después del cambio del valor de la entrada. Las figuras 8.6-6a y b muestran los circuitos que se usan para calcular esas respuestas de estado estable. Las figuras 8.6-6a y b necesitan alguna explicación.

Los inductores actúan como cortocircuitos cuando la entrada es constante y el circuito se encuentra en estado estable. En consecuencia, el inductor es reemplazado por un cortocircuito en las figuras 8.6-6a y b

El valor de la corriente del inductor en el tiempo  $t = 0$  será igual a la corriente del inductor en estado estable antes de los cambios de la entrada. En el tiempo  $t = 0$  la corriente de entrada es

$$i_o(0) = A + Be^{-a(0)} = A + B$$

En consecuencia, la corriente del inductor se etiqueta como  $A + B$  en la figura 8.6-6a.

El valor de la corriente del inductor en el tiempo  $t = \infty$  será igual a la corriente del inductor en estado estable antes de los cambios de la entrada. En el tiempo  $t = \infty$ , la corriente de salida es

$$i_o(\infty) = A + Be^{-a(\infty)} = A$$

En consecuencia, la corriente del inductor se etiqueta como  $A$  en la figura 8.6-6b.

El análisis del circuito en la figura 8.6-6a da

$$A + B = 0.2 \text{ A}$$

El análisis del circuito en la figura 8.6-6b da

$$A = -0.2 \text{ A}$$

Por consiguiente,

$$B = 0.4 \text{ A}$$

El valor de la constante  $a$  en la ecuación 8.6-2 está determinado desde la constante de tiempo,  $\tau$ , la cual a su vez se calcula a partir de los valores de la inductancia  $L$  de la resistencia de Thévenin,  $R_t$ , del circuito conectado al inductor.

$$\frac{1}{a} = \tau = \frac{L}{R_t}$$

La figura 8.6-7 muestra el circuito utilizado para calcular  $R_t$ . Desde la figura 8.6-7 se ve que

$$R_t = 20 \Omega$$

Por lo tanto,

$$a = \frac{20}{10} = 2 \frac{1}{\text{s}}$$

(La constante de tiempo es  $\tau = 10/20 = 0.5$  s.) Sustituir los valores de  $A$ ,  $B$  y  $a$  en la ecuación 8.6-2 da

$$i_o(t) = \begin{cases} 0.2 \text{ A} & \text{para } t \leq 0 \\ -0.2 + 0.4 e^{-2t} \text{ A} & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$



## EJEMPLO 8.6-2 Circuito de primer orden

## EJEMPLO INTERACTIVO

La figura 8.6-8 muestra un circuito de primer orden. La entrada al circuito es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s(t)$ . La salida es el voltaje a través del condensador,  $v_o(t)$ . Determine la salida de este circuito cuando la entrada es  $v_s(t) = 7 - 14u(t)$  V.

## Solución

El valor de la entrada es una constante, 7 V, antes del tiempo  $t = 0$  y una constante diferente,  $-7$  V, después del tiempo  $t = 0$ . La respuesta de este circuito de primer orden para cambiar el valor de la entrada será

$$v_o(t) = A + Be^{-at} \quad \text{para } t > 0 \quad (8.6-3)$$

donde se deben determinar los valores de las tres constantes,  $A$ ,  $B$  y  $a$ .

Los valores de  $A$  y  $B$  se determinan a partir de las respuestas de estado estable de este circuito antes y después del cambio del valor de la entrada. Las figuras 8.6-9a y b muestran los circuitos utilizados para calcular las respuestas de estado estable. Las figuras 8.6-9a y b requieren cierta explicación.

Los condensadores actúan como circuitos abiertos cuando la entrada es constante y el circuito se encuentra en estado estable. En consecuencia, el condensador es reemplazado por un circuito abierto en las figuras 8.6-9a y b.

El valor del voltaje del condensador en el tiempo  $t = 0$  será igual al voltaje del condensador de estado estable antes de los cambios de la entrada. En el tiempo  $t = 0$ , el voltaje de la salida es

$$v_o(0) = A + Be^{-a(0)} = A + B$$

En consecuencia, el voltaje del condensador se etiqueta como  $A + B$  en la figura 8.6-9a.

El valor del voltaje del condensador en tiempo  $t = \infty$  será igual al voltaje del condensador de estado libre después de los cambios de la entrada. En el tiempo  $t = \infty$ , el voltaje de salida es

$$v_o(\infty) = A + Be^{-a(\infty)} = A$$

Por consiguiente, el voltaje del condensador se etiqueta como  $A$  en la figura 8.6-9b.

Aplique la regla de la división de voltaje al circuito en la figura 8.6-9a para obtener

$$A + B = \frac{5}{3 + 5} \times 7 = 4.38 \text{ V}$$

Aplique la regla de la división de voltaje al circuito en la figura 8.6-9b para obtener

$$A = \frac{5}{3 + 5} \times (-7) = -4.38 \text{ V}$$

Por lo tanto,

$$B = 8.76 \text{ V}$$

El valor de la constante  $a$  en la ecuación 8.6-3 se determina a partir de la constante de tiempo,  $\tau$ , la cual a su vez se calcula a partir de los valores de la capacitancia  $C$  y de la resistencia de Thévenin,  $R_t$ , del circuito conectado

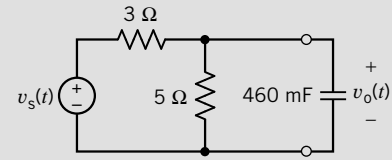


FIGURA 8.6-8 El circuito considerado en el ejemplo 8.6-2.

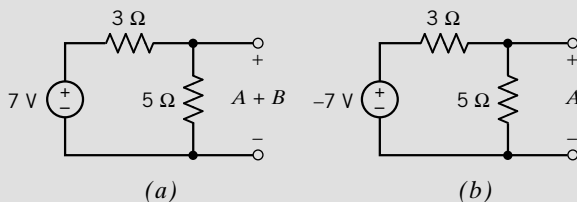


FIGURA 8.6-9 Circuitos utilizados para calcular la respuesta de estado estable (a) antes de  $t = 0$  y (b) después de  $t = 0$ .

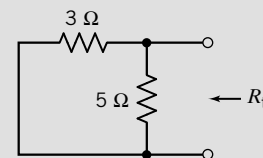


FIGURA 8.6-10 El circuito utilizado para calcular  $R_t$ .

al condensador.

$$\frac{1}{a} = \tau = R_t C$$

La figura 8.6-10 muestra el circuito utilizado para calcular  $R_t$ . Desde la figura 8.6-10 se ve que

$$R_t = \frac{(5)(3)}{5+3} = 1.875 \Omega$$

Por lo tanto,

$$a = \frac{1}{(1.875)(460 \times 10^{-3})} = 1.16 \frac{1}{s}$$

(La constante de tiempo es  $\tau = (1.875)(460 \times 10^{-3}) = 0.86$  s.) Al sustituir los valores de  $A$ ,  $B$  y  $a$  en la ecuación 8.6-3 resulta

$$v_o(t) = \begin{cases} -4.38 \text{ V} & \text{para } t \leq 0 \\ -4.38 + 8.76 e^{-1.16 t} \text{ V} & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

## 8.7 RESPUESTA DE UN CIRCUITO DE PRIMER ORDEN A UNA FUENTE NO CONSTANTE

En las secciones anteriores utilizamos inteligentemente el hecho de que la respuesta forzada a una fuente constante será un constante por sí misma. Ahora nos queda determinar qué respuesta será cuando la función de forzamiento no sea una constante.

La ecuación diferencial descrita por un circuito  $RL$  o  $RC$  se representa por la forma general

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = y(t) \quad (8.7-1)$$

donde  $y(t)$  es una constante sólo cuando tenemos una corriente constante o una fuente de voltaje constante y donde  $a = 1/\tau$  es la recíproca de la constante de tiempo.

En esta sección presentamos el *método del factor de integración*, el cual consiste en multiplicar la ecuación 8.7-1 por un factor que hace que el lado izquierdo sea una derivada perfecta, y luego integrar ambos lados.

Considere la derivada de un producto de dos términos como

$$\frac{d}{dt}(xe^{at}) = \frac{dx}{dt}e^{at} + axe^{at} = \left(\frac{dx}{dt} + ax\right)e^{at} \quad (8.7-2)$$

El término dentro del paréntesis del lado derecho de la ecuación 8.7-2 es exactamente la forma en el lado izquierdo de la ecuación 8.7-1.

Por consiguiente, si multiplicamos ambos lados de la ecuación 8.7-1 por  $e^{at}$ , el lado izquierdo de la ecuación se puede representar por la derivada perfecta,  $d(xe^{at})/dt$ . Llevando a cabo estos pasos, demostramos que

$$\left(\frac{dx}{dt} + ax\right)e^{at} = ye^{at}$$

o bien

$$\frac{d}{dt}(xe^{at}) = ye^{at}$$

Al integrar ambos lados de la segunda ecuación, tenemos

$$xe^{at} = \int ye^{at} dt + K$$

donde  $K$  es una constante de integración. Por lo tanto, despejando  $x(t)$ , multiplicamos por  $e^{-at}$  para obtener

$$x = e^{-at} \int ye^{at} dt + Ke^{-at} \quad (8.7-3)$$

Cuando la fuente es una constante de modo que  $y(t) = M$ , tenemos

$$x = e^{-at} M \int e^{at} dt + Ke^{-at} = \frac{M}{a} + Ke^{-at} = x_f + x_n$$

donde la respuesta natural es  $x_n = Ke^{-at}$  y la respuesta forzada es  $x_f = M/a$ , una constante.

Ahora consideremos el caso en que  $y(t)$  la función de forzamiento, no es una constante. Considerando la ecuación 8.7-3, vemos que la respuesta natural se mantiene  $x_n = Ke^{-at}$ . Sin embargo, la respuesta forzada es

$$x_f = e^{-at} \int y(t)e^{at} dt$$

De esta manera, la respuesta forzada será dictada por la forma  $y(t)$ . Consideremos el caso en que  $y(t)$  es una función exponencial de modo que  $y(t) = e^{bt}$ . Suponemos que  $(a + b)$  no es igual a cero. Entonces tenemos

$$x_f = e^{-at} \int e^{bt} e^{at} dt = e^{-at} \int e^{(a+b)t} dt = \frac{1}{a+b} e^{-at} e^{(a+b)t} = \frac{e^{bt}}{a+b} \quad (8.7-4)$$

Por consiguiente, la respuesta forzada de un circuito  $RL$  o  $RC$  para una función de forzamiento exponencial es de la misma forma que la función de forzamiento en sí misma. Cuando  $a + b$  no es igual a cero, suponemos que la respuesta forzada será de la misma forma que la función de forzamiento en sí misma, y tratamos de obtener la relación que se satisfará en estas condiciones.

### EJEMPLO 8.7-1 Circuito de primer orden con fuente no constante

Encuentre la corriente  $i$  para el circuito de la figura 8.7-1a para  $t > 0$  cuando

$$v_s = 10e^{-2t}u(t) \text{ V}$$

Suponga que el circuito se encuentra en estado estable en  $t = 0^-$ .

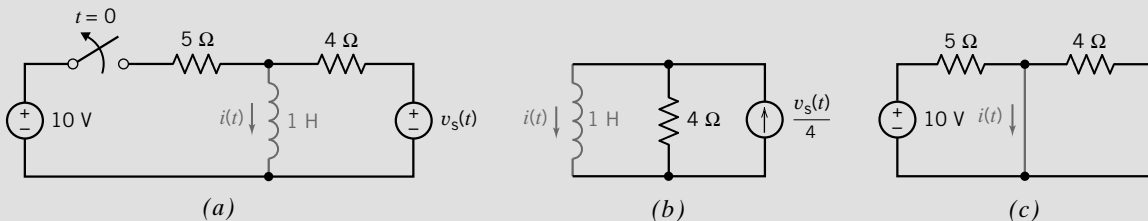


FIGURA 8.7-1 (a) Circuito con una fuente no constante; (b) el circuito equivalente apropiado después de que el interruptor se abra, y (c) el circuito equivalente apropiado antes de que el interruptor se abra.

### Solución

Dado que la función de forzamiento es una exponencial, esperamos una exponencial para la respuesta forzada,  $i_f$ . Por lo tanto, esperamos que  $i_f$  sea

$$i_f = Be^{-2t}$$

para  $t \geq 0$ . Al escribir la KVL en torno al enlace del lado derecho, tenemos

$$L \frac{di}{dt} + Ri = v_s$$

o bien

$$\frac{di}{dt} + 4i = 10e^{-2t}$$

para  $t > 0$ . Sustituyendo  $i_f = Be^{-2t}$ , tenemos

$$-2Be^{-2t} + 4Be^{-2t} = 10e^{-2t}$$

o bien

$$(-2B + 4B)e^{-2t} = 10e^{-2t}$$

Por lo tanto,  $B = 5$ , e

$$i_f = 5e^{-2t}$$

La respuesta natural se puede obtener si consideramos el circuito que se muestra en la figura 8.7-1b. Éste es el circuito equivalente apropiado para después de que se ha abierto el interruptor. La parte del circuito que está conectada al inductor ha sido reemplazada por su circuito equivalente de Norton. La respuesta natural es

$$i_n = Ae^{-(R_t/L)t} = Ae^{-4t}$$

La respuesta total es

$$i = i_n + i_f = Ae^{-4t} + 5e^{-2t}$$

Por consiguiente,  $A$  se puede determinar a partir del valor de la corriente del inductor en tiempo  $t = 0$ . La corriente inicial del inductor,  $i(0)$ , se puede obtener considerando el circuito que se muestra en la figura 8.7-1c. Éste es el circuito equivalente apropiado antes de que el interruptor se abra. Dado que  $v_f(t) = 0$  para  $t < 0$  y una fuente de voltaje cero es un cortocircuito, la fuente de voltaje en el lado derecho del circuito ha sido reemplazada por un cortocircuito. Además, dado que el circuito se encuentra en estado estable antes de que se abra el interruptor y la única entrada es la fuente de 10 voltios constante, el inductor actúa como un cortocircuito. La corriente en el cortocircuito que reemplaza al inductor es la condición inicial,  $i(0)$ . De la figura 8.7-1c,

$$i(0) = \frac{10}{5} = 2 \text{ A}$$

Entonces, en  $t = 0$ ,

$$i(0) = Ae^{-4 \times 0} + 5e^{-2 \times 0} = A + 5$$

o bien

$$2 = A + 5$$

o bien  $A = -3$ . Por consiguiente,

$$i = (-3e^{-4t} + 5e^{-2t}) \text{ A } t > 0$$

La fuente de voltaje del ejemplo 8.7-1 es una exponencial decadente de la forma

$$v_s = 10e^{-2t}u(t) \text{ V}$$

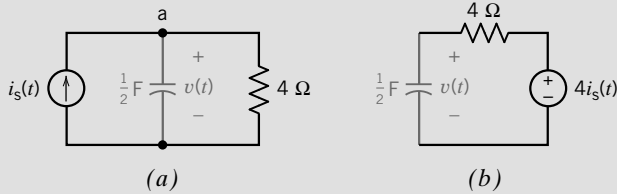
Se dice que esta fuente es *aperiódica* (no periódica). Una fuente periódica es aquella que se repite exactamente después de una duración fija de tiempo. Por eso, la señal  $f(t)$  es periódica si hay un número  $T$  tal que para toda  $t$

$$f(t + T) = f(t) \quad (8.7-5)$$

El número positivo más pequeño  $T$  que satisface la ecuación 8.7-5 se denomina periodo. El periodo define la duración de un ciclo completo de  $f(t)$ . Entonces, se dice que cualquier fuente para la cual no hay un valor  $T$  que satisfaga la ecuación 8.7-5 debe ser aperiódica. Un ejemplo de una fuente periódica es  $10 \sin 2t$ , la cual consideramos en el ejemplo 8.7-2. El periodo de esta fuente sinusoidal es  $\pi$  s.

**EJEMPLO 8.7-2** Circuito de primer orden con fuente no constante

Encuentre la respuesta  $v(t)$  para  $t > 0$  para el circuito de la figura 8.7-2a. El voltaje inicial  $v(0) = 0$ , y la fuente de corriente es  $i_s = (10 \text{ sen } 2t)u(t)$  A.



**FIGURA 8.7-2** (a) Un circuito con una fuente no constante. (b) El circuito equivalente para  $t > 0$ .

**Solución**

Como la función de forzamiento es una función sinusoidal, esperamos que  $v_f$  sea de la misma forma. Aplicando la KCL en el nodo a, obtenemos

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = i_s$$

o bien 
$$0.5 \frac{dv}{dt} + \frac{v}{4} = 10 \text{ sen } 2t \quad (8.7-6)$$

para  $t > 0$ . Suponemos que  $v_f$  constará de la función sinusoidal  $\text{seno } 2t$  y sus derivadas.

Al examinar la ecuación  $v_f/4$  más  $0.5 dv_f/dt$  debe ser igual a  $10 \text{ sen } 2t$ . Sin embargo,  $d(\text{sen } 2t)/dt = 2 \text{ cos } 2t$ . Por consiguiente, la prueba  $v_f$  necesita contener ambos términos,  $\text{sen } 2t$  y  $\text{cos } 2t$ . De ese modo, probamos la solución propuesta.

$$v_f = A \text{ sen } 2t + B \text{ cos } 2t$$

La derivada de  $v_f$ , entonces, es

$$\frac{dv_f}{dt} = 2A \text{ cos } 2t - 2B \text{ sen } 2t$$

Al sustituir  $v_f$  y  $dv_f/dt$  en la ecuación 8.7-6, obtenemos

$$(A \text{ cos } 2t - B \text{ sen } 2t) + \frac{1}{4}(A \text{ sen } 2t + B \text{ cos } 2t) = 10 \text{ sen } 2t$$

Por lo tanto, igualando los términos  $2t \text{ sen}$  y  $2t \text{ cos}$ , obtenemos

$$\left(\frac{A}{4} - B\right) = 10 \quad \text{y} \quad \left(A + \frac{B}{4}\right) = 0$$

Despejando  $A$  y  $B$ , obtenemos

$$A = \frac{40}{17} \quad \text{y} \quad B = \frac{-160}{17}$$

En consecuencia,

$$v_f = \frac{40}{17} \text{ sen } 2t - \frac{160}{17} \text{ cos } 2t$$

Es necesario que  $v_f$  se haya formado de  $\text{sen } 2t$  y  $\text{cos } 2t$  porque la solución debe satisfacer la ecuación diferencial. Desde luego, la derivada de  $\text{sen } \omega t$  es  $\omega \text{ cos } \omega t$ .

La respuesta natural se puede obtener considerando el circuito que se muestra en la figura 8.7-2b. Éste es el circuito equivalente apropiado para  $t > 0$ . La parte del circuito conectada al condensador ha sido reemplazada por el circuito equivalente de Thévenin. La respuesta natural es

$$v_n = D e^{-t/(RC)} = D e^{-t/2}$$

Luego la respuesta total es

$$v = v_n + v_f = De^{-t/2} + \frac{40}{17} \text{sen } 2t - \frac{160}{17} \text{cos } 2t$$

Dado que  $v(0) = 0$ , obtenemos en  $t = 0$

$$0 = D - \frac{160}{17}$$

o bien

$$D = \frac{160}{17}$$

Entonces, la respuesta total es

$$v = \left( \frac{160}{17} e^{-t/2} + \frac{40}{17} \text{sen } 2t - \frac{160}{17} \text{cos } 2t \right) \text{V}$$

**Tabla 8.7-1 Respuesta forzada para un función de forzamiento**

FUNCIÓN DE FORZAMIENTO, $y(t)$	RESPUESTA FORZADA, $x_f(t)$
1. Constante $y(t) = M$	$x_f = N$ , una constante
2. Exponencial $y(t) = Me^{-bt}$	$x_f = Ne^{-bt}$
3. Sinusoide $y(t) = M \text{sen}(\omega t + \theta)$	$x_f = A \text{sen } \omega t + B \text{cos } \omega t$

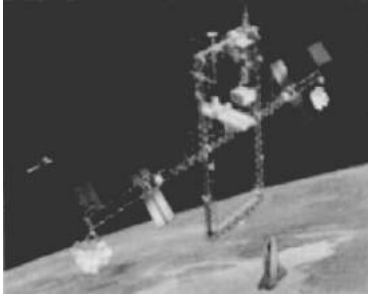
Un caso especial para la respuesta forzada de un circuito puede ocurrir cuando la función de forzamiento es una exponencial atenuada cuando tenemos  $y(t) = e^{-bt}$ . Si regresamos a la ecuación 8.7-4, podemos mostrar que

$$x_f = \frac{e^{-bt}}{a - b}$$

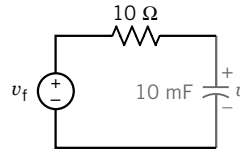
donde  $y(t) = e^{-bt}$ . Observe que aquí tenemos  $e^{-bt}$  mientras que utilizamos  $e^{bt}$  para la ecuación 8.7-4. Para el caso especial, cuando  $a = b$ , tenemos  $a - b = 0$ , y esta manera de respuesta es indeterminada. Para el caso especial, debemos utilizar  $x_f = te^{-bt}$  como la respuesta forzada. La solución,  $x_f$ , para la respuesta forzada cuando  $a = b$  satisfará la ecuación diferencial original (8.7-1). Así, cuando la respuesta natural ya contiene un término de la misma forma que la función de forzamiento, necesitamos multiplicar la forma asumida de la respuesta forzada por  $t$ .

La respuesta forzada para las funciones de forzamiento seleccionadas se resume en la tabla 8.7-1. Observemos que si un circuito es lineal, en estado estable, y excitado por una fuente sinusoidal única que tenga una frecuencia  $\omega$ , entonces todas las corrientes y voltajes de los elementos son sinusoides que tienen una frecuencia  $\omega$ .

**EJERCICIO 8.7-1** La planta de potencia eléctrica para la estación espacial orbital que se muestra en la figura E 8.7-12 utiliza celdas fotovoltaicas para almacenar energía en las baterías. El circuito de carga se modeló por el circuito que se muestra en la figura 8.7-1b, donde  $v_s = 10 \text{sen } 20t$  V. Si  $v(0^-) = 0$ , encontramos  $v(t)$  para  $t > 0$ .



(a)



(b)

**FIGURA E 8.7-1** (a) El diseño de la estación espacial de la NASA muestra los módulos habitables más grandes que podría hospedar un laboratorio científico en órbita. (b) El circuito para almacenamiento de energía para los laboratorios. Fotografía cortesía de la Administración Nacional de Aeronáutica y el Espacio.

**Respuesta:**  $v = 4 e^{-10t} - 4 \cos 20t + 2 \sin 20t$  V

## 8.8 OPERADORES DIFERENCIALES

En esta sección presentamos al operador diferencial,  $s$ .

Un **operador** es un símbolo que representa una operación matemática. Podemos definir un *operador*  $s$  diferencial como

$$sx = \frac{dx}{dt} \quad \text{y} \quad s^2x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

De este modo, el operador  $s$  indica diferenciación de la variable con respecto al tiempo. La utilidad del operador  $s$  es que puede ser tratado como una cantidad algebraica. Esto permite el reemplazo de ecuaciones diferenciales por ecuaciones algebraicas, las cuales son más fáciles de manejar.

El uso del operador  $s$  es particularmente atractivo cuando están implicadas ecuaciones diferenciales de orden superior. Entonces utilizamos el operador  $s$ , de modo que

$$s^n x = \frac{d^n x}{dt^n} \quad \text{para } n \geq 0$$

Suponemos que  $n = 0$  representa una no diferenciación, y entonces

$$s^0 = 1$$

lo cual implica  $s^0 x = x$ .

Dado que la integración es lo inverso de diferenciación, definimos

$$\frac{1}{s}x = \int_{-\infty}^t x \, d\tau \quad (8.8-1)$$

Se debe mostrar el operador  $1/s$  para satisfacer las reglas usuales de manipulaciones algebraicas. De estas reglas, la propiedad de multiplicación conmutativa presenta la única dificultad. Por lo tanto, requerimos

$$s \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \cdot s = 1 \quad (8.8-2)$$

¿Esto es cierto para el operador  $s$ ? Primero, examinamos la ecuación 8.8-1. Al multiplicar la ecuación 8.8-1 por  $s$  resulta

$$s \cdot \frac{1}{s}x = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t x \, d\tau$$

o bien

$$x = x$$

como se requería. Ahora tratamos el orden inverso al multiplicar  $sx$  por el operador de integración para obtener

$$\frac{1}{s}sx = \int_{-\infty}^t \frac{dx}{d\tau} \, d\tau = x(t) - x(-\infty)$$

Por lo tanto, 
$$\frac{1}{s}sx = x$$

sólo cuando  $x(-\infty) = 0$ . Desde un punto de vista físico, requerimos que todos los voltajes del condensador y todas las corrientes del inductor sean cero en  $t = -\infty$ . Entonces se puede decir que el operador  $1/s$  satisface la ecuación 8.8-2 y puede ser manipulado como una cantidad algebraica común.

Los operadores diferenciales se pueden usar para encontrar la solución natural de una ecuación diferencial. Por ejemplo, considere la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{d}{dt}x(t) + ax(t) = by(t) \quad (8.8-3)$$

La solución natural de esta ecuación diferencial es

$$x_n(t) = Ke^{st} \quad (8.8-4)$$

La forma homogénea de una ecuación diferencial se obtiene estableciendo a cero la función de forzamiento. Dicha función es  $y(t)$  en la ecuación 8.8-3. La forma homogénea de esta función es

$$\frac{d}{dt}x(t) + ax(t) = 0 \quad (8.8-5)$$

Para ver que  $x_n(t)$  es una solución de la forma homogénea de la ecuación diferencial, sustituimos la ecuación 8.8-4 en la 8.8-5.

$$\frac{d}{dt}(Ke^{st}) + a(Ke^{st}) = sKe^{st} + aKe^{st} = 0$$

Para obtener el parámetro  $s$  en la ecuación 8.8-4, reemplace  $d/dt$  en la ecuación 8.8-5 por el operador diferencial  $s$ . De esto resulta

$$sx + ax = (s + a)x = 0 \quad (8.8-6)$$

Esta ecuación tiene dos soluciones:  $x = 0$  y  $s = -a$ . La solución  $x = 0$  no es útil, por lo que utilizamos la solución  $s = -a$ . Sustituyendo esta solución en la ecuación 8.8-4 resulta

$$x_n(t) = Ke^{-at}$$

Ésta es la misma expresión para la respuesta natural que obtuvimos antes en este capítulo por otros métodos, lo cual es una reafirmación, no una novedad. Los operadores diferenciales nos serán muy útiles cuando analicemos los circuitos representados por ecuaciones diferenciales de segundo y mayor grado.

Como una segunda aplicación de los operadores diferenciales, considere utilizar el programa por computadora de MATLAB para encontrar la respuesta total de un circuito de primer orden. Los operadores diferenciales se utilizan para describir ecuaciones diferenciales para MATLAB. Como un ejemplo, considere el circuito que se muestra en la figura 8.8-1a. Para representar este circuito por una ecuación diferencial, aplique la KVL para obtener

$$10 \times 10^3 \left( 1 \times 10^{-6} \frac{d}{dt}v(t) \right) + v(t) - 4 \cos(100t) = 0$$

o bien, 
$$0.01 \frac{d}{dt}v(t) + v(t) = 4 \cos(100t) \quad (8.8-7)$$

En la sintaxis de MATLAB, el operador diferencial está representado por  $D$  en vez de por  $s$ . Reemplace  $d/dt$  en la ecuación 8.8-7 por el operador diferencial  $D$  para obtener

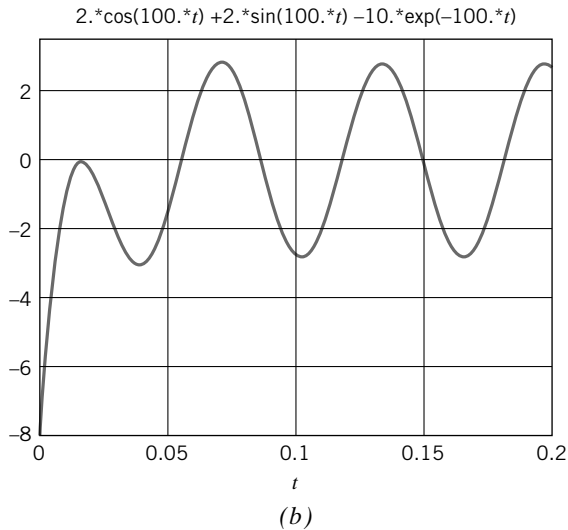
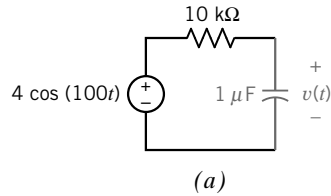
$$0.01 Dv + v = 4 \cos(100t)$$

Con los comandos de MATLAB

$$v = \text{dsolve}('0.01*Dv + v = 4*\cos(100*t)', 'v(0) = -8') \\ \text{ezplot}(v, [0, 2])$$

se indica a MATLAB que despeje la ecuación diferencial utilizando la condición inicial  $v(0) = -8$  voltios, y luego trace el resultado. (La función denominada `dsolve` determina la solución simbólica de las ecuaciones diferenciales comunes. Esta función se proporciona con la edición del estudiante de





**FIGURA 8.8-1** (a) Un circuito de primer orden con una entrada sinusoidal y (b) el trazo de su respuesta total producida utilizando MATLAB.

la versión 4 de MATLAB.) MATLAB responde proporcionando la solución completa de la ecuación diferencial

$$v = 2.\cos(100*t) + 2.*\sin(100*t) - 10.*\exp(-100.*t)$$

y el trazo de  $v(t)$  contra  $t$  mostrado en la figura 8.8-1b.

## 8.9 USO DE PSpICE PARA ANALIZAR CIRCUITOS DE PRIMER ORDEN

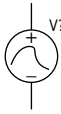
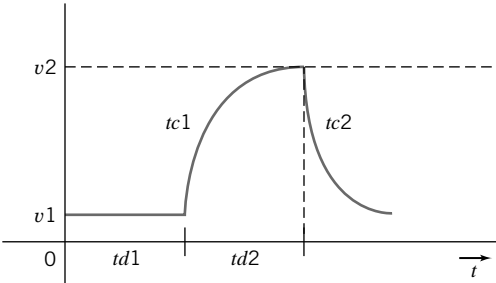

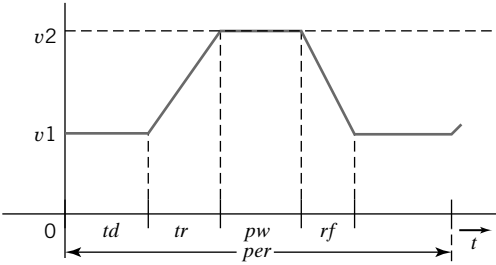
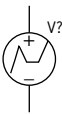
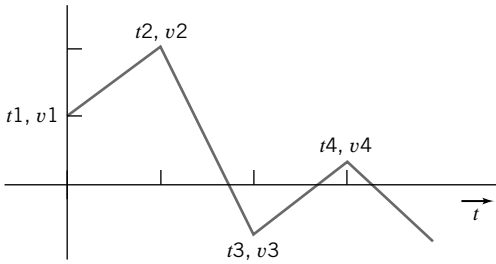

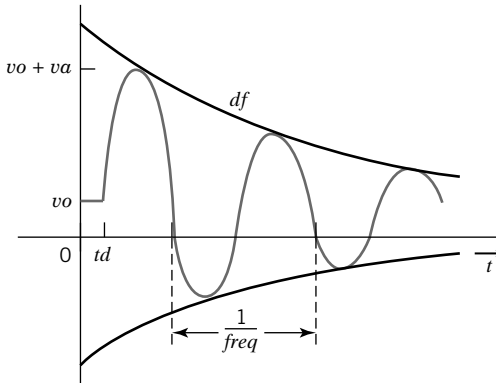
Para utilizar PSpice en el análisis de un circuito de primer orden debemos hacer lo siguiente:

1. Trazar el circuito en el taller de OrCAD
2. Especificar una simulación dominio de tiempo (transitorio)
3. Ejecutar la simulación
4. Trazar los resultados de la simulación

El análisis del dominio de tiempo es muy interesante para circuitos que contienen condensadores, o inductores, o ambos. PSpice proporciona partes que representan condensadores e inductores en su librería de partes ANALOG. El nombre de parte para el condensador es C. Las propiedades de mayor interés de la parte son la capacitancia y la condición inicial, las cuales se especifican al utilizar el editor de propiedades de OrCAD Capture. (La condición inicial de un condensador es el valor del voltaje del condensador en el tiempo  $t = 0$ .) El nombre de parte para el inductor es L. La inductancia y la condición inicial del inductor se especifican al utilizar el editor de propiedades. (La condición inicial de un inductor es el valor de la corriente del inductor en el tiempo  $t = 0$ .)

Las fuentes de voltaje y de corriente que representan entradas de variación de tiempo se proporcionan en la librería de partes SOURCE. La tabla 8.9-1 resume estas fuentes de voltaje. La forma de onda del voltaje describe la forma del voltaje de la fuente de voltaje como una función de tiempo.

**Tabla 8.9-1 Fuentes de voltaje de PSpice para simulaciones de respuesta transitoria**

NOMBRE	SÍMBOLO	FORMA DE ONDA DEL VOLTAJE
VEXP	<p>V1 = V2 = TD1 = TC1 = TD2 = TC2 =</p> 	
VPULSE	<p>V1 = V2 = TD = TR = TF = PW = PER =</p> 	
VPWL		
VSIN	<p>VOFF = VAMPL = FREQ =</p> 	

Cada forma de onda de voltaje se describe al utilizar una serie de parámetros. Por ejemplo, el voltaje de una fuente exponencial, VEXP, se describe utilizando  $v1$ ,  $v2$ ,  $td1$ ,  $td2$ ,  $tc1$  y  $tc2$ . Los parámetros de las fuentes de voltaje en la tabla 8.9-1 se especifican al utilizar el editor de propiedades.

### EJEMPLO 8.9-1 Uso de PSpice para analizar circuitos de primer orden

La entrada al circuito que se muestra en la figura 8.9-1a es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ , que se muestra en la figura 8.9-1a. La salida, o respuesta, del circuito es el voltaje a través del condensador,  $v_o(t)$ . Utilice PSpice para trazar la respuesta de este circuito.

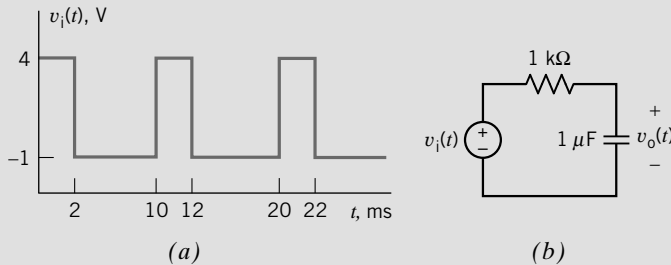


FIGURA 8.9-1 Un circuito  $RC$  (b) con una entrada de pulso (a).

### Solución

Empezaremos por trazar el circuito en el taller de OrCAD como se muestra en la figura 8.9-2 (vea el Apéndice A). La fuente de voltaje es una parte VPULSE (vea la segunda fila de la tabla 8.9-1). La figura 8.9-1a muestra  $v_i(t)$  haciendo la transición de  $-1$  V a  $4$  V de manera instantánea. Cero no es un valor aceptable para los parámetros  $tr$  o  $tf$ . Elegir un valor muy pequeño para  $tr$  y  $tf$  hará que las transiciones parezcan ser instantáneas al utilizar una escala de tiempo que muestre un periodo de la forma de onda de la entrada. En este ejemplo, el periodo de la forma de onda de la entrada es de  $10$  ms, de modo que  $1$  ns es una elección razonable para los valores de  $tr$  y  $tf$ .

Es conveniente establecer en cero  $td$ , el retardo antes de la parte teórica de la forma de onda. Entonces los valores de  $v1$  y  $v2$  son  $-1$  y  $4$ , respectivamente. El valor de  $pw$  es la longitud de tiempo que  $v_i(t) = v2 = 4$  V, por lo que  $pw = 2$  ms en este ejemplo. La entrada de pulso es una función periódica de tiempo. El valor de  $per$  es el periodo de la función de pulso,  $10$  ms.

El circuito que se muestra en la figura 8.9-1b no tiene un nodo de tierra. PSpice requiere que todos los circuitos tengan un nodo de tierra, por lo que es necesario seleccionar un nodo de tierra. La figura 8.9-2 muestra que el nodo inferior ha sido seleccionado para ser el nodo de tierra.

Ejecutaremos una simulación de un dominio de tiempo (transitorio). (En la barra de menús de OrCAD Capture, seleccione PSpice y haga clic en la opción New Simulation Profile; luego seleccione Time Domain (Transient) de la lista desplegable, o menú contextual, Analysis Type. La simulación empieza en tiempo cero y termina en Run to Time. Especifique este comando (Run to Time) a  $20$  ms y ejecute la simulación para dos periodos completos de la forma de onda de entrada. Active la casilla de verificación Skip The Initial Transient Bias Point (SKJPBP.) En la barra de menús de OrCAD Capture, seleccione PSpice y haga clic en la opción Run para que se ejecute la simulación.

Después de una exitosa simulación de dominio de tiempo (transitorio), OrCAD Capture abrirá de manera automática una ventana Schematics. Seleccione el comando TraceAdd Trace para que se despliegue el cuadro de diálogo. Agregue las rutas  $V(\text{OUTPUT})$  y  $V(\text{INPUT})$ . La figura 8.9-3 muestra el trazo resultante luego de eliminar la malla y y Etiquetar algunos puntos.

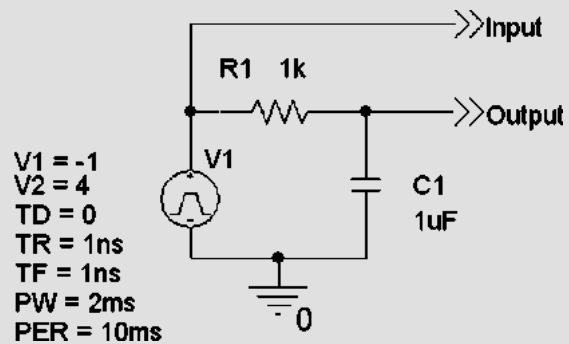


FIGURA 8.9-2 El circuito de la figura 8.9-1 como se trazó en el taller de OrCAD.

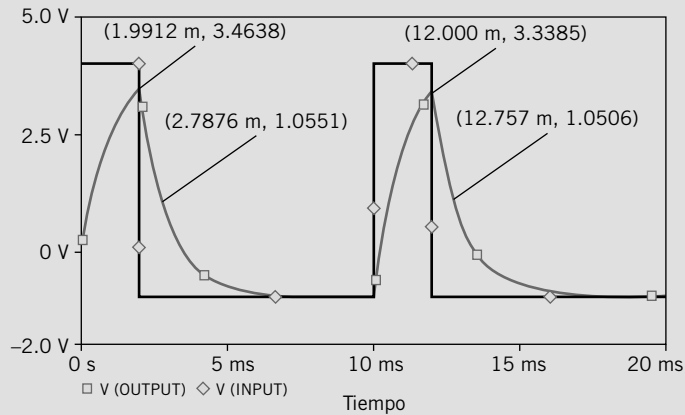


FIGURA 8.9-3 La respuesta del circuito RC para la entrada de pulso.

## 8.10 ¿CÓMO LO PODEMOS COMPROBAR...?

A los ingenieros se les suele solicitar comprobar que la solución de un problema sea la correcta. Por ejemplo, las soluciones propuestas para problemas de diseño se deben comprobar para confirmar que se ha cumplido con todas las especificaciones. Además, se deben revisar los resultados de la computadora para protegerse contra errores de captura de datos, así como las exigencias de los comerciantes, las cuales se deben analizar a fondo.

También a los estudiantes de ingeniería se les pide que verifiquen la exactitud de sus trabajos. Por ejemplo, tomarse un breve lapso antes de terminar un examen permitiría dar una vista rápida e identificar esas soluciones que podrían requerir un poco más de aplicación.

Los ejemplos siguientes ilustran técnicas útiles para comprobar las soluciones a los diversos problemas analizados en este capítulo.

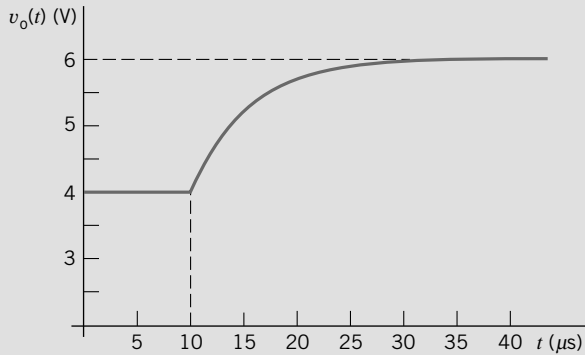
### EJEMPLO 8.10-1 ¿Cómo podemos comprobar la respuesta de un circuito de primer orden?

Considere el circuito y la correspondiente respuesta transitoria que se muestran en la figura 8.10-1, ¿Cómo podemos comprobar si la respuesta transitoria es correcta? Hay tres cosas que se deben verificar: el voltaje inicial,  $v_o(t_0)$ ; el voltaje final,  $v_o(\infty)$ , y la constante de tiempo,  $\tau$ .

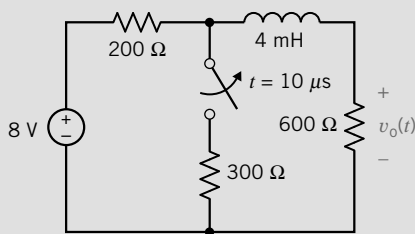
#### Solución

Considere primero el voltaje inicial,  $v_o(t_0)$ . (En este ejemplo,  $t_0 = 10 \mu\text{s}$ .) Antes del tiempo  $t_0 = 10 \mu\text{s}$ , el interruptor está cerrado y ha estado lo bastante para que el circuito alcance el estado estable, es decir, todos los transitorios deben haberse acabado. Para calcular  $v_o(t_0)$ , simplificamos el circuito de dos maneras. En la primera reemplazamos el interruptor con un cortocircuito porque el interruptor está cerrado. En la segunda, reemplazamos el inductor con un cortocircuito porque los inductores actúan como cortocircuitos cuando todas las entradas son constantes y el circuito se encuentra en estado estable. El circuito resultante se muestra en la figura 8.10-2a. Luego de reemplazar los resistores en paralelo de  $300\text{-}\Omega$  y de  $600\text{-}\Omega$  por el resistor equivalente de  $200\text{-}\Omega$ , el voltaje inicial se calcula utilizando la división de voltaje como

$$v_o(t_0) = \frac{200}{200 + 200} 8 = 4 \text{ V}$$



(a)



(b)

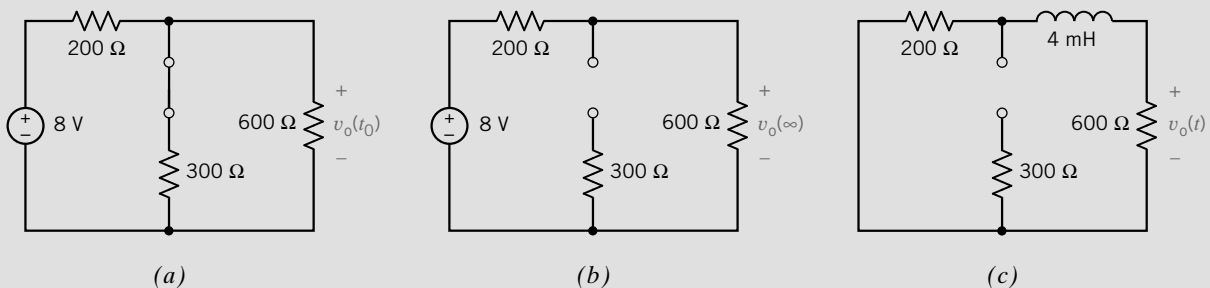
FIGURA 8.10-1 (a) Una respuesta transitoria y (b) el circuito correspondiente.

A continuación considere el voltaje final  $v_o(\infty)$ . En este caso, el interruptor está abierto y el circuito ha llegado al estado estable. De nuevo, el circuito se simplifica de dos maneras. El interruptor se reemplaza con un circuito abierto porque el interruptor está abierto. El inductor se reemplaza con un cortocircuito porque los inductores actúan como cortocircuitos cuando las entradas son constantes y el circuito se encuentra en estado estable. El circuito simplificado se muestra en la figura 8-10-2b. El voltaje final se calcula utilizando la división de voltaje como

$$v_o(\infty) = \frac{600}{200 + 600} 8 = 6 \text{ V}$$

La constante de tiempo se calcula a partir del circuito que se muestra en la figura 8.10-2c. Este circuito se ha simplificado al establecer la entrada a cero (una fuente de voltaje cero actúa como un cortocircuito) y el interruptor ha sido reemplazado por un circuito abierto. La constante de tiempo es

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{4 \times 10^{-3}}{200 + 600} = 5 \times 10^{-6} = 5 \mu s$$



(a)

(b)

(c)

FIGURA 8.10-2 Circuitos utilizados para calcular (a) el voltaje inicial; (b) el voltaje final y (c) la constante de tiempo.

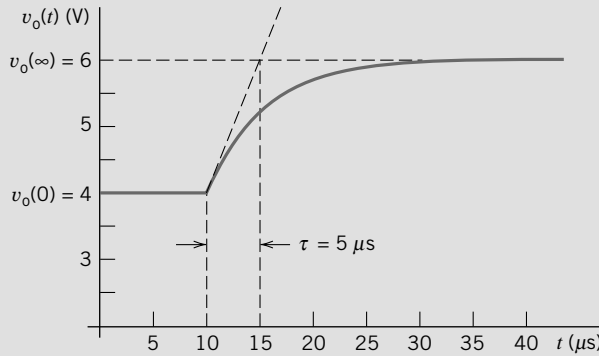
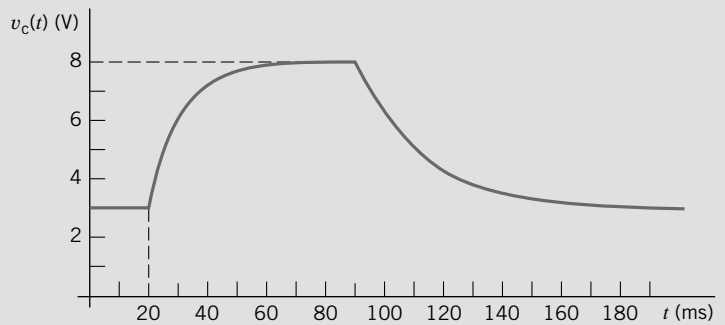


FIGURA 8.10-3 Interpretación de la respuesta transitoria.

La figura 8.10-3 muestra cómo se deben determinar el voltaje inicial, el voltaje final y la constante de tiempo a partir del trazo de la respuesta transitoria. (Recuerde que un procedimiento para determinar de manera gráfica la constante de tiempo se ilustró en la figura 8.3-3.) Dado que los valores de  $v_o(t_0)$ ,  $v_o(\infty)$  y  $\tau$  obtenidos a partir de la respuesta transitoria son los mismos que los valores obtenidos por el análisis del circuito, concluimos que la respuesta transitoria es en verdad correcta.

**EJEMPLO 8.10-2** ¿Cómo podemos comprobar la respuesta de un circuito de primer orden?

Considere el circuito y la respuesta transitoria correspondiente que se muestran en la figura 8.10-4. ¿Cómo podemos comprobar si la respuesta transitoria es correcta? Se deben verificar cuatro cosas: el voltaje del condensador en estado estable cuando el interruptor está abierto, el voltaje del condensador en estado estable cuando el interruptor está cerrado, la constante de tiempo cuando el interruptor está abierto, y la constante de tiempo cuando el interruptor está cerrado.



**Solución**

La figura 8.10-5a muestra el circuito que se utilizó para calcular el voltaje del condensador en estado estable cuando el interruptor está abierto. El circuito se ha simplificado en dos maneras. En la primera se ha sustituido el interruptor por un circuito abierto. En la segunda, el condensador ha sido reemplazado por un circuito abierto porque los condensadores actúan como circuitos abiertos cuando todas las entradas son constantes y el circuito se encuentra en estado estable. El voltaje del condensador en estado estable se calcula utilizando la división de voltaje como

$$v_c(\infty) = \frac{60}{60 + 30 + 150} 12 = 3 \text{ V}$$

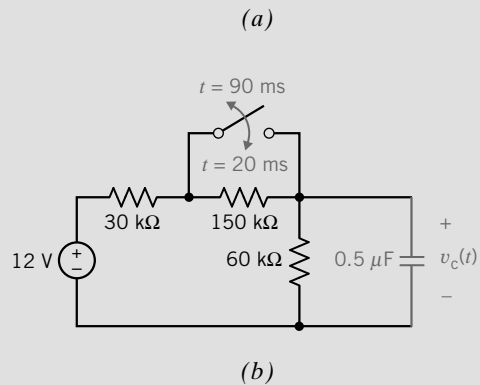
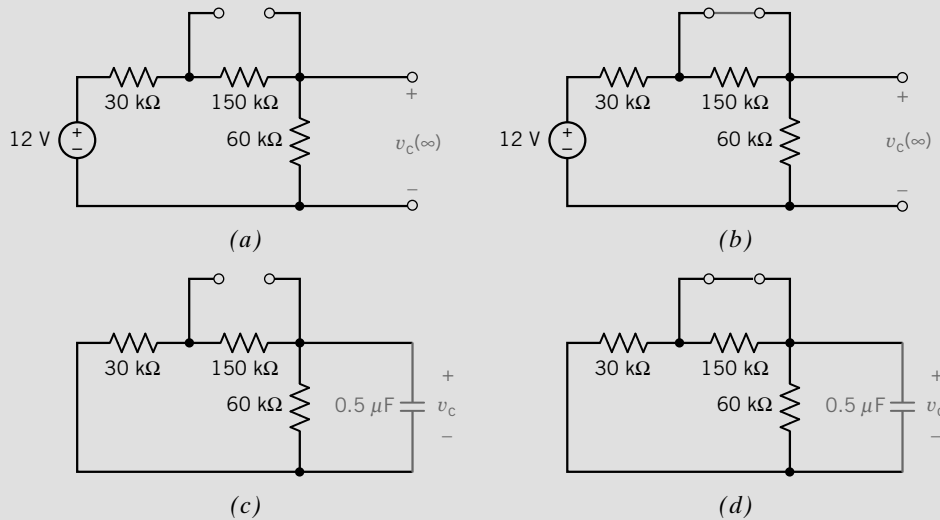


FIGURA 8.10-4 (a) Una respuesta transitoria y (b) el circuito correspondiente.



**FIGURA 8.10.5** Circuitos utilizados para calcular (a) el voltaje del estado estable cuando el interruptor está abierto, (b) el voltaje del estado estable cuando el interruptor está cerrado; (c) la constante de tiempo cuando el interruptor está abierto y (d) la constante de tiempo cuando el interruptor está cerrado.

La figura 8.10-5b muestra el circuito utilizado para calcular el voltaje del condensador en estado estable cuando el interruptor está cerrado. De nuevo, este circuito se ha simplificado en dos maneras. En la primera, el interruptor ha sido reemplazado con un cortocircuito. En la segunda, el interruptor se ha reemplazado con un circuito abierto. El voltaje del condensador en estado estable se calcula utilizando la división de voltaje como

$$v_c(\infty) = \frac{60}{60 + 30} 12 = 8 \text{ V}$$

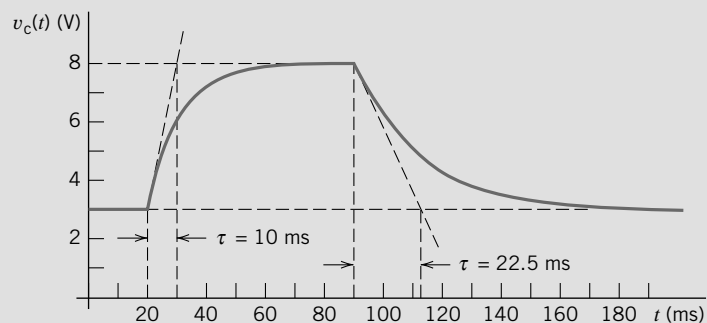
La figura 8.10-5c muestra el circuito utilizado para calcular la constante de tiempo cuando el interruptor está abierto. Este circuito ha sido simplificado en dos maneras. En la primera, el interruptor ha sido reemplazado por un circuito abierto. En la segunda, la entrada se ha establecido en cero (una fuente de voltaje cero actúa como un cortocircuito). Observe que  $180 \text{ k}\Omega$  en paralelo con  $60 \text{ k}\Omega$  son equivalentes a  $45 \text{ k}\Omega$ . La constante de tiempo es

$$\tau = (45 \times 10^3) \cdot (0.5 \times 10^{-6}) = 22.5 \times 10^{-3} = 22.5 \text{ ms}$$

La figura 8.10-5d muestra el circuito utilizado para calcular la constante de tiempo cuando el interruptor está cerrado. El interruptor ha sido reemplazado por un cortocircuito, y la entrada se ha establecido en cero. Observe que  $30 \text{ k}\Omega$  en paralelo con  $60 \text{ k}\Omega$  son equivalentes a  $20 \text{ k}\Omega$ . La constante de tiempo es

$$\tau = (20 \times 10^3) \cdot (0.5 \times 10^{-6}) = 10^{-2} = 10 \text{ ms}$$

Habiendo hecho estos cálculos, esperamos que el voltaje del condensador sea de  $3 \text{ V}$  hasta que se cierre el interruptor en  $t = 20 \text{ ms}$ . Entonces el voltaje del condensador se incrementará exponencialmente a  $8 \text{ V}$ , con una constante de tiempo igual a  $10 \text{ ms}$ . El voltaje del condensador permanecerá en  $8 \text{ V}$  hasta que el interruptor se abra en  $t = 90 \text{ ms}$ . Entonces el voltaje del condensador disminuirá exponencialmente a  $3 \text{ V}$ , con una constante de tiempo igual a  $22.5 \text{ ms}$ . La figura 8.10-6 muestra que la respuesta transitoria satisface esta descripción. Concluimos que la respuesta transitoria es correcta.



**FIGURA 8.10-6** Interpretación de la respuesta transitoria.

## 8.11 EJEMPLO DE DISEÑO

## UNA COMPUTADORA Y SU IMPRESORA

Con frecuencia es necesario conectar dos piezas de equipo electrónico entre sí de modo que la salida de un dispositivo se pueda utilizar como la entrada de otro dispositivo. Por ejemplo, esta situación ocurre cuando una impresora está conectada a una computadora como se muestra en la figura 8.11-1a. Esta situación se representa con más generalidad por el circuito que se muestra en la figura 8.11-1b. El dispositivo de salida (emisor) envía una señal a través del cable al receptor. Reemplacemos el dispositivo de salida, el cable y el receptor con modelos sencillos. Modele el emisor como una fuente de voltaje, los cables como un circuito RC, y el receptor como un circuito abierto. Los valores de resistencia y capacitancia utilizados para modelar el cable dependerán de la longitud del cable. Por ejemplo, cuando se usa cable coaxial RG58,

$$R = r \cdot \ell \text{ donde } r = 0.54 \frac{\Omega}{\text{m}}$$

$$y \quad C = c \cdot \ell \text{ donde } c = 88 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$$

y  $\ell$  es la longitud del cable en metros. La figura 8.11-1c muestra el circuito equivalente.

Suponga que los circuitos conectados por el cable son circuitos digitales. El emisor enviará 1's y 0's al receptor. Estos 1's y 0's estarán representados por voltajes. La salida del emisor será un voltaje,  $V_{OH}$ , para representar al lógico 1 y el otro voltaje,  $V_{OL}$ , para representar al lógico 0. Por ejemplo, un popular tipo de lógico, llamado lógico TTL, utiliza  $V_{OH} = 2.4 \text{ V}$  y  $V_{OL} = 0.4 \text{ V}$ . (TTL es lo mismo que lógico transistor a transistor.) El receptor utiliza dos voltajes diferentes,  $V_{IH}$  y  $V_{IL}$  para representar 1's y 0's. (Esto se hace así para proporcionar inmunidad al ruido, pero eso es otra historia.) El receptor interpretará su entrada,  $v_b$ , como lógico 1 siempre que  $v_b > V_{IH}$  y como lógico 0 siempre que  $v_b < V_{IL}$ . (Los voltajes entre  $V_{IH}$  y  $V_{IL}$  ocurrirán sólo durante las transiciones entre el lógico 1 y el lógico 0. Unas veces estos voltajes se interpretarán como lógico 1 y otras como lógico 0.) El lógico TTL utiliza  $V_{IH} = 2.0 \text{ V}$  y  $V_{IL} = 0.8 \text{ V}$ .

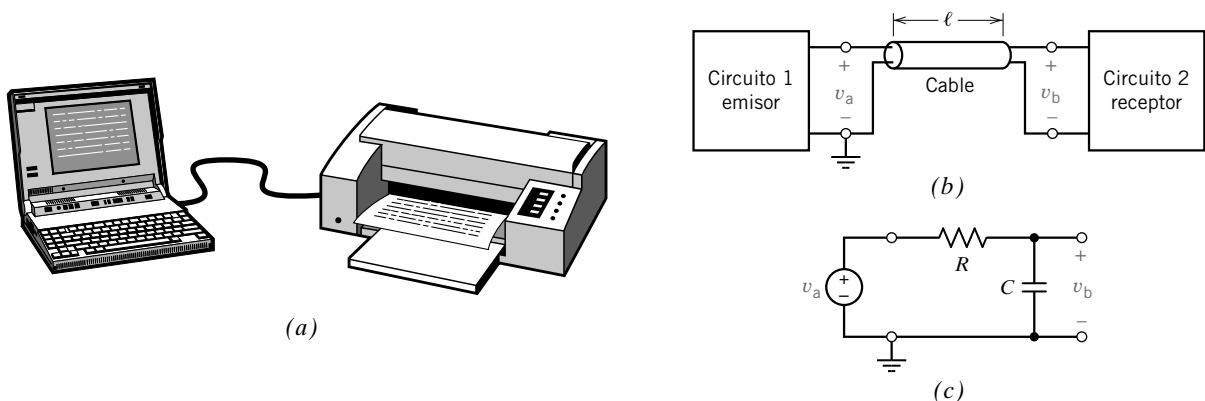


FIGURA 8.11-1 (a) Un impresora conectada a una computadora laptop. (b) Dos circuitos conectados por un cable. (c) Un circuito equivalente.



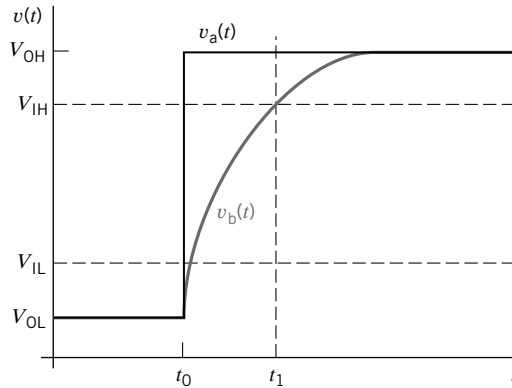


FIGURA 8.11-2 Voltajes que ocurren durante una transición de un lógico 0 a un lógico 1.

La figura 8.11-2 muestra lo que sucede cuando la salida del driver cambia de lógico 0 a lógico 1. Antes del tiempo  $t_0$ ,

$$v_a = V_{OL} \quad \text{y} \quad v_b < V_{IL} \quad \text{para} \quad t < t_0$$

Explicamos. Se envía y se recibe un lógico 0. La salida del *driver* cambia a  $V_{OH}$  en el tiempo  $t_0$ . La entrada receptora,  $v_b$ , hace esta transición más lentamente. Sólo hasta que el tiempo es  $t_1$  la entrada receptora se hace lo bastante grande para que se le interprete como lógico 1. Es decir,

$$v_b > V_{IH} \quad \text{para} \quad t > t_1$$

El tiempo que le toma al receptor reconocer la transición del lógico 0 al lógico 1

$$\Delta t = t_1 - t_0$$

se llama retraso. Este retraso es importante porque pone un límite sobre cuán rápido se pueden enviar los 1 y 0 del emisor al receptor. Para garantizar que los 1 y 0 se recibieron sin problemas, cada 1 y cada 0 deben durar al menos  $\Delta t$ . La velocidad a que los 1 y 0 se envíen del emisor al receptor es proporcionalmente inversa al retardo.

Suponga que dos circuitos TTL están conectados por un cable coaxial RG58. ¿Qué restricción se debe poner a la longitud del cable para garantizar que el retardo  $\Delta t$  sea al menos menor de 2 ns?

### Describe la situación y los supuestos

El voltaje  $v_b(t)$  es el voltaje del condensador de un circuito  $RC$ . El circuito  $RC$  está en estado estable justo antes del tiempo  $t_0$ .

La entrada al circuito  $RC$  es  $v_a(t)$ . Antes del tiempo  $t_0$ ,  $v_a(t) = V_{OL} = 0.4$  V. En el tiempo  $t_0$ ,  $v_a(t)$  cambia abruptamente. Después del tiempo  $t_0$ ,  $v_a(t) = V_{OH} = 2.4$  V.

Antes del tiempo  $t_0$ ,  $v_b(t) = V_{OL} = 0.4$  V. Después del tiempo  $t_0$ ,  $v_b(t)$  se incrementa exponencialmente. A fin de cuentas,  $v_b(t) = V_{OH} = 2.4$  V.

La constante de tiempo del circuito  $RC$  es

$$\tau = R \cdot C = rc\ell^2 = 47.52 \times 10^{-2} \cdot \ell^2$$

donde  $\ell$  es la longitud en metros del cable.

### Establezca el objetivo

Calcule el valor máximo de la longitud del cable  $\ell$ , para lo cual  $v_b > V_{IH} = 2.0$  V por el tiempo  $t = t_0 + \Delta t$ , donde  $\Delta t$  0 2 ns.

**Genere un plan**

Calcule el voltaje  $v_b(t)$  en la figura 8.11-1b. El voltaje  $v_b(t)$  dependerá de la longitud,  $\ell$ , del cable porque la constante de tiempo del circuito RC es una función de  $\ell$ . Establezca  $v_b = V_{IH}$  en el tiempo  $t = t_0 + \Delta t$ . Despeje la ecuación resultante por la longitud del cable.

**Actúe sobre el plan**

Utilizando la notación presentada en este capítulo,

$$v_b(0) = V_{OL} = 0.4 \text{ V}$$

$$v_b(\infty) = V_{OH} = 2.4 \text{ V}$$

y 
$$\tau = 47.52 \times 10^{-12} \cdot \ell^2$$

Con la ecuación 8.3-6, expresamos el voltaje  $v_b(t)$  como

$$v_b(t) = V_{OH} + (V_{OL} - V_{OH})e^{-(t-t_0)/\tau}$$

El voltaje del condensador,  $v_b$ , será igual a  $V_{IH}$  en el tiempo  $t_1 = t_0 + \Delta t$ , por lo tanto

$$V_{IH} = V_{OH} + (V_{OL} - V_{OH})e^{-\Delta t/\tau}$$

Despejando el retardo,  $\Delta t$ , nos da

$$\Delta t = -\tau \ln \left[ \frac{V_{IH} - V_{OH}}{V_{OL} - V_{OH}} \right] = -47.52 \times 10^{-12} \cdot \ell^2 \cdot \ln \left[ \frac{V_{IH} - V_{OH}}{V_{OL} - V_{OH}} \right]$$

En este caso,

$$\ell = \sqrt{\frac{-\Delta t}{47.52 \times 10^{-12} \cdot \ln \left[ \frac{V_{IH} - V_{OH}}{V_{OL} - V_{OH}} \right]}}$$

y, por consiguiente,

$$\ell = \sqrt{\frac{-2 \cdot 10^{-9}}{47.52 \times 10^{-12} \cdot \ln \left[ \frac{2.0 - 2.4}{0.4 - 2.4} \right]}} = 5.11 \text{ m} = 16.8 \text{ ft}$$

**Verifique la solución propuesta**

Cuando  $\ell = 5.11 \text{ m}$ , entonces

$$R = 0.54 \times 5.11 = 2.76 \Omega$$

y 
$$C = (88 \times 10^{-12}) \times 5.11 = 450 \text{ pF}$$

por lo tanto 
$$\tau = 2.76 \times (450 \times 10^{-12}) = 1.24 \text{ ns}$$

Finalmente, 
$$\Delta t = -1.24 \times 10^{-9} \times \ln \left[ \frac{2.0 - 2.4}{0.4 - 2.4} \right] = 1.995 \text{ ns}$$

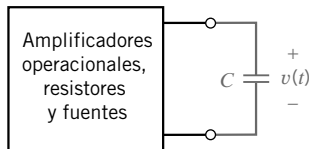
Dado que  $\Delta t < 2 \text{ ns}$ , se han satisfecho las especificaciones sin margen para error.

## 8.12 RESUMEN

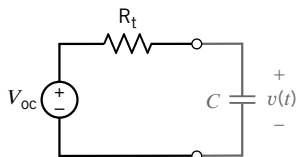
- Los voltajes y las corrientes se pueden utilizar para codificar, almacenar y procesar información. Cuando se usan un voltaje o una corriente para representar información, ese voltaje o corriente se denomina señal. Los circuitos eléctricos que procesan esa información se denominan circuitos de procesamiento de señal.
- Los circuitos que contienen elementos de almacenamiento de energía, es decir, condensadores e inductores, se representan por ecuaciones diferenciales más que por ecuaciones algebraicas. El análisis de estos circuitos requiere el despeje de ecuaciones diferenciales.
- En este capítulo restringimos nuestra atención a los circuitos de primer orden. Los circuitos de primer orden contienen un elemento de almacenamiento de energía y son representados por ecuaciones diferenciales de primer orden, las cuales son razonablemente fáciles de despejar. Despejamos ecuaciones diferenciales de primer orden utilizando el método de la separación de variables.
- La *respuesta total* de un circuito es la suma de la *k* y la *respuesta forzada*. La respuesta natural es la solución general de la ecuación diferencial que representa al circuito cuando la entrada se establecen en cero. La respuesta forzada es la solución particular de la ecuación diferencial que representa al circuito.
- La respuesta total se puede separar en *respuesta transitoria* y *respuesta de estado estable*. La respuesta transitoria se desvanece con el tiempo, quedando la respuesta de estado estable. Cuando la entrada al circuito es una constante o una senoide, la respuesta de estado estable se puede utilizar como la respuesta forzada.
- En ocasiones, el término respuesta transitoria se refiere a la “parte transitoria de la respuesta total” y en otras veces a una respuesta total que incluye una parte transitoria. En particular, PSpice emplea el término *respuesta transitoria* para referirse a la respuesta total. Como esto puede ser confuso, el término se debe utilizar con gran cuidado.
- La *respuesta de paso* de un circuito es la respuesta cuando la entrada es igual a un función de paso unitario y todas las condiciones iniciales del circuito son iguales a cero.
- Utilizamos los circuitos equivalentes de Thévenin y Norton para reducir el problema del análisis cualquier circuito de primer orden al problema de analizar uno de dos circuitos de primer orden. Uno de los circuitos sencillos de primer orden es un circuito en serie que consta de una fuente de voltaje, un resistor y un condensador. El otro es un circuito en paralelo que consta de una fuente de corriente, un resistor y un inductor. La tabla 8.12-1 resume las ecuaciones utilizadas para determinar la respuesta total de un circuito de primer orden.
- El parámetro  $\tau$  en la ecuación diferencial de primer orden  $\frac{d}{dt}x(t) + \frac{x(t)}{\tau} = K$  se denomina constante de tiempo. La constante de tiempo  $\tau$  es el tiempo de la respuesta de un circuito de primer orden para completar 63% de la transición desde el valor inicial al valor final.
- La estabilidad es una propiedad de circuitos que se comportan de manera satisfactoria. Es fácil decir si un circuito de primer orden es estable. Un circuito de primer orden es estable si, y sólo si, su constante de tiempo no es negativa, es decir,  $\tau \geq 0$ .

**Tabla 8.12-1 Resumen de circuitos de primer orden**

CIRCUITO DE PRIMER ORDEN QUE CONTIENE UN CONDENSADOR



Reemplace el circuito que conste de amplificadores operacionales, resistores y fuentes, por un circuito equivalente de Thévenin.



El voltaje del condensador es:

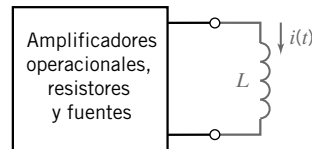
$$v(t) = V_{oc} + (v(0) - V_{oc})e^{-t/\tau}$$

donde la constante de tiempo  $\tau$  es:

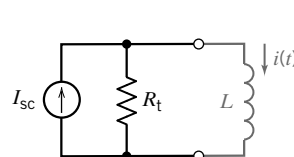
$$\tau = R_t C$$

y la condición inicial,  $v(0)$ , es el voltaje del condensador en el tiempo  $t = 0$ .

CIRCUITO DE PRIMER ORDEN QUE CONTIENE UN INDUCTOR



Reemplace el circuito que conste de amplificadores operacionales, resistores y fuentes, por su circuito equivalente de Norton.



La corriente del inductor es

$$i(t) = I_{sc} + (i(0) - I_{sc})e^{-t/\tau}$$

donde la constante de tiempo  $\tau$  es:

$$\tau = \frac{L}{R_t}$$

y la condición inicial,  $i(0)$ , es la corriente del inductor en el tiempo  $t = 0$ .

PROBLEMAS

**Sección 8.3 Respuesta de un circuito de primer orden a una entrada constante**

**P 8.3-1** El circuito que se muestra en la figura P 8.3-1 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre en el tiempo  $t = 0$ . La entrada al circuito es el voltaje de la fuente de voltaje, 12 V. La salida de este circuito es el voltaje a través del condensador,  $v(t)$ . Determine  $v(t)$  para  $t > 0$ .

*Respuesta:*  $v(t) = 6 - 2e^{-1.33t}$  V para  $t > 0$

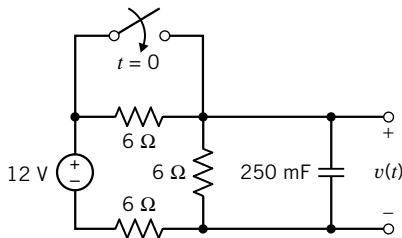


Figura P 8.3-1

**P 8.3-2** El circuito que se muestra en la figura P 8.3-2 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se abra en el tiempo  $t = 0$ . La entrada al circuito es el voltaje de la fuente de voltaje, 12 V. La salida de este circuito es la corriente a través del inductor,  $i(t)$ . Determine  $i(t)$  para  $t > 0$ .

*Respuesta:*  $i(t) = 1 + e^{-0.5t}$  A para  $t > 0$

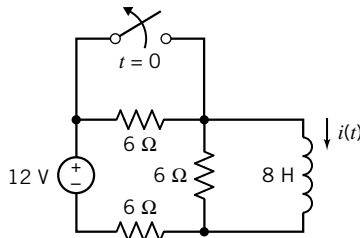


Figura P 8.3-2

**P 8.3-3** El circuito que se muestra en la figura P 8.3-3 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre en el tiempo  $t = 0$ . Determine el voltaje del condensador,  $v(t)$  para  $t > 0$ .

*Respuesta:*  $v(t) = -6 + 18e^{-6.67t}$  V para  $t > 0$

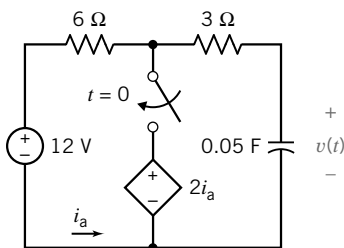


Figura P 8.3-3

**P 8.3-4** El circuito que se muestra en la figura P 8.3-4 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre en el tiempo  $t = 0$ . Determine la corriente del inductor,  $i(t)$  para  $t > 0$ .

*Respuesta:*  $i(t) = -2 + \frac{10}{3}e^{-0.5t}$  A para  $t > 0$

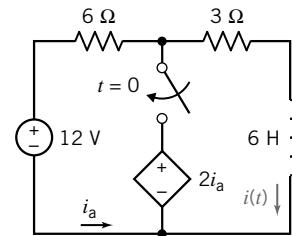


Figura P 8.3-4

**P 8.3-5** El circuito que se muestra en la figura P 8.3-5 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se abra en el tiempo  $t = 0$ . Determine el voltaje,  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

*Respuesta:*  $v_o(t) = 10 - 5e^{-12.5t}$  V para  $t > 0$

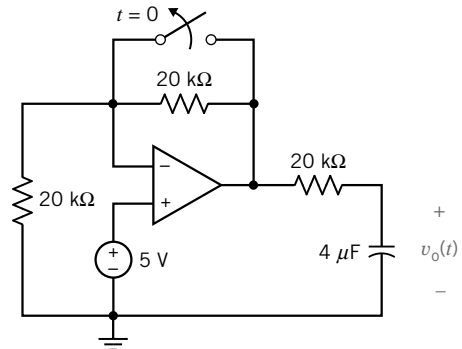


Figura P 8.3-5

**P 8.3-6** El circuito que se muestra en la figura P 8.3-6 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se abra en el tiempo  $t = 0$ . Determine el voltaje,  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

*Respuesta:*  $v_o(t) = 5e^{-4000t}$  V para  $t > 0$

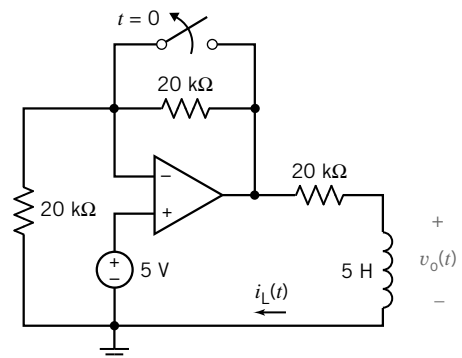
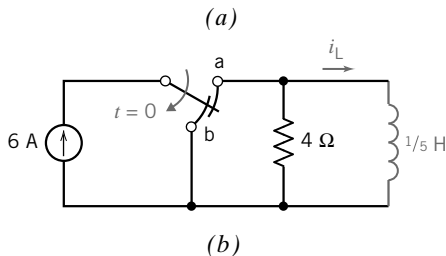


Figura P 8.3-6

**P 8.3-7** La figura P 8.3-7a muestra al astronauta Dale Gardner utilizando la unidad de maniobras tripulada para acoplarse al satélite giratorio *Westar VI*, el 14 de noviembre de 1984. Gardner utilizó una herramienta grande llamada dispositivo de captura de apoyo (ACD por sus siglas en inglés) para estabilizar el satélite y capturarlo para su recuperación, como se muestra en la figura P 8.3-7a. La ACD se puede modelar por el circuito de la figura P 8.3-7b. Encuentre la corriente del inductor  $i_L$  para  $t > 0$ .

Respuesta:  $i_L(t) = 6e^{-20t}$  A



**Figura P 8.3-7** (a) El astronauta Dale Gardner utilizando la unidad de maniobras tripulada para acoplarse al satélite *Westar VI*. Cortesía de la NASA. (b) Modelo del dispositivo de captura de apoyo. Suponga que el interruptor ha estado en posición por mucho tiempo en  $t = 0^-$ .

**P 8.3-8** El circuito que se muestra en la figura P 8.3-8 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se abra en tiempo  $t = 0$ . La entrada al circuito es el voltaje de la fuente de voltaje,  $V_s$ . Esta fuente de voltaje es una fuente de voltaje de cd; es decir,  $V_s$  es una constante. La salida de este circuito es el voltaje a través del condensador,  $v_o(t)$ . El voltaje de salida está dado por

$$v_o(t) = 2 + 8e^{-0.5t} \text{ V para } t > 0$$

Determine los valores del voltaje de entrada,  $V_s$ , la capacitancia,  $C$ , y la resistencia,  $R$ .

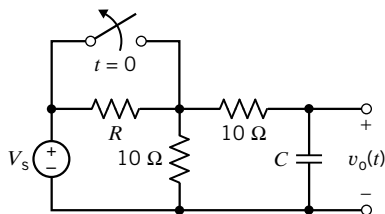


Figura P 8.3-8

**P 8.3-9** El circuito que se muestra en la figura P 8.3-9 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre en tiempo  $t = 0$ . La entrada al circuito es el voltaje de la fuente de voltaje, 24 V. La salida de este circuito, el voltaje a través del resistor de 3-Ω, está dado por

$$v_o(t) = 6 - 3e^{-0.35t} \text{ V cuando } t > 0$$

Determine el valor de la inductancia,  $L$ , y de las resistencias,  $R_1$  y  $R_2$ .

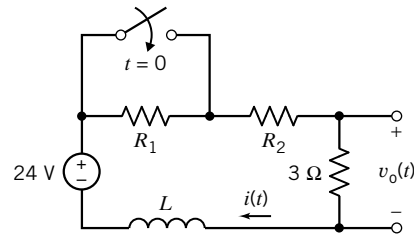


Figura P 8.3-9

**P 8.3.10** Una alarma de seguridad para la puerta de un edificio de oficinas está modelada por el circuito de la figura P 8.3-10. El interruptor representa el entrecierre de la puerta, y  $v$  es el voltaje del indicador de la alarma. Encuentre  $v(t)$  para  $t > 0$  para el circuito de la figura P 8.3-10. El interruptor ha estado cerrado por mucho tiempo en  $t = 0^-$ .

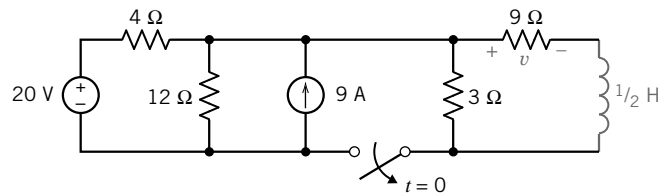


Figura P 8.3-10 Circuito de alarma de seguridad.

**P 8.3-11** El voltaje  $v(t)$  en el circuito que se muestra en la figura P 8.3-11 está dado por

$$v(t) = 8 + 4e^{-2t} \text{ V para } t > 0$$

Determine los valores de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $C$ .

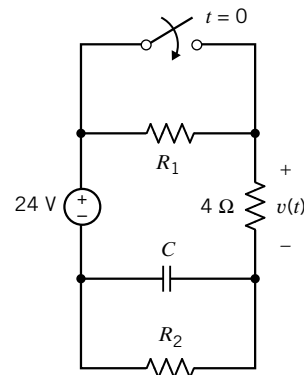


Figura P 8.3-11

**P 8.3-12** El circuito que se muestra en la figura P 8.3-12 se encuentra en estado estable cuando el interruptor se abre en el tiempo  $t = 0$ . Determine  $i(t)$  para  $t \geq 0$ .

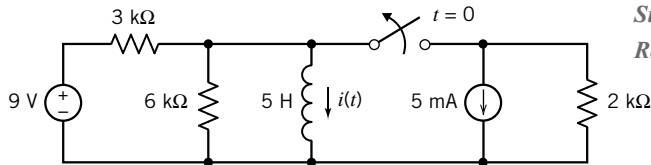


Figura P 8.3-12

**P 8.3-13** El circuito que se muestra en la figura P 8.3-6 se encuentra en estado estable cuando el interruptor se abre en el tiempo  $t = 0$ . Determine  $v(t)$  para  $t \geq 0$ .

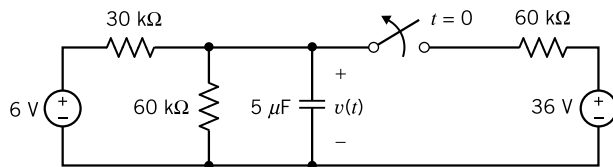


Figura P 8.3-13

**P 8.3-14** El circuito que se muestra en la figura P 8.3-14 se encuentra en estado estable cuando el interruptor se cierra en el tiempo  $t = 0$ . Determine  $i(t)$  para  $t \geq 0$ .

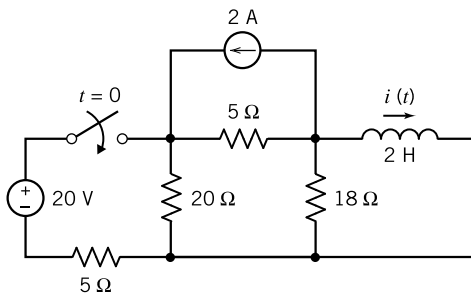


Figura P 8.3-14

**P 8.3-15** El circuito en la figura P 8.3-15 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre. Encuentre la corriente del inductor después de que el interruptor se cierre.

*Sugerencia:*  $i(0) = 0.1 \text{ A}$ ,  $I_{sc} = 0.3 \text{ A}$ ,  $R_t = 40 \Omega$

*Respuesta:*  $i(t) = 0.3 - 0.2e^{-2t} \text{ A}$   $t \geq 0$

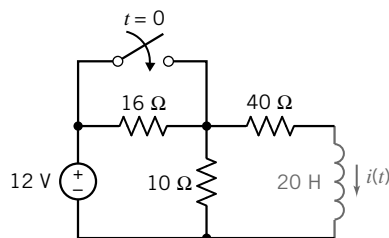


Figura P 8.3-15

**P 8.3-16** El circuito en la figura P 8.3-16 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre. Encuentre el voltaje del condensador para  $t \geq 0$ .

*Sugerencia:*  $v(0) = 12 \text{ V}$ ,  $V_{oc} = 12 \text{ V}$

*Respuesta:*  $v(t) = 12.0 \text{ V}$

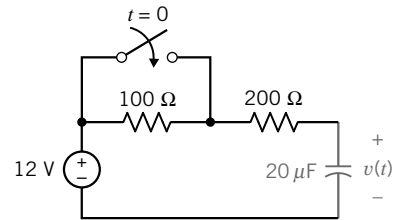


Figura P 8.3-16

**P 8.3-17** El circuito que se muestra en la figura P 8.3-17 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre. La respuesta del circuito es el voltaje  $v(t)$ . Encuentre  $v(t)$  para  $t > 0$ .

*Sugerencia:* Después de que el interruptor se cierra, la corriente del inductor es  $i(t) = 0.2(1 - e^{-1.8t}) \text{ A}$

*Respuesta:*  $v(t) = 8 + e^{-1.8t} \text{ V}$

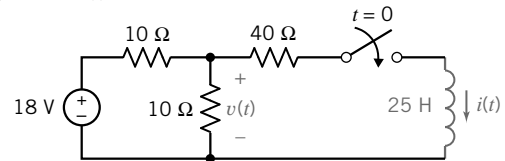


Figura P 8.3-17

**P 8.3-18** El circuito que se muestra en la figura P 8.3-18 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre. La respuesta del circuito es el voltaje  $v(t)$ . Encuentre  $v(t)$  para  $t > 0$ .

*Respuesta:*  $v(t) = 37.5 - 97.5e^{-6400t} \text{ V}$

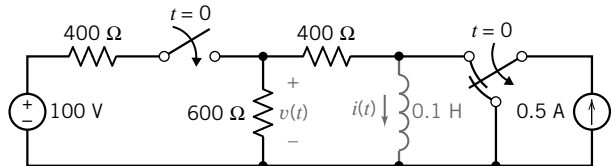


Figura P 8.3-18

**P 8.3-19** El circuito que se muestra en la figura P 8.3-19 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre. Encuentre  $v(t)$  para  $t > 0$ .

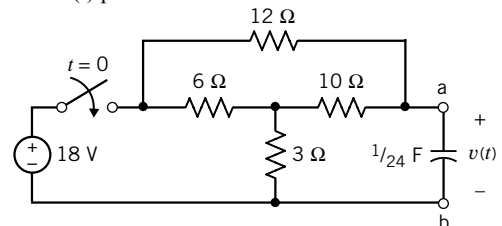


Figura P 8.3-19

**P 8.3-20** El circuito que se muestra en la figura P 8.3-20 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre. Encuentre  $i(t)$  para  $t \geq 0$ .

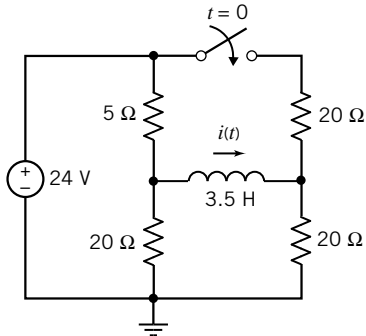


Figura P 8.3-20

**\*P 8.3-21** El circuito que se muestra en la figura P 8.3-21 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre en el tiempo  $t = 0$ . La corriente  $i(t)$  está dada por

$$i(t) = 15 + 53.6e^{-548t} \text{ mA} \quad \text{para } t \geq 0$$

Determine los valores de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $L$ .

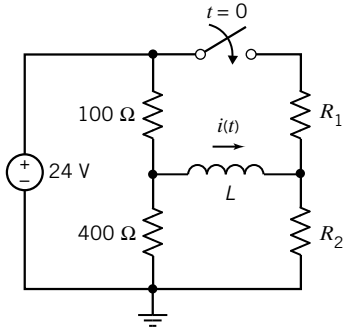


Figura P 8.3-21

**P 8.3-22** El circuito que se muestra en la figura P 8.3-22 se encuentra en estado estable cuando el interruptor se cierra en el tiempo  $t = 0$ . Determine  $i(t)$  para  $t \geq 0$ .

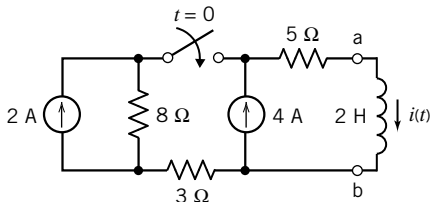


Figura P 8.3-22

**P 8.3-23** El circuito que se muestra en la figura P 8.3-23 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre. El voltaje  $v(t)$  está dado por

$$v(t) = 12 - 6e^{-3t} \text{ V} \quad \text{para } t \geq 0$$

Determine los valores de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $L$ .

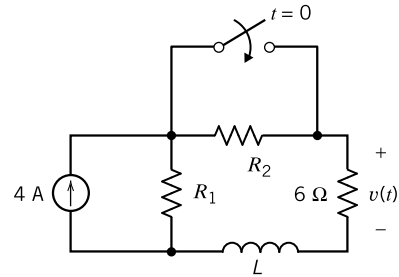
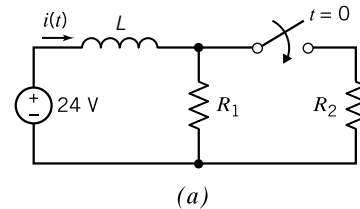


Figura P 8.3-23

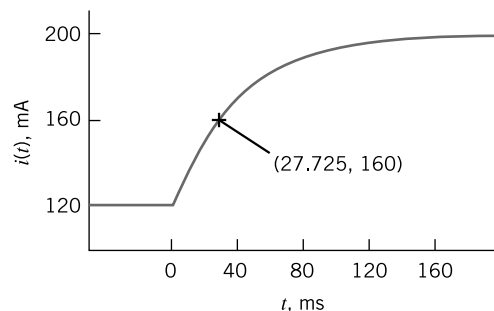
**P 8.3-24** Considere el circuito que se muestra en la figura P 8.3-24a y el trazo correspondiente a la corriente del inductor que se muestran en la figura P 8.3-24b. Determine los valores de  $C$ ,  $R_1$  y  $R_2$ .

*Sugerencia:* Utilice el trazo para determinar los valores de  $D$ ,  $E$ ,  $F$  y  $a$  de tal modo que la corriente del inductor se pueda representar como

$$i(t) = \begin{cases} D & \text{para } t \leq 0 \\ E + Fe^{-at} & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$



(a)



(b)

Figura P 8.3-24

*Respuestas:*  $L = 4.8 \text{ H}$ ,  $R_1 = 200 \Omega$  y  $R_2 = 300 \Omega$

**P 8.3-25** Considere el circuito que se muestra en la figura P 8.3-24a y el trazo correspondiente a la corriente del inductor que se muestran en la figura P 8.3-25b. Determine los valores de  $L$  y  $R_2$ .

*Sugerencia:* Utilice el trazo para determinar los valores de  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , y  $a$  de tal modo que el voltaje se pueda representar como

$$v(t) = \begin{cases} D & \text{para } t < 0 \\ E + Fe^{-at} & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

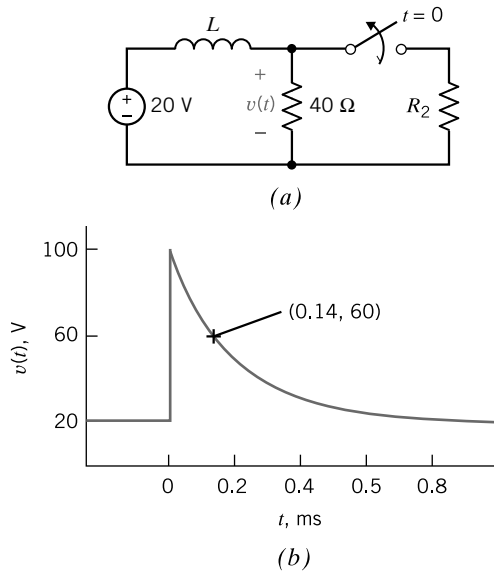


Figura P 8.3-25

Respuestas:  $L = 8 \text{ H}$  y  $R_2 = 10 \Omega$

P 8.3-26 El voltaje que se muestra en la figura P 8.3-26 se puede representar por una ecuación de la forma

$$v(t) = \begin{cases} D & \text{para } t < 0 \\ E + Fe^{-at} & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

Determine los valores de las constantes  $D$ ,  $E$ ,  $F$  y  $a$ .

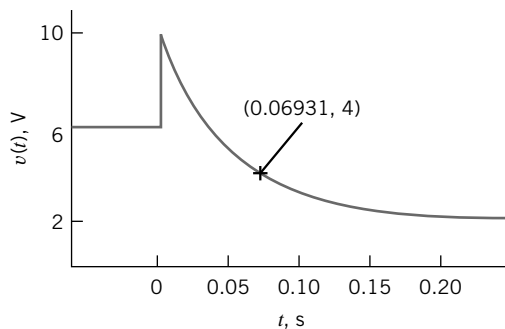


Figura P 8.3-26

P 8.3-27 El circuito que se muestra en la figura P 8.3-27 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre en el tiempo  $t = 0$ . Después de que el interruptor se cierre, la corriente del inductor está dada por

$$i(t) = 0.6 - 0.2e^{-5t} \text{ A} \quad \text{para } t \geq 0$$

Determine los valores de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $L$ .

Respuestas:  $R_1 = 20 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$  y  $L = 4 \text{ H}$

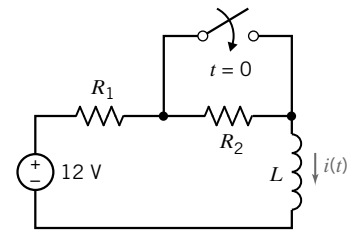


Figura P 8.3-27

P 8.3-28 Después del tiempo  $t = 0$ , un circuito dado se representa por el diagrama de circuito que se muestra en la figura P 8.3-28.

(a) Suponga que la corriente del inductor es

$$i(t) = 21.6 + 28.4e^{-4t} \text{ mA} \quad \text{para } t \geq 0$$

Determine los valores de  $R_1$  y  $R_3$ .

(b) Suponga que en vez de que  $R_1 = 16 \Omega$ ,  $R_3 = 20 \Omega$ , y que la condición inicial es  $i(0) = 10 \text{ mA}$ .

Determine la corriente del inductor para  $t \geq 0$ .

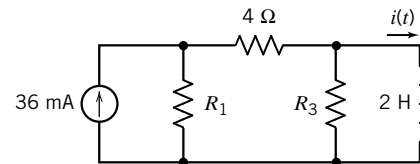


Figura P 8.3-28

P 8.3-29 Considere el circuito que se muestra en la figura P 8.3-29.

(a) Determine la constante de tiempo,  $\tau$ , y el voltaje del condensador en estado estable,  $v(\infty)$ , cuando el interruptor está **abierto**.

(b) Determine la constante de tiempo,  $\tau$ , y el voltaje del condensador en estado estable,  $v(\infty)$ , cuando el interruptor está **cerrado**.

Respuestas: (a)  $\tau = 3 \text{ s}$  y  $v(\infty) = 24 \text{ V}$ , (b)  $\tau = 2.25 \text{ s}$  y  $v(\infty) = 12 \text{ V}$

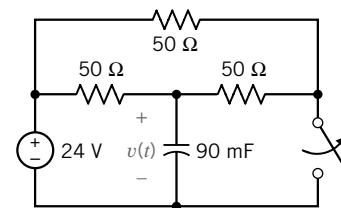


Figura P 8.3-29

### Sección 8.4 Conmutación secuencial

P 8.4-1 El circuito que se muestra en la figura P 8.4-1 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre en el tiempo  $t = 0$ . El interruptor permanece cerrado por 1.5 s y entonces se abre. Determine el voltaje del condensador,  $v(t)$ , para  $t > 0$ .



**Sugerencia:** Determine  $v(t)$  cuando el interruptor se cierra. Evalúe  $v(t)$  en el tiempo  $t = 1.5$  s para obtener  $v(1.5)$ . Utilice  $v(1.5)$  como la condición inicial para determinar  $v(t)$  luego de que el interruptor se abre una vez más.

$$\text{Respuesta: } v(t) = \begin{cases} 5 + 5e^{-0.5t} \text{ V} & \text{para } 0 < t < 1.5 \text{ s} \\ 10 - 2.64e^{-2.5(t-1.5)} \text{ V} & \text{para } 1.5 \text{ s} < t \end{cases}$$

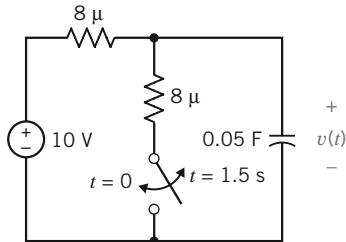


Figura P 8.4-1

**P 8.4-2** El circuito que se muestra en la figura P 8.4-2 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre en el tiempo  $t = 0$ . El interruptor permanece cerrado por 1.5 s y entonces se abre. Determine el voltaje del inductor,  $i(t)$ , para  $t > 0$ .

$$\text{Respuesta: } v(t) = \begin{cases} 2 + e^{-0.5t} \text{ A} & \text{para } 0 < t < 1.5 \text{ s} \\ 3 - 0.53e^{-0.667(t-1.5)} \text{ A} & \text{para } 1.5 \text{ s} < t \end{cases}$$

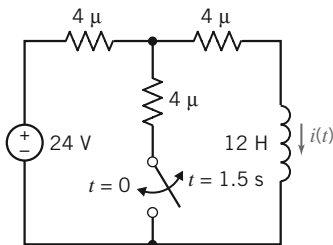


Figura P 8.4-2

**P 8.4-3** Encuentre  $i(t)$  para  $t > 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 8.4-3. El circuito se encuentra en estado estable en  $t = 0^-$ .

$$\text{Respuesta: } i(t) = 2/3e^{-6t} \text{ A} \quad \text{para } 0 \leq t \leq 51 \text{ ms}$$

$$i(t) = 1.47e^{-14(t-0.051)} \text{ A} \quad \text{para } t > 51 \text{ ms}$$

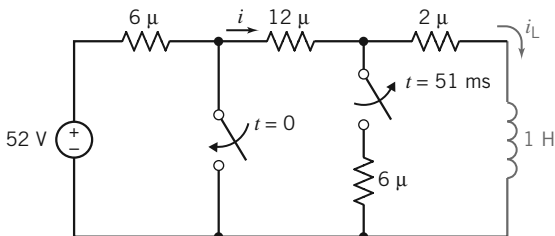


Figura P 8.4-3

**P 8.4-4** Los marcapasos cardiacos que utiliza la gente mantienen regular el ritmo cardiaco cuando las personas han sufrido algún daño en el corazón. El circuito de un marcapasos se puede representar como se muestra en la figura 8.4-4. La

resistencia de los cables,  $R$ , se puede pasar por alto ya que  $R < 1 \text{ m}\Omega$ . La resistencia de la carga del corazón,  $R_L$ , es  $1 \text{ k}\Omega$ . El primer interruptor está activado en  $t = t_0$ , y el segundo está activado en  $t_1 = t_0 + 10 \text{ ms}$ . Este ciclo se repite cada segundo. Encuentre  $v(t)$  para  $t_0 \leq t \leq 1$ . Observe que es más fácil considerar  $t_0 = 0$  para este cálculo. El ciclo se repite al volver el interruptor 1 a la posición a y el interruptor 2 vuelve a su posición de abierto.

**Sugerencia:** Utilice  $q = Cv$  para determinar  $v(0^-)$  para el condensador de  $100 \mu\text{F}$ .

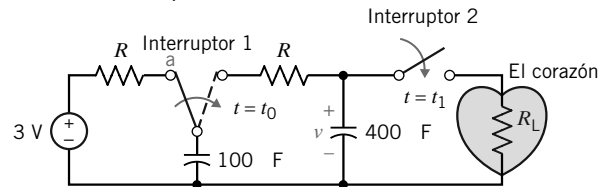


Figura P 8.4-4

**P 8.4-5** Determine y bosqueje  $i(t)$  para el circuito que se muestra en la figura P 8.4-5. Calcule el tiempo requerido para  $i(t)$  para llegar a 99% de su valor final.

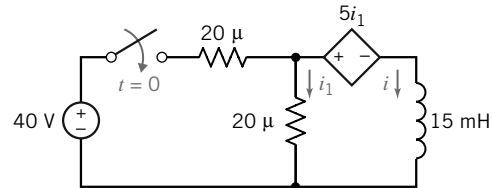


Figura P 8.4-5

**P 8.4-6** El flash electrónico de una cámara utiliza el circuito que se muestra en la figura P 8.4-6. Harold E. Edgerton inventó el flash electrónico en 1930. Un condensador construye un voltaje de estado estable y entonces lo descarga al presionarse el disparador. La descarga produce una descarga de luz muy breve. Determine el tiempo transcurrido  $t_1$  para reducir el voltaje del condensador a la mitad de su voltaje inicial. Encuentre la corriente,  $i(t)$ , en  $t = t_1$ .

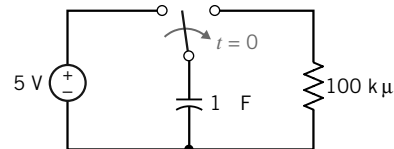


Figura P 8.4-6 Circuito de flash electrónico.

**P 8.4-7** El circuito que se muestra en la figura P 8.4-7 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se abra en  $t = 0$ . El interruptor permanece cerrado por 0.5 s y entonces se abre. Determine  $v(t)$ , para  $t \geq 0$ .

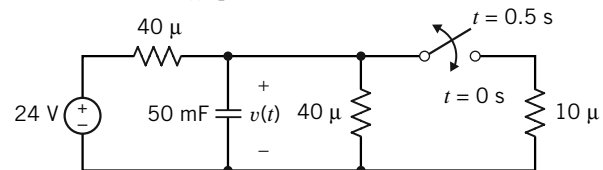


Figura P 8.4-7

**Sección 8.5 Estabilidad de circuitos de primer orden**

**P 8.5-1** El circuito de la figura P 8.5-1 contiene una fuente de voltaje de corriente controlada. ¿Qué restricción se debe imponer a la ganancia,  $R$ , de esta fuente dependiente para garantizar estabilidad?

*Respuesta:*  $R < 400 \Omega$

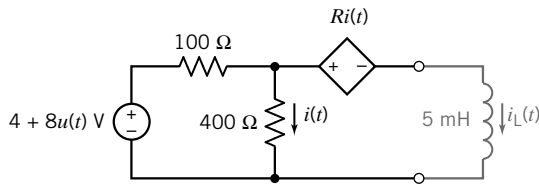


Figura P 8.5-1

**P 8.5-2** El circuito de la figura P 8.5-2 contiene una fuente de voltaje de voltaje controlado. ¿Qué restricción se debe imponer a la ganancia,  $A$ , de esta fuente dependiente para garantizar estabilidad?

*Respuesta:*  $A < 5$

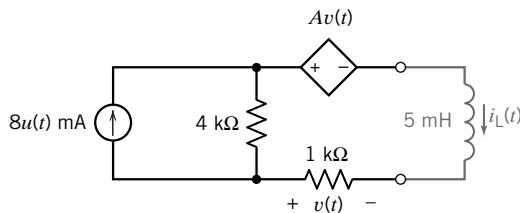


Figura P 8.5-2

**P 8.5-3** El circuito de la figura P 8.5-3 contiene una fuente de corriente de corriente controlada. ¿Qué restricción se debe imponer a la ganancia,  $B$ , de esta fuente dependiente para garantizar estabilidad?

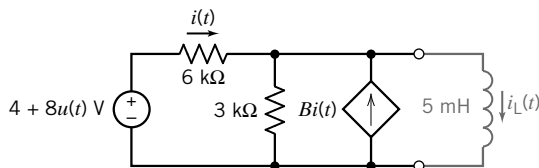


Figura P 8.5-3

**P 8.5-4** El circuito de la figura P 8.5-4 contiene una fuente de voltaje de voltaje controlado. ¿Qué restricción se debe imponer a la ganancia,  $A$ , de esta fuente dependiente para garantizar estabilidad?

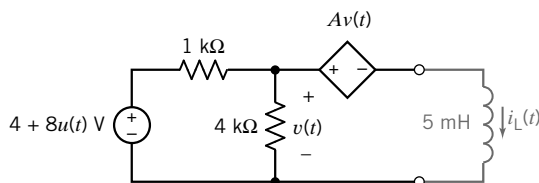


Figura P 8.5-4

**Sección 8.6 Fuente de paso unitario**

**P 8.6-1** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 8.6-1 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s(t)$ . La salida es el voltaje a través del condensador,  $v_o(t)$ . Determine la salida de este circuito cuando la entrada es  $v_s(t) = 8 - 15 u(t)$  V.

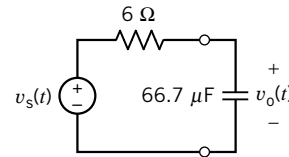


Figura P 8.6-1

**P 8.6-2** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 8.6-2 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s(t)$ . La salida es el voltaje a través del condensador,  $v_o(t)$ . Determine la salida de este circuito cuando la entrada es  $v_s(t) = 3 + 3 u(t)$  V.

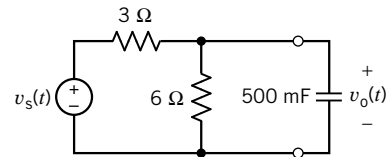


Figura P 8.6-2

**P 8.6-3** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 8.6-3 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s(t)$ . La salida es el voltaje a través del inductor,  $i_o(t)$ . Determine la salida de este circuito cuando la entrada es  $v_s(t) = -7 + 13 u(t)$  V.

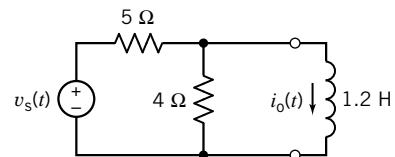


Figura P 8.6-3

**P 8.6-4** Utilice las funciones de paso para representar la señal de la figura P 8.6-4.

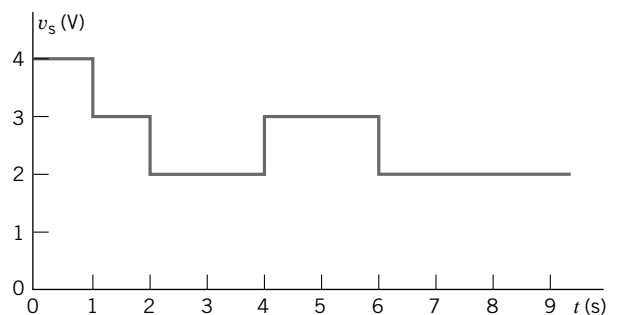


Figura P 8.6-4

**P 8.6-5** El voltaje inicial del condensador del circuito que se muestra en la figura P 8.6-5 es cero. Determine el voltaje  $v(t)$  cuando el voltaje es un pulso, descrito por

$$v_s = \begin{cases} 0 & t < 1 \text{ s} \\ 4 \text{ V} & 1 < t < 2 \text{ s} \\ 0 & t > 2 \text{ s} \end{cases}$$

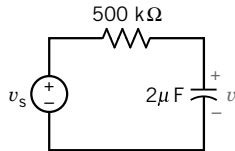


Figura P 8.6-5

**P 8.6-6** Se están utilizando los estudios de un insecto artificial para entender el sistema nervioso de los animales. Un modelo de neurona en el sistema nervioso del insecto artificial se muestra en la figura P 8.6-6. Se requiere una serie de pulsos, llamada sinapsis. El interruptor genera un pulso al abrirse en  $t = 0$  y cerrarse en  $t = 0.5$  s. Suponga que el circuito se encuentra en estado estable y que  $v(0^-) = 10$  V. Determine el voltaje  $v(t)$  para  $0 < t < 2$  s.

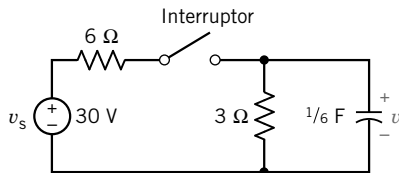


Figura P 8.6-6 Modelo de un circuito de neuronas.

**P 8.6-7** Se puede utilizar un circuito electrónico para reemplazar los resortes y elevadores que suelen utilizarse para detonar un casquillo en una pistola (Jurgen, 1989). El detonador eléctrico eliminaría la sensación de chasquido, podría ser desagradable para una persona. El detonador propuesto utiliza un imán y un solenoide con un interruptor detonador. El circuito de la figura P 8.6-7 representa el circuito del detonador con  $I_s(t) = 40 [u(t - t_0)]$  A, donde  $t_0 = 1$  ms. Determine y trace  $v(t)$  para  $0 < t < 0.3$  s.

**Respuesta:**

$$v = \begin{cases} 480(1 - e^{-1000t}) & 0 < t < 1 \text{ ms} \\ 480(1 - e^{-1})e^{-1000(t-t_0)} & t > 1 \text{ ms}, t_0 = 1 \text{ ms} \end{cases}$$

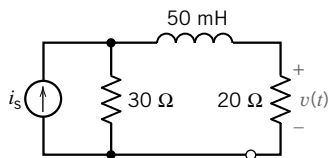


Figura P 8.6-7 Circuito de detonador eléctrico para pistola.

**P 8.6-8** Determine  $v_c(t)$  para  $t > 0$  para el circuito de la figura P 8.6-8.

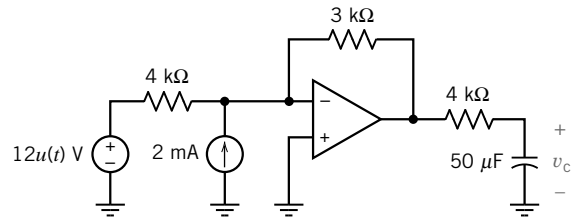


Figura P 8.6-8

**P 8.6-9** El voltaje de la fuente de voltaje en el circuito que se muestra en la figura P 8.6-9 es

$$v_s(t) = 7 - 14u(t) \text{ V}$$

Determine  $v(t)$  para  $t > 0$ .

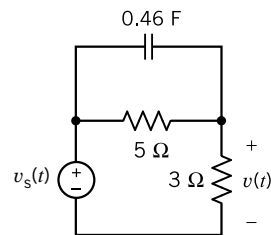


Figura P 8.6-9

**P 8.6-10** Determine el voltaje  $v(t)$  para  $t \geq 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 8.6-10.

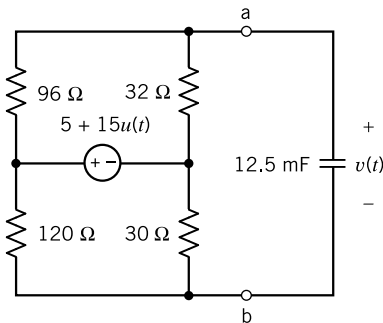


Figura P 8.6-10

**P 8.6-11** El voltaje de la fuente de voltaje en el circuito que se muestra en la figura P 8.6-11 es

$$v_s(t) = 5 + 20u(t)$$

Determine  $i(t)$  para  $t \geq 0$ .

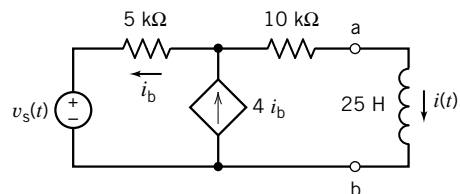


Figura P 8.6-11

**P 8-6-12** El voltaje de la fuente de voltaje en el circuito que se muestra en la figura P 8.6-12 es

$$v_s(t) = 12 - 6u(t) \text{ V}$$

Determine  $v(t)$  para  $t \geq 0$ .

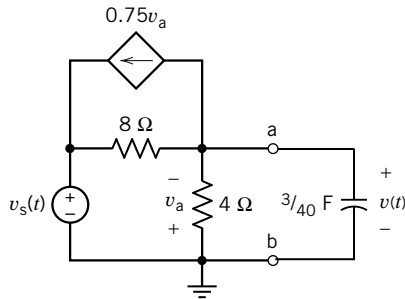


Figura P 8.6-12

**P 8-6-13** Determine  $i(t)$  para  $t \geq 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 8.6-13.

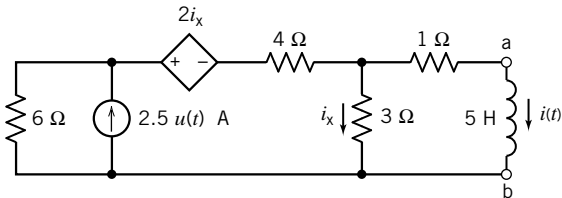


Figura P 8.6-13

**P 8-6-14** Determine  $i(t)$  para  $t \geq 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 8.6-14.

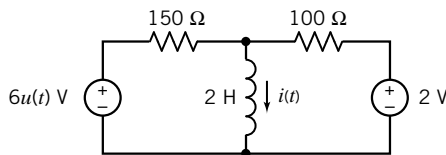


Figura P 8.6-14

**P 8-6-15** Determine  $v(t)$  para  $t \geq 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 8.6-15.

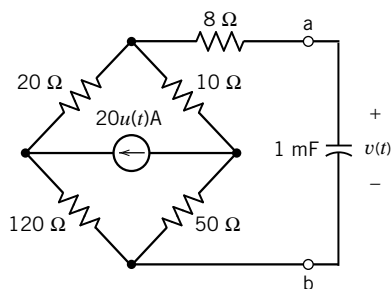


Figura P 8.6-15

**P 8-6-16** Determine  $v(t)$  para  $t \geq 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 8.6-16.

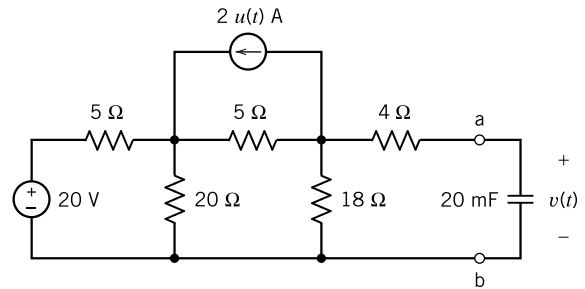


Figura P 8.6-16

**P 8-6-17** Determine  $i(t)$  para  $t \geq 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 8.6-17.

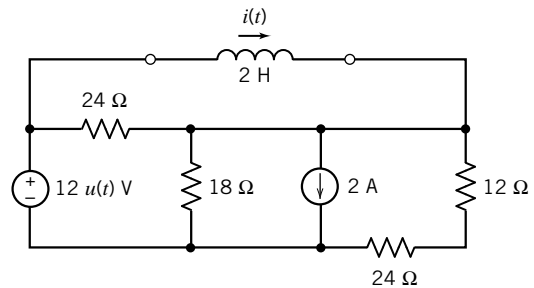


Figura P 8.6-17

**P 8-6-18** El voltaje de la fuente de voltaje en el circuito que se muestra en la figura P 8.6-18 es

$$v_s(t) = 8 + 12u(t) \text{ V}$$

Determine  $v(t)$  para  $t \geq 0$ .

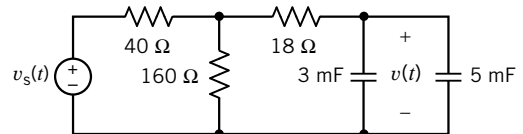


Figura P 8.6-18

**P 8-6-19** El circuito que se muestra en la figura 8.6-19a tiene una fuente de corriente que se muestra en la figura P 8.6-19b. Determine la corriente  $i(t)$  en el inductor.

$$\text{Respuesta: } i(t) = \begin{cases} 5(1 - e^{-10t}) \text{ A} & t \leq 0.2 \text{ s} \\ 4.32e^{-10(t-0.2)} \text{ A} & t \geq 0.2 \text{ s} \end{cases}$$

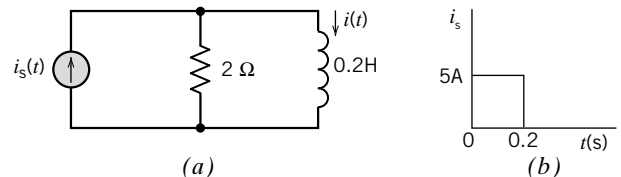


Figura P 8.6-19

**P 8-6-20** El voltaje de la fuente de voltaje en el circuito que se muestra en la figura P 8.6-20 es

$$v_s(t) = 25u(t) - 10 \text{ V}$$

Determine  $i(t)$  para  $t \geq 0$ .

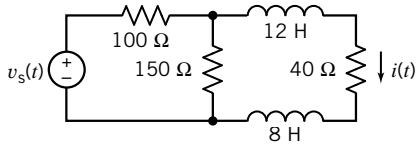


Figura P 8.6-20

**P 8-6-21** El voltaje de la fuente de voltaje en el circuito que se muestra en la figura P 8.6-21 es

$$v_s(t) = 30 - 24u(t) \text{ V}$$

Determine  $i(t)$  para  $t \geq 0$ .

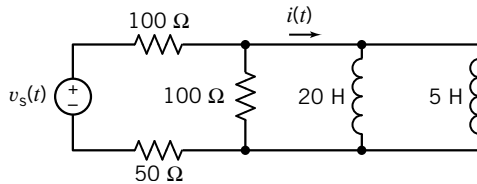


Figura P 8.6-21

**P 8-6-22** El voltaje de la fuente de voltaje en el circuito que se muestra en la figura P 8.6-22 es

$$v_s(t) = 10 + 40u(t) \text{ V}$$

Determine  $v(t)$  para  $t \geq 0$ .

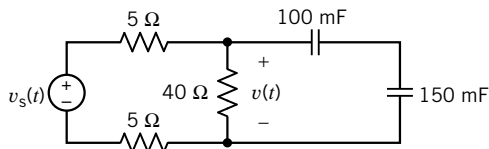


Figura P 8.6-22

**P 8-6-23** Determine  $v(t)$  para  $t > 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 8.6-23.

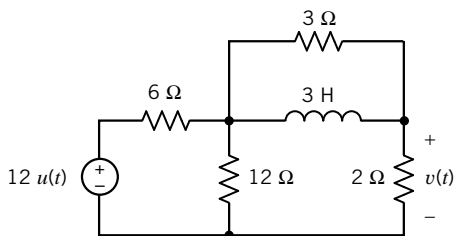


Figura P 8.6-23

**P 8.6-24** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 8.6-24 es la corriente de la fuente de corriente

$$i_s(t) = 2 + 4u(t) \text{ A}$$

La salida es el voltaje  $v(t)$ . Determine  $v(t)$  para  $t > 0$ .

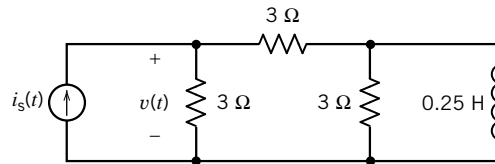


Figura P 8.6-24

**P 8.6-25** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 8.6-25 es el voltaje de la fuente de voltaje

$$v_s(t) = 6 + 6u(t)$$

La salida es el voltaje  $v_o(t)$ . Determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

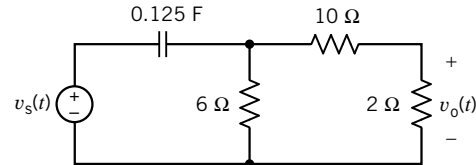


Figura P 8.6-25

**P 8-6-26** Determine  $v(t)$  para  $t > 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 8.6-26.

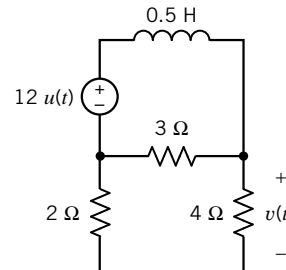


Figura P 8.6-26

**P 8.6-27** Cuando la entrada al circuito que se muestra en la figura P 8.6-27 es el voltaje de la fuente de voltaje

$$v_s(t) = 3 - u(t) \text{ V}$$

la salida es el voltaje

$$v_o(t) = 10 + 5e^{-50t} \text{ para } t \geq 0$$

Determine los valores de  $R_1$  y  $R_2$ .

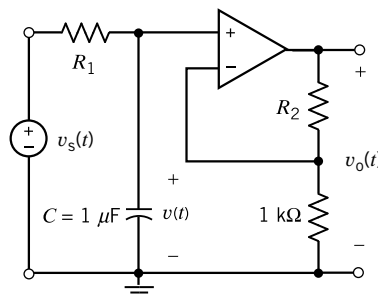


Figura P 8.6-27

**P 8.6-28** La constante de tiempo de un circuito particular es  $\tau = 0.25$  s. En respuesta a una entrada de paso, el voltaje de un condensador cambia de  $-2.5$  V a  $4.2$  V. ¿Cuánto le tomó al voltaje del condensador incrementarse de  $-2.0$  V a  $2.0$  V?

**Sección 8.7 Respuesta de un circuito de primer orden a una fuente no constante**

**P 8.7-1** Encuentre  $v_c(t)$  para  $t > 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 8.7-1 cuando  $v_1 = 8e^{-5t}u(t)$  V. Suponga que el circuito está estable en  $t = 0^-$ .

*Respuesta:*  $v_c(t) = 4e^{-9t} + 18e^{-5t}$  V

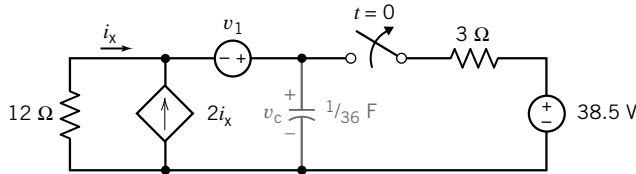


Figura P 8.7-1

**P 8.7-2** Encuentre  $v(t)$  para  $t > 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 8.7-2. Suponga que el circuito está estable en  $t = 0^-$ .

*Respuesta:*  $v(t) = 20e^{-10t/3} - 12e^{-2t}$  V

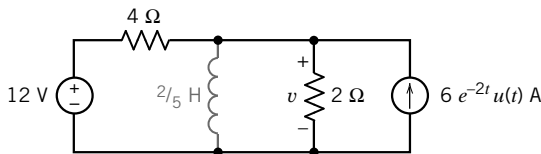


Figura P 8.7-2

**P 8.7-3** Encuentre  $v(t)$  para  $t > 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 8.7-3 cuando  $v_1 = (25 \text{ sen } 4000t)u(t)$  V. Suponga que el circuito está estable en  $t = 0^-$ .

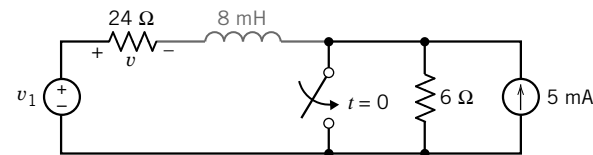


Figura P 8.7-3

**P 8.7-4** Encuentre  $v_c(t)$  para  $t > 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 8.7-4 cuando  $i_s = [2 \text{ cos } 2t] u(t)$  mA.

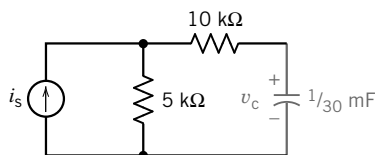


Figura P 8.7-4

**P 8.7-5** Muchas personas han confirmado el uso de un megáfono eléctrico para la amplificación de discursos a una multitud. En la figura P 8.7-5a muestra un modelo de un micrófono y un altavoz, y en la figura P 8.7-5b se muestra el modelo del circuito. Encuentre  $v(t)$  para  $v_s = 10$  (sen  $1000t$ ) $u(t)$ , lo cual representa a una persona silbando o cantando.

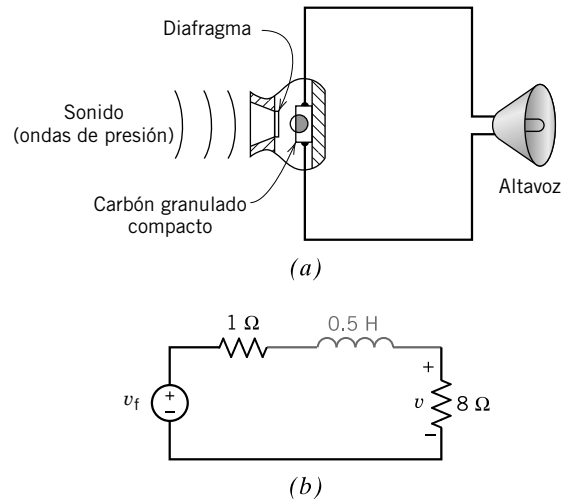


Figura P 8.7-5 Circuito de megáfono.

**P 8.7-6** En la figura P 8.7-6 se muestra un integrador de pérdida. El condensador sin pérdida del circuito integrador ideal ha sido reemplazado con un modelo para el condensador de pérdida, a saber, un condensador sin pérdida en paralelo con un resistor de  $1$  k $\Omega$ . Si  $v_s = 15e^{-2t}u(t)$  V, y  $v_o(0) = 10$  V, encuentre  $v_o(t)$  para  $t > 0$ . Suponga un amplificador operacional ideal.

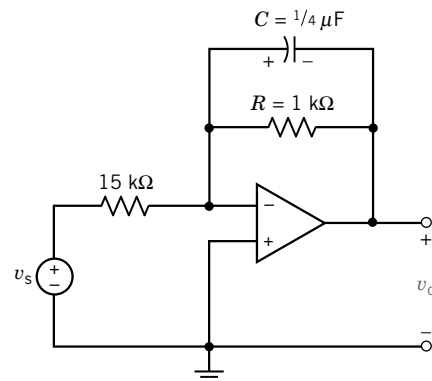


Figura P 8.7-6 Circuito integrador

**P 8.7-7** Muchos conjuntos de televisión utilizan desviación magnética en el tubo de rayos catódicos. Para mover el rayo electrónico a través de la pantalla se requiere contar con una rampa de corriente, como se muestra en la figura P 8.7-7b. Encuentre la forma de onda  $v_1$  que habrá de generar la rampa de corriente,  $i_L$ .

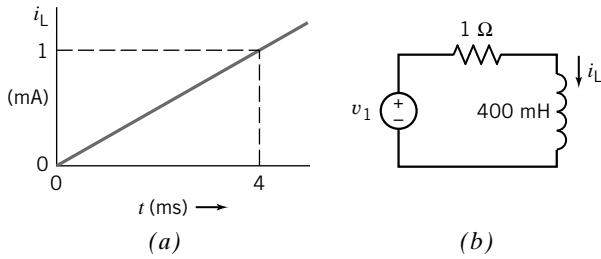


Figura P 8.7-7 Circuito de desviación de una televisión.

**P 8.7-8** Determine  $v(t)$  para el circuito que se muestra en la figura P 8.7-8.

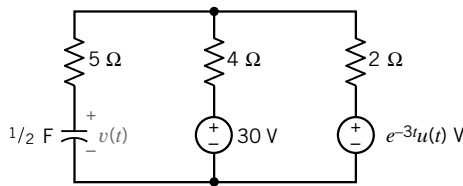


Figura P 8.7-8

**P 8.7-9** Determine  $v(t)$  para el circuito que se muestra en la figura P 8.7-9a cuando  $v_s$  varía como se muestra en la figura 8.7-9b. El voltaje inicial del condensador es  $v_c(0) = 0$ .

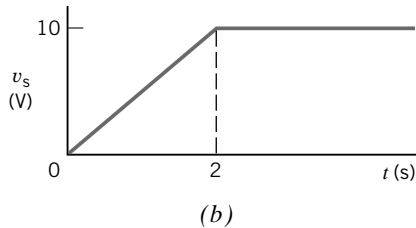
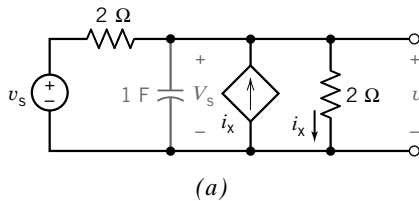


Figura P 8.7-9

**P 8.7-10** El haz de electrones que se utiliza para trazar señales en un osciloscopio, se mueve a través de la cara del tubo de rayos catódicos (CRT, por sus siglas en inglés) por una fuerza ejercida sobre los electrones en el haz. El sistema básico se muestra en la figura P 8.7-10a. La fuerza se crea a partir de un voltaje de tipo rampa, una variante de tiempo aplicada a través de las placas horizontal o vertical. Como ejemplo, considere el circuito sencillo de la figura P 8.7-10b para la desviación horizontal en la cual la capacitancia entre las placas es  $C$ .

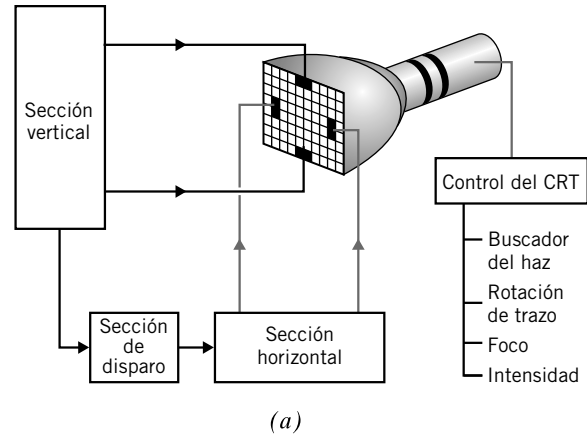


Figura P 8.7-10 Circuito del haz del tubo de rayos catódicos

Derive una expresión para el voltaje a través de la capacitancia. Si  $v(t) = kt$  y  $R_s = 625 \text{ k}\Omega$ ,  $k = 1000$  y  $C = 2000 \text{ pF}$ , calcule  $v_c$  como una función de tiempo. Bosquee  $v(t)$  y  $v_c(t)$  en la misma gráfica para un tiempo menor a 10 ms. ¿El voltaje a través de las placas sigue el voltaje de entrada?

**P 8.7-11** Determine el voltaje  $v(t)$  para  $t \geq 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 8.7-11.

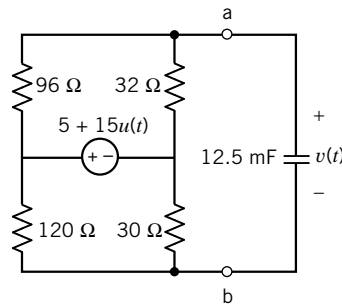


Figura P 8.7-11

**P 8.7-12** El voltaje de la fuente de voltaje en el circuito que se muestra en la figura P 8.7-12 es

$$v_s(t) = 5 + 20u(t)$$

Determine  $i(t)$  para  $t \geq 0$ .

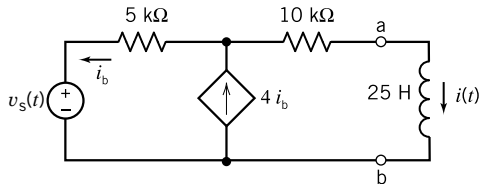


Figura P 8.7-12

**P 8.7-13** Encuentre la corriente  $i$  en el circuito de la figura P 8.7-13 para  $t > 0$  cuando  $i_s = 10e^{-5t}u(t)$  A, e  $i(0^-) = 0$ .

**Respuesta:**  $i = 10.53(e^{-5t} - e^{-100t})$  A

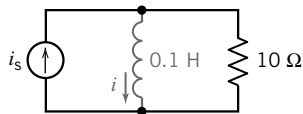


Figura P 8.7-13

**P 8.7-14** Un experimentador está trabajando en su laboratorio con un electroimán, como se muestra en la figura P 8.7-14. Se percata de que siempre que apaga el electroimán, aparece una gran chispa en los contactos del interruptor. Explique la ocurrencia de la chispa. Sugiera una forma de expresar la chispa agregando algún elemento.

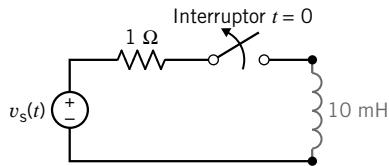


Figura P 8.7-14

**Sección 8.10 ¿Cómo lo podemos comprobar...?**

**P 8.10-1** La figura 8.10-1 muestra la respuesta transitoria de un circuito de primer orden. Esta respuesta transitoria se obtuvo utilizando el programa de computadora PSpice. En esta respuesta transitoria se ha etiquetado un punto. La etiqueta indica un tiempo y el voltaje del condensador en ese tiempo. Al colocar el diagrama del circuito sobre el trazo se sugiere que el trazo corresponde al circuito. Verifique si el trazo de veras representa el voltaje del condensador en este circuito.

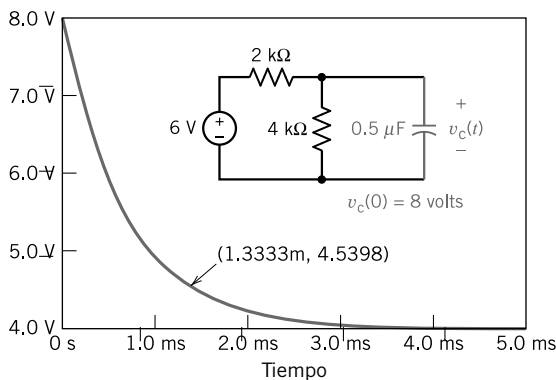


Figura P 8.10-1

**P 8.10-2** La figura 8.10-2 muestra la respuesta transitoria de un circuito de primer orden. Esta respuesta transitoria se obtuvo utilizando el programa de computadora PSpice. En esta respuesta transitoria se ha etiquetado un punto. La etiqueta indica un tiempo y la corriente del inductor en ese tiempo. Al colocar el diagrama del circuito sobre el trazo se sugiere que el trazo corresponde al circuito. Verifique si el trazo de veras representa la corriente del inductor en este circuito.

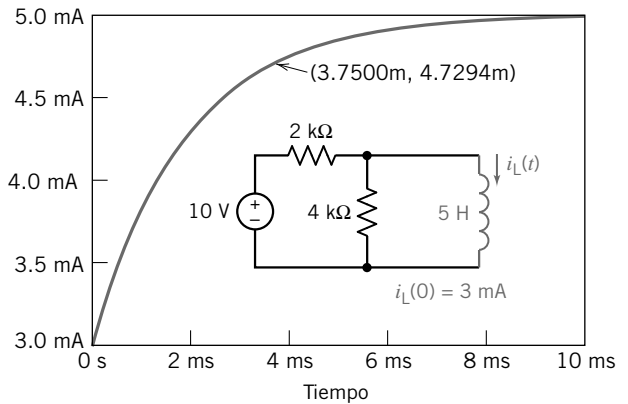


Figura P 8.10-2

**P 8.10-3** La figura 8.10-3 muestra la respuesta transitoria de un circuito de primer orden. Esta respuesta transitoria se obtuvo utilizando el programa de computadora PSpice. En esta respuesta transitoria se ha etiquetado un punto. La etiqueta indica un tiempo y la corriente del inductor en ese tiempo. Al colocar el diagrama del circuito sobre el trazo se sugiere que el trazo corresponde al circuito. Especifique que el valor de la inductancia,  $L$ , requerida para que hacer que la corriente del inductor en este circuito esté cuidadosamente representada por este trazo.

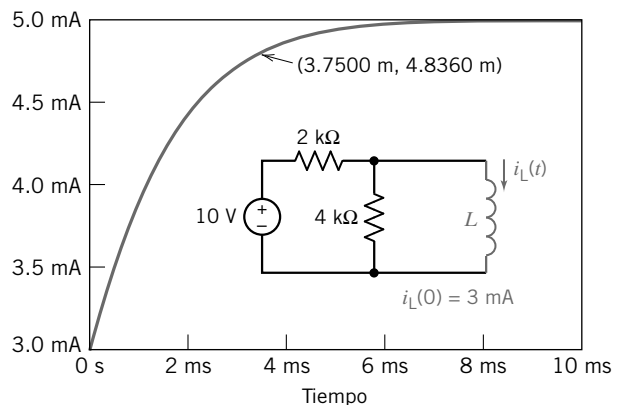


Figura P 8.10-3



**P 8.10-4** La figura 8.10-4 muestra la respuesta transitoria de un circuito de primer orden. Esta respuesta transitoria se obtuvo utilizando el programa de computadora PSpice. En esta respuesta transitoria se ha etiquetado un punto. La etiqueta indica un tiempo y la corriente del inductor en ese tiempo. Suponga que este circuito ha llegado al estado estable antes del tiempo  $t = 0$ . Al colocar el diagrama del circuito sobre el trazo se sugiere que el trazo corresponde al circuito. Especifique valores de  $A$ ,  $B$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $C$  que hagan que el voltaje a través del condensador en este circuito esté cuidadosamente representado por este trazo.

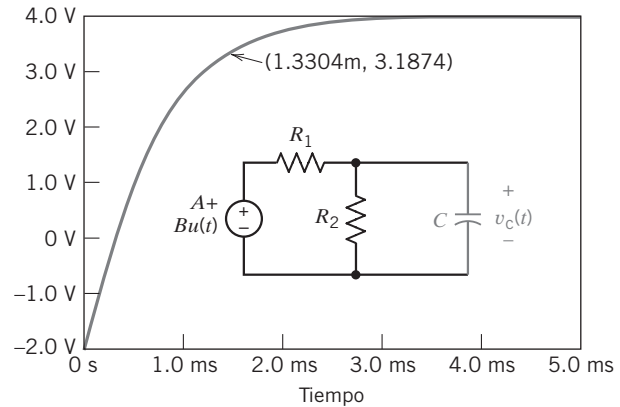


Figura P 8.10-4

## Problemas de PSpice

**PS 8-1** La entrada al circuito que se muestra en la figura PS 8-1 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje a través del condensador,  $v_o(t)$ . La entrada es la señal de pulso especificada gráficamente por el trazo. Utilice PSpice para trazar la salida,  $v_o(t)$ , como una función de  $t$ .

**Sugerencia:** Represente la fuente de voltaje, utilizando la parte llamada VPULSE de PSpice.

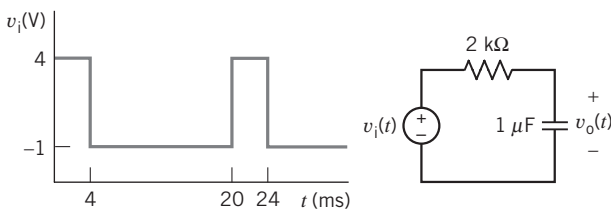


Figura PS 8-1

**PS 8-2** La entrada al circuito que se muestra en la figura PS 8-2 es la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es la corriente en el inductor,  $i_o(t)$ . La entrada es la señal de pulso especificada gráficamente por el trazo. Utilice PSpice para trazar la salida,  $i_o(t)$ , como una función de  $t$ .

**Sugerencia:** Represente la fuente de voltaje, utilizando la parte llamada VPULSE de PSpice.

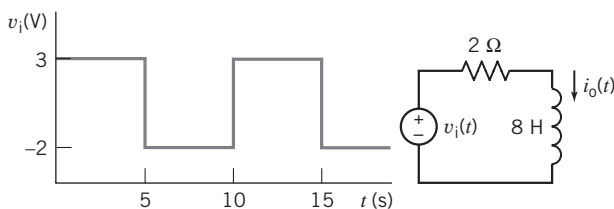


Figura PS 8-2 Un circuito  $RC$  (b) con una entrada de pulso (a).

**PS 8-3** El circuito que se muestra en la figura PS 8-3 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre en el tiempo  $t = 0$ . La entrada al circuito es el voltaje de la fuente de voltaje, 12 V. La salida de este circuito es el voltaje a través del condensador,  $v(t)$ . Utilice PSpice para trazar la salida,  $v(t)$ , como una función de  $t$ . Utilice el trazo para obtener una representación analítica de  $v(t)$  para  $t > 0$ .

**Sugerencia:** Esperamos que  $v(t) = A + Be^{-t/\tau}$  para  $t > 0$ , donde  $A$ ,  $B$  y  $\tau$  son constantes a determinar.

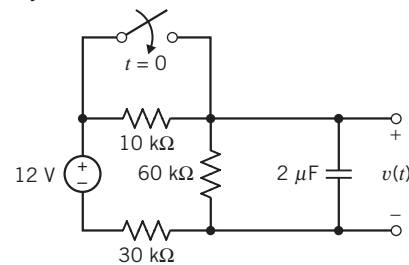


Figura PS 8-3

**PS 8-4** El circuito que se muestra en la figura PS 8-4 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre en el tiempo  $t = 0$ . La entrada al circuito es la corriente de la fuente de corriente, 4 mA. La salida de este circuito es la corriente en el inductor,  $i(t)$ . Utilice PSpice para trazar la salida,  $i(t)$ , como una función de  $t$ . Utilice el trazo para obtener una representación analítica de  $i(t)$  para  $t > 0$ .

**Sugerencia:** Esperamos que  $i(t) = A + Be^{-t/\tau}$  para  $t > 0$ , donde  $A$ ,  $B$  y  $\tau$  son constantes a determinar.

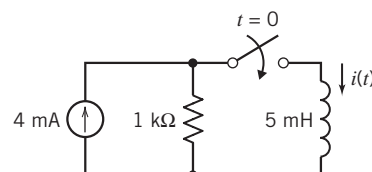


Figura PS 8-4

## Problemas de diseño

**PD 8-1** Diseñe el circuito en la figura PD 8-1 de modo que  $v(t)$  haga la transición de  $v(t) = 6 \text{ V}$  a  $v(t) = 10 \text{ V}$  en 10 ms después de que el interruptor se ha cerrado. Suponga que el circuito se encuentra en estado estable antes de que se cierre el interruptor. Suponga también que la transición se completará después de 5 constantes de tiempo.

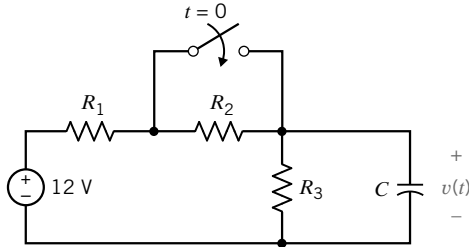


Figura PD 8-1

**PD 8-2** Diseñe el circuito en la figura PD 8-2 de modo que  $i(t)$  haga la transición de  $i(t) = 1 \text{ mA}$  a  $i(t) = 4 \text{ mA}$  después de que el interruptor se ha cerrado. Suponga que el circuito se encuentra en estado estable antes de que se cierre el interruptor. Suponga también que la transición se completará después de 5 constantes de tiempo.

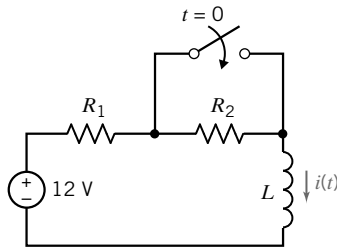


Figura PD 8-2

**PD 8-3** El interruptor en la figura PD 8-3 se cierra en tiempo  $0, 2\Delta t, 4\Delta t, \dots, 2k\Delta t$  y se abre en tiempos  $\Delta t, 3\Delta t, 5\Delta t, \dots, (2k + 1)\Delta t$ . Cuando el interruptor se cierra,  $v(t)$  hace la transición de  $v(t) = 0 \text{ V}$  a  $v(t) = 5 \text{ V}$ . Por el contrario, cuando el interruptor se abre,  $v(t)$  hace la transición de  $v(t) = 5 \text{ V}$  a  $v(t) = 0 \text{ V}$ . Suponga que se requiere que  $\Delta t = 5\tau$  de modo que se complete una transición antes de que se inicie la otra. (a) Determine el valor de  $C$  que se requiere para que  $\Delta t = 1 \mu\text{s}$ . (b) ¿Qué tan grande debe ser  $\Delta t$  cuando  $C = 2 \mu\text{F}$ ?

**Respuesta:** (a)  $C = 4 \text{ pF}$ ; (b)  $\Delta t = 0.5 \text{ s}$ .

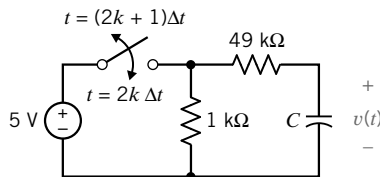


Figura PD 8-3

**PD 8-4** El interruptor en la figura PD 8-3 se cierra en tiempo  $0, 2\Delta t, 4\Delta t, \dots, 2k\Delta t$  y se abre en tiempos  $\Delta t, 3\Delta t, 5\Delta t, \dots, (2k + 1)\Delta t$ . Cuando el interruptor se cierra,  $v(t)$  hace la transición de  $v(t) = 0 \text{ V}$  a  $v(t) = 5 \text{ V}$ . Por el contrario, cuando el interruptor se abre,  $v(t)$  hace la transición de  $v(t) = 5 \text{ V}$  a  $v(t) = 0 \text{ V}$ . Suponga que se requiere que una transición esté 95% completa antes de que se inicie la siguiente. (a) Determine el valor de  $C$  que se requiere para que  $\Delta t = 1 \mu\text{s}$ . (b) ¿Qué tan grande debe ser  $\Delta t$  cuando  $C = 2 \mu\text{F}$ ?

**Sugerencia:** Muestre que se requiere que  $\Delta t = -\tau \ln(1 - k)$  para que la transición sea 100 k por ciento completa.

**Respuesta:** (a)  $C = 6.67 \text{ pF}$ ; (b)  $\Delta t = 0.3 \text{ s}$ .

**PD 8-5** En la figura PD 8-5 se muestra un circuito de disparador de laser. Para disparar el laser requerimos  $60 \text{ mA} < |i| < 180 \text{ mA}$  para  $0 < t < 200 \mu\text{s}$ . Determine un valor apropiado para  $R_1$  y  $R_2$ .

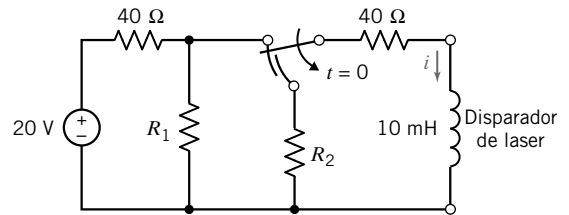


Figura PD 8-5 Circuito de disparador de laser.

**PD 8-6** Los fusibles se utilizan para abrir un circuito cuando fluye una carga excesiva de corriente (Wright, 1990). Un fusible se diseña para abrirse cuando la potencia absorbida por  $R$  excede  $10 \text{ W}$  por  $0.5 \text{ s}$ . Considere el circuito que se muestra en la figura PD 8-6. La entrada está dada por  $v_s = A[u(t) - u(t - 0.75)] \text{ V}$ . Suponga que  $i_L(0^-) = 0$ . Determine el valor más grande de  $A$  que no hará que el fusible se abra.

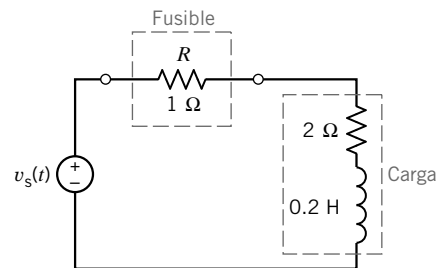


Figura PD 8-6 Circuito de fusible.

# Respuesta total de circuitos con dos elementos de almacenamiento de energía



## EN ESTE CAPÍTULO

- |     |   |      |   |
|-----|---|------|---|
| 9.1 | Introducción  | 9.8  | Respuesta total de un circuito <i>RLC</i>   |
| 9.2 | Ecuación diferencial para circuitos con dos elementos de almacenamiento de energía        | 9.9  | Método de las variables de estado para el análisis de circuitos                         |
| 9.3 | Solución de la ecuación diferencial de segundo orden: la respuesta natural                | 9.10 | Raíces en el plano compuesto  |
| 9.4 | Respuesta natural del circuito <i>RLC</i> en paralelo no forzado                          | 9.11 | ¿Cómo lo podemos comprobar...?  |
| 9.5 | Respuesta natural del circuito <i>RLC</i> en paralelo no forzado críticamente amortiguado | 9.12 | <b>EJEMPLO DE DISEÑO</b> — Dispositivo de encendido de la bolsa de aire de un automóvil |
| 9.6 | Respuesta natural de un circuito <i>RLC</i> en paralelo no forzado subamortiguado         | 9.13 | Resumen   |
| 9.7 | Respuesta forzada de un circuito <i>RLC</i>   |      | Problemas   |
|     |   |      | Problemas de PSpice   |
|     |   |      | Problemas de diseño   |

## 9.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo consideramos circuitos de segundo orden. Un circuito de segundo orden es un circuito que está representado por una ecuación diferencial de segundo orden. Como regla práctica, el orden de la ecuación diferencial que representa un circuito es igual al número de condensadores en el circuito, más la cantidad de inductores. Por ejemplo, un circuito de segundo orden contiene un condensador y un inductor, e incluso podría contener dos condensadores pero ningún inductor.

Por ejemplo, un circuito de segundo orden se podría representar con la ecuación

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\alpha \frac{d}{dt}x(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

donde  $x(t)$  es la salida del circuito, y  $f(t)$  es la entrada del circuito. La salida del circuito, también llamada la respuesta del circuito, puede ser la corriente o el voltaje de cualquier dispositivo en el circuito. Los voltajes de fuentes de voltaje independientes y/o las corrientes de fuentes de corriente independientes proporcionan la entrada al circuito. Los coeficientes de esta ecuación diferencial tiene nombres: a  $\alpha$  se le llama el coeficiente amortiguado, y a  $\omega_0$  se le denomina la frecuencia resonante.

Para encontrar la respuesta del circuito de segundo orden,

- Representamos el circuito con una ecuación diferencial de segundo orden.
- Encontramos la solución general de la ecuación diferencial homogénea. Esta solución es la respuesta natural,  $x_n(t)$ . La respuesta natural contendrá dos constantes incógnitas que se evaluarán posteriormente.
- Encontramos una solución particular de la ecuación diferencial. Esta solución es la respuesta forzada,  $x_f(t)$ .
- Representamos la respuesta del circuito de segundo orden como  $x(t) = x_n(t) + x_f(t)$ .
- Aprovechamos las condiciones iniciales, por ejemplo, los valores iniciales de las corrientes en los inductores y los voltajes a través de los condensadores, para evaluar las constantes incógnitas.

## 9.2 ECUACIÓN DIFERENCIAL PARA CIRCUITOS CON DOS ELEMENTOS DE ALMACENAMIENTO DE ENERGÍA

En el capítulo 8 consideramos circuitos que contenían solamente un elemento de almacenamiento de energía, los cuales se podrían describir por una ecuación diferencial de primer orden. En esta sección consideramos la descripción de circuitos con dos elementos irreducibles de almacenamiento de energía a los que describe una ecuación diferencial de segundo orden. Más tarde consideraremos circuitos con tres o más elementos irreducibles de almacenamiento de energía, descritos por una ecuación diferencial de tercer orden (o más alto). Empleamos el término *irreducible* para indicar que todas las conexiones en serie o en paralelo, o bien otras combinaciones reducibles de elementos de almacenamiento se han reducido a su forma irreducible. Así, por ejemplo, todos los condensadores en paralelo se han reducido a un condensador equivalente,  $C_p$ .

En los párrafos siguientes seguimos dos métodos para obtener la ecuación diferencial de segundo orden para circuitos con dos elementos de almacenamiento de energía. Luego, en la sección siguiente, obtenemos la solución de estas ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Primero, consideremos el circuito que se muestra en la figura 9.2-1, el cual consta de la combinación en serie de un resistor, un inductor y un condensador. Si escribimos la ecuación nodal en el nodo alto, tenemos

$$\frac{v}{R} + i + C \frac{dv}{dt} = i_s \quad (9.2-1)$$

Luego escribimos la ecuación para el inductor como

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (9.2-2)$$

Sustituya la ecuación 9.2-2 en la ecuación 9.2-1, obteniendo

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i + CL \frac{d^2i}{dt^2} = i_s \quad (9.2-3)$$

la cual es la ecuación diferencial de segundo orden que tratamos de obtener. Despeje esta ecuación para  $i(t)$ . Si se requiere  $v(t)$ , utilice la ecuación 9.2-2 para obtenerla.

A este método de obtener la ecuación diferencial de segundo orden se le puede denominar el *método directo* y se resume en la tabla 9.2-1.

En la tabla 9.2-1, los circuitos variables se denominan  $x_1$  y  $x_2$ . En cualquier ejemplo,  $x_1$  y  $x_2$  serán corrientes o voltajes específicos del elemento. Cuando analizamos el circuito de la figura 9.2-1 utilizamos  $x_1 = v$  y  $x_2 = i$ . Por el contrario, para analizar el circuito de la figura 9.2-2 utilizaremos  $x_1$  y  $x_2 = v$ , donde  $i$  es la corriente del inductor y  $v$  es el voltaje del condensador.

Ahora consideremos el circuito serie *RLC* que se muestra en la figura 9.2-2 y usemos el método directo para obtener la ecuación diferencial de segundo orden. Elegimos  $x_1 = i$  y  $x_2 = v$ . Primero,

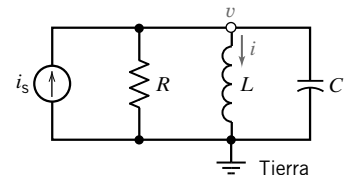


FIGURA 9.2-1 Circuito *RLC* en paralelo.

**Tabla 9.2-1 Método directo para obtener la ecuación diferencial de segundo orden de un circuito**

Paso 1	Identifique la primera y segunda variables, $x_1$ y $x_2$ . Estas variables son los voltajes del condensador y/o las corrientes del inductor.
Paso 2	Escriba una ecuación diferencial de primer orden, obteniendo $\frac{dx_1}{dt} = f(x_1, x_2)$ .
Paso 3	Obtenga una ecuación diferencial de primer orden adicional en términos de la segunda variable de modo que $\frac{dx_2}{dt} = Kx_1$ o bien $x_1 = \frac{1}{K} \frac{dx_2}{dt}$ .
Paso 4	Sustituya la ecuación del paso 3 en la ecuación del paso 2, para así obtener una ecuación diferencial de segundo orden en términos de $x_2$ .

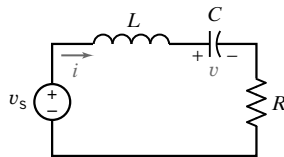


FIGURA 9.2-2 Un circuito serie RLC.

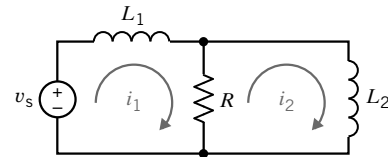


FIGURA 9.2-3 Circuito con dos inductores

buscamos una ecuación para  $dx_1/dt = di/dt$ . Escribiendo la KVL en torno al circuito cerrado, obtenemos

$$L \frac{di}{dt} + v + Ri = v_s \quad (9.2-4)$$

donde  $v$  es el voltaje del condensador. Esta ecuación se puede escribir como

$$\frac{di}{dt} + \frac{v}{L} + \frac{R}{L}i = \frac{v_s}{L} \quad (9.2-5)$$

Traiga de nuevo  $v = x_2$  y obtenga una ecuación en términos de  $\frac{dx_2}{dt}$ . Porque

$$C \frac{dv}{dt} = i \quad (9.2-6)$$

o bien

$$C \frac{dx_2}{dt} = x_1 \quad (9.2-7)$$

sustituya la ecuación 9.2-6 en la ecuación 9.2-5 para obtener la ecuación diferencial de segundo grado deseada:

$$C \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{v}{L} + \frac{RC}{L} \frac{dv}{dt} = \frac{v_s}{L} \quad (9.2-8)$$

La ecuación 9.2-8 se puede reescribir como

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = \frac{v_f}{LC} \quad (9.2-9)$$

Otro método para obtener la ecuación diferencial de segundo orden que describa un circuito se denomina método de operador. Primero, obtenemos ecuaciones diferenciales que describan voltajes de nodos o corrientes de enlaces y que utilicen operadores para obtener la ecuación diferencial para el circuito.

Como un ejemplo más complicado de un circuito con dos elementos de almacenamiento de energía, considere el circuito que se muestra en la figura 9.2-3. Este circuito tiene dos inductores y se le puede describir por las corrientes de enlaces como se muestra en la misma figura. Las ecuaciones de enlaces son

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R(i_1 - i_2) = v_s \quad (9.2-10)$$

$$y \quad R(i_2 - i_1) + L_2 \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (9.2-11)$$

Ahora, utilicemos  $R = 1 \Omega$ ,  $L_1 = 1 \text{ H}$  y  $L_2 = 2 \text{ H}$ . Entonces tenemos

$$\frac{di_1}{dt} + i_1 - i_2 = v_s$$

$$y \quad i_2 - i_1 + 2 \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (9.2-12)$$

En términos de  $i_1$  e  $i_2$ , podemos reordenar estas ecuaciones como

$$\frac{di_1}{dt} + i_1 - i_2 = v_s \quad (9.2-13)$$

$$y \quad -i_1 + i_2 + 2 \frac{di_2}{dt} = 0 \quad (9.2-14)$$

Se mantiene para obtener una ecuación diferencial de segundo orden. Esto se hizo en el segundo paso del método de operador. El operador diferencial,  $s$ , donde  $s = d/dt$ , se utiliza para transformar ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas. Reemplazando  $d/dt$  por  $s$ , las ecuaciones 9.2-13 y 9.2-14 se vuelven

$$si_1 + i_1 - i_2 = v_s$$

$$y \quad -i_1 + i_2 + 2si_2 = 0$$

Estas dos ecuaciones se pueden reescribir como

$$(s + 1)i_1 - i_2 = v_s$$

$$y \quad -i_1 + (2s + 1)i_2 = 0$$

Podemos despejar  $i_2$ , con lo que obtenemos

$$i_2 = \frac{1v_s}{(s + 1)(2s + 1) - 1} = \frac{v_s}{2s^2 + 3s}$$

$$\text{Por consiguiente,} \quad (2s^2 + 3s)i_2 = v_s$$

Ahora, reemplazando  $s_2$  por  $\frac{d^2}{dt^2}$  y  $s$  por  $\frac{d}{dt}$ , obtenemos la ecuación diferencial

$$2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + 3 \frac{di_2}{dt} = v_s \quad (9.2-15)$$

En la tabla 9.2-2 se resume el método de operador para obtener la ecuación diferencial de segundo orden.

**Tabla 9.2-2 Método de operador para obtener la ecuación diferencial de segundo orden de un circuito**

Paso 1	Identifique la variable $x_1$ para la cual se desea la solución.
Paso 2	Escriba una ecuación diferencial en términos de la variable deseable $x_1$ y una segunda variable, $x_2$ .
Paso 3	Obtenga una ecuación adicional en términos de la segunda variable y la primera variable.
Paso 4	Utilice el operador $s = d/dt$ y $1/s = \int dt$ para obtener dos ecuaciones algebraicas en términos de $s$ y las dos variables $x_1$ y $x_2$ .
Paso 5	Aplicando la regla de Cramer, despeje la variable deseada de modo que $x_1 = f(s, \text{fuentes}) = P(s)/Q(s)$ , donde $P(s)$ y $Q(s)$ son polinomiales en $s$ .
Paso 6	Reordene la ecuación del paso 5 de modo que $Q(s)x_1 = P(s)$ .
Paso 7	Convierta los operadores en derivadas para la ecuación del paso 6 para obtener la ecuación diferencial de segundo orden.

**EJEMPLO 9.2-1** Representación de un circuito por una ecuación diferencial

Encuentre la ecuación diferencial para la corriente  $i_2$  para el circuito de la figura 9.2-4.

**Solución**

Escriba las dos ecuaciones de enlace, aplicando la KVL para obtener

$$2i_1 + \frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt} = v_s$$

$$-\frac{di_1}{dt} + 3i_2 + 2\frac{di_2}{dt} = 0$$

Utilizando el operador  $s = d/dt$ , tenemos

$$(2 + s)i_1 - si_2 = v_s$$

y

$$-si_1 + (3 + 2s)i_2 = 0$$

Aplicando la regla de Cramer para despejar  $i_2$ , obtenemos

$$i_2 = \frac{sv_s}{(2 + s)(3 + 2s) - s^2} = \frac{sv_s}{s^2 + 7s + 6} \quad (9.2-16)$$

Reordenando la ecuación 9.2-16, obtenemos

$$(s^2 + 7s + 6)i_2 = sv_s \quad (9.2-17)$$

Por consiguiente, la ecuación diferencial para  $i_2$  es

$$\frac{d^2 i_2}{dt^2} + 7\frac{di_2}{dt} + 6i_2 = \frac{dv_s}{dt} \quad (9.2-18)$$

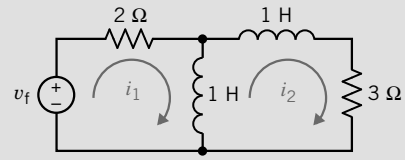


FIGURA 9.2-4 Circuito para el ejemplo 9.2-1.

**EJEMPLO 9.2-2** Representación de un circuito por una ecuación diferencial

Encuentre la ecuación diferencial para el voltaje  $v$  del circuito de la figura 9.2-5.

**Solución**

La ecuación nodal KCL en el nodo superior es

$$\frac{v - v_s}{R_1} + i + C\frac{dv}{dt} = 0 \quad (9.2-19)$$

Como deseamos determinar la ecuación en términos de  $v$ , necesitamos una segunda ecuación en términos de la corriente  $i$ . Escriba la ecuación para la corriente a través de la derivación que contiene el inductor como

$$Ri + L\frac{di}{dt} = v \quad (9.2-20)$$

Utilizando el operador  $s = d/dt$ , tenemos las dos ecuaciones

$$\frac{v}{R_1} + Csv + i = \frac{v_s}{R_1}$$

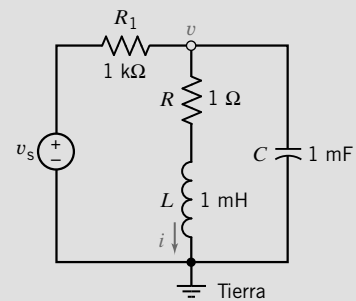


FIGURA 9.2-5 El circuito RLC para el ejemplo 9.2-2.

$$y \quad -v + Ri + Lsi = 0$$

Sustituyendo los valores de parámetros y reordenando, tenemos

$$(10^{-3} + 10^{-3}s)v + i = 10^{-3}v_s$$

$$y \quad -v + (10^{-3}s + 1)i = 0$$

Aplicando la regla de Cramer, despejamos  $v$  para obtener

$$v = \frac{(s + 1000)v_s}{(s + 1)(s + 1000) + 10^6} = \frac{(s + 1000)v_s}{s^2 + 1001s + 1001 \times 10^3}$$

Por lo tanto, tenemos

$$(s^2 + 1001s + 1001 \times 10^3)v = (s + 1000)v_s$$

o la ecuación diferencial que buscamos es

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 1001 \frac{dv}{dt} + 1001 \times 10^3 v = \frac{dv_s}{dt} + 1000v_s$$

**EJERCICIO 9.2-1** Encuentre la ecuación diferencial de segundo orden para el circuito que se muestra en la figura E 9.2-1 en términos de  $i$ , siguiendo el método directo.

*Respuesta:*  $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{di}{dt} + i = \frac{1}{2} \frac{di_s}{dt}$

**EJERCICIO 9.2-2** Encuentre la ecuación diferencial de segundo orden para el circuito que se muestra en la figura E 9.2-2 en términos de  $v$ , siguiendo el método de operador.

*Respuesta:*  $\frac{d^2v}{dt^2} + 2 \frac{dv}{dt} + 2v = 2 \frac{di_s}{dt}$

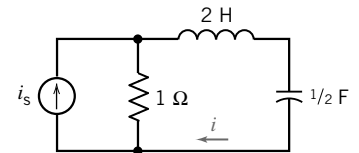


FIGURA E 9.2-1

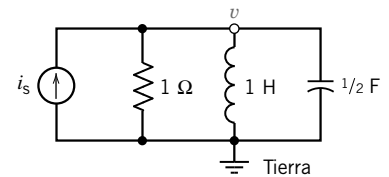


FIGURA E 9.2-2

### 9.3 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN: LA RESPUESTA NATURAL

En la sección anterior encontramos que un circuito con dos elementos de almacenamiento de energía irreducible se puede representar por una ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0x = f(t)$$

donde las constantes  $a_2$ ,  $a_1$  y  $a_0$  son conocidas y la función forzamiento  $f(t)$  está especificada.

La respuesta total  $x(t)$  está dada por

$$x = x_n + x_f \quad (9.3-1)$$

donde  $x_n$  es la respuesta natural y  $x_f$  es la respuesta forzada. La respuesta natural satisface la ecuación diferencial no forzada cuando  $f(t) = 0$ . La respuesta forzada  $x_f$  satisface la ecuación diferencial con la función forzamiento presente.



La respuesta natural de un circuito,  $x_n$ , satisfará la ecuación

$$a_2 \frac{d^2 x_n}{dt^2} + a_1 \frac{dx_n}{dt} + a_0 x_n = 0 \quad (9.3-2)$$

Como  $x_n$  y sus derivadas deben satisfacer la ecuación, postulamos la solución exponencial

$$x_n = Ae^{st} \quad (9.3-3)$$

donde se deben determinar  $A$  y  $s$ . La exponencial es la única función que es proporcional a todas sus derivadas e integrales y, por consiguiente, es la elección natural para la solución de una ecuación diferencial con coeficientes constantes. Si sustituimos la ecuación 9.3-3 en la 9.3-2 y diferenciamos donde se requiere, tenemos

$$a_2 A s^2 e^{st} + a_1 A s e^{st} + a_0 A e^{st} = 0 \quad (9.3-4)$$

Dado que  $x_n = Ae^{st}$ , podemos reescribir la ecuación 9.3-4 como

$$a_2 s^2 x_n + a_1 s x_n + a_0 x_n = 0$$

o bien,

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0) x_n = 0$$

Como no aceptamos la solución trivial,  $x_n = 0$ , se requiere que

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0) = 0 \quad (9.3-5)$$

A esta ecuación, en términos de  $s$ , se le llama una *ecuación característica*. Se obtuvo fácilmente reemplazando la derivada por  $s$  y la segunda derivada por  $s^2$ . Desde luego, hemos vuelto al operador ya conocido.

$$s^n = \frac{d^n}{dt^n}$$

La **ecuación característica** se deriva de la ecuación diferencial reguladora para un circuito al establecer el valor de todas las fuentes independientes en cero y suponer una solución exponencial.



FIGURA 9.3-1 Oliver Heaviside (1850-1925). Fotografía cortesía de la Institution of the Electrical Engineers.

Oliver Heaviside (1850-1925), que se muestra en la figura 9.3-1, propuso la teoría de los operadores para la solución de las ecuaciones diferenciales.

La solución de la ecuación cuadrática (9.3-5) tiene dos raíces,  $s_1$  y  $s_2$ , donde

$$s_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2} \quad (9.3-6)$$

$$s_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2} \quad (9.3-7)$$

Donde hay dos raíces distintas, la respuesta natural tiene la forma

$$x_n = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (9.3-8)$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son constantes incógnitas que evaluaremos más adelante. Nos demoraremos en la consideración del caso especial en que  $s_1 = s_2$ .

Las **raíces** de la ecuación característica contienen toda la información necesaria para determinar el carácter de la respuesta natural.

**EJEMPLO 9.3-1** Respuesta natural de un circuito de segundo orden

Encuentre la respuesta natural de la corriente  $i_2$  del circuito que se muestra en la figura 9.3-2. Utilice operadores para formular la ecuación diferencial y obtener la respuesta en términos de dos constantes arbitrarias.

**Solución**

Si escribimos las dos ecuaciones de enlaces, tenemos

$$12i_1 + 2\frac{di_1}{dt} - 4i_2 = v_s$$

y

$$-4i_1 + 4i_2 + 1\frac{di_2}{dt} = 0$$

Con el operador  $s = d/dt$  obtenemos

$$(12 + 2s)i_1 - 4i_2 = v_s \quad (9.3-9)$$

$$-4i_1 + (4 + s)i_2 = 0 \quad (9.3-10)$$

Despejando  $i_2$  tenemos

$$i_2 = \frac{4v_s}{(12 + 2s)(4 + s) - 16} = \frac{4v_s}{2s^2 + 20s + 32} = \frac{2v_s}{s^2 + 10s + 16}$$

Por consiguiente,

$$(s^2 + 10s + 16)i_2 = 2v_s$$

Observe que  $(s^2 + 10s + 16) = 0$  es la ecuación característica. Por lo tanto, las raíces de la ecuación característica son  $s_1 = -2$  y  $s_2 = -8$ . De este modo, la respuesta natural es

$$x_n = A_1e^{-2t} + A_2e^{-8t}$$

donde  $x = i_2$ . Las raíces  $s_1$  y  $s_2$  son las *raíces características* y se les suele llamar *frecuencias naturales*. Las recíprocas de la magnitud de las raíces características reales son las *constantes de tiempo*. Las constantes de tiempo de este circuito son  $1/2$  s y  $1/8$  s.

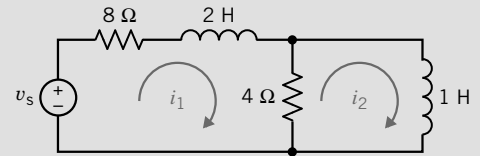


FIGURA 9.3-2 Circuito del ejemplo 9.3-1.

**EJERCICIO 9.3-1** Encuentre la ecuación característica y las frecuencias naturales para el circuito que se muestra en la figura E 9.3-1.

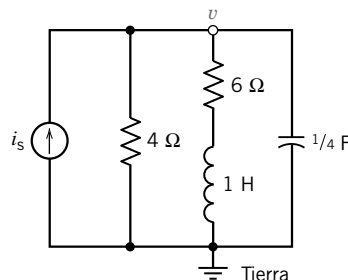


FIGURA E 9.3-1

**Respuesta:**  $s^2 + 7s + 10 = 0$

$$s_1 = -2$$

$$s_2 = -5$$

## 9.4 RESPUESTA NATURAL DEL CIRCUITO *RLC* EN PARALELO NO FORZADO

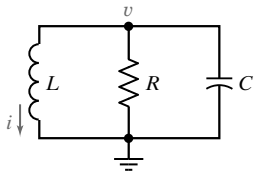


FIGURA 9.4-1 Circuito *RLC* en paralelo.

En esta sección consideramos la respuesta natural (no forzada) del circuito *RLC* en paralelo que se muestra en la figura 9.4-1. Elegimos examinar el circuito *LRC* en paralelo para ilustrar las tres formas de la respuesta natural. Se podría presentar un debate análogo del circuito serie *RLC*, pero se omite porque el propósito no es obtener la solución a circuitos específicos, sino ilustrar el método general.

Un circuito que contiene un condensador y un inductor se representa por una ecuación diferencial de segundo orden,

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\alpha \frac{d}{dt}x(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

donde  $x(t)$  es la salida del circuito, y  $f(t)$  es la entrada al circuito. La salida del circuito, también llamada la respuesta del circuito, puede ser la corriente o el voltaje de cualquier dispositivo en el circuito. Se suele elegir que la salida sea la corriente de un inductor o el voltaje de un condensador. Los voltajes de las fuentes de voltaje independientes y/o las corrientes de las fuentes de corriente independientes proporcionan la entrada al circuito. Los coeficientes de esta ecuación diferencial tienen nombres: se le llama  $\alpha$  al coeficiente de amortiguamiento, y  $\omega_0$  a la frecuencia de resonancia.

El circuito que se muestra en la figura 9.4-1 no contiene ninguna fuente independiente, por lo que la entrada,  $f(t)$ , es cero. A la ecuación diferencial con  $f(t) = 0$  se le llama ecuación diferencial homogénea. Tomaremos la salida a modo que sea el voltaje,  $v(t)$ , en el nodo superior del circuito. En consecuencia, representaremos el circuito en la figura 9.4-1 por una ecuación diferencial homogénea de la forma

$$\frac{d^2}{dt^2}v(t) + 2\alpha \frac{d}{dt}v(t) + \omega_0^2 v(t) = 0$$

Escriba la KCL en la parte superior del nodo para obtener

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v d\tau + i(0) + C \frac{dv}{dt} = 0 \quad (9.4-1)$$

Tomando la derivada de la ecuación 9.4-1, tenemos

$$C \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v = 0 \quad (9.4-2)$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación 9.4-2 entre  $C$ , tenemos

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v = 0 \quad (9.4-3)$$

Utilizando el operador  $s$  obtenemos la ecuación característica

$$s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (9.4-4)$$

Si comparamos las ecuaciones 9.4-4 y 9.4-1 veremos que

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad \text{y} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (9.4-5)$$

Las dos raíces de la ecuación característica son

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad \text{y} \quad s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (9.4-6)$$

Cuando  $s_1$  no es igual a  $s_2$ , la solución para la ecuación 9.4-3 diferencial de segundo orden para  $t > 0$  es

$$v_n = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (9.4-7)$$

Las raíces de la ecuación característica se pueden reescribir como

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad \text{y} \quad s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (9.4-8)$$

La frecuencia resonante amortiguada,  $\omega_d$ , se define

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Cuando  $\omega_0 > \alpha$ , las raíces de la ecuación característica son compuestas y se pueden expresar como

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d \quad \text{y} \quad s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

Las raíces de la ecuación característica asumen tres posibles condiciones:

1. Dos raíces reales y distintas cuando  $\alpha^2 > \omega_0^2$
2. Dos raíces iguales reales cuando  $\alpha^2 = \omega_0^2$
3. Dos raíces compuestas cuando  $\alpha^2 < \omega_0^2$

Cuando estas dos raíces son reales y distintas, se dice que el circuito está *sobreamortiguado*. Cuando las raíces son reales e iguales, se dice que el circuito está *críticamente amortiguado*. Cuando las dos raíces son compuestas, se dice que el circuito está *subamortiguado*.

Determinemos la respuesta natural para el circuito  $RLC$  sobreamortiguado de la figura 9.4-1 cuando las condiciones ideales son  $v(0)$  e  $i(0)$  para el condensador y el inductor, respectivamente. Observe que como el circuito de la figura 9.4-1 no tiene entrada,  $v_n(0)$  y  $v(0)$  son nombres para el mismo voltaje. Entonces, en  $t = 0$  para la ecuación 9.4-7 tenemos

$$v_n(0) = A_1 + A_2 \quad (9.4-9)$$

Dado que  $A_1$  y  $A_2$  son incógnitas, necesitamos una ecuación más en  $t = 0$ . Reescribiendo la ecuación 9.4-1 en  $t = 0$ , tenemos<sup>1</sup>

$$\frac{v(0)}{R} + i(0) + C \frac{dv(0)}{dt} = 0$$

Como  $i(0)$  y  $v(0)$  son conocidas, tenemos

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C} \quad (9.4-10)$$

Entonces, ahora ya conocemos el valor inicial de la derivada de  $v$  en términos de las condiciones iniciales. Si tomamos la derivada de la ecuación 9.4-7 y establecemos  $t = 0$ , obtenemos

$$\frac{dv_n(0)}{dt} = s_1 A_1 + s_2 A_2 \quad (9.4-11)$$

Al utilizar las ecuaciones 9.4-10 y 9.4-11 obtenemos una segunda ecuación en términos de las dos constantes como

$$s_1 A_1 + s_2 A_2 = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C} \quad (9.4-12)$$

Utilizamos las ecuaciones 9.4-9 y 9.4-12 y obtenemos  $A_1$  y  $A_2$ .

<sup>1</sup>Nota:  $\frac{dv(0)}{dt}$  significa  $\left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=0}$

### EJEMPLO 9.4-1 Respuesta natural de un circuito de segundo orden sobreamortiguado

Encuentre la respuesta natural de  $v(t)$  para  $t > 0$  para el circuito  $RLC$  en paralelo de la figura 9.4-1 cuando  $R = 2/3 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = 1/2 \text{ F}$ ,  $v(0) = 10 \text{ V}$  e  $i(0) = 2 \text{ A}$ .

#### Solución

Utilizando la ecuación 9.4-4, la ecuación característica es

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0$$

o bien

$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

Por consiguiente, las raíces de la ecuación característica son

$$s_1 = -1 \quad \text{y} \quad s_2 = -2$$

Entonces la respuesta natural es

$$v_n = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} \quad (9.4-13)$$

El voltaje inicial del condensador es  $v(0) = 10$ , por lo que tenemos

$$v_n(0) = A_1 + A_2$$

o bien

$$10 = A_1 + A_2 \quad (9.4-14)$$

Utilizamos la ecuación 9.4-12 para obtener la segunda ecuación para las constantes desconocidas. entonces

$$s_1 A_1 + s_2 A_2 = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C}$$

o bien

$$-A_1 - 2A_2 = -\frac{10}{1/3} - \frac{2}{1/2}$$

Por consiguiente, tenemos

$$-A_1 - 2A_2 = -34 \quad (9.4-15)$$

Al despejar simultáneamente las ecuaciones 9.4-14 y 9.4-15 obtenemos  $A_2 = 24$  y  $A_1 = -14$ . Por consiguiente, la respuesta natural es

$$v_n = (-14e^{-t} + 24e^{-2t}) \text{ V}$$

La respuesta natural del circuito se muestra en la figura 9.4-2.

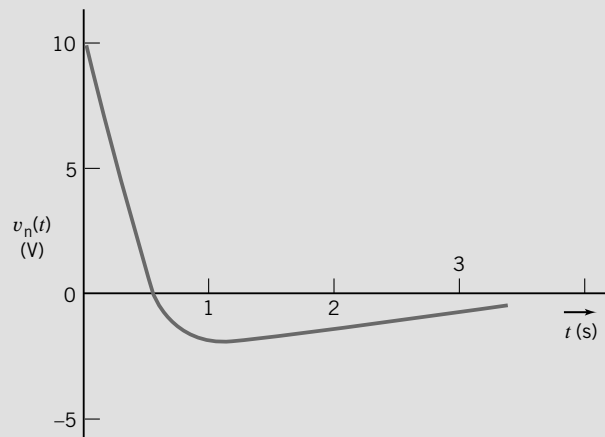


FIGURA 9.4-2 Respuesta del circuito  $RLC$  del ejemplo 9.4-1.

**EJERCICIO 9.4-1** Encuentre la respuesta natural del circuito  $RLC$  de la figura 9.4-1 cuando  $R = 6 \Omega$ ,  $L = 7 \text{ H}$  y  $C = 1/42 \text{ F}$ . Las condiciones iniciales son  $v(0) = 0$  e  $i(0) = 10 \text{ A}$ .

**Respuesta:**  $v_n(t) = -84(e^{-t} - e^{-6t}) \text{ V}$

## 9.5 RESPUESTA NATURAL DEL CIRCUITO RLC EN PARALELO NO FORZADO CRÍTICAMENTE AMORTIGUADO

Una vez más consideramos el circuito *RLC* en paralelo, y determinaremos el caso especial en que la ecuación característica tiene dos raíces reales iguales. Dos raíces iguales, reales, ocurren cuando  $\alpha^2 = \omega_0^2$ , donde

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad \text{y} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Supongamos que  $s_1 = s_2$  y procedamos a encontrar  $v_n(t)$ . Escribamos la respuesta natural como la suma de dos exponenciales como

$$v_n = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_1 t} = A_3 e^{s_1 t} \quad (9.5-1)$$

donde  $A_3 = A_1 + A_2$ . Dado que las dos raíces son iguales, solamente contamos con una constante indeterminada, pero aún tenemos dos condiciones iniciales que satisfacer. Desde luego, la ecuación 9.5-1 no es la solución total para la respuesta natural de un circuito críticamente amortiguado. Necesitamos la solución que contendrá dos constantes arbitrarias, por lo que, con algún conocimiento previo, trataremos de obtenerla

$$v_n = e^{s_1 t} (A_1 t + A_2) \quad (9.5-2)$$

Consideremos un circuito *RLC* en paralelo en el cual  $L = 1 \text{ H}$ ,  $R = 1 \ \Omega$ ,  $C = 1/4 \text{ F}$ ,  $v(0) = 5 \text{ V}$  e  $i(0) = -6 \text{ A}$ . La ecuación característica para el circuito es

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0$$

o bien

$$s^2 + 4s + 4 = 0$$

Entonces, las dos raíces son  $s_1 = s_2 = -2$ . Utilizando la ecuación 9.5-2 para la respuesta natural, tenemos

$$v_n = e^{-2t} (A_1 t + A_2) \quad (9.5-3)$$

Dado que  $v_n(0) = 5$ , tenemos en  $t = 0$

$$5 = A_2$$

Ahora, para obtener  $A_1$  procedemos a encontrar la derivada de  $v_n$  y evaluarla en  $t = 0$ . La derivada de  $v_n$  se encuentra al diferenciar la ecuación 9.5-3 para obtener

$$\frac{dv}{dt} = -2A_1 t e^{-2t} + A_1 e^{-2t} - 2A_2 e^{-2t} \quad (9.5-4)$$

Evaluando la ecuación 9.5-4 en  $t = 0$ , tenemos

$$\frac{dv(0)}{dt} = A_1 - 2A_2$$

De nuevo, podemos utilizar la ecuación 9.4-10, de modo que

$$\frac{dv(0)}{dt} = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C}$$

o bien

$$A_1 - 2A_2 = \frac{-5}{1/4} - \frac{-6}{1/4} = 4$$

Por consiguiente,  $A_1 = 14$  y la respuesta natural es

$$v_n = e^{-2t} (14t + 5) \quad \text{V}$$

La respuesta natural críticamente amortiguada de este circuito *RLC* se muestra en la figura 9.5-1.

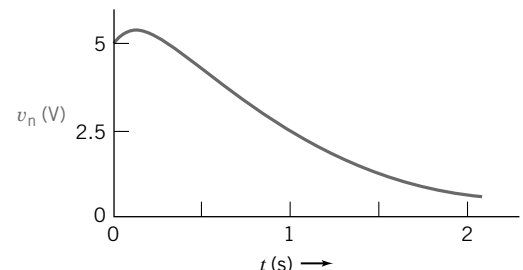


FIGURA 9.5-1 Respuesta críticamente amortiguada del circuito *RLC* en paralelo.

**EJERCICIO 9.5-1** Un circuito  $RLC$  en paralelo tiene  $R = 10 \Omega$ ,  $C = 1 \text{ mF}$ ,  $L = 0.4 \text{ H}$ ,  $v(0) = 8 \text{ V}$  e  $i(0) = 0$ . Encuentre la respuesta natural  $v_n(t)$  para  $t < 0$ .

**Respuesta:**  $v_n(t) = e^{-50t}(8 - 400t) \text{ V}$

## 9.6 RESPUESTA NATURAL DE UN CIRCUITO $RLC$ EN PARALELO NO FORZADO SUBAMORTIGUADO

La ecuación característica del circuito  $RLC$  en paralelo tendrá dos raíces conjugadas complejas cuando  $\alpha^2 > \omega_0^2$ . Esta condición se conoce cuando

$$LC < (2RC)^2$$

o cuando

$$L < 4R^2C$$

Recuerde que

$$v_n = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (9.6-1)$$

donde

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Cuando

$$\omega_0^2 > \alpha^2$$

tenemos

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

donde

$$j = \sqrt{-1}$$

Vea el apéndice B para un repaso de los números compuestos.

Las raíces compuestas conducen a una respuesta de tipo oscilatorio. Definimos la raíz cuadrada  $\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$  como  $\omega_d$ , a la cual denominaremos *frecuencia de resonancia amortiguada*. El factor  $\alpha$ , llamado *coeficiente de amortiguamiento*, determina cuán rápidamente se asientan las oscilaciones. Entonces, la raíces son

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

Por consiguiente, la respuesta natural es

$$v_n = A_1 e^{-\alpha t} e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-\alpha t} e^{-j\omega_d t}$$

o bien

$$v_n = e^{-\alpha t} (A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t}) \quad (9.6-2)$$

Utilicemos la identidad de Euler<sup>2</sup>

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t \quad (9.6-3)$$

Sea  $\omega = \omega_d$  en la ecuación 9.6-3 y sustituya la ecuación 9.6-2 para obtener

$$\begin{aligned} v_n &= e^{-\alpha t} (A_1 \cos \omega_d t + jA_1 \sin \omega_d t + A_2 \cos \omega_d t - jA_2 \sin \omega_d t) \\ &= e^{-\alpha t} [(A_1 + A_2) \cos \omega_d t + j(A_1 - A_2) \sin \omega_d t] \end{aligned} \quad (9.6-4)$$

Dado que las constantes incógnitas  $A_1$  y  $A_2$  permanecen arbitrarias, reemplazamos  $(A_1 + A_2)$  y  $j(A_1 - A_2)$  con nuevas constantes arbitrarias (aún incógnitas)  $B_1$  y  $B_2$ .  $A_1$  y  $A_2$  deben ser conjugadas complejas de modo que  $B_1$  y  $B_2$  sean números reales. Por consiguiente, la ecuación 9.6-4 se convierte en

$$v_n = e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) \quad (9.6-5)$$

<sup>2</sup>Vea el apéndice B para una exposición sobre la identidad de Euler.

donde  $B_1$  y  $B_2$  serán determinadas por las condiciones iniciales,  $v(0)$  e  $i(0)$ .

La respuesta natural subamortiguada es oscilatoria con un magnitud de decaimiento. La rapidez de decaimiento depende de  $\alpha$ , y la frecuencia de oscilación depende de  $\omega_d$ .

Encontremos la forma general de la solución para  $B_1$  y  $B_2$ , en términos de las condiciones iniciales cuando el circuito es no forzado. Entonces, en  $t = 0$ , tenemos

$$v_n(0) = B_1$$

Para encontrar  $B_2$  evaluamos la primera derivada de  $v_n$  y luego sea  $t = 0$ . La derivada es

$$\frac{dv_n}{dt} = e^{-\alpha t} [(\omega_d B_2 - \alpha B_1) \cos \omega_d t - (\omega_d B_1 + \alpha B_2) \sin \omega_d t]$$

y, en  $t = 0$ , obtenemos

$$\frac{dv_n(0)}{dt} = \omega_d B_2 - \alpha B_1 \quad (9.6-6)$$

Recordemos que ya antes encontramos que la ecuación 9.4-10 proporciona  $dv(0)/dt$  para el circuito  $RLC$  en paralelo como

$$\frac{dv_n(0)}{dt} = -\frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C} \quad (9.6-7)$$

Por consiguiente, con las ecuaciones 9.6-6 y 9.6-7 obtenemos

$$\omega_d B_2 = \alpha B_1 - \frac{v(0)}{RC} - \frac{i(0)}{C} \quad (9.6-8)$$

### EJEMPLO 9.6-1 Respuesta natural de un circuito de segundo orden subamortiguado

Considere el circuito  $RLC$  en paralelo cuando  $R = 25/3 \Omega$ ,  $L = 0.1 \text{ H}$ ,  $C = 1 \text{ mF}$ ,  $v(0) = 10 \text{ V}$  e  $i(0) = -0.6 \text{ A}$ . Encuentre la respuesta natural  $v_n(t)$  para  $t > 0$ .

#### Solución

Primero, determinamos  $\alpha^2$  y  $\omega_0^2$  para determinar la forma de la respuesta. En consecuencia, obtenemos

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 60 \quad \text{y} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 10^4$$

Por consiguiente,  $\omega_0^2 > \alpha^2$ , y la respuesta natural es subamortiguada. Procedemos a determinar la frecuencia resonante amortiguada  $\omega_d$  como

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{10^4 - 3.6 \times 10^3} = 80 \text{ rad/s}$$

Por lo tanto, las raíces características son

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d = -60 + j80 \quad \text{y} \quad s_2 = -\alpha - j\omega_d = -60 - j80$$

En consecuencia, la respuesta natural se obtiene de la ecuación 9.6-5 como

$$v_n(t) = B_1 e^{-60t} \cos 80t + B_2 e^{-60t} \sen 80t$$

Como  $v(0) = 10$ , tenemos

$$B_1 = v(0) = 10$$



Podemos aprovechar la ecuación 9.6-8 para obtener  $B_2$  como

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{\alpha}{\omega_d} B_1 - \frac{v(0)}{\omega_d RC} - \frac{i(0)}{\omega_d C} \\ &= \frac{60 \times 10}{80} - \frac{10}{80 \times 25/3000} - \frac{-0.6}{80 \times 10^{-3}} = 7.5 - 15.0 + 7.5 = 0 \end{aligned}$$

Por consiguiente, la respuesta natural es

$$v_n(t) = 10e^{-60t} \cos 80t \text{ V}$$

En la figura 9.6-1 se presenta un bosquejo de esta respuesta. Aunque la respuesta es de forma oscilatoria por la función coseno, es amortiguada por la función exponencial,  $e^{-60t}$ .

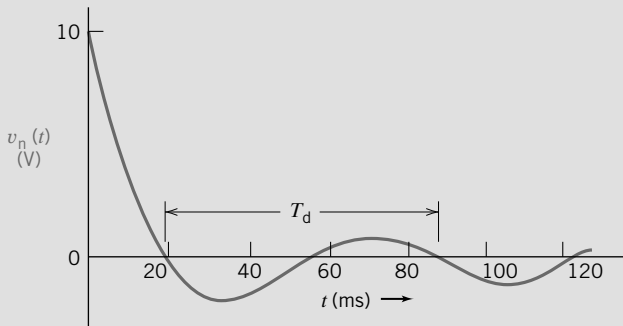


FIGURA 9.6-1 Respuesta natural del circuito  $RLC$  en paralelo subamortiguado.

El periodo de la oscilación amortiguada es el intervalo indicado como  $T_d$ , expresado como

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad (9.6-9)$$

La respuesta natural de un circuito subamortiguado no es una pura respuesta oscilatoria, sino que presenta la forma de una respuesta oscilatoria. Así, podemos aproximar  $T_d$  por el periodo entre la primera y tercera intersecciones en cero, como se muestra en la figura 9.6-1. Por consiguiente, la frecuencia en hertzios es

$$f_d = \frac{1}{T_d}$$

El periodo de oscilación del circuito del ejemplo 9.6-1 es

$$T_d = \frac{2\pi}{80} = 79 \text{ ms}$$

**EJERCICIO 9.6-1** Un circuito  $RLC$  en paralelo tiene  $R = 62.5 \Omega$ ,  $L = 10 \text{ mH}$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $v(0) = 10 \text{ V}$  e  $i(0) = 80 \text{ mA}$ . Encuentre la respuesta natural  $v_n(t)$  para  $t > 0$ .

**Respuesta:**  $v_n(t) = e^{-8000t} [10 \cos 6000t - 26.7 \sin 6000t] \text{ V}$

## 9.7 RESPUESTA FORZADA DE UN CIRCUITO $RLC$

La respuesta forzada de un circuito  $RLC$  descrita por una ecuación diferencial de segundo orden debe satisfacer la ecuación diferencial y contener constantes no arbitrarias. Como notamos anteriormente, la respuesta a una función de forzamiento será frecuente que sea de la misma forma que la función

Tabla 9.7-1 Respuestas forzadas	
FUNCIÓN FORZAMIENTO	RESPUESTA ASUMIDA
$K$	$A$
$Kt$	$At + B$
$Kt^2$	$At^2 + Bt + C$
$K \text{ sen } \omega t$	$A \text{ sen } \omega t + B \text{ cos } \omega t$
$Ke^{-at}$	$Ae^{-at}$

forzamiento. De nuevo, consideramos la ecuación diferencial para el circuito de segundo orden como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0x = f(t) \tag{9.7-1}$$

La respuesta forzada  $x_f$  debe satisfacer la ecuación 9.7-1. Por lo tanto, al sustituir  $x_f$ , tenemos

$$\frac{d^2x_f}{dt^2} + a_1 \frac{dx_f}{dt} + a_0x_f = f(t) \tag{9.7-2}$$

Necesitamos determinar  $x_f$  de modo que  $x_f$  y su primera y segunda derivadas satisfagan la ecuación 9.7-2.

Si la función forzamiento es una constante, esperamos que también la respuesta forzada sea una constante porque las derivadas de una constante son cero. Si la función forzamiento es de la forma  $f(t) = B e^{-at}$ , entonces las derivadas de  $f(t)$  son exponenciales de la forma  $Q e^{-at}$ , y esperamos que

$$x_f = D e^{-at}$$

Si la función forzamiento es una función senoidal, podemos esperar que la respuesta forzada sea una función senoidal. Si  $f(t) = A \text{ sen } \omega_0 t$ , trataremos con

$$x_f = M \text{ sen } \omega_0 t + N \text{ cos } \omega_0 t = Q \text{ sen } (\omega_0 t + \theta)$$

La tabla 9.7-1 resume las funciones forzamiento seleccionadas así como sus soluciones supuestas.

**EJEMPLO 9-7-1** Respuesta forzada a una entrada exponencial

Encuentre la respuesta forzada para la corriente del inductor  $i_f$  para el circuito RLC que se muestra en la figura 9.7-1 cuando  $i_s = 8e^{-2t}$  A. Sea  $R = 6 \Omega$ ,  $L = 7$  H y  $C = 1/42$  F.

**Solución**

La corriente de fuente se aplicó en  $t = 0$  como lo indicaba la función paso  $u(t)$ . Después de  $t = 0$ , la ecuación de la KCL en el nodo superior es

$$i + \frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} = i_s \tag{9.7-3}$$

Observamos que

$$v = L \frac{di}{dt} \tag{9.7-4}$$

por lo tanto

$$\frac{dv}{dt} = L \frac{d^2i}{dt^2} \tag{9.7-5}$$

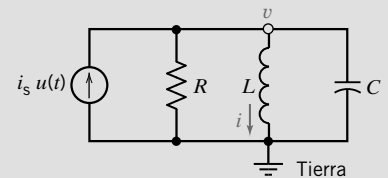


FIGURA 9.7-1 Circuito para los ejemplos 9.7-1 y 9.7-2.

Al sustituir las ecuaciones 9.7-4 y 9.7-5 en la ecuación 9.7-3, tenemos

$$i + \frac{L}{R} \frac{di}{dt} + CL \frac{d^2i}{dt^2} = i_s$$

Luego dividimos entre  $LC$  y reordenamos para obtener la conocida ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{i_s}{LC} \quad (9.7-6)$$

Si sustituimos los valores del componente y la fuente  $i_s$ , obtenemos

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 7 \frac{di}{dt} + 6i = 48e^{-2t} \quad (9.7-7)$$

Como deseamos obtener la respuesta forzada, entonces suponemos que la respuesta será

$$i_f = Be^{-2t} \quad (9.7-8)$$

donde se debe determinar  $B$ . Sustituyendo la solución asumida, la ecuación 9.7-8, en la ecuación diferencial, tenemos

$$4Be^{-2t} + 7(-2Be^{-2t}) + 6Be^{-2t} = 48e^{-2t}$$

o bien

$$(4 - 14 + 6)Be^{-2t} = 48e^{-2t}$$

Por consiguiente,  $B = -12$  e

$$i_f = -12e^{-2t} \text{ A}$$

### EJEMPLO 9.7-2 Respuesta forzada a una entrada constante

Encuentre la respuesta forzada  $i_f$  del circuito del ejemplo 9.7-1 cuando  $i_s = I_0$ , donde  $I_0$  es una constante.

#### Solución

Como la fuente es una constante aplicada en  $t = 0$ , esperamos que la respuesta forzada sea también una constante. Como primer método, utilizaremos la ecuación diferencial para encontrar la respuesta forzada. Como segundo, demostramos el método alternativo que emplea el comportamiento de estado estable del circuito para encontrar  $i_f$ .

La ecuación diferencial con la fuente constante se obtiene de la ecuación 9.7-6 como

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 7 \frac{di}{dt} + 6i = 6I_0$$

De nuevo, suponemos que la respuesta forzada es  $i_f = D$ , una constante. Dado que las derivadas primera y segunda de la respuesta forzada supuesta son cero, tenemos

$$6D = 6I_0$$

o bien

$$D = I_0$$

Por consiguiente,

$$i_f = I_0$$

Otro método es determinar la respuesta de estado estable  $i_f$  del circuito de la figura 9.7-1 dibujando el modelo de circuito de estado estable. El inductor actúa como un cortocircuito y el condensador lo hace como un circuito abierto, como se muestra en la figura 9.7-2. Desde luego, dado que el modelo de estado estable del inductor es un cortocircuito, toda la corriente de la fuente fluye a través del inductor en estado estable, e

$$i_f = I_0$$

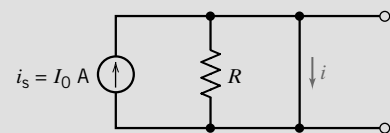


FIGURA 9.7-2 Circuito  $RLC$  en paralelo en estado estable para una entrada constante.

Los dos ejemplos anteriores mostraron que es relativamente fácil obtener la respuesta del circuito a una función forzamiento. Sin embargo, en ocasiones nos vemos confrontados con un caso especial en el que la forma de la función forzamiento es la misma que la forma de uno de los componentes de la respuesta natural.

Una vez más, considere el circuito de los ejemplos 9.7-1 y 9.7-2 (figura 9.7-1) cuando la ecuación diferencial es

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 7\frac{di}{dt} + 6i = 6i_s \quad (9.7-9)$$

Suponga que

$$i_s = 3e^{-6t}$$

Al sustituir esta entrada en la ecuación 9.7-9, tenemos

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 7\frac{di}{dt} + 6i = 18e^{-6t} \quad (9.7-10)$$

La ecuación característica del circuito es

$$s^2 + 7s + 6 = 0$$

o bien

$$(s + 1)(s + 6) = 0$$

Así, la respuesta natural es

$$i_n = A_1e^{-t} + A_2e^{-6t}$$

Entonces, en primer lugar, esperamos que la respuesta forzada sea

$$i_f = Be^{-6t} \quad (9.7-11)$$

Sin embargo, la respuesta forzada y un componente de la respuesta natural podrían tener la forma  $De^{-6t}$ . ¿Cómo funcionará esto? Tratemos de sustituir la ecuación 9.7-11 en la ecuación diferencial (9.7-10). Entonces obtenemos

$$36Be^{-6t} - 42Be^{-6t} + 6Be^{-6t} = 18e^{-6t}$$

o bien

$$0 = 18e^{-6t}$$

la cual es una solución imposible. Por consiguiente, necesitamos otra forma de respuesta forzada cuando uno de los términos de la respuesta natural tiene la misma forma que la función forzamiento.

Trataremos con la respuesta forzada

$$i_f = Bte^{-6t} \quad (9.7-12)$$

Entonces, sustituyendo la ecuación 9.7-12 en la ecuación 9.7-10, tenemos

$$B(-6e^{-6t} - 6e^{-6t} + 36te^{-6t}) + 7B(e^{-6t} - 6te^{-6t}) + 6Bte^{-6t} = 18e^{-6t} \quad (9.7-13)$$

Simplificamos la ecuación 9.7-13 y tenemos

$$B = -\frac{18}{5}$$

Por consiguiente,

$$i_f = -\frac{18}{5}te^{-6t}$$

En general, si la función forzamiento tiene la misma forma que uno de los componentes de la respuesta natural,  $x_{n1}$ , usaremos

$$x_f = t^p x_{n1}$$

donde se selecciona la integral  $p$  de modo que la  $x_f$  no se duplique en la respuesta natural. Utilice la potencia más baja,  $p$ , de  $t$  que no se duplicó en la respuesta natural.

**EJERCICIO 9.7-1** Un circuito descrito para  $t > 0$  por la ecuación

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 9\frac{di}{dt} + 20i = 6i_s$$

donde  $i_s = 6 + 2t$  A. Encuentre la respuesta forzada  $i_f$  para  $t > 0$ .

**Respuesta:**  $i_f = 1.53 + 0.6t$  A

## 9.8 RESPUESTA TOTAL DE UN CIRCUITO RLC

Logramos nuestro propósito de encontrar la respuesta natural y la respuesta forzada de un circuito descrito por una ecuación diferencial de segundo orden.

La *respuesta total* es la suma de la respuesta natural y la respuesta forzada; entonces,

$$x = x_n + x_f$$

Consideremos el circuito serie RLC de la figura 9.2-2 con una ecuación diferencial (9.2-8) como

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v = v_s$$

Cuando  $L = 1$  H,  $C = 1/6$  F y  $R = 5$   $\Omega$ , obtenemos

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 5\frac{dv}{dt} + 6v = 6v_s \quad (9.8-1)$$

Asignamos  $v_s = \frac{2e^{-t}}{3}$  V,  $v(0) = 10$  V y  $dv(0)/dt = -2$  V/s.

Determinaremos antes la forma de la respuesta total y luego determinaremos la respuesta forzada. Sumando estas respuestas tenemos la respuesta total con dos constantes no especificadas. Entonces utilizaremos las condiciones iniciales para especificar estas constantes y así obtener la respuesta total.

Para obtener la respuesta natural, escribimos la ecuación característica, aprovechando operadores como

$$s^2 + 5s + 6 = 0$$

o bien  $(s + 2)(s + 3) = 0$

Por consiguiente, la respuesta natural es

$$v_n = A_1e^{-2t} + A_2e^{-3t}$$

La respuesta forzada se obtiene al examinar la función forzamiento y tomar nota de que su respuesta exponencial tiene una constante de tiempo diferente de la respuesta natural, por lo que podemos escribir

$$v_f = Be^{-t} \quad (9.8-2)$$

Podemos determinar  $B$  si sustituimos la ecuación 9.8-2 en la ecuación 9.8-1. Entonces tenemos

$$Be^{-t} + 5(-Be^{-t}) + 6(Be^{-t}) = 4e^{-t}$$

o bien  $B = 2$

Entonces la respuesta total es

$$v = v_n + v_f = A_1e^{-2t} + A_2e^{-3t} + 2e^{-t}$$

Para encontrar  $A_1$  y  $A_2$  utilizamos las condiciones iniciales. En  $t = 0$ , tenemos  $v(0) = 10$ , por lo que obtenemos

$$10 = A_1 + A_2 + 2 \quad (9.8-3)$$

Dado que  $dv/dt = -2$  en  $t = 0$ , tenemos

$$-2A_1 - 3A_2 - 2 = -2 \quad (9.8-4)$$

Despejando las ecuaciones 9.8-3 y 9.8-4 tenemos  $A_1 = 24$  y  $A_2 = -16$ . Por lo tanto,

$$v = 24 e^{-2t} - 16 e^{-3t} + 2 e^{-t} \text{ V}$$

### EJEMPLO 9.8-1 Respuesta total de un circuito de segundo orden

Encuentre la respuesta total  $v(t)$  para  $t > 0$  para el circuito de la figura 9.8-1. Suponga que el circuito se encuentra en estado estable en  $t = 0^-$ .

#### Solución

Primero, determinamos las condiciones iniciales del circuito. En  $t = 0^-$ , tenemos el modelo del circuito en la figura 9.8-2, donde reemplazamos el condensador con un circuito abierto y el inductor con un cortocircuito. Entonces el voltaje es

$$v(0^-) = 6 \text{ V}$$

y la corriente del inductor es

$$i(0^-) = 1 \text{ A}$$

Después de dispararse el interruptor, podemos escribir la KVL para el enlace del lado derecho de la figura 9.8-1 para obtener

$$-v + \frac{di}{dt} + 6i = 0 \quad (9.8-5)$$

La ecuación de la KCL en el nodo a proporcionará una segunda ecuación en términos de  $v$  e  $i$  como

$$\frac{v - v_s}{4} + i + \frac{1}{4} \frac{dv}{dt} = 0 \quad (9.8-6)$$

Las ecuaciones 9.8-5 y 9.8-6 se pueden reordenar como

$$\left( \frac{di}{dt} + 6i \right) - v = 0 \quad (9.8-7)$$

$$i + \left( \frac{v}{4} + \frac{1}{4} \frac{dv}{dt} \right) = \frac{v_s}{4} \quad (9.8-8)$$

Emplearemos operadores para que  $s = d/dt$ ,  $s^2 = d^2/dt^2$  y  $1/s = \int dt$ . Entonces obtenemos

$$(s + 6)i - v = 0 \quad (9.8-9)$$

$$i + \frac{1}{4}(s + 1)v = v_s/4 \quad (9.8-10)$$

Despejando la ecuación 9.8-10 para  $i$  y sustituyendo el resultado en la ecuación 9.8-9 obtenemos

$$((s + 6)(s + 1) + 4)v = (s + 6)v_s$$

O, de manera equivalente,

$$(s^2 + 7s + 10)v = (s + 6)v_s$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial de segundo orden es

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 7 \frac{dv}{dt} + 10v = \frac{dv_s}{dt} + 6v_s \quad (9.8-11)$$

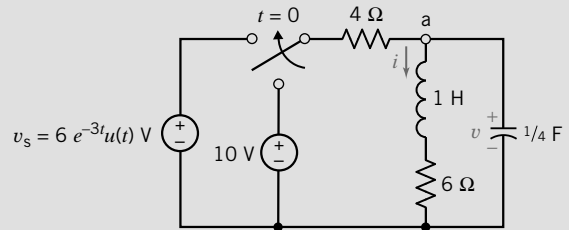


FIGURA 9.8-1 Circuito del ejemplo 9.8-1.

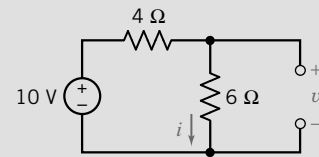


FIGURA 9.8-2 Circuito del ejemplo 9.8-1 en  $t = 0^-$

La ecuación característica es

$$s^2 + 7s + 10 = 0$$

Por consiguiente, las raíces de la ecuación característica son

$$s_1 = -2 \quad \text{y} \quad s_2 = -5$$

la respuesta natural  $v_n$  es

$$v_n = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t}$$

Se supone que la respuesta forzada debe ser de la forma

$$v_f = B e^{-3t} \quad (9.8-12)$$

Al sustituir  $v_f$  en la ecuación diferencial tenemos

$$9B e^{-3t} - 21B e^{-3t} + 10B e^{-3t} = -18e^{-3t} + 36e^{-3t}$$

Por consiguiente,

$$B = -9$$

y

$$v_f = -9e^{-3t}$$

Entonces, la respuesta total es

$$v = v_n + v_f = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t} - 9e^{-3t} \quad (9.8-13)$$

Como  $v(0) = 6$ , tenemos

$$v(0) = 6 = A_1 + A_2 - 9$$

o bien

$$A_1 + A_2 = 15 \quad (9.8-14)$$

También sabemos que  $i(0) = 1$  A. Podemos utilizar la ecuación 9.8-8 para determinar  $dv(0)/dt$  y luego evaluar la derivada de la ecuación 9.8-13 en  $t = 0$ . La ecuación 9.8-8 establece que

$$\frac{dv}{dt} = -4i - v + v_s$$

En  $t = 0$  tenemos

$$\frac{dv(0)}{dt} = -4i(0) - v(0) + v_s(0) = -4 - 6 + 6 = -4$$

Tomemos la derivada de la ecuación 9.8-13 para obtener

$$\frac{dv}{dt} = -2A_1 e^{-2t} - 5A_2 e^{-5t} + 27e^{-3t}$$

En  $t = 0$ , obtenemos

$$\frac{dv(0)}{dt} = -2A_1 - 5A_2 + 27$$

Dado que  $dv(0)/dt = -4$ , tenemos

$$2A_1 + 5A_2 = 31 \quad (9.8-15)$$

Si despejamos las ecuaciones 9.8-15 y 9.8-14 de manra simultánea, obtenemos

$$A_2 = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad A_1 = \frac{1}{3}$$

Por consiguiente

$$v = \frac{44}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{-5t} - 9e^{-3t} \text{ V}$$

Observe que utilizamos el voltaje del condensador y la corriente del inductor como las incógnitas. Esto es muy conveniente porque por lo común usted tendrá las condiciones iniciales de estas variables. Estas variables,  $v_c$  e  $i_L$ , se conocen como las *variables de estado*. En la siguiente sección consideraremos de manera más completa este método.

## 9.9 MÉTODO DE LAS VARIABLES DE ESTADO PARA EL ANÁLISIS DE CIRCUITOS

Las *variables de estado* de un circuito son un conjunto de variables asociadas con la energía de los elementos de almacenamiento de energía del circuito. En estos términos describen la respuesta total de un circuito a una función forzamiento y las condiciones iniciales del circuito. Aquí la palabra *estado* significa “condición”, como en *estado de la unión*. Elegiremos como variables de estado aquellas variables que describen el almacenamiento de energía del circuito. Así, utilizaremos los voltajes del condensador independientes y las corrientes del inductor independientes.

Considere el circuito que se muestra en la figura 9.9-1. Los dos elementos de almacenamiento de energía son  $C_1$  y  $C_2$ , y los condensadores no se pueden reducir a uno. Esperamos que el circuito sea descrito por una ecuación diferencial de segundo orden. Sin embargo, obtengamos primero las dos ecuaciones diferenciales de primer orden que describen la respuesta para  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$ , las cuales son las variables de estado del circuito. Si conocemos el valor de las variables de estado en un tiempo y de ahí el valor de las variables de entrada, podemos encontrar el valor de cualquier variable de estado para cualquier tiempo subsecuente.

Al escribir la KCL en los nodos 1 y 2, tenemos

$$\text{nodo 1: } C_1 \frac{dv_1}{dt} = \frac{v_a - v_1}{R_1} + \frac{v_2 - v_1}{R_2} \quad (9.9-1)$$

$$\text{nodo 2: } C_2 \frac{dv_2}{dt} = \frac{v_b - v_2}{R_3} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} \quad (9.9-2)$$

Las ecuaciones 9.9-1 y 9.9-2 se pueden reescribir como

$$\frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{C_1 R_1} + \frac{v_1}{C_1 R_2} - \frac{v_2}{C_1 R_2} = \frac{v_a}{C_1 R_1} \quad (9.9-3)$$

$$\frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{C_2 R_3} + \frac{v_2}{C_2 R_2} - \frac{v_1}{C_2 R_2} = \frac{v_b}{C_2 R_3} \quad (9.9-4)$$

Suponga que  $C_1 R_1 = 1$ ,  $C_1 R_2 = 1$ ,  $C_2 R_3 = 1$  y  $C_2 R_2 = 1/2$ . Entonces tenemos

$$\frac{dv_1}{dt} + 2v_1 - v_2 = v_a \quad (9.9-5)$$

$$\text{y} \quad -2v_1 + \frac{dv_2}{dt} + 3v_2 = v_b \quad (9.9-6)$$

Utilizando operadores tenemos

$$\begin{aligned} (s+2)v_1 - v_2 &= v_a \\ -2v_1 + (s+3)v_2 &= v_b \end{aligned}$$

Si lo que queremos es despejar  $v_1$ , aplicamos la regla de Cramer para obtener

$$v_1 = \frac{(s+3)v_a + v_b}{(s+2)(s+3) - 2} \quad (9.9-7)$$

La ecuación característica se obtiene a partir del denominador y tiene la forma

$$s^2 + 5s + 4 = 0$$

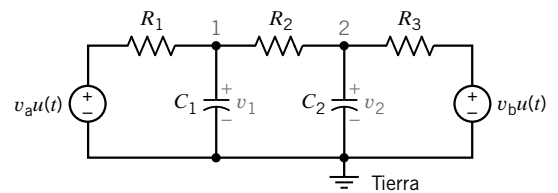


FIGURA 9.9-1 Circuito con dos elementos de almacenamiento de energía.



Las raíces características son  $s = -4$  y  $s = -1$ . La ecuación diferencial de segundo orden se puede obtener reescribiendo la ecuación 9.9-7 como

$$(s^2 + 5s + 4)v_1 = (s + 3)v_a + v_b$$

Entonces la ecuación diferencial para  $v_1$  es

$$\frac{d^2 v_1}{dt^2} + 5 \frac{dv_1}{dt} + 4v_1 = \frac{dv_a}{dt} + 3v_a + v_b \quad (9.9-8)$$

Ahora procedemos a obtener la respuesta natural

$$v_{1n} = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t}$$

y la respuesta forzada, la cual depende de la forma de la función forzamiento. Por ejemplo, si  $v_a = 10$  V y  $v_b = 6$  V,  $v_{1f}$  será una constante (vea la tabla 9.7-1). Obtenemos  $v_{1f}$  al sustituir en la ecuación 9.9-8, con lo cual

$$4v_{1f} = 3v_a + v_b$$

o bien

$$4v_{1f} = 30 + 6 = 36$$

Por consiguiente,

$$v_{1f} = 9$$

Entonces

$$v_1 = v_{1n} + v_{1f} = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-4t} + 9 \quad (9.9-9)$$

Por lo común conocemos las condiciones iniciales de los elementos de almacenamiento de energía. Por ejemplo, si sabemos que  $v_1(0) = 5$  V y  $v_2(0) = 10$  V, primero utilizamos  $v_1(0) = 5$  a lo largo de la ecuación 9.9-9 para obtener

$$v_1(0) = A_1 + A_2 + 9$$

y, por consiguiente

$$A_1 + A_2 = -4 \quad (9.9-10)$$

Ahora necesitamos el valor de  $dv_1/dt$  en  $t = 0$ . Si volvemos a la ecuación 9.9-5, tenemos

$$\frac{dv_1}{dt} = v_a + v_2 - 2v_1$$

Por consiguiente, en  $t = 0$  tenemos

$$\frac{dv_1(0)}{dt} = v_a(0) + v_2(0) - 2v_1(0) = 10 + 10 - 2(5) = 10$$

La derivada de la solución completa, la ecuación 9.9-9, en  $t = 0$  es

$$\frac{dv_1(0)}{dt} = -A_1 - 4A_2$$

Por consiguiente,

$$A_1 + 4A_2 = -10 \quad (9.9-11)$$

Al despejar las ecuaciones 9.9-10 y 9.9-11, tenemos

$$A_1 = -2 \quad \text{y} \quad A_2 = -2$$

En consecuencia,

$$v_1(t) = -2e^{-t} - 2e^{-4t} + 9 \text{ V}$$

A medida que encuentre circuitos con dos o más elementos de almacenamiento de energía, debería considerar la aplicación del método de la variable de estado a la descripción de un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden.

El **método de la variable de estado** utiliza una ecuación diferencial de primer orden por cada variable de estado para determinar la respuesta total de un circuito.

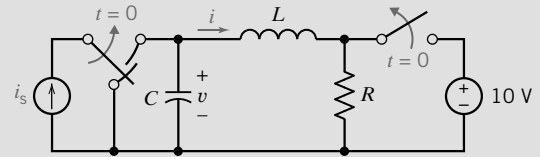
En la tabla 9.9-1 se presenta un resumen del método de la variable de estado. Seguiremos este método en el ejemplo 9.9-1.

**Tabla 9.9-1 Método de la variable de estado del análisis de circuitos**

1. Identifique las variables de estado como los voltajes de condensador y corrientes de inductor independientes.
2. Determine las condiciones iniciales en  $t = 0$  para los voltajes del condensador y las corrientes del inductor.
3. Obtenga una ecuación diferencial de primer orden para cada variable de estado, utilizando KCL o KVL.
4. Utilice el operador  $s$  para sustituir  $d/dt$ .
5. Obtenga la ecuación característica del circuito teniendo en cuenta que se puede obtener al establecer igual a cero la determinante de la regla de Cramer.
6. Determine las raíces de la ecuación característica, las cuales determinan luego la forma de la respuesta natural.
7. Obtenga la ecuación diferencial de segundo orden (o mayor) para la variable selecta  $x$  por la regla de Cramer.
8. Determine la respuesta forzada  $x_f$  suponiendo una forma apropiada de  $x_f$  y determinando la constante por la sustitución de la solución asumida en la ecuación diferencial de segundo orden.
9. Obtenga la solución total  $x = x_n + x_f$ .
10. Utilice las condiciones iniciales en las variables de estado con el conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden (paso 3) para obtener  $dx(0)/dt$ .
11. Utilizando  $x(0)$  y  $dx(0)/dt$  para cada variable de estado, encuentre las constantes arbitrarias  $A_1, A_2, \dots, A_n$  para obtener la solución total  $x(t)$ .

**EJEMPLO 9.9-1** Respuesta total de un circuito de segundo orden

Encuentre  $i(t)$  para  $t > 0$  para el circuito de la figura 9.9-2 cuando  $R = 3 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = 1/2 \text{ F}$  e  $i_s = 2e^{-3t} \text{ A}$ . Suponga estado estable en  $t = 0^-$ .

**FIGURA 9.9-2** Circuito del ejemplo 9.9-1.**Solución**

Primero, identificamos las variables de estado como  $i$  y  $v$ .

Las condiciones iniciales en  $t = 0$  se obtienen al considerar el

circuito con la fuente de 10-V conectada mucho tiempo en  $t = 0^-$ . En  $t = 0$ , la fuente de voltaje está desconectada y la fuente de corriente está conectada. Entonces  $v(0) = 10 \text{ V}$  e  $i(0) = 0 \text{ A}$ .

Considere el circuito después del tiempo  $t = 0$ . La primera ecuación diferencial se obtiene aplicando la KVL en torno al enlace  $RLC$  para obtener

$$L \frac{di}{dt} + Ri = v$$

La segunda ecuación diferencial se obtiene aplicando la KCL en el nodo superior del condensador para obtener

$$C \frac{dv}{dt} + i = i_s$$

Podemos reescribir estas dos ecuaciones diferenciales de primer orden como

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i - \frac{v}{L} = 0$$

y

$$\frac{dv}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{i_s}{C}$$

Si sustituimos los valores del componente, tenemos

$$\frac{di}{dt} + 3i - v = 0 \quad (9.9-12)$$

$$y \quad \frac{dv}{dt} + 2i = 2i_s \quad (9.9-13)$$

Utilizando el operador  $s = d/dt$ , tenemos

$$(s + 3)i - v = 0 \quad (9.9-14)$$

$$2i + sv = 2i_s \quad (9.9-15)$$

Por consiguiente, la ecuación característica obtenida por la determinante es

$$(s + 3)s + 2 = 0$$

o bien

$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

Así, las raíces de la ecuación característica son

$$s_1 = -2 \quad y \quad s_2 = -1$$

Pero como deseamos despejar  $i(t)$  para  $t > 0$ , aplicamos la regla de Cramer para despejar las ecuaciones 9.9-14 y 9.9-15 para  $i$ , obteniendo

$$i = \frac{2i_s}{s^2 + 3s + 2}$$

Por consiguiente, la ecuación diferencial es

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 3\frac{di}{dt} + 2i = 2i_s \quad (9.9-16)$$

La respuesta natural es

$$i_n = A_1e^{-t} + A_2e^{-2t}$$

Suponemos que la respuesta forzada es de la forma

$$i_f = Be^{-3t}$$

Sustituyendo  $i_f$  en la ecuación 9.9-16, tenemos

$$(9Be^{-3t}) + 3(-3Be^{-3t}) + 2Be^{-3t} = 2(2e^{-3t})$$

o bien

$$9B - 9B + 2B = 4$$

Por consiguiente,  $B = 2$ , e

$$i_f = 2e^{-3t}$$

La respuesta total es

$$i = A_1e^{-t} + A_2e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

Porque  $i(0) = 0$ ,

$$0 = A_1 + A_2 + 2 \quad (9.9-17)$$

Necesitamos obtener  $di(0)/dt$  a partir de la ecuación 9.9-12, la cual repetimos aquí como

$$\frac{di}{dt} + 3i - v = 0$$

Por consiguiente, en  $t = 0$ , tenemos

$$\frac{di(0)}{dt} = -3i(0) + v(0) = 10$$

La derivada de la respuesta total en  $t = 0$  es

$$\frac{di(0)}{dt} = -A_1 - 2A_2 - 6$$

Dado que  $di(0)/dt = 10$ , tenemos

$$-A_1 - 2A_2 = 16$$

y, repitiendo la ecuación 9.9-17, tenemos

$$A_1 + A_2 = -2$$

Sumando estas dos ecuaciones, determinamos que  $A_1 = 12$  y  $A_2 = -14$ . Entonces tenemos la solución total para  $i$  como

$$i = 12e^{-t} - 14e^{-2t} + 2e^{-3t} \text{ A}$$

Reconocemos que el método de las variables de estado es particularmente poderoso para encontrar la respuesta de elementos de almacenamiento de energía en un circuito. Esto también es cierto si nos encontramos con circuitos de orden más alto con tres o más elementos de almacenamiento de energía. Por ejemplo, considere el circuito que se muestra en la figura 9.9-3. Las variables de estado son  $v_1$ ,  $v_2$  e  $i$ . Dos ecuaciones diferenciales de primer orden se obtuvieron escribiendo las ecuaciones de la KCL en el nodo a y en el nodo b. Entonces se obtuvo una tercera ecuación diferencial de primer orden al escribir la KVL en torno al enlace intermedio que contiene  $i$ . La solución para una o más de estas variables se puede obtener procediendo con el método de las variables de estado, el cual se resume en la tabla 9.9-1.

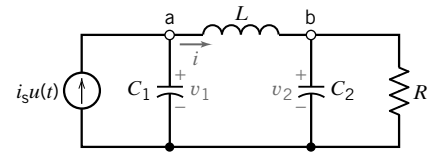


FIGURA 9.9-3 Circuito con tres elementos de almacenamiento de energía.

**EJERCICIO 9.9-1** Encuentre  $v_2(t)$  para  $t > 0$  para el circuito de la figura E 9.9-1. Suponga que no hay energía inicial almacenada.

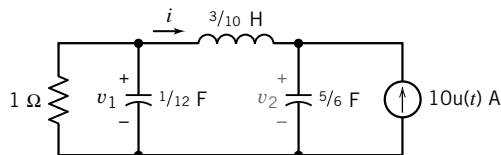


FIGURA E 9.9-1

**Respuesta:**  $v_2(t) = -15e^{-2t} + 6e^{-4t} - e^{-6t} + 10 \text{ V}$

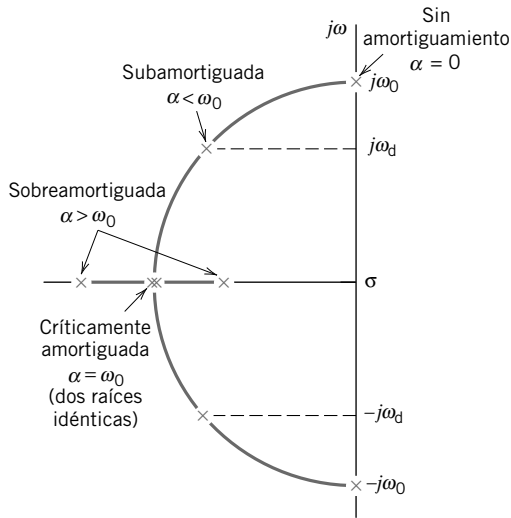
## 9.10 RAÍCES EN EL PLANO COMPUESTO

Hemos observado que el carácter de la respuesta natural de un sistema de segundo orden está determinado por las raíces de la ecuación característica. Consideremos las raíces de un circuito  $RLC$  en paralelo. La ecuación característica (9.4-3) es

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0$$

y las raíces están dadas por la ecuación 9.4-8 para ser

$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$



**FIGURA 9.10-1** El plano  $s$  total, mostrando la ubicación de las dos raíces,  $s_1$  y  $s_2$ , de la ecuación característica en la porción a la izquierda del plano  $s$ . Las raíces están designadas por el símbolo  $\times$ .

donde  $\alpha = 1/(2RC)$  y  $\omega_0^2 = 1/(LC)$ . Cuando  $\omega_0 > \alpha$ , las raíces son compuestas y

$$s = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_d \quad (9.10-1)$$

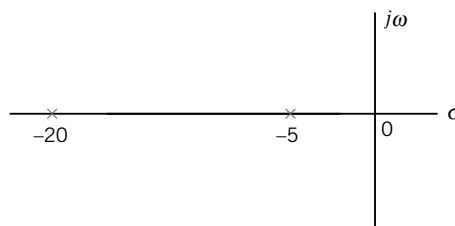
En general, las raíces se ubican en el plano compuesto; la ubicación la definen las coordenadas medidas a lo largo del eje real o  $\sigma$ , y del eje imaginario, o  $j\omega$ . Se alude a éste como el plano  $s$  o, ya que  $s$  tiene las unidades de frecuencia, como el *plano de frecuencia compuesta*. Cuando las raíces son reales, negativas y distintas, la respuesta es la suma de dos exponenciales que decaen y se dice que está sobreamortiguada. Cuando las raíces son conjugadas compuestas, la respuesta natural es una senoide que decaen exponencialmente y se dice que es subamortiguada u oscilatoria.

Ahora mostremos la ubicación de las raíces de la ecuación característica para las cuatro condiciones: a) no amortiguada,  $\alpha = 0$ ; b) subamortiguada,  $\alpha < \omega_0$ ; c) críticamente amortiguada,  $\alpha = \omega_0$  y d) sobreamortiguada,  $\alpha > \omega_0$ . Estas cuatro condiciones conducen a las ubicaciones de las raíces en el plano  $s$  como se muestra en la figura 9.10-1. Cuando  $\alpha = 0$ , las dos raíces compuestas son  $\pm j\omega_0$ . Cuando  $\alpha < \omega_0$ , las raíces son  $s = -\alpha \pm j\omega_d$ . Cuando  $\alpha = \omega_0$ , hay dos raíces en  $s = -\alpha$ . Por último, cuando  $\alpha > \omega_0$ , hay dos raíces reales,  $s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ .

En la tabla 9.10-1 se presenta un resumen de las ubicaciones de las raíces, el tipo de respuesta, y la forma de la respuesta.

**EJERCICIO 9.10-1** Un circuito  $RLC$  en paralelo tiene  $L = 0.1$  H y  $C = 100$  mF. Determine las raíces de la ecuación característica y trácelas en el plano  $s$  cuando (a)  $R = 0.4 \Omega$  y (b)  $R = 1.0 \Omega$ .

**Respuesta:** (a)  $s = -5, -20$  (figura E 9.10-1)



**FIGURA E 9.10-1**

## 9.11 ¿CÓMO LO PODEMOS COMPROBAR...?

A los ingenieros se les suele solicitar comprobar que la solución de un problema sea la correcta. Por ejemplo, las soluciones propuestas para problemas de diseño se deben comprobar para confirmar que se ha cumplido con todas las especificaciones. Además, se deben revisar los resultados de la computadora para protegerse contra errores de captura de datos, así como las exigencias de los comerciantes, las cuales se deben analizar a fondo.

También a los estudiantes de ingeniería se les pide que verifiquen la exactitud de sus trabajos. Por ejemplo, tomarse un breve lapso antes de terminar un examen permitiría dar una vista rápida e identificar esas soluciones que podrían requerir un poco más de aplicación.

El ejemplo siguiente ilustra técnicas útiles para comprobar las soluciones a los diversos problemas analizados en este capítulo.

Tabla 9.10-1 La respuesta natural de un circuito  $RLC$  en paralelo\*

TIPO DE RESPUESTA	UBICACIÓN DE RAÍZ	FORMA DE RESPUESTA
Sobreamortiguada		
Críticamente amortiguada		
Subamortiguada		
No amortiguada		

\*La  $i(t)$  es la corriente del inductor en el circuito que se muestra en la figura 9.4-1 para las condiciones iniciales  $i(0) = 1$  y  $v(0) = 0$ .

### EJEMPLO 9.11-1 ¿Cómo podemos comprobar una respuesta subamortiguada?

La figura 9.11-1b muestra un circuito  $RLC$ . El voltaje,  $v_s(t)$ , de la fuente de voltaje es la onda cuadrada que se muestra en la figura 9.11-1a. La figura 9.11-2 muestra un trazo de la corriente del inductor,  $i(t)$ , la cual se obtuvo por simulación de este circuito, utilizando PSpice. ¿Cómo podemos comprobar que el trazo de  $i(t)$  es correcto?

#### Solución

Hay que comprobar algunas características del trazo. El trazo indica que los valores de estado estable de la corriente del inductor son  $i(\infty) = 0$  e  $i(\infty) = 200$  mA y que el circuito es no amortiguado. Además, algunos puntos en la

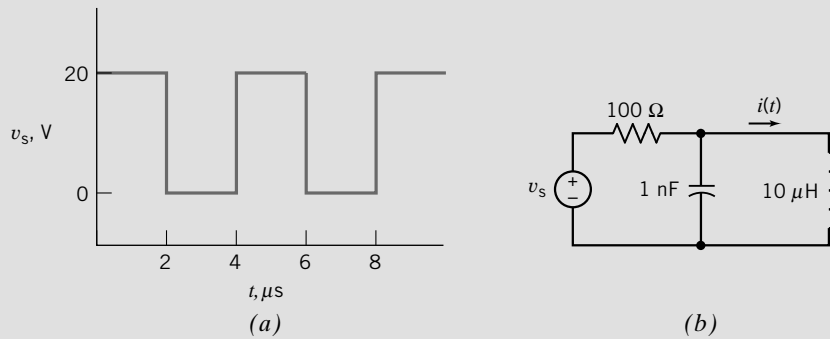


FIGURA 9.11-1 Circuito  $RLC$  (b) excitado por una onda cuadrada (a).

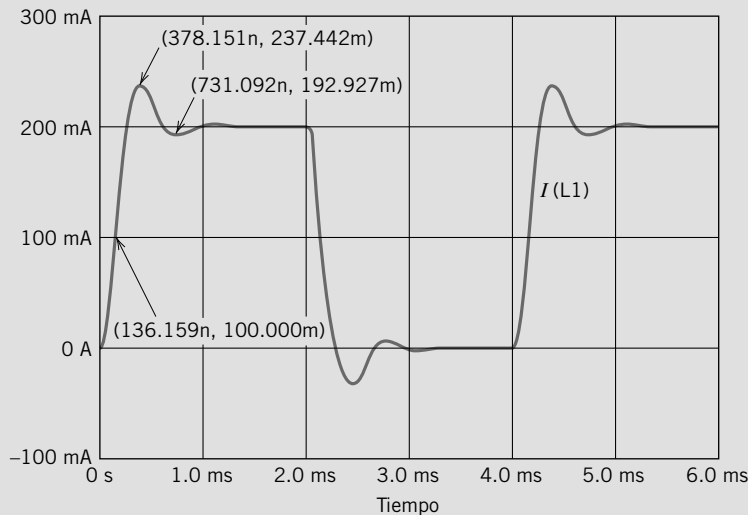


FIGURA 9.11-2 Trazo de PSpice de la corriente del inductor,  $i(t)$ , para el circuito que se muestra en la figura 9.11-1.

respuesta se han etiquetado para dar los valores correspondientes de tiempo y corriente. Estos valores se pueden utilizar para comprobar el valor de la frecuencia resonante amortiguada,  $\omega_d$ .

Si el voltaje de la fuente de voltaje fuera una constante,  $v_s(t) = V_s$ , entonces la corriente del inductor en estado estable sería

$$i(t) = \frac{V_s}{100}$$

Por lo tanto, esperamos que la corriente del inductor en estado estable sea  $i(\infty) = 0$  cuando  $V_f = 0$  V, y que sea  $i(\infty) = 200$  mA cuando  $V_f = 20$  V. El trazo en la figura 9.11-2 muestra que los valores de estado estable de la corriente del inductor son en realidad  $i(\infty) = 0$  e  $i(\infty) = 200$  mA.

El trazo en la figura 9.11-2 muestra una respuesta subamortiguada. El circuito  $RLC$  será subamortiguado si

$$10^{-5} = L < 4R^2C = 4 \times 100^2 \times 10^{-9}$$

Dado que esta desigualdad se satisface, el circuito está en realidad subamortiguado, como lo indica el trazo.

La frecuencia resonante amortiguada,  $\omega_d$ , está dada por

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{10^{-5} \times 10^{-9}} - \left(\frac{1}{2 \times 100 \times 10^{-9}}\right)^2} = 8.66 \times 10^6 \text{ rad/s}$$

El trazo indica que el trazo tiene una máxima en 378 ns, y una mínima en 731 ns. Por consiguiente, el periodo de la oscilación amortiguada se puede aproximar como

$$T_d = 2(731 \times 10^{-9} - 378 \times 10^{-9}) = 706 \times 10^{-9} \text{ s}$$

La frecuencia resonante amortiguada,  $\omega_d$ , se relaciona con  $T_d$  por la ecuación 9.6-9. Por consiguiente,

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{706 \times 10^{-9}} = 8.90 \times 10^6 \text{ rad/s}$$

El valor de  $\omega_d$  obtenido a partir del trazo concuerda con el valor obtenido a partir del circuito. Concluimos que el trazo es correcto

## 9.12 EJEMPLO DE DISEÑO

### DISPOSITIVO DE ENCENDIDO DE LA BOLSA DE AIRE DE UN AUTOMÓVIL

En los automóviles se utilizan ampliamente las bolsas de aire para protección del conductor y el pasajero. Para el encendido del dispositivo de inflado se utiliza un péndulo para conectar un condensador cargado, como se muestra en la figura 9.12-1. La bolsa de aire del automóvil se infla mediante un dispositivo explosivo que se enciende por la energía absorbida por el dispositivo resistivo representado por  $R$ . Para el inflado se requiere que la energía disipada en  $R$  sea de al menos 1 J. Se necesita que el dispositivo de ignición se dispare en un lapso de 0.1 s. Seleccione los  $L$  y  $C$  que cumplan con las especificaciones.

#### Describe la situación y los supuestos

1. El interruptor se cambió de la posición 1 a la posición 2 en  $t = 0$ .
2. El interruptor estuvo conectado a la posición 1 por mucho tiempo.
3. Un circuito  $RLC$  en paralelo ocurre para  $t \geq 0$ .

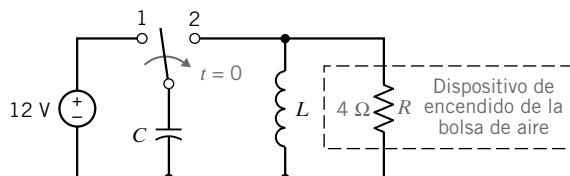


FIGURA 9.12-1 Dispositivo de encendido de la bolsa de aire de un automóvil.



### Establezca el objetivo

Seleccione  $L$  y  $C$  de modo que la energía almacenada en el condensador se transmita rápidamente al dispositivo resistivo  $R$ .

### Genere un plan

1. Seleccione  $L$  y  $C$  de modo que se obtenga una respuesta subamortiguada con un periodo menor que o igual a 0.4 s ( $T \leq 0.4$  s).
2. Despeje  $v(t)$  e  $i(t)$  para el resistor  $R$ .

### Actúe sobre el plan

Supongamos que el voltaje inicial del condensador es  $v(0) = 12$  V e  $i_L(0) = 0$  porque el interruptor está en la posición 1 por mucho tiempo antes de que  $t = 0$ . La respuesta del circuito  $RLC$  en paralelo para una respuesta subamortiguada es de la forma

$$v(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \operatorname{sen} \omega_d t) \quad (9.12-1)$$

Esta respuesta natural se obtiene cuando  $\alpha^2 < \omega_0^2$  o  $L < 4R^2C$ . Elegimos una respuesta subamortiguada para nuestro diseño pero reconocemos que una respuesta sobreamortiguada o críticamente amortiguada puede satisfacer los objetivos del diseño del circuito. Además, reconocemos que los valores de los parámetros seleccionados a continuación sólo representan una solución aceptable.

Dado que queremos una respuesta rápida, seleccionaremos  $\alpha = 2$  (una constante de tiempo de 1/2 s) donde  $\alpha = 1/(2RC)$ . Por lo tanto, tenemos

$$C = \frac{1}{2R\alpha} = \frac{1}{16} \text{ F}$$

Recuerde que  $\omega_0^2 = 1/(LC)$  y que se requiere que  $\alpha^2 < \omega_0^2$ . Como queremos una respuesta rápida, seleccionamos la frecuencia natural  $\omega_0$  para que (recuerde  $T \approx 0.4$  s)

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi \text{ rad/s}$$

Por consiguiente, obtenemos

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{25\pi^2(1/16)} = 0.065 \text{ H}$$

Así, utilizaremos  $C = 1/16$  F y  $L = 65$  mH. Entonces encontramos que  $\omega_d = 15.58$  rad/s y, utilizando la ecuación 9.6-5, tenemos

$$v(t) = e^{-2t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \operatorname{sen} \omega_d t) \quad (9.12-2)$$

Entonces  $B_1 = v(0) = 12$  y

$$\omega_d B_2 = \alpha B_1 - \frac{B_1}{RC} = (2 - 4)12 = -24$$

Por consiguiente,  $B_2 = -24/15.58 = -1.54$ . Porque  $B_2 \ll B_1$ , podemos aproximar la ecuación 9.12-2 como

$$v(t) \cong 12e^{-2t} \cos \omega_d t \text{ V}$$

La potencia es entonces

$$p = \frac{v^2}{R} = 36e^{-4t} \cos^2 \omega_d t \text{ W}$$

### Verifique la solución propuesta

El voltaje y la corriente actual para el resistor  $R$  se muestran en la figura 9.12-2 para los primeros 100 ms. Si bosquejamos el producto de  $v$  e  $i$  para los primeros 100 ms, obtenemos una

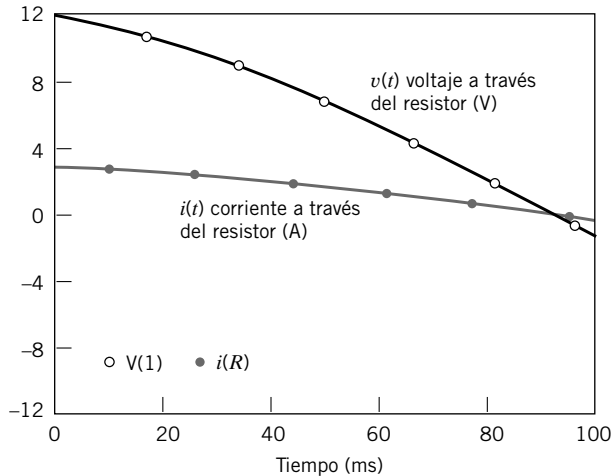


FIGURA 9.12-2 La respuesta del circuito RLC.

aproximación lineal que declina de 36 W en  $t = 0$  a 0 W en  $t = 95$  ms. Entonces, la energía absorbida por el resistor sobre los primeros 100 ms es

$$w \cong \frac{1}{2}(36)(0.1 \text{ s}) = 1.8 \text{ J}$$

Por consiguiente, la bolsa de aire se disparará en menos de 0.1 s, y alcanzaremos nuestro objetivo.

### 9.13 RESUMEN

- Los circuitos de segundo orden son circuitos que se representan por una ecuación diferencial, por ejemplo,

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\alpha \frac{d}{dt}x(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

donde  $x(t)$  es la corriente o el voltaje de salida del circuito y  $f(t)$  es la entrada al circuito. La salida del circuito, también llamada la respuesta del circuito, puede ser la corriente o el voltaje de cualquier dispositivo en el circuito. Con frecuencia se selecciona que la salida sea la corriente de un inductor o el voltaje de un condensador. La entrada al circuito la proporcionan los voltajes de las fuentes de voltaje independientes y/o las corrientes de fuentes de corriente independientes. Los coeficientes de esta ecuación diferencial tienen nombres: a  $\alpha$  se le denomina coeficiente de amortiguamiento y a  $\omega_0$  se le llama la frecuencia resonante.

- Obtener la ecuación diferencial para representar un circuito arbitrario puede convertirse en un reto. Este capítulo presenta tres métodos para obtener esa ecuación diferencial: el método directo (sección 9.2), el método operador (sección 9.2) y el método de variable de estado (sección 9.10).
- La ecuación característica de un circuito de segundo orden es

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

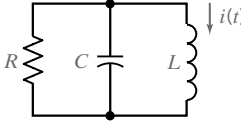
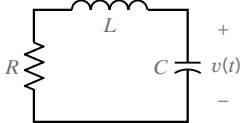
Esta ecuación de segundo orden tiene dos soluciones,  $s_1$  y  $s_2$ . Estas soluciones se denominan frecuencias naturales del circuito de segundo orden.

- Los circuitos de segundo orden se clasifican en sobreamortiguados, críticamente amortiguados, o subamortiguados. Un circuito de segundo orden está sobreamortiguado cuando  $s_1$  y  $s_2$  son reales y desiguales, o, de manera equivalente,  $\alpha > \omega_0$ . Un circuito de segundo orden está críticamente amortiguado cuando  $s_1$  y  $s_2$  son reales e iguales, o, de manera equivalente,  $\alpha = \omega_0$ . Un circuito de segundo orden está subamortiguado cuando  $s_1$  y  $s_2$  son complejos conjugados, o, de manera equivalente,  $\alpha < \omega_0$ .
- La tabla 9.13-1 describe las frecuencias naturales de circuitos serie RLC en paralelo y en serie sobreamortiguados, subamortiguados y críticamente amortiguados.
- La respuesta total de un circuito de segundo orden es la suma de la respuesta natural y la respuesta forzada

$$x = x_n + x_f$$

La forma de la respuesta natural depende de las frecuencias naturales del circuito, como se resume en la tabla 9.13-2. La forma de la respuesta forzada depende de la entrada del circuito, como sintetiza la tabla 9.13-3.

**Tabla 9.13-1 Frecuencias naturales de circuitos serie RLC en serie y en paralelo**

	RLC EN PARALELO	RLC EN SERIE
Circuito		
Ecuación diferencial	$\frac{d^2}{dt^2}i(t) + \frac{1}{RC}\frac{d}{dt}i(t) + \frac{1}{LC}i(t) = 0$	$\frac{d^2}{dt^2}v(t) + \frac{R}{L}\frac{d}{dt}v(t) + \frac{1}{LC}v(t) = 0$
Ecuación característica	$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0$	$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$
Coefficiente de amortiguamiento, rad/s	$\alpha = \frac{1}{2RC}$	$\alpha = \frac{R}{2L}$
Frecuencia resonante, rad/s	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Frecuencia resonante amortiguada, rad/s	$\omega_d = \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$	$\omega_d = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$
Frecuencias naturales: condición sobreamortiguada	$s_1, s_2 = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$ cuando $R < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$	$s_1, s_2 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$ cuando $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$
Frecuencias naturales: condición críticamente amortiguada	$s_1 = s_2 = -\frac{1}{2RC} \text{ cuando } R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$	$s_1 = s_2 = -\frac{1}{2RC} \text{ cuando } R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$
Frecuencias naturales: condición subamortiguada	$s_1, s_2 = -\frac{1}{2RC} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}$ cuando $R > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$	$s_1, s_2 = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ cuando $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

**Tabla 9.13-2 Respuesta natural de circuitos de segundo orden**

CONDICIÓN	FRECUENCIAS NATURALES	RESPUESTA NATURAL, $x_n$
Sobreamortiguada	$s_1, s_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$	$A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$
Críticamente amortiguada	$s_1, s_2 = -\alpha$	$(A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t}$
Subamortiguada	$s_1, s_2 = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_d$	$(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t)e^{-\alpha t}$

**Tabla 9.13-3 Respuesta forzada de circuitos de segundo orden**

	ENTRADA, $f(t)$	RESPUESTA FORZADA, $x_f$
Constante	$K$	$A$
Pendiente	$K t$	$A + Bt$
Sinusoidal	$K \cos \omega t, K \sin \omega t, \text{ o bien } K \cos(\omega t + \theta)$	$A \cos \omega t + B \sin \omega t$
Exponencial	$K e^{-bt}$	$A e^{-bt}$

PROBLEMAS

**Sección 9.2 Ecuación diferencial para circuitos con dos elementos de almacenamiento de energía**

**P 9.2-1** Encuentre la ecuación diferencial para el circuito que se muestra en la figura P 9.2-1 aplicando el método directo.

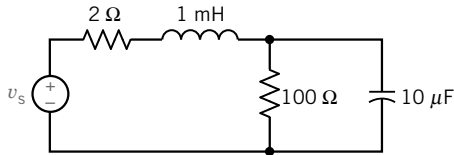


Figura P 9.2-1

**P 9.2-2** Encuentre la ecuación diferencial para el circuito que se muestra en la figura P 9.2-2 aplicando el método de operador.

*Respuesta:*

$$\frac{d^2}{dt^2} i_L(t) + 11,000 \frac{d}{dt} i_L(t) + 1.1 \times 10^8 i_L(t) = 10^8 i_s(t)$$

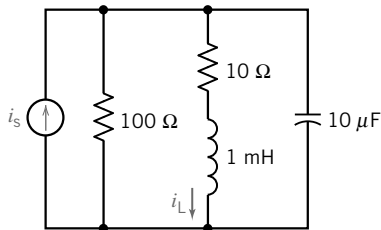


Figura P 9.2-2

**P 9.2-3** Encuentre la ecuación diferencial para  $i_L(t)$  para  $t > 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 9.2-3.

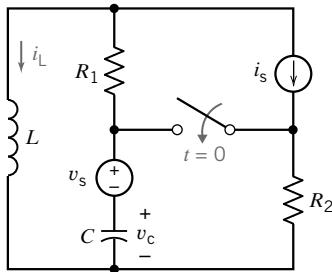


Figura P 9.2-3

**P 9.2-4** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 9.2-4 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $V_s$ . La salida es la corriente  $i(t)$  del inductor. Represente el circuito con una ecuación diferencial de segundo orden que muestre cómo se relaciona la salida de este circuito con la entrada para  $t > 0$ .

*Sugerencia:* Siga el método directo.

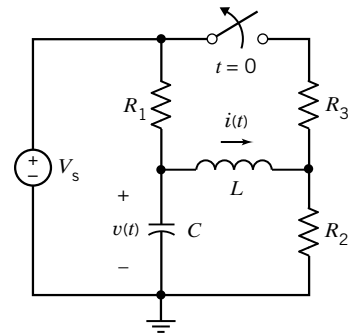


Figura P 9.2-4

**P 9.2-5** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 9.2-5 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . La salida es el voltaje  $v(t)$  del condensador. Represente el circuito con una ecuación diferencial de segundo orden que muestre cómo se relaciona la salida de este circuito con la entrada para  $t > 0$ .

*Sugerencia:* Siga el método directo.

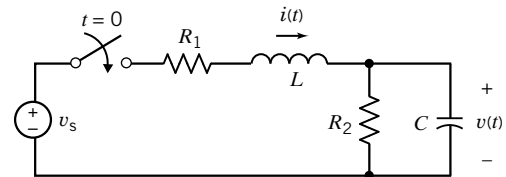


Figura P 9.2-5

**P 9.2-6** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 9.2-6 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . La salida es la corriente  $i(t)$  del inductor. Represente el circuito con una ecuación diferencial de segundo orden que muestre cómo se relaciona la salida de este circuito con la entrada para  $t > 0$ .

*Sugerencia:* Siga el método directo.

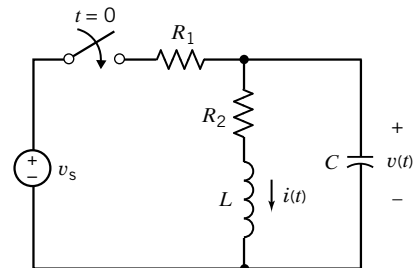


Figura P 9.2-6

**P 9.2-7** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 9.2-7 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . La salida es la corriente  $i(t)$  del inductor. Represente el circuito con una ecuación diferencial de segundo orden que muestre cómo se relaciona la salida de este circuito con la entrada para  $t > 0$ .

*Sugerencia:* Siga el método de operador.

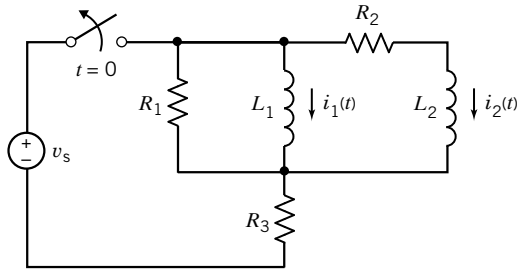


Figura P 9.2-7

**P 9.2-8** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 9.2-8 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . La salida es el voltaje  $v(t)$  del condensador. Represente el circuito con una ecuación diferencial de segundo orden que muestre cómo se relaciona la salida de este circuito con la entrada para  $t > 0$ .

*Sugerencia:* Siga el método de operador.

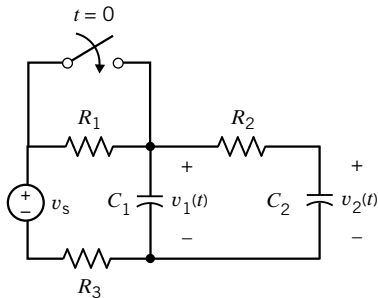


Figura P 9.2-8

**P 9.2-9** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 9.2-9 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . La salida es el voltaje  $v(t)$  del condensador. Represente el circuito con una ecuación diferencial de segundo orden que muestre cómo se relaciona la salida de este circuito con la entrada para  $t > 0$ .

*Sugerencia:* Siga el método directo.

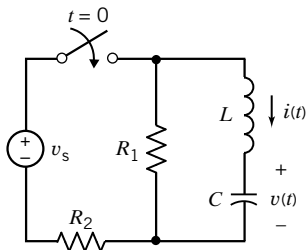


Figura P 9.2-9

**P 9.2-10** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 9.2-10 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . La salida es el voltaje  $v(t)$  del condensador. Represente el circuito con una ecuación diferencial de segundo orden que muestre cómo se relaciona la salida de este circuito con la entrada para  $t > 0$ .

*Sugerencia:* Encuentre un circuito equivalente de Thévenin.

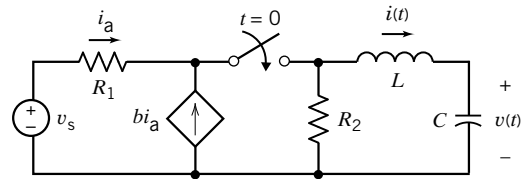


Figura P 9.2-10

**P 9.2-11** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 9.2-11 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s(t)$ . La salida es el voltaje  $v_2(t)$ . Derive la ecuación diferencial de segundo orden que muestre cómo se relaciona la salida de este circuito con la entrada.

*Sugerencia:* Siga el método directo.

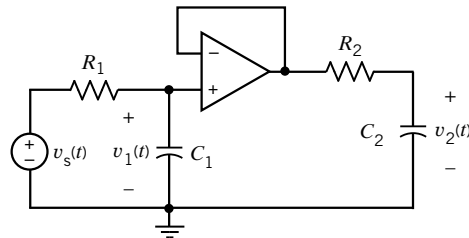


Figura P 9.2-11

**P 9.2-12** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 9.2-12 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s(t)$ . La salida es el voltaje  $v_o(t)$ . Derive la ecuación diferencial de segundo orden que muestre cómo se relaciona la salida de este circuito con la entrada.

*Sugerencia:* Siga el método de operador.

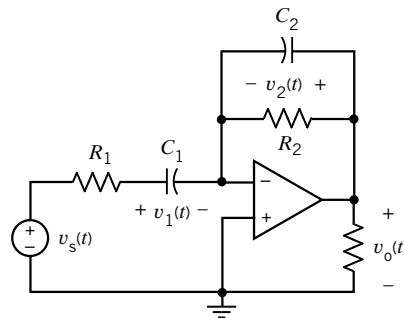


Figura P 9.2-12

**P 9.2-13** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 9.2-13 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s(t)$ . La salida es el voltaje  $v_o(t)$ . Derive la ecuación diferencial de segundo orden que muestre cómo se relaciona la salida de este circuito con la entrada.

*Sugerencia:* Siga el método directo.

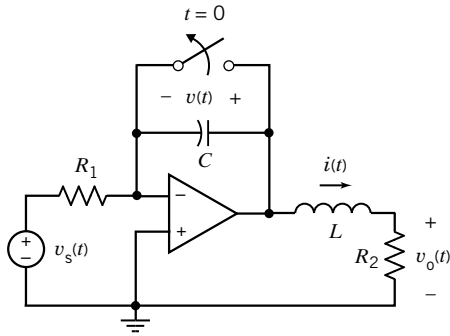


Figura P 9.2-13

**P 9.2-14** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 9.2-14 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s(t)$ . La salida es el voltaje  $v_2(t)$ . Derive la ecuación diferencial de segundo orden que muestre cómo se relaciona la salida de este circuito con la entrada.

*Sugerencia:* Siga el método directo.

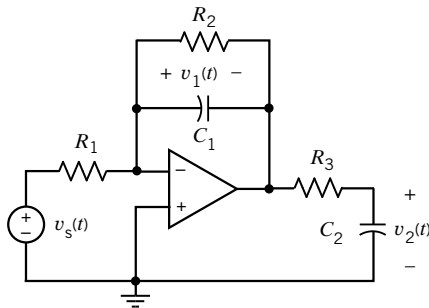


Figura P 9.2-14

**P 9.2-15** Encuentre la ecuación diferencial de segundo orden de  $i_2$  para el circuito de la figura 9.2-15 aplicando el método de operador. Recuerde que el operador para la integral es  $1/s$ .

*Respuesta:*  $3 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + 4 \frac{d i_2}{dt} + 2 i_2 = \frac{d^2 v_s}{dt^2}$

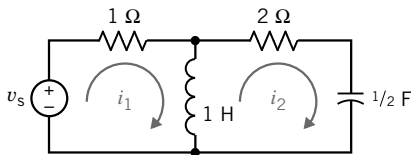


Figura P 9.2-15

**Sección 9.3 Solución de la ecuación diferencial de segundo orden: la respuesta natural**

**P 9.3-1** Encuentre la ecuación característica y sus raíces para el circuito de la figura P 9.2-2.

**P 9.3-2** Encuentre la ecuación característica y sus raíces para el circuito de la figura P 9.3-2.

*Respuesta:*  $s^2 + 400s + 3 \times 10^4 = 0$   
raíces:  $s = -300, -100$

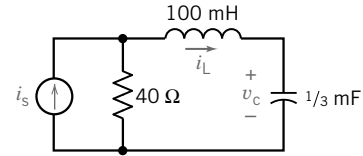


Figura P 9.3-2

**P 9.3-3** Encuentre la ecuación característica y sus raíces para el circuito que se muestra en la figura P 9.3-3.

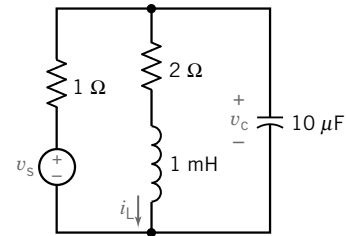


Figura P 9.3-3

**P 9.3-4** La fabricante alemana de automóviles Volkswagen, en su deseo de hacer automóviles más eficientes, lo ha logrado con un auto cuyo motor ahorra energía al apagarse por sí solo en los semáforos. El sistema de arranque y paro surge de una campaña en su mercado mundial para desarrollar automóviles que consuman menos combustible y contaminen menos que los vehículos en uso actualmente. El control de paro y arranque de la transmisión tiene un mecanismo que siente cuando el auto no necesita gasolina: al deslizarse cuesta abajo y permanecer quieto en un cruce. El motor se detiene, pero un pequeño volante de arranque queda girando, de modo que la potencia se restaure rápidamente cuando el conductor toque el acelerador.

En la figura P 9.3-4 se muestra un modelo de circuito de paro y arranque. Determine la ecuación característica y la frecuencia natural para el circuito.

*Respuesta:*  $s^2 + 20s + 400 = 0$   
 $s = -10 \pm j17.3$

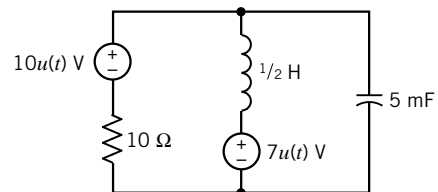


Figura P 9.3-4 Circuito de paro y arranque.

**Sección 9.4 Respuesta natural del circuito RCL en paralelo no forzado**

**P 9.4-1** Determine  $v(t)$  para el circuito de la figura P 9.4-1 cuando  $L = 1$  H y  $v_f = 0$  para  $t > 0$ . Las condiciones iniciales son  $v(0) = 6$  V y  $dv/dt(0) = -3$  000 V/s.

*Respuesta:*  $v(t) = -2e^{-100t} + 8e^{-400t}$  V

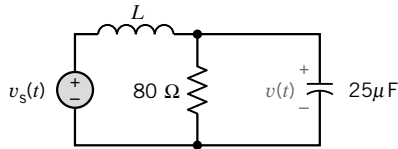


Figura P 9.4-1

**P 9.4-2** En la figura P 9.4-2 se muestra un circuito  $RLC$ , en el cual  $v(0) = 2$  V. El interruptor ha estado abierto mucho tiempo antes de cerrarse en  $t = 0$ . Determine y trace  $v(t)$ .

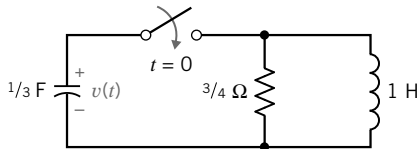


Figura P 9.4-2

**P 9.4-3** Determine  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  para el circuito de la figura P 9.4-3 cuando  $i_1(0) = i_2(0) = 11$  A.

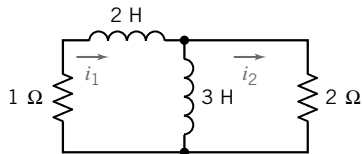


Figura P 9.4-3

**P 9.4-4** El circuito que se muestra en la figura P 9.4-4 contiene un interruptor que a veces está abierto y a veces cerrado. Determine el factor de amortiguamiento,  $\alpha$ , la frecuencia resonante,  $\omega_0$ , y la frecuencia resonante amortiguada  $\omega_d$ , del circuito cuando (a) el interruptor está abierto y (b) cuando está cerrado.

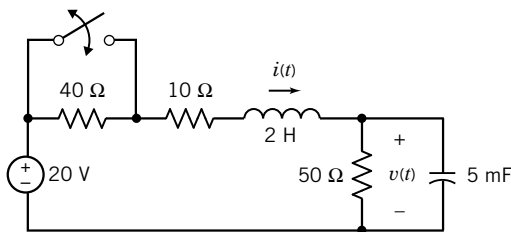


Figura P 9.4-4

**P 9.4-5** El circuito que se muestra en la figura P 9.4-5 se utiliza en aviones para detectar fumadores que subrepticamente encienden algo antes de que den siquiera una sola fumada. El sensor activa el interruptor, y el cambio en el voltaje  $v(t)$  activa una luz en la estación del ayudante de vuelo. Determine la respuesta natural  $v(t)$ .

*Respuesta:*  $v(t) = -1.16e^{-2.7t} + 1.16e^{-37.3t}$  V

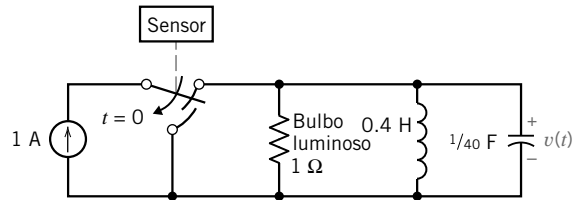


Figura P 9.4-5 Detector de humo.

## Sección 9.5 Respuesta natural del circuito $RLC$ en paralelo no forzado críticamente amortiguado

**P 9.5-1** Encuentre  $v_c(t)$  para  $t > 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 9.5-1.

*Respuesta:*  $v_c(t) = (3 + 6000t)e^{-2000t}$  V

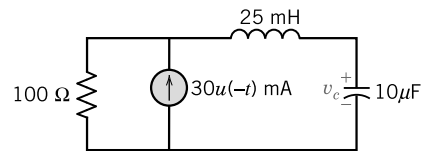


Figura P 9.5-1

**P 9.5-2** Encuentre  $v_c(t)$  para  $t > 0$  para el circuito de la figura P 9.5-2. Suponga que en  $t = 0^-$  se dan las condiciones de estado estable.

*Respuesta:*  $v_c(t) = -8te^{-2t}$  V

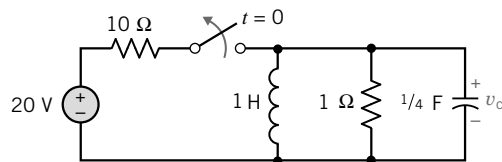


Figura P 9.5-2

**P 9.5-3** Con frecuencia, la policía utiliza pistolas de aturdimiento para incapacitar potencialmente a malhechores peligrosos. El dispositivo manual proporciona una serie de impulsos de alto voltaje y baja corriente. La potencia de los impulsos no es letal, pero sí la suficiente para que los músculos se contraigan y la persona quede fuera de combate. El dispositivo proporciona un impulso de más de 50 000 voltios, y una corriente de 1 mA fluye a través de un arco. En la figura P 9.5-3 se presenta un modelo del circuito para un periodo. Encuentre  $v(t)$  para  $0 < t < 1$  ms. El resistor  $R$  representa la abertura de la chispa. Seleccione  $C$  de modo que la respuesta sea críticamente amortiguada.

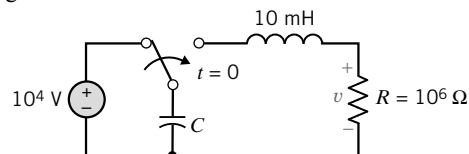


Figura P 9.5-3

**P 9.5-4** Reconsidere el problema 9.4-1 cuando  $L = 640$  mH y los demás parámetros permanecen sin cambios.

*Respuesta:*  $v(t) = (6 - 1500t)e^{-250t}$  V

**P 9.5-5** El encendido de un automóvil utiliza un disparador electromagnético. El circuito disparador  $RLC$  que se muestra en la figura P 9.5-5 tiene una entrada de paso de 6 V, y  $v(0) = 2$  V, e  $i(0) = 0$ . Se debe elegir la resistencia  $R$  de  $2 \Omega < R < 7 \Omega$  de modo que la corriente  $i(t)$  supere los 0.6 A para más de 0.5 s para activar el disparador. Se requiere una respuesta críticamente amortiguada  $i(t)$  para evitar oscilaciones en la corriente del disparador. Seleccione  $R$  y determine y trace  $i(t)$ .

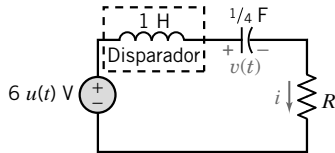


Figura P 9.5-5

**Sección 9.6 Respuesta natural de un circuito  $RLC$  en paralelo no forzado subamortiguado**

**P 9.6-1** Un sistema de comunicaciones desde una estación espacial utiliza pulsos cortos para controlar un robot que opere en el espacio. El circuito del transmisor está modelado en la figura P 9.6-1. Encuentre el voltaje de salida  $v_c(t)$  para  $t > 0$ . Suponga condiciones de estado estable en  $t = 0^-$ .

*Respuesta:*  $v_c(t) = e^{-400t}[3 \cos 300t + 4 \sin 300t]$  V

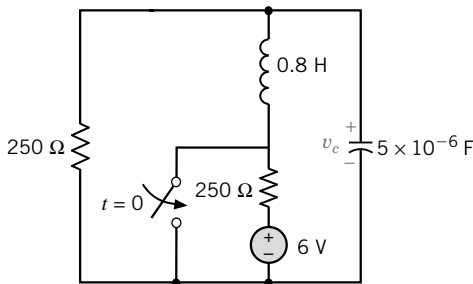


Figura P 9.6-1

**P 9.6-2** El interruptor del circuito que se muestra en la figura P 9.6-2 se abre en  $t = 0$ . Determine y trace  $v(t)$  cuando  $C = 1/4$  F. Suponga estado estable en  $t = 0^-$ .

*Respuesta:*  $v(t) = -4e^{-2t} \sin 2t$  V

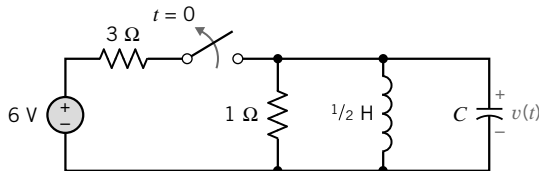
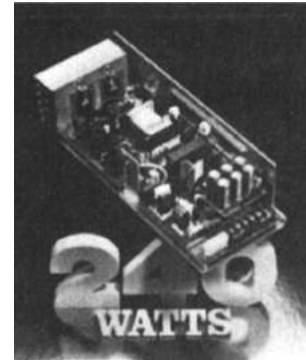


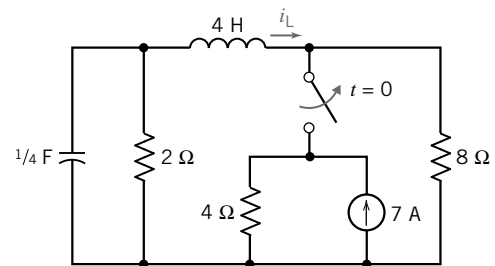
Figura P 9.6-2

**P 9.6-3** En la figura P 9.6-3a se muestra un alimentador de potencia de 240 W. Este circuito emplea un inductor y un condensador grandes. El modelo del circuito se muestra en la figura P 9.6-3b. Encuentre  $i_L(t)$  para  $t > 0$  para el circuito de la figura P 9.6-3b. Suponga condiciones de estado estable en  $t = 0^-$ .

*Respuesta:*  $i_L(t) = e^{-2t}(-4 \cos t + 2 \sin t)$  A



(a)



(b)

Figura P 9.6-3 (a) Alimentador de potencia de 240 W. Cortesía de Kepco, Inc. (b) Modelo del circuito alimentador de potencia.

**P 9.6-4** La respuesta natural de un circuito  $RLC$  en paralelo se midió y trazó como se muestra en la figura P 9.6-4. Utilice esta gráfica y determine una expresión para  $v(t)$ .

*Sugerencia:* Observe que  $v(t) = 260$  mV en  $t = 5$  ms y que  $v(t) = -200$  mV en  $t = 7.5$  ms. Incluso, que el tiempo entre la primera y la tercera intersecciones en cero es de 5 ms.

*Respuesta:*  $v(t) = 544e^{-276t} \sin 1257t$  V

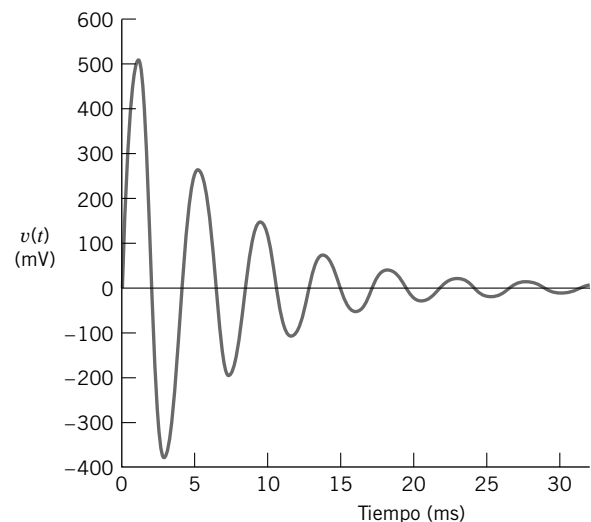
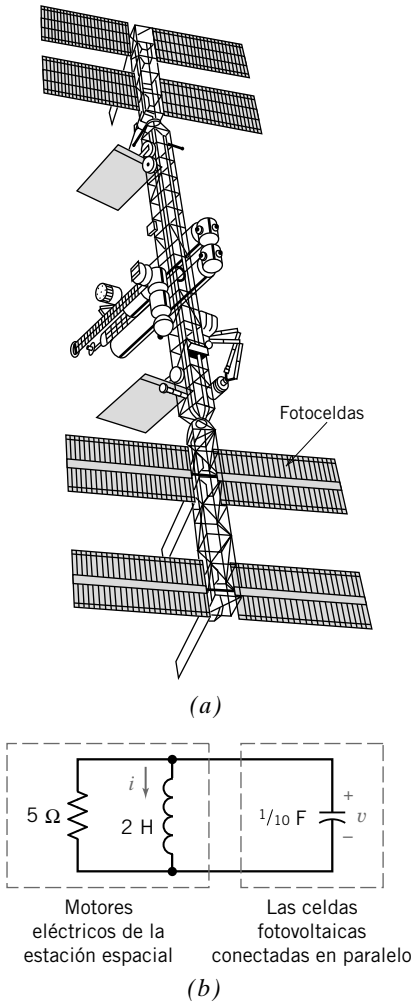


Figura P 9.6-4 La respuesta natural de un circuito  $RLC$  en paralelo.



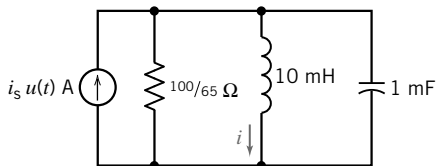
**P 9.6-5** Las celdas fotovoltaicas de la estación espacial propuesta que se muestra en la figura P 9.6-5a proporcionan el voltaje  $v(t)$  del circuito que se muestra en la figura 9.6-5b. La estación espacial pasa detrás de la sombra de la Tierra (en  $t = 0$ ) con  $v(0) = 2 \text{ V}$  e  $i(0) = 1/10 \text{ A}$ . Determine y bosqueje  $v(t)$  para  $t > 0$ .



**Figura P 9.6-5** (a) Fotoceldas en la estación espacial. (b) Circuito con fotoceldas.

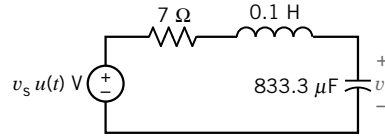
**Sección 9.7 Respuesta forzada de un circuito RLC**

**P 9.7-1** Determine la respuesta forzada para la corriente  $i$  del inductor cuando (a)  $i_s = 1 \text{ A}$ ; (b)  $i_s = 0.5t \text{ A}$  y (c)  $i_s = 2e^{-250t} \text{ A}$  para el circuito de la figura P 9.7-1.



**Figura P 9.7-1**

**P 9.7-2** Determine la respuesta forzada para el voltaje  $v_f$  del condensador para el circuito de la figura P 9.7-1 cuando (a)  $v_s = 2 \text{ V}$ ; (b)  $v_s = 0.2t \text{ V}$  y (c)  $v_s = 1e^{-30t} \text{ V}$ .



**Figura P 9.7-2**

**P 9.7-3** Un circuito se describe para  $t > 0$  por la ecuación

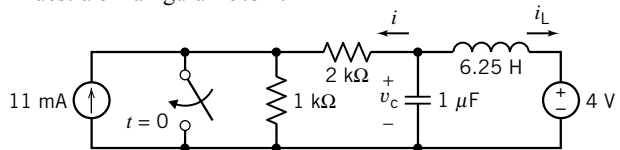
$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 5 \frac{dv}{dt} + 6v = v_s$$

Encuentre la respuesta forzada  $v_f$  para  $t > 0$  cuando (a)  $v_s = 8 \text{ V}$ ; (b)  $v_s = 3e^{-4t}$  y (c)  $v_s = 2e^{-2t} \text{ V}$

**Respuesta:** (a)  $v_f = 8/6 \text{ V}$ , (b)  $v_f = \frac{3}{2}e^{-4t} \text{ V}$ , (c)  $v_f = 2te^{-2t}$

**Sección 9.8 Respuesta total de un circuito RLC**

**P 9.8-1** Determine  $i(t)$  para  $t > 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 9.8-1.

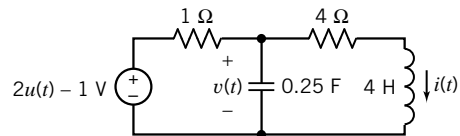


**Figura P 9.8-1**

**P 9.8-2** Determine  $i(t)$  para  $t > 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 9.8-2.

**Sugerencia:** Muestre que  $1 = \frac{d^2}{dt^2} i(t) + 5 \frac{d}{dt} i(t) + 5i(t)$  para  $t > 0$

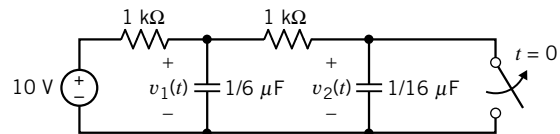
**Respuesta:**  $i(t) = 0.2 + 0.246 e^{-3.62t} - 0.646 e^{-1.38t} \text{ A}$  para  $t > 0$ .



**Figura P 9.8-2**

**P 9.8-3** Determine  $v_1(t)$  para  $t > 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 9.8-3.

**Respuesta:**  $v_1(t) = 10 + e^{-2.4 \times 10^4 t} - 6 e^{-4 \times 10^3 t} \text{ V}$  para  $t > 0$



**Figura P 9.8-3**

**P 9.8-4** Encuentre  $v(t)$  para  $t > 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 9.8-4 cuando  $v(0) = 1 \text{ V}$  e  $i_L(0) = 0$ .

Respuesta:  $v = 25e^{-3t} - \frac{1}{17}[429e^{-4t} - 21 \cos t + 33 \sin t]$  V

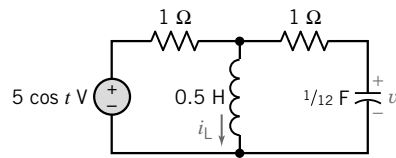


Figura P 9.8-4

**P 9.8-5** Encuentre  $v(t)$  para  $t > 0$  para el circuito de la figura P 9.8-5.

Respuesta:  $v(t) = [-16e^{-t} + 16e^{-3t} + 8]u(t) + [16e^{-(t-2)} - 16e^{-3(t-2)} - 8]u(t-2)$  V

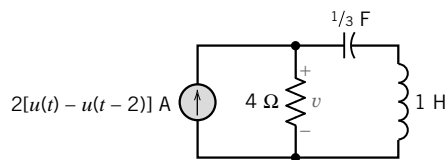


Figura P 9.8-5

**P 9.8-6** El sistema de alimentación de potencia de una estación experimental está modelado por el circuito que se muestra en la figura p 9.8-6. Encuentre  $v(t)$  para  $t > 0$ . Suponga condiciones de estado estable en  $t = 0^-$ .

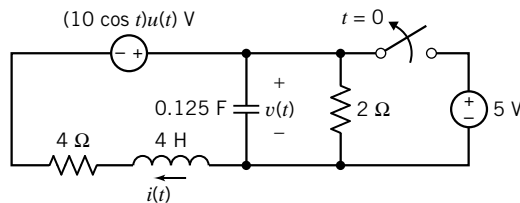


Figura P 9.8-6

**P 9.8-7** Encuentre  $v_c(t)$  para  $t > 0$  en el circuito de la figura P 9.8-7 cuando (a)  $C = 1/18$  F; (b)  $C = 1/10$  F y (c)  $C = 1/20$  F.

Respuestas:  $v_c(t) = 8e^{-3t} + 24te^{-3t} - 8$  V  
 $v_c(t) = 10e^{-t} - 2e^{-5t} - 8$  V  
 $v_c(t) = e^{-3t}(8 \cos t + 24 \sin t) - 8$  V

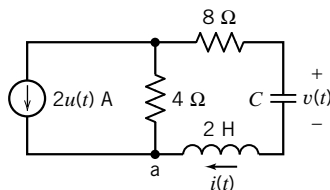


Figura P 9.8-7

**P 9.8-8** Encuentre  $v_c(t)$  para  $t > 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 9.8-8.

Sugerencia:  $2 = \frac{d^2}{dt^2}v_c(t) + 6\frac{d}{dt}v_c(t) + 2v_c(t)$  para  $t > 0$

Respuesta:  $v_c(t) = 0.123e^{-5.65t} + 0.877e^{-0.35t} + 1$  V para  $t > 0$ .

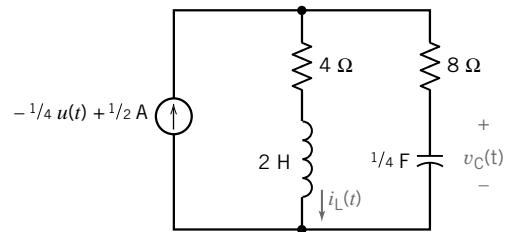


Figura P 9.8-8

**P 9.8-9** En la figura 9.8-9, determine la corriente  $i(t)$  del inductor cuando  $i_s = 5u(t)$  A. Suponga que  $i(0) = 0$ ,  $v_c(0) = 0$ .

Respuesta:  $i(t) = 5 + e^{-2t}[-5 \cos 5t - 2 \sin 5t]$  A

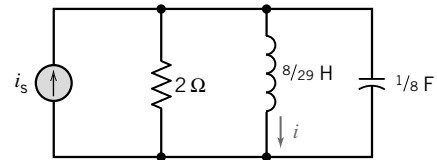


Figura P 9.8-9

**P 9.8-10** Los ferrocarriles utilizan ampliamente una identificación automática de los automotores. Cuando un tren pasa por una estación de lectura, un detector de ruedas activa un módulo de radiofrecuencia. La antena del módulo, como se muestra en la figura 9.8-10a, transmite y recibe una señal que rebota del radiofaro de respuesta de la locomotora. Un

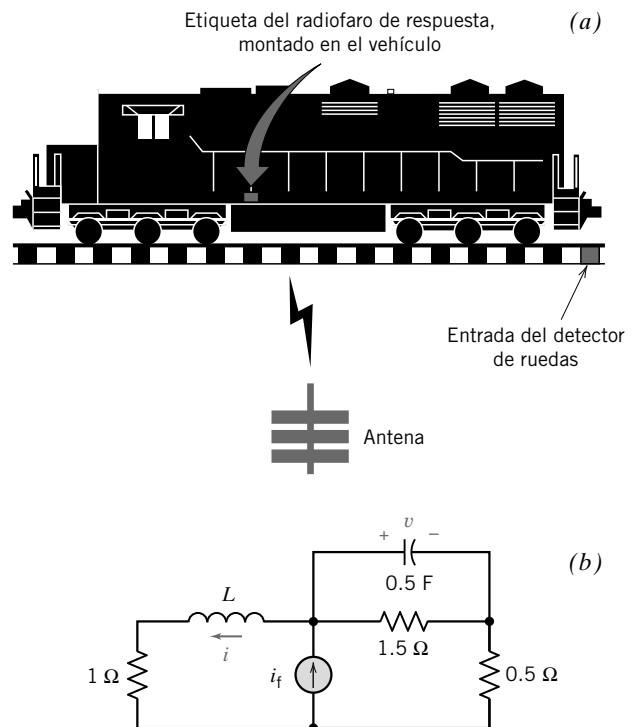


Figura P 9.8-10 (a) Sistema de identificación del ferrocarril. (b) Circuito del radiofaro de respuesta.

procesador de seguimiento transforma la señal recibida en información útil que consiste en la ubicación del tren, velocidad y dirección del viaje. El ferrocarril utiliza esta información para programar locomotoras, trenes, tripulaciones y equipo, de una manera más eficiente.

En la figura P 9.8-10b se muestra un circuito de radiofaro de respuesta propuesto con una bobina de radiofaro grande de  $L = 5$  H. Determine  $i(t)$  y  $v(t)$ . La señal recibida es  $i_s = 9 + 3e^{-2t} u(t)$  A.

**P 9.8-11** Determine  $v(t)$  para  $t > 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 9.8-11.

*Respuesta:*  $v_c(t) = 0.75 e^{-4t} - 6.75 e^{-36t} + 16$  V para  $t > 0$

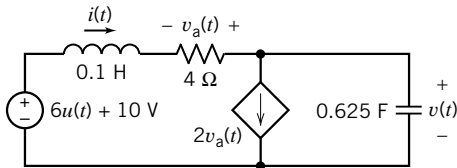


Figura P 9.8-11

**P 9.8-12** El circuito que se muestra en la figura P 8.9-12 se encuentra en estado estable antes de que se abra el interruptor. La corriente del inductor está dada para

$$i(t) = 240 + 193e^{-6.25t} \cos(9.27t - 102^\circ) \text{ mA para } t \geq 0$$

Determine los valores de  $R_1$ ,  $R_3$ ,  $C$  y  $L$ .

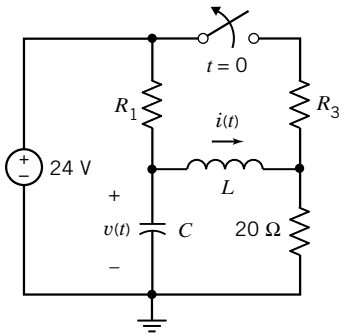


Figura P 9.8-12

**P 9.8-13** El circuito que se muestra en la figura P 8.9-13 se encuentra en estado estable antes de que se abra el interruptor. Determine la corriente del inductor  $i(t)$ , para  $t > 0$ .

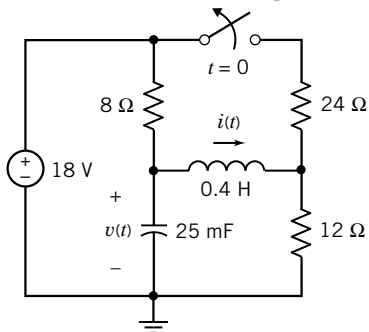


Figura P 9.8-13

**\*P 9.8-14** El circuito que se muestra en la figura P 8.9-14 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre. Determine el voltaje del condensador  $v(t)$ , para  $t > 0$ .

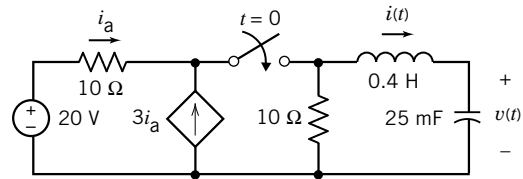


Figura P 9.8-14

**P 9.8-15** El circuito que se muestra en la figura P 8.9-15 se encuentra en estado estable antes de que se cierre el interruptor. Determine el voltaje del condensador  $v(t)$ , para  $t > 0$ .

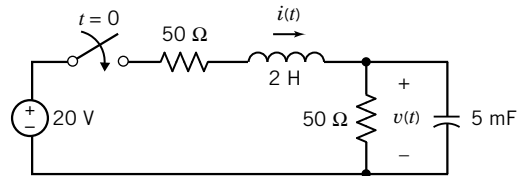


Figura P 9.8-15

**P 9.8-16** El circuito que se muestra en la figura P 8.9-16 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre. Determine la corriente del inductor  $i(t)$ , para  $t > 0$ .

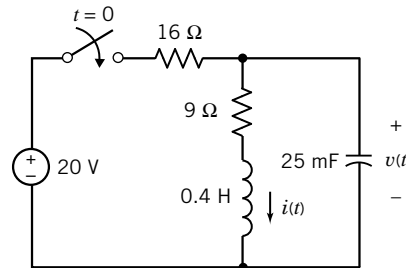


Figura P 9.8-16

**P 9.8-17** El circuito que se muestra en la figura P 8.9-17 se encuentra en estado estable antes de que se abra el interruptor. Determine la corriente del inductor  $i_2(t)$ , para  $t > 0$ .

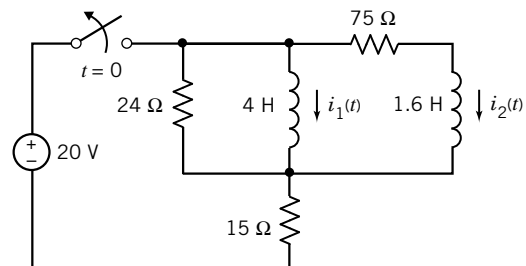


Figura P 9.8-17

**P 9.8-18** El circuito que se muestra en la figura P 8.9-18 se encuentra en estado estable antes de que se cierre el interruptor. Determine el voltaje del condensador  $v(t)$ , para  $t > 0$ .

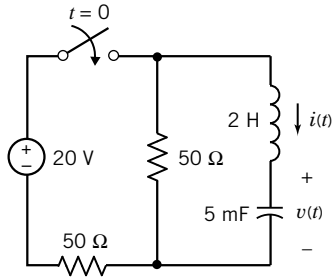


Figura P 9.8-18

**P 9.8-19** Encuentre la ecuación diferencial para  $v_c(t)$  en el circuito de la figura P 9.8-19, siguiendo el método directo. Encuentre  $v_c(t)$  para el tiempo  $t > 0$  para cada uno de los siguientes conjuntos de valores de componentes:

- (a)  $C = 1 \text{ F}, L = 0.25 \text{ H}, R_1 = R_2 = 1.309 \Omega$
- (b)  $C = 1 \text{ F}, L = 1 \text{ H}, R_1 = 3 \Omega, R_2 = 1 \Omega$
- (c)  $C = 0.125 \text{ F}, L = 0.5 \text{ H}, R_1 = 1 \Omega, R_2 = 4 \Omega$

**Respuesta:**

- (a)  $v_c(t) = \frac{1}{2} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t} \text{ V}$
- (b)  $v_c(t) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t\right) e^{-2t} \text{ V}$
- (c)  $v_c(t) = 0.8 - e^{-2t}(0.8 \cos 4t + 0.4 \sin 4t) \text{ V}$

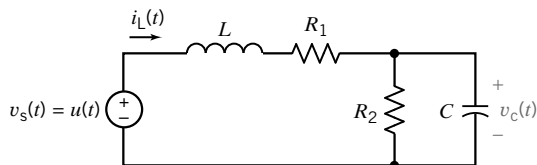


Figura P 9.8-19

**P 9.8-20** Encuentre la ecuación diferencial para  $v_o(t)$  en el circuito de la figura P 9.8-20, siguiendo el método directo. Encuentre  $v_o(t)$  para el tiempo  $t = 0$  para cada uno de los siguientes conjuntos de valores de componentes:

- (a)  $C = 1 \text{ F}, L = 0.25 \text{ H}, R_1 = R_2 = 1.309 \Omega$
- (b)  $C = 1 \text{ F}, L = 1 \text{ H}, R_1 = 1 \Omega, R_2 = 3 \Omega$
- (c)  $C = 0.125 \text{ F}, L = 0.5 \text{ H}, R_1 = 4 \Omega, R_2 = 1 \Omega$

**Respuesta:**

- (a)  $v_o(t) = \frac{1}{2} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t} \text{ V}$
- (b)  $v_o(t) = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}t\right) e^{-2t} \text{ V}$
- (c)  $v_o(t) = 0.2 - e^{-2t}(0.2 \cos 4t + 0.1 \sin 4t) \text{ V}$

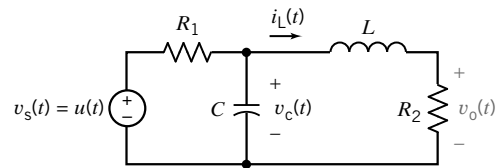


Figura P 9.8-20

**Sección 9.9 Método de las variables de estado para el análisis de circuitos**

**P 9.9-1** Encuentre  $v(t)$  para  $t > 0$ , siguiendo el método de variables de estado de la sección 9.9 cuando  $C = 1/5 \text{ F}$  en el circuito de la figura P 9.9-1. Bosqueje la respuesta para  $v(t)$  para  $0 < t < 10 \text{ s}$ .

**Respuesta:**  $v(t) = -25e^{-t} + e^{-5t} + 24 \text{ V}$

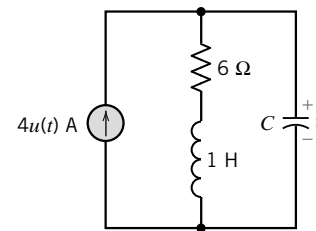


Figura P 9.9-1

**P 9.9-2** Repita el problema P 9.9-1 cuando  $C = 1/10 \text{ F}$ . Bosqueje la respuesta para  $v(t)$  para  $0 < t < 3 \text{ s}$ .

**Respuesta:**  $v(t) = e^{-3t}(-24 \cos t - 32 \sin t) + 24 \text{ V}$

**P 9.9-3** Determine la corriente  $i(t)$  y el voltaje  $v(t)$  para el circuito de la figura P 9.9-3.

**Respuesta:**  $i(t) = (3.08e^{-2.57t} - 0.08e^{-97.4t} - 6) \text{ A}$

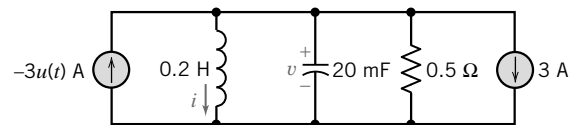


Figura P 9.9-3

**P 9.9-4** Las leyes de limpieza del medio ambiente están impulsando a la industria automotriz al desarrollo de los automóviles eléctricos. La figura P 9.9-4a muestra un vehículo propuesto que utiliza motor de ca. El circuito controlador del motor se muestra en la figura P 9.9-4b con  $L = 100 \text{ mH}$  y  $C = 10 \text{ mF}$ . Siga el método de la ecuación de estado para determinar  $i(t)$  y  $v(t)$  donde  $i(t)$  sea la corriente del controlador del motor. Las condiciones iniciales son  $v(0) = 10 \text{ V}$  e  $i(0) = 0$ .

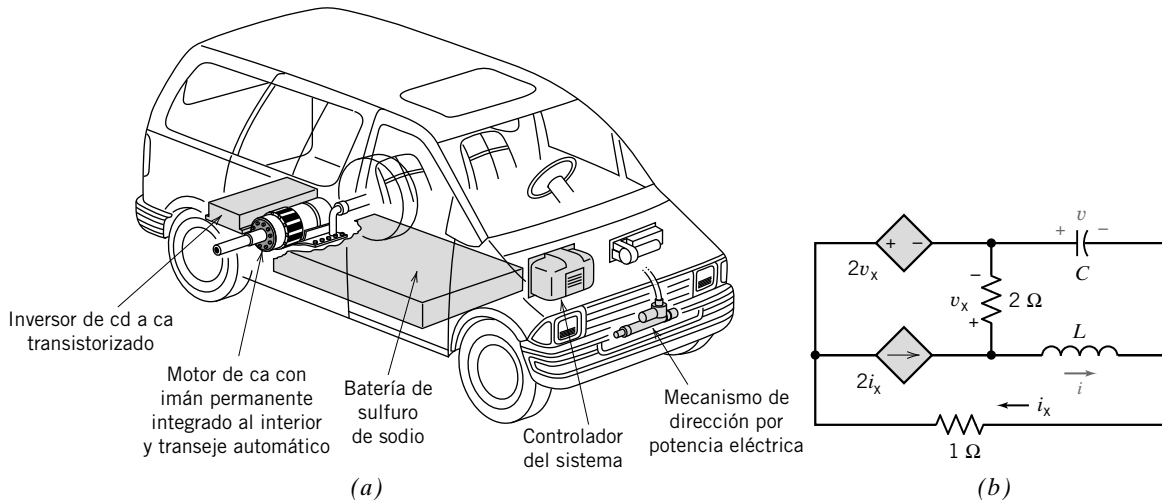


Figura P 9.9-4 (a) Vehículo eléctrico. (b) circuito de controlador de motor.

**P 9.9-5** Se están utilizando los estudios de un insecto artificial para entender el sistema nervioso de los animales. Un modelo de neurona en el sistema nervioso del insecto artificial se muestra en la figura P 8.6-6. Se requiere generar una serie de pulsos, llamada sinapsis, para lo cual se necesita una señal de entrada,  $v_s$ . El interruptor genera un pulso al abrirse en  $t = 0$  y cerrarse en  $t = 0.5$  s. Suponga que el circuito se encuentra en estado estable y que  $v(0^-) = 10$  V. Determine el voltaje  $v(t)$  para  $0 < t < 2$  s.

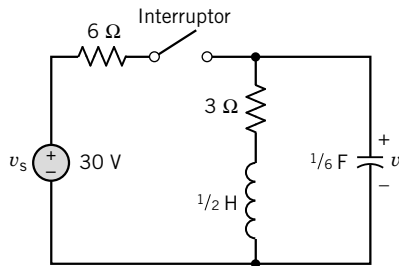


Figura P 9.9-5 Modelo de un circuito de neuronas.

### Sección 9.10 Raíces en el plano compuesto

**P 9.10-1** Para el circuito de la figura P 9.10-1, determine las raíces de la ecuación característica y trace las raíces sobre el plano  $s$ .

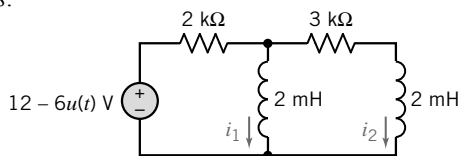


Figura P 9.10-1

**P 9.10-2** Para el circuito de la figura P 9.10-1, determine las raíces de la ecuación característica y trace las raíces sobre el plano  $s$ .

**P 9.10-3** Para el circuito de la figura P 9.10-3, determine las raíces de la ecuación característica y trace las raíces sobre el plano  $s$ .

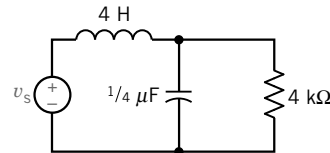


Figura P 9.10-3

**P 9.10-4** En la figura P 9.10-4 se muestra un circuito  $RLC$ .

- Obtenga las ecuaciones del voltaje de dos nodos utilizando operadores.
- Obtenga la ecuación característica para el circuito.
- Muestre la ubicación de las raíces de la ecuación característica en el plano  $s$ .
- Determine  $v(t)$  para  $t > 0$ .

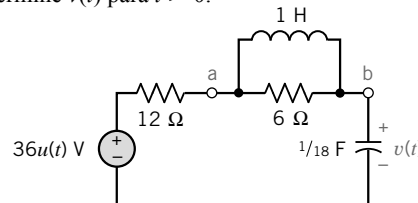


Figura P 9.10-4

### Sección 9.11 ¿Cómo lo podemos comprobar...?

**P 9.11-1** La figura P 9.11-1a muestra un circuito  $RLC$ . El voltaje,  $v_s(t)$  de la fuente de voltaje es la onda cuadrada que se muestra en la figura P 9.11-1a. La figura P 9.11-1c muestra un trazo de la corriente del inductor,  $i(t)$ , el cual se obtuvo por simulación de este circuito mediante PSpice. Verifique que el trazo de  $i(t)$  esté correcto.

**Respuesta:** El trazo es correcto.

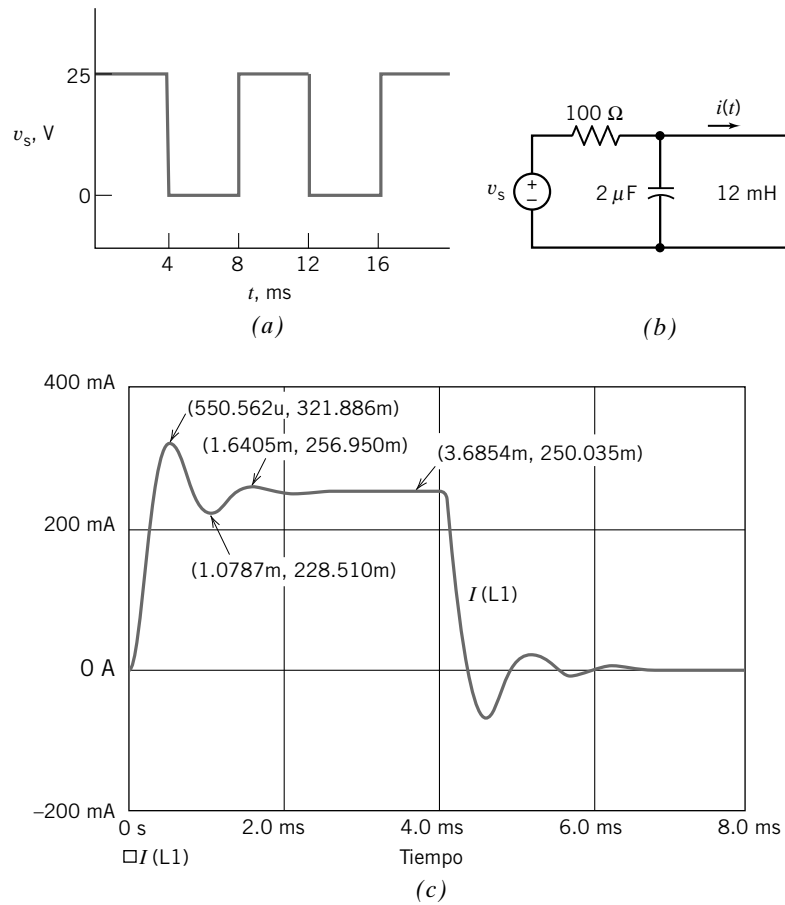


Figura P 9.11-1

**P 9.11-2** La figura P 9.11-2b muestra un circuito  $RLC$ . El voltaje,  $v_s(t)$  de la fuente de voltaje es la onda cuadrada que se muestra en la figura P 9.11-2a. La figura P 9.11-2c muestra un trazo de la corriente del inductor,  $i(t)$ , el cual se obtuvo por

simulación de este circuito mediante PSpice. Verifique que el trazo de  $i(t)$  esté correcto.

**Respuesta:** El trazo no es correcto.

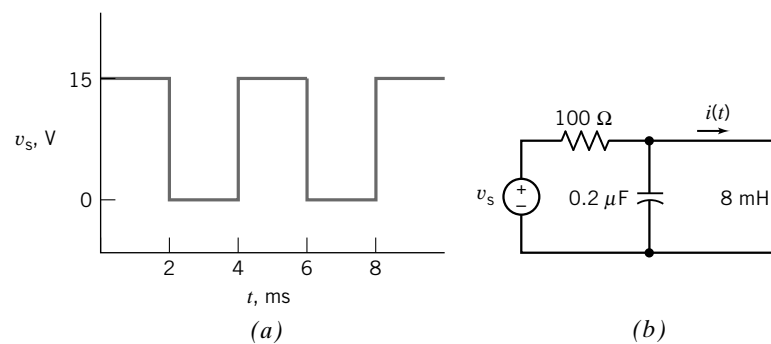


Figura P 9.11-2

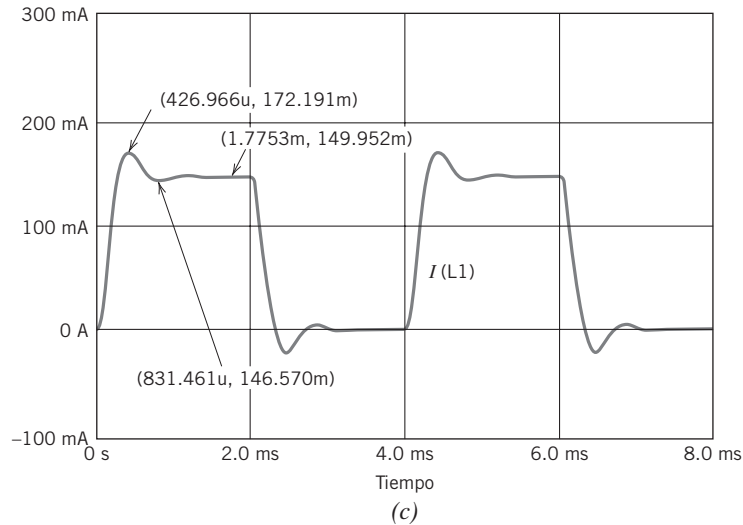


Figura P 9.11-2 (continuación)

## Problemas de PSpice

**PS 9-1** La entrada al circuito que se muestra en la figura PS 9-1 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje a través del condensador,  $v_o(t)$ . La entrada es la señal de pulso especificada de manera gráfica por el trazo. Utilice PSpice para trazar la salida,  $v_o(t)$ , como una función de  $t$  para cada uno de los casos siguientes:

- (a)  $C = 1 \text{ F}$ ,  $L = 0.25 \text{ H}$ ,  $R_1 = R_2 = 1.309 \Omega$
- (b)  $C = 1 \text{ F}$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $R_1 = 3 \Omega$ ,  $R_2 = 1 \Omega$
- (c)  $C = 0.125 \text{ F}$ ,  $L = 0.5 \text{ H}$ ,  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$

Trace la salida para estos tres casos en el mismo eje.

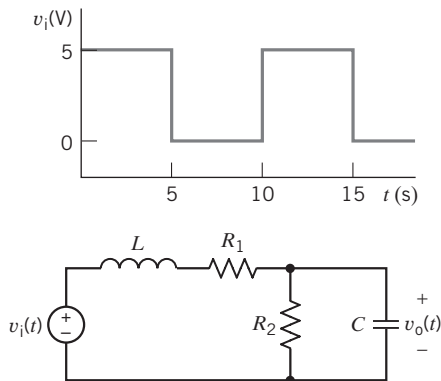


Figura PS 9-1

**Sugerencia:** Represente la fuente de voltaje utilizando la parte denominada VPULSE de PSpice.

**PS 9-2** La entrada al circuito que se muestra en la figura PS 9-2 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje

a través del resistor,  $R_2$ . La entrada es la señal de pulso especificada de manera gráfica por el trazo. Utilice PSpice para trazar la salida,  $v_o(t)$ , como una función de  $t$  para cada uno de los casos siguientes:

- (a)  $C = 1 \text{ F}$ ,  $L = 0.25 \text{ H}$ ,  $R_1 = R_2 = 1.309 \Omega$
- (b)  $C = 1 \text{ F}$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $R_1 = 3 \Omega$ ,  $R_2 = 1 \Omega$
- (c)  $C = 0.125 \text{ F}$ ,  $L = 0.5 \text{ H}$ ,  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$

Trace la salida para estos tres casos en el mismo eje.

**Sugerencia:** Represente la fuente de voltaje utilizando la parte denominada VPULSE de PSpice.

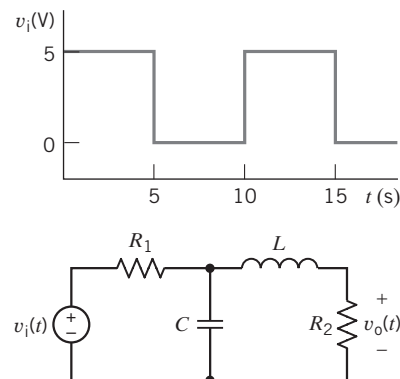


Figura PS 9-2

**PS 9-3** Determine y trace el voltaje  $v(t)$  del condensador para  $0 < t < 300 \mu\text{s}$  para el circuito que se muestra en la figura PS 9-3a. Las fuentes son pulsos como se muestra en las figuras PS 9-3b, c.

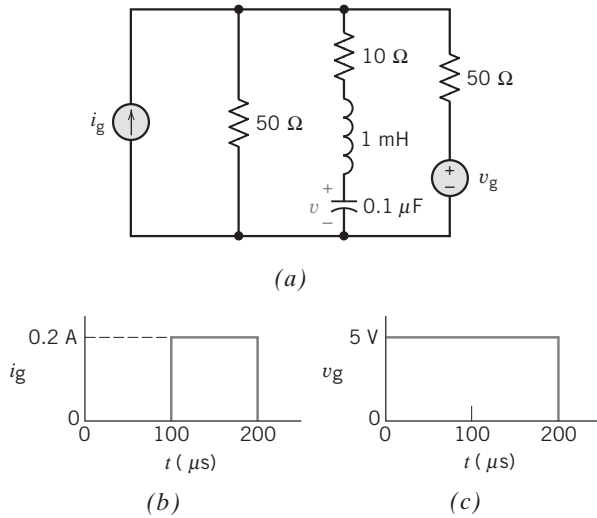


Figura PS 9-3 (a) Circuito, (b) pulso de corriente y (c) pulso de voltaje.

PS 9-4 Determine y trace  $v(t)$  del condensador de la figura PS 9-4 cuando  $v_s(t) = 5u(t)$  V. Trace  $v(t)$  para  $0 < t < 0.25$  s.

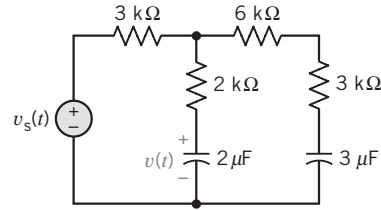


Figura PS 9-4

### Problemas de diseño

PD 9-1 Diseñe el circuito que se muestra en la figura PD 9-1 de modo que

$$v_c(t) = \frac{1}{2} + A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-4t} \text{ V para } t > 0$$

Determine los valores de las constantes no especificadas,  $A_1$  y  $A_2$ .

Sugerencia: El circuito está sobreamortiguado, y las frecuencias naturales son 2 y 4 rad/seg.

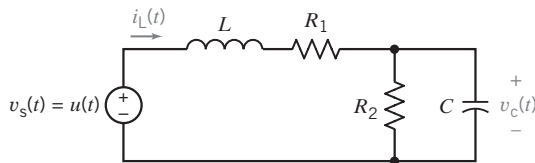


Figura PD 9-1

PD 9-2 Diseñe el circuito que se muestra en la figura PD 9-1 de modo que

$$v_c(t) = \frac{1}{4} + (A_1 + A_2 t)e^{-2t} \text{ V para } t > 0$$

Determine los valores de las constantes no especificadas,  $A_1$  y  $A_2$ .

Sugerencia: El circuito está críticamente amortiguado, y ambas frecuencias naturales son 2 rad/seg.

PD 9-3 Diseñe el circuito que se muestra en la figura PD 9-1 de modo que

$$v_c(t) = 0.8 + e^{-2t}(A_1 \cos 4t + A_2 \sin 4t) \text{ V para } t > 0$$

Determine el valor de las constantes no especificadas,  $A_1$  y  $A_2$ .

Sugerencia: El circuito está subamortiguado, la frecuencia resonante amortiguada es de 4 rad/seg, y el coeficiente de amortiguamiento es 2.

PD 9-4 Demuestre que el circuito que se muestra en la figura PD 9-1 no se puede diseñar porque

$$v_c(t) = 0.5 + e^{-2t}(A_1 \cos 4t + A_2 \sin 4t) \text{ V para } t > 0$$

Sugerencia: Muestre que un diseño semejante requeriría  $1/RC + 10 RC = 4$  donde  $R = R_1 = R_2$ . Luego, muestre que  $1/RC + 10 RC = 4$  requeriría que el valor de  $RC$  fuera compuesto.

PD 9-5 Diseñe el circuito que se muestra en la figura PD 9-5 de modo que

$$v_s(t) = \frac{1}{2} + A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-4t} \text{ V para } t > 0$$

Determine los valores de las constantes no especificadas,  $A_1$  y  $A_2$ .

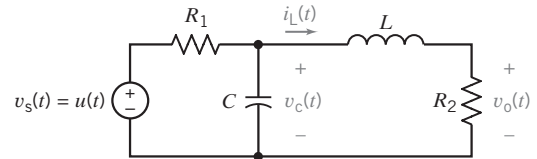


Figura PD 9-5

Sugerencia: El circuito está sobreamortiguado, y las frecuencias naturales son 2 y 4 rad/seg.

PD 9-6 Diseñe el circuito que se muestra en la figura PD 9-5 de modo que



$$v_o(t) = \frac{3}{4} + (A_1 + A_2 t)e^{-2t} \text{ V} \quad \text{para } t > 0$$

Determine los valores de las constantes no especificadas,  $A_1$  y  $A_2$ .

**Sugerencia:** El circuito está críticamente amortiguado, y ambas frecuencias naturales son 2 rad/seg.

**PD 9-7** Diseñe el circuito que se muestra en la figura PD 9-5 de modo que

$$v_c(t) = 0.2 + e^{-2t}(A_1 \cos 4t + A_2 \sin 4t) \text{ V} \quad \text{para } t > 0$$

Determine los valores de las constantes no especificadas,  $A_1$  y  $A_2$ .

**Sugerencia:** El circuito está subamortiguado, la frecuencia resonante amortiguada es de 4 rad/seg, y el coeficiente de amortiguamiento es 2.

**PD 9-8** Demuestre que el circuito de la figura PD 9-5 no se puede diseñar porque

$$v_c(t) = 0.5 + e^{-2t}(A_1 \cos 4t + A_2 \sin 4t) \text{ V} \quad \text{para } t > 0$$

**Sugerencia:** Muestre que un diseño semejante requeriría  $1/RC + 10RC = 4$  donde  $R = R_1 = R_2$ . Luego, muestre que  $1/RC + 10RC = 4$  requeriría que el valor de  $RC$  fuera compuesto.

**PD 9.9** Una luz fluorescente utiliza cátodos (filamentos de tungsteno enrollados y cubiertos con una sustancia emisora de electrones) en cada punta que envían corriente a través de

vapores de mercurio sellado en el tubo. La radiación ultravioleta se produce en cuanto los electrones provenientes de los cátodos desplazan a los electrones de mercurio de sus órbitas naturales. Algunos de los electrones desplazados se reintegran a su órbita, liberando la energía absorbida en la colisión. Casi toda esta energía está en forma de radiación ultravioleta. Los rayos ultravioleta, que son invisibles, golpean una cubierta de fósforo dentro del tubo. Los rayos energizan los electrones en los átomos de fósforo, y los átomos emiten una luz blanca. La conversión de un tipo de luz en otro se conoce como fluorescencia.

Una forma de lámpara fluorescente está representada por el circuito  $RLC$  que se muestra en la figura PD9-9. Seleccione  $L$  a modo que la corriente  $i(t)$  alcance un máximo en aproximadamente  $t = 0.5$  s. Determine el valor máximo de  $i(t)$ . Suponga que el interruptor estaba en la posición 1 mucho tiempo antes de cambiarse a la posición 2 en  $t = 0$ .

**Sugerencia:** Utilice PSpice para trazar la respuesta para varios valores de  $L$ .

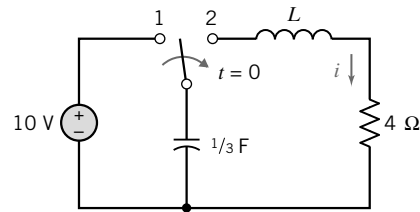
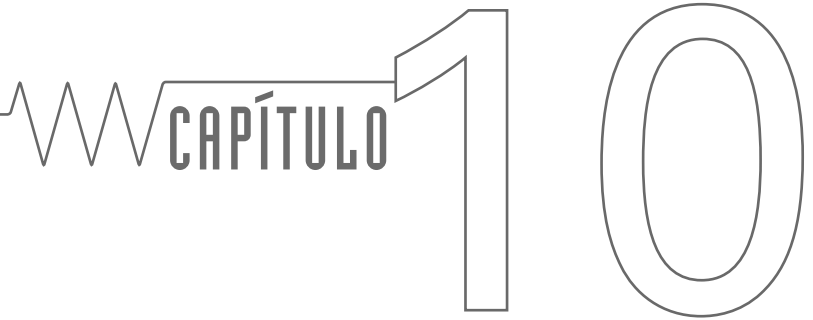


Figura PD 9-9 Circuito de lámpara fluorescente.

# Análisis senoidal en estado estable



## EN ESTE CAPÍTULO

- |       |  |       |   |
|-------|--|-------|---|
| 10.1  | Introducción   | 10.11 | Diagramas de fasores  |
| 10.2  | Fuentes senoidales   | 10.12 | Circuitos de fasores y el amplificador operacional                                    |
| 10.3  | Respuesta de estado estable de un circuito $RL$ para una función de forzamiento senoidal | 10.13 | La respuesta total  |
| 10.4  | Función de forzamiento exponencial compuesta   | 10.14 | Uso de MATLAB para el análisis de circuitos en estado estable con entradas senoidales |
| 10.5  | El fasor   | 10.15 | Uso de PSpice para analizar circuitos de CA   |
| 10.6  | Relaciones de fasor para los elementos $R$ , $L$ y $C$                                   | 10.16 | ¿Cómo lo podemos comprobar...?  |
| 10.7  | Impedancia y admitancia  | 10.17 | <b>EJEMPLO DE DISEÑO</b> — Circuito del amplificador operacional                      |
| 10.8  | Leyes de Kirchhoff que utilizan fasores  | 10.18 | Resumen   |
| 10.9  | Análisis del voltaje de nodos y de la corriente de enlaces utilizando fasores            |       | Problemas   |
| 10.10 | Superposición, equivalentes de Thévenin y de Norton y transformaciones de fuentes        |       | Problemas de PSpice   |
|       |  |       | Problemas de diseño   |

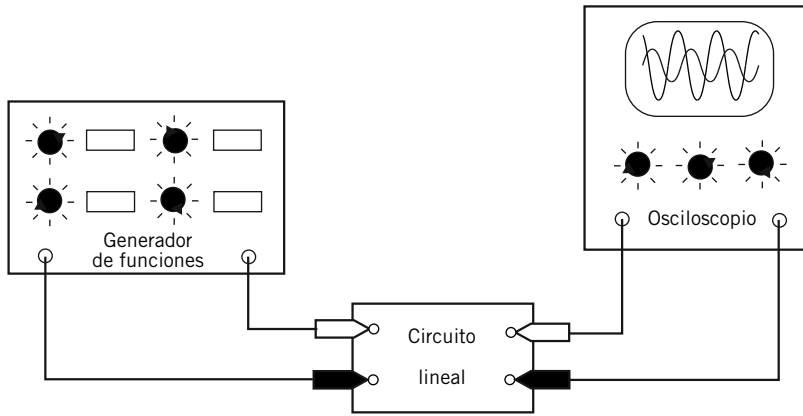
## 10.1 INTRODUCCIÓN

Considere el experimento ilustrado en la figura 10.1-1. Aquí, un generador de funciones proporciona la entrada a un circuito lineal y el osciloscopio despliega la salida, o respuesta, del circuito lineal. De suyo el circuito lineal consta de resistores, condensadores; quizá fuentes dependientes y/o amplificadores operacionales. El generador de funciones nos permite elegir entre varios tipos de funciones de entrada. Estas funciones de entrada se llaman formas de onda u ondas. Un generador de funciones típico proporcionará ondas cuadradas, ondas de pulso, ondas triangulares y ondas senoidales.

La salida del circuito constará de dos partes: una parte transitoria que se consume al extenderse el tiempo, y una parte de estado estable que persiste. Por lo común, la parte transitoria se acaba pronto, quizás en un par de milisegundos. Esperamos que el osciloscopio en la figura 10.1-1 despliegue la respuesta de estado estable del circuito lineal para la entrada provista por el generador de funciones.

Suponga que seleccionamos una entrada senoidal. El generador de funciones nos permite ajustar la amplitud, el ángulo de fase y la frecuencia de la entrada. Observemos que no importa cuántos ajustes hagamos, la respuesta (estado estable) siempre es una onda de seno en la misma frecuencia que la entrada. La amplitud y el ángulo de fase de la salida difieren de la entrada, pero la frecuencia siempre es la misma.

Supongamos ahora que seleccionamos un entrada de onda cuadrada. La respuesta de estado estable no es una onda cuadrada. Del mismo modo, las respuestas de estado estable para ondas de pulso y ondas triangulares no tienen la misma forma que la entrada.



**FIGURA 10.1-1**  
Medición de la entrada  
y la salida de un  
circuito lineal.

Los circuitos lineales con entradas senoidales que se encuentran en estado estable se denominan circuitos de ca. El sistema de potencia eléctrica que nos alimenta de la electricidad necesaria es un circuito de ca muy grande. Los circuitos CA son el tema de este capítulo. En particular, veremos que:

- Es útil asociar un número compuesto con uno senoidal. Esto nos permite definir fasores e impedancias.
- Al utilizar fasores e impedancias, obtenemos una nueva representación del circuito lineal, denominada “representación de dominio de frecuencia”.
- Podemos analizar circuitos de ca en el dominio de frecuencia para determinar la respuesta de estado estable.

## 10.2 FUENTES SENOIDALES

En ingeniería eléctrica, las entradas senoidales son particularmente importantes porque las fuentes de poder y las señales de comunicación se suelen transmitir como sinusoides o sinusoides modificados. La entrada ocasiona la respuesta forzada, y la respuesta natural es resultado de las dinámicas internas del circuito. Normalmente, la respuesta natural decaerá después de un lapso de tiempo, pero la respuesta forzada, o de estado estable, continúa de manera indefinida. Por consiguiente, en este capítulo nos enfocaremos sobre todo en la respuesta de estado estable de un circuito para la entrada senoidal.

Consideremos la entrada

$$v_s = V_m \text{ sen } \omega t \quad (10.2-1)$$

o bien, en el caso de la fuente de corriente,

$$i_s = I_m \text{ sen } \omega t \quad (10.2-2)$$

La amplitud de la senoide es  $V_m$ , y la frecuencia de radianes es  $\omega$  (rad/s). La senoide es una *función periódica* definida por la propiedad

$$x(t + T) = x(t)$$

para todo  $t$  y donde  $T$  es el periodo de oscilación.

La recíproca de  $T$  define la *frecuencia* o número de ciclos por segundo, indicado por  $f$ , donde

$$f = \frac{1}{T}$$

La frecuencia  $f$  está en ciclos por segundo, mejor conocida como hertzios (Hz) en honor del científico Heinrich Hertz, que se muestra en la figura 10.2-1. Así que la frecuencia angular (radián) de la función senoidal es

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$



FIGURA 10.2-1 Heinrich R. Hertz (1857-1894).  
Cortesía de la Institution of Electrical Engineers.

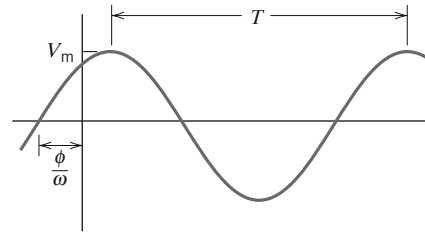


FIGURA 10.2-2 Fuente de voltaje senoidal  
 $v_s = V_m \text{sen}(\omega t + \phi)$ .

La frecuencia angular  $\omega$  está en radianes por segundo.

Para la fuente de voltaje de la ecuación 10.2-1, el valor máximo es  $V_m$ . Si el voltaje senoidal tiene un *ángulo de fase*  $\phi$  asociado, la fuente de voltaje es

$$v_s = V_m \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (10.2-23)$$

El voltaje senoidal de la ecuación 10.2-3 está representado por la figura 10.2-2.

Como, de manera convencional, el ángulo  $\phi$  se puede expresar en grados, encontrará la notación

$$v_s = V_m \text{sen}(4t + 30^\circ)$$

o, como alternativa

$$v_s = V_m \text{sen}\left(4t + \frac{\pi}{6}\right)$$

donde el ángulo  $\phi$  se expresa en radianes. La inconsistencia angular no nos desanimará en tanto reconozcamos que en el cálculo real del seno  $\theta$ ,  $\theta$  debe ser en grados o radianes según requiera nuestro cálculo.

Además, vale la pena tener en cuenta que

$$V_m \text{sen}(\omega t + 30^\circ) = V_m \cos(\omega t - 60^\circ)$$

Esta relación se puede deducir al utilizar las fórmulas trigonométricas resumidas en el apéndice C.

Si un circuito tiene un voltaje a través de un elemento como

$$v = V_m \text{sen} \omega t$$

y una corriente fluye a través del elemento

$$i = I_m \text{sen}(\omega t + n)$$

tenemos el  $v$  y la  $i$  que se muestran en la figura 10.2-3. Sabemos que la corriente *conduce* el voltaje por los  $\phi$  radianes. Si analizamos la figura 10.2-3, observamos que la corriente alcanza su valor pico antes que el voltaje y por lo tanto se dice que conduce al voltaje. De otro modo, podríamos decir que el voltaje retarda la corriente por  $\phi$  radianes.

Veamos una forma de onda de seno con

$$v = 2 \text{sen}(3t + 20^\circ) \text{ V}$$

y la forma de onda de la corriente asociada

$$i = 4 \text{sen}(3t - 10^\circ) \text{ A}$$

Desde luego, el voltaje  $v$  conduce la corriente  $i$  por  $30^\circ$ ,  $\pi/6$  radianes.

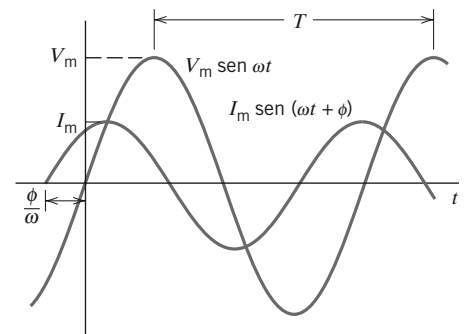


FIGURA 10.2-3 Voltaje y corriente de un elemento del circuito.

### EJEMPLO 10.2-1 Ángulos de fase

El voltaje a través de un elemento es  $v = 3 \cos 3t$  V, y la corriente asociada a través del elemento es  $i = -2 \sin(3t + 10^\circ)$  A. Determine la relación de fase entre el voltaje y la corriente.

#### Solución

Primero, necesitamos convertir la corriente en una forma de coseno con magnitud positiva de modo que se pueda contrastar con el voltaje. Para determinar una relación de fase, es necesario expresar ambas formas de onda en una forma consistente.

Como  $-\sin \omega t = \sin(\omega t + \pi)$ , tenemos

$$i = 2 \sin(3t + 180^\circ + 10^\circ) \text{ A}$$

Además, observamos que

$$\sin \theta = \cos(\theta - 90^\circ)$$

Por consiguiente,  $i = 2 \cos(3t + 180^\circ + 10^\circ - 90^\circ) = 2 \cos(3t + 100^\circ) \text{ A}$

Recordamos que  $v = 3 \cos 3t$ . Por lo tanto, la corriente conduce el voltaje al  $100^\circ$ .

La función senoidal  $C \cos(\omega t - \theta)$  se puede representar como  $A \cos \omega t + B \sin \omega t$ . Ocasionalmente necesitaremos convertir de una representación a otra. Para ver cómo se lleva a cabo esto, consideremos un voltaje

$$v(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (10.2-4)$$

Ahora, la ecuación 10.2-4 se puede reescribir como

$$v(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega t \right)$$

Considere el triángulo que se muestra en la figura 10.2-4, el cual ilustra la situación cuando  $A > 0$ , y observe que

$$\sin \theta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos \theta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{y} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{B}{A}$$

Entonces tenemos para  $v(t)$

$$v(t) = C(\cos \theta \cos \omega t + \sin \theta \sin \omega t) \quad (10.2-5)$$

donde  $\sqrt{A^2 + B^2}$ . Incluso, al comparar las ecuaciones 10.2-4 y 10.2-5, vemos que  $A = C \cos \theta$  y  $B = C \sin \theta$ . Por último, si utilizamos una fórmula del apéndice C, podemos escribir la ecuación 10.2-5 como

$$v(t) = C \cos(\omega t - \theta) \quad (10.2-6)$$

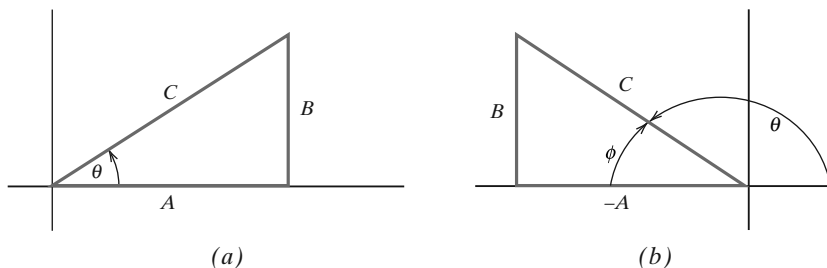


FIGURA 10.2-4 Triángulos utilizados para derivar la ecuación 10.2-7 cuando (a)  $A > 0$  y (b)  $A < 0$ .

La figura 10.2-4b ilustra la situación cuando  $A < 0$ . Este caso se semejante al anterior excepto en que ahora el ángulo de fase se calcula como

$$\theta = 180^\circ - \phi = 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{B}{-A}\right) = 180^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

En resumen

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t = C \cos(\omega t - \theta) \quad (10.2-7)$$

donde

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad A = C \cos \theta, \quad B = C \sin \theta$$

y

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) & \text{cuando } A > 0 \\ 180^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) & \text{cuando } A < 0 \end{cases}$$

### EJEMPLO 10.2-2 Magnitud y ángulo de fase

Una corriente tiene la forma  $i = -6 \cos 2t + 8 \sin 2t$ . Encuentre la corriente restablecida en la forma de la ecuación 10.2-6.

#### Solución

El triángulo para  $A$  y  $B$  se muestra en la figura 10.2-5, y como el coeficiente  $A$  es igual a  $-6$  y  $B$  es  $+8$ , tenemos el ángulo  $\theta$  que se muestra. Por consiguiente,

$$\theta = 180^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{8}{-6}\right) = 180^\circ - 53.1^\circ = 126.9^\circ$$

En consecuencia,  $i = 10 \cos(2t - 126.9^\circ)$

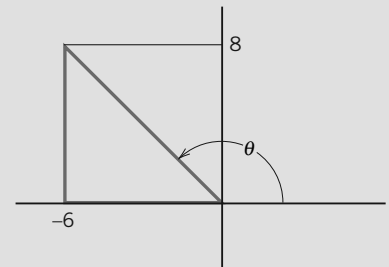


FIGURA 10.2-5 El triángulo  $A$ - $B$  para el ejemplo 10.2-2.

A continuación, considere el problema de obtener una representación analítica,  $A \cos(\omega t + \theta)$ , de una senoide dada gráficamente. Los ingenieros y los estudiantes de ingeniería se suelen encontrar con este problema en el laboratorio. En ocasiones, un ingeniero verá un voltaje senoidal desplegado en un osciloscopio y necesitará representarlo mediante una ecuación. La representación analítica de la senoide se obtiene en tres pasos. Los primeros dos son directos. El tercero requiere alguna atención. El procedimiento se ilustra en la figura 10.2-6, la cual muestra dos voltajes senoidales.

1. Mida la amplitud,  $A$ . La ubicación del eje del tiempo puede no ser clara cuando se despliega el voltaje senoidal en el osciloscopio, por lo que sería más conveniente medir la amplitud de pico a pico,  $2A$ , como se muestra en la figura 10.2-6.
2. Mida el periodo,  $T$ , en s y calcule la frecuencia,  $\omega = 2\pi/T$ , en rad/s.

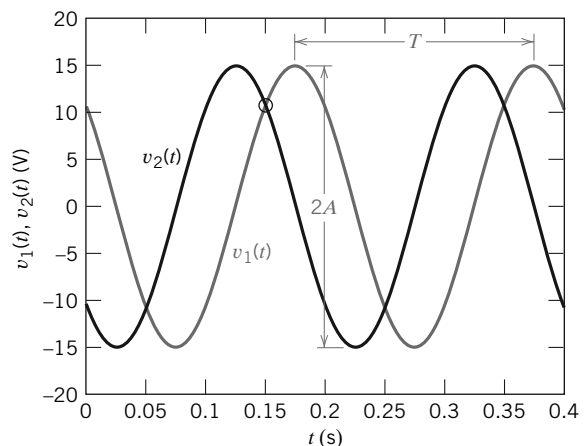


FIGURA 10.2-6 Dos sinusoides que tienen la misma amplitud y periodo pero con diferentes ángulos de fase.

3. Tome un tiempo y mida el voltaje en ese tiempo. Por ejemplo,  $t = t_1 = 0.15$  s en el punto marcado en la figura 10.2-6. Observe que  $v_1(t_1) = v_2(t_1) = 10.6066$  V, pero es obvio que  $v_1(t_1)$  y  $v_2(t_1)$  no son la misma senoide. La información adicional requerida para distinguir estas dos sinusoides es que  $v_1(t)$  va en aumento (pendiente positiva) en tiempo  $t_1$ , en tanto que  $v_2(t)$  va en disminución (pendiente negativa) en tiempo  $t_1$ . Por último, calcule el ángulo de fase,  $\theta$ , de un voltaje senoidal  $v(t)$  como

$$\theta = \begin{cases} -\cos^{-1}\left(\frac{v(t_1)}{A}\right) - \omega t_1 & \text{cuando } v(t) \text{ va en aumento en tiempo } t_1 \\ \cos^{-1}\left(\frac{v(t_1)}{A}\right) - \omega t_1 & \text{cuando } v(t) \text{ va disminuyendo en tiempo } t_1 \end{cases}$$

### EJEMPLO 10.2-3 Representación gráfica y analítica de sinusoides

Determine las representaciones analíticas de los voltajes senoidales  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$  que se muestran en la figura 10.2-6.

#### Solución

Tanto  $v_1(t)$  como  $v_2(t)$  tiene la misma amplitud y periodo:

$$2A = 30 \Rightarrow A = 15 \text{ V}$$

$$\text{y} \quad T = 0.2 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{0.2} = 10\pi \text{ rad/s}$$

Como observamos anteriormente,  $v_1(t_1) = v_2(t_1) = 10.6066$  V en  $t_1 = 0.15$  s. Dado que  $v_1(t)$  va en aumento (pendiente positiva) en tiempo  $t_1$ , el ángulo de fase,  $\theta_1$ , del voltaje senoidal  $v_1(t)$  se calcula como

$$\theta_1 = -\cos^{-1}\left(\frac{v(t_1)}{A}\right) - \omega t_1 = -\cos^{-1}\left(\frac{10.6066}{15}\right) - (10\pi)(0.15) = -5.498 \text{ rad} = -315^\circ = 45^\circ$$

(Observe que las unidades de  $\omega t_1$  son radianes, por lo que  $\cos^{-1}\left(\frac{v(t_1)}{A}\right)$  se debe calcular en radianes de modo que podemos hacer la resta.) Por último,  $v_1(t)$  se representa como

$$v_1(t) = 15 \cos(10\pi t + 45^\circ) \text{ V}$$

A continuación, puesto que  $v_2(t)$  está disminuyendo (pendiente negativa) en tiempo  $t_1$ , el ángulo de fase,  $\theta_2$ , del voltaje senoidal  $v_2(t)$  se calcula como

$$\theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{v(t_1)}{A}\right) - \omega t_1 = \cos^{-1}\left(\frac{10.6066}{15}\right) - (10\pi)(0.15) = -3.927 \text{ rad} = -225^\circ = 135^\circ$$

Por último,  $v_2(t)$  se representa como

$$v_2(t) = 15 \cos(10\pi t + 135^\circ) \text{ V}$$

**EJERCICIO 10.2-1** Un voltaje es  $v = 6 \cos(4t + 30^\circ)$ . (a) Encuentre el periodo de oscilación. (b) Establezca la relación de fase para la corriente asociada  $i = 8 \cos(4t - 70^\circ)$ .

**Respuestas:** (a)  $T = 2\pi/4$

(b) El voltaje conduce la corriente a  $100^\circ$ .

**EJERCICIO 10.2-2** Un voltaje es  $v = 3 \cos 4t + 4 \sin 4t$ . Encuentre el voltaje en la forma de la ecuación 10.2-6.

**Respuesta:**  $v = 5 \cos(4t - 53^\circ)$  V

**EJERCICIO 10.2-3** Una corriente es  $i = 12 \sin 5t - 5 \cos 5t$ . Encuentre la corriente en la forma de la ecuación 10.2-6.

**Respuesta:**  $i = 13 \cos(15t = 112.6^\circ)$  A

### 10.3 RESPUESTA DE ESTADO ESTABLE DE UN CIRCUITO $RL$ PARA UNA FUNCIÓN FORZAMIENTO SENOIDAL

A guisa de ejemplo de la tarea de determinar la respuesta de estado estable de un circuito lineal para una entrada senoidal, considere el circuito  $RL$  que se muestra en la figura 10.3-1. La entrada a este circuito es el voltaje de la fuente de voltaje

$$v_s(t) = V_m \cos \omega t$$

La respuesta de este circuito es la corriente  $i$ . La respuesta será de la forma

$$i = i_n + i_f = Ke^{-t/\tau} + I_m \cos(\omega t + \phi)$$

Aún se deben determinar los valores de las constantes reales  $K$ ,  $\tau$ ,  $I_m$  y  $\phi$ . Incluso, el valor de  $K$  depende de la condición inicial  $i(0)$ .

$$\text{Como } t \rightarrow \infty, Ke^{-t/\tau} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad i \rightarrow i_f = I_m \cos \omega t$$

En otras palabras, al seguir su curso el tiempo, el término  $Ke^{-t/\tau}$  se consume, y queda el término  $I_m \cos \omega t$ . Por esta razón, a  $i_f = I_m \cos \omega t$  se le llama la respuesta de estado estable. Esperamos que la respuesta de estado estable de un circuito lineal para una entrada senoidal sea senoidal en sí misma y tenga la misma frecuencia,  $\omega$ , como la entrada.

La ecuación diferencial reguladora del circuito  $RL$  está dada por

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos \omega t \tag{10.3-1}$$

Siguiendo el método del capítulo anterior, suponemos que

$$i_f = A \cos \omega t + B \sin \omega t \tag{10.3-2}$$

En este punto, dado que sólo estamos despejando la respuesta forzada, eliminamos la notación  $f$  itálica. Al sustituir la solución supuesta de la ecuación 10.3-2 en la ecuación diferencial y completar la derivada, tenemos

$$L(-\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t) + R(A \cos \omega t + B \sin \omega t) = V_m \cos \omega t$$

Igualando los coeficientes de  $\cos \omega t$ , obtenemos

$$\omega LB + RA = V_m$$

A continuación, igualando los coeficientes de  $\sin \omega t$ , obtenemos

$$-\omega LA + RB = 0$$

Despejando  $A$  y  $B$ , tenemos

$$A = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

y

$$B = \frac{\omega LV_m}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

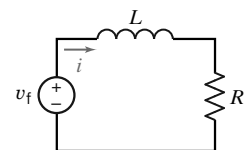


FIGURA 10.3-1 Circuito  $RL$ .



Entonces la respuesta a la entrada senoidal es

$$i = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$$

o bien

$$i = \frac{V_m}{Z} \cos(\omega t - \beta)$$

donde

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

y

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

Por lo tanto, la respuesta (estado estable) forzada es de la forma

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

donde

$$I_m = \frac{V_m}{Z}$$

y

$$\phi = -\beta$$

En este caso sólo hemos encontrado la respuesta de estado estable de un circuito con un elemento de almacenamiento de energía. Desde luego, este método puede llegar a ser muy complicado si el circuito tiene varios elementos de almacenamiento.

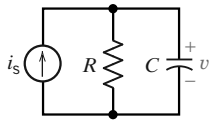


FIGURA E 10.3-1

**EJERCICIO 10.3-1** Encuentre la respuesta forzada  $v$  para el circuito  $RC$  que se muestra en la figura E 10.3-1 cuando  $i_s = I_m \cos \omega t$ .

**Respuesta:**  $v = (RI_m/P) \cos(\omega t - \theta)$  y  $P = \sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}$ ,  $\theta = \tan^{-1}(\omega RC)$

**EJERCICIO 10.3-2** Encuentre la respuesta forzada  $i(t)$  para el circuito  $RC$  de la figura E 10.3-1 cuando  $R = 2 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$  y  $v_s = 10 \cos 3t \text{ V}$ .

**Respuesta:**  $i = 2.77 \cos(3t - 56.3^\circ) \text{ A}$

## 10.4 FUNCIÓN DE FORZAMIENTO EXPONENCIAL COMPUESTA

Al revisar la sección anterior vemos que la entrada al circuito en la figura 10.3-1 tenía la forma

$$v_s = V_m \cos \omega t$$

y la respuesta de estado estable era

$$i = \frac{V_m}{Z} \cos(\omega t - \beta)$$

Por lo tanto, la respuesta de estado estable a una entrada senoidal también es senoidal y tiene la misma frecuencia que la entrada, pero una amplitud y ángulo de fase diferentes que la fuente de voltaje original.

Es útil considerar la señal exponencial

$$v_e = V_m e^{j\omega t} \quad (10.4-1)$$

Utilizando la ecuación de Euler, podemos relacionar la señal exponencial con una señal senoidal

$$v_s = V_m \cos \omega t = \operatorname{Re}\{V_m e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{v_e\}$$

La notación  $\operatorname{Re}\{a + jb\}$  se lee como la parte real del número compuesto  $(a + jb)$ . Por ejemplo,

$$\operatorname{Re}\{a + jb\} = a$$

Ahora tratemos la fuente exponencial  $v_e$  de la ecuación 10.4-1 con la ecuación diferencial del circuito  $RL$  que se muestra en la figura 10.4-1

$$L \frac{di_e}{dt} + Ri_e = v_e \quad (10.4-2)$$

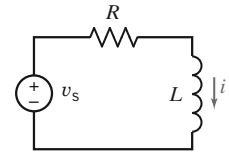


FIGURA 10.4-1

donde  $i_e$  es la respuesta a la entrada exponencial. Como la fuente es una exponencial, tratemos la solución

$$i_e = Ae^{j\omega t} \quad (10.4-3)$$

y sustituimos en la ecuación 10.4-2 para obtener

$$(j\omega L + R)Ae^{j\omega t} = V_m e^{j\omega t}$$

Por lo tanto,<sup>1</sup>

$$A = \frac{V_m}{R + j\omega L} = \frac{V_m}{Z} e^{-j\beta}$$

donde

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

y

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Por consiguiente, al sustituir  $A$  tenemos

$$i_e = \frac{V_m}{Z} e^{-j\beta} e^{j\omega t} \quad (10.4-4)$$

De nuevo, al observar que la función forzamiento original era

$$v_s = \text{Re}\{V_m e^{j\omega t}\} = V_m \cos \omega t$$

esperamos que

$$i = \text{Re}\{i_e\} = \text{Re}\left\{\frac{V_m}{Z} e^{-j\beta} e^{j\omega t}\right\}$$

En consecuencia,

$$i = \frac{V_m}{Z} \text{Re}\{e^{-j\beta} e^{j\omega t}\} = \frac{V_m}{Z} \text{Re}\{e^{j(\omega t - \beta)}\} = \frac{V_m}{Z} \cos(\omega t - \beta)$$

En general, estamos buscando la respuesta senoidal

$$i = I_m \cos(\omega t - \beta) = \text{Re}\left\{\frac{V_m}{Z} e^{j(\omega t - \beta)}\right\}$$

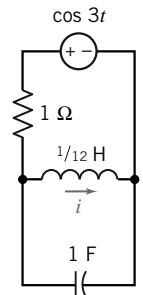
para la excitación senoidal

$$v_s = V_m \cos \omega t = \text{Re}\{V_m e^{j\omega t}\}$$

Hemos aprendido que esta respuesta es fácil de obtener utilizando la excitación exponencial compuesta,  $\text{Re}\{V_m e^{j\omega t}\}$ .

A guisa de ejemplo, encontremos la respuesta de estado estable para el circuito  $RLC$  que se muestra en la figura 10.4-2. Este circuito está representado por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{di}{dt} + 12i = 12 \cos 3t \quad (10.4-5) \quad \text{FIGURA 10.4-2}$$



<sup>1</sup>Nota: Vea el apéndice B para un repaso de los números compuestos.

Primero, reemplace la excitación real por la excitación exponencial compuesta

$$v_e = 12e^{j3t}$$

Entonces tenemos la ecuación 10.4-5 restablecida como

$$\frac{d^2 i_e}{dt^2} + \frac{di_e}{dt} + 12i_e = 12e^{j3t} \quad (10.4-6)$$

Esperamos que la respuesta a la entrada exponencial sea de la forma

$$i_e = Ae^{j3t} \quad (10.4-7)$$

La primera y segunda derivadas de la  $i_e$  de la ecuación 10.4-7 son

$$\frac{di_e}{dt} = j3Ae^{j3t}$$

y

$$\frac{d^2 i_e}{dt^2} = -9Ae^{j3t}$$

Si sustituimos la ecuación 10.4-6, tenemos

$$(-9 + j3 + 12)Ae^{j3t} = 12e^{j3t} \quad (10.4-8)$$

Despejamos  $A$  y obtenemos

$$A = \frac{12}{3 + j3} = \frac{12(3 - j3)}{(3 + j3)(3 - j3)} = \frac{12(3 - j3)}{18} = 2\sqrt{2} \angle -45^\circ$$

Por consiguiente,  $i_e = Ae^{j3t} = 2\sqrt{2}e^{-j(\pi/4)}e^{j3t} = 2\sqrt{2}e^{j(3t - \pi/4)}$

Recuerde que la identidad de Euler es  $e^{j\phi} = \cos \phi + j \operatorname{sen} \phi$ . De modo que la respuesta deseada para la corriente de estado estable es<sup>2</sup>

$$i(t) = \operatorname{Re}\{i_e\} = \operatorname{Re}\left\{2\sqrt{2}e^{j(3t - \pi/4)}\right\} = 2\sqrt{2} \cos (3t - 45^\circ)$$

Observe que hemos cambiado de  $\pi/4$  radianes a  $45^\circ$ , los cuales son intercambiables y equivalentes. Tanto la notación en grados como en radianes se aceptan y se pueden intercambiar.

Compare las ecuaciones 10.4-6 y 10.4-7. La primera es una ecuación diferente, que es lo que esperamos para la ecuación que represente un circuito que contenga condensadores o inductores. Por el contrario, la ecuación 10.4-8 es una ecuación algebraica que implica suma y multiplicación, pero no integración o diferenciación. Los coeficientes de esta ecuación son números compuestos en tanto que los coeficientes de la ecuación 10.4-6 son números reales. Las ecuaciones algebraicas son más fáciles de despejar que las ecuaciones diferenciales, por lo que preferimos despejar la ecuación 10.4-8 aun cuando contenga coeficientes compuestos.

Hemos desarrollado un método directo para determinar la respuesta de estado estable de un circuito para una excitación senoidal. El proceso es como sigue: (1) En vez de aplicar la función forzamiento actual, aplicamos una función forzamiento exponencial compuesta, y (2) entonces obtenemos la respuesta compuesta cuya parte real es la respuesta deseada. El proceso se resume en la tabla 10.4-1. Utilicemos este proceso en otro ejemplo.

<sup>2</sup>Vea el apéndice B para una exposición de la ecuación de Euler.

**Tabla 10.4-1 Uso de la excitación exponencial compuesta para determinar la respuesta de estado estable de un circuito a una fuente senoidal**

1. Escriba la excitación (función forzamiento) con una forma de onda de coseno con un ángulo de fase de modo que  $y_s = Y_m \cos(\omega t + \phi)$ , donde  $y_s$  sea una fuente de corriente,  $i_s$ , o una fuente de voltaje,  $v_s$ , en el circuito.

2. Recuerde la identidad de Euler, la cual es

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \operatorname{sen} \alpha$$

donde  $\alpha = \omega t + \phi$  en este caso.

3. Introduzca la excitación compuesta de modo que para una fuente de voltaje, por ejemplo, tengamos

$$v_s = \operatorname{Re}\{V_m e^{j(\omega t + \phi)}\}$$

donde  $V_m e^{j(\omega t + \phi)}$  sea una excitación exponencial compuesta.

4. Utilice la excitación compuesta y la ecuación diferencial junto con la respuesta asumida  $x_e = A e^{j(\omega t + \phi)}$ , donde  $A$  se tenga que determinar. Observe que por lo común  $A$  será una cantidad compuesta.

5. Determine la constante  $A = B e^{-j\beta}$ , de modo que

$$x_e = A e^{j(\omega t + \phi)} = B e^{j(\omega t + \phi - \beta)}$$

6. Reconozca que la respuesta deseada es

$$x(t) = \operatorname{Re}\{x_e\} = B \cos(\omega t + \phi - \beta)$$

### EJEMPLO 10.4-1 Respuesta de un circuito CA

Encuentre la respuesta de estado estable  $i$  del circuito  $RL$  de la figura 10.4-1, donde  $R = 2 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$  y  $v_s = 10 \operatorname{sen} 3t \text{ V}$ .

#### Solución

Primero, reescribimos la fuente de voltaje de modo que se exprese como una forma de onda de coseno como sigue:

$$v_s = 10 \operatorname{sen} 3t = 10 \cos(3t - 90^\circ)$$

Utilizando la excitación compuesta, tenemos

$$v_e = 10 e^{j(3t - 90^\circ)}$$

Introduzca la excitación compuesta en la ecuación diferencial del circuito, la cual es

$$L \frac{di_e}{dt} + Ri_e = v_e$$

Con lo que obtiene

$$\frac{di_e}{dt} + 2i_e = 10 e^{j(3t - 90^\circ)}$$

Suponga que la respuesta es

$$i_e = A e^{j(3t - 90^\circ)} \quad (10.4-9)$$

donde  $A$  es una cantidad compuesta que se debe determinar. Si sustituimos la solución asumida, ecuación 10.4-9, en la ecuación diferencial y tomamos la derivada, tenemos

$$j3A e^{j(3t - 90^\circ)} + 2A e^{j(3t - 90^\circ)} = 10 e^{j(3t - 90^\circ)}$$

Por consiguiente

$$j3A + 2A = 10$$

o bien

$$A = \frac{10}{j3 + 2} = \frac{10}{\sqrt{9 + 4}} e^{-j\beta}$$

donde

$$\beta = \tan^{-1} \frac{3}{2} = 56.3^\circ$$

Entonces la solución es

$$i_e = Ae^{j(3t-90^\circ)} = \frac{10}{\sqrt{13}} e^{-j56.3^\circ} e^{j(3t-90^\circ)} = \frac{10}{\sqrt{13}} e^{j(3t-146.3^\circ)}$$

En consecuencia, la respuesta real es

$$i(t) = \text{Re}\{i_e\} = \frac{10}{\sqrt{13}} \cos(3t - 146.3^\circ) \text{ A}$$

Steinmetz observó el proceso que acabamos de utilizar y decidió formular un método para resolver la respuesta de estado estable senoidal de circuitos utilizando la notación de números compuestos. El desarrollo de este método es el tema de la sección siguiente.

**EJERCICIO 10.4-1** Encuentre  $a$  y  $b$  cuando

$$\frac{10}{a + jb} = 2.36e^{j45}$$

**Respuestas:**  $a = 3$  y  $b = -3$

**EJERCICIO 10.4-2** Encuentre  $A$  y  $\theta$  cuando

$$\left[ A \angle \theta \right] (-3 + j8) = j32$$

**Respuestas:**  $A = 3.75$  y  $\theta = -20.56^\circ$

## 10.5 EL FASOR

Una corriente o voltaje senoidal en una frecuencia dada se caracteriza por su amplitud y ángulo de fase. Por ejemplo, la respuesta de la corriente en el circuito  $RL$  considerada en el ejemplo 10.4-1 era

$$i(t) = \text{Re}\{I_m e^{j(\omega t + \phi - \beta)}\} = I_m \cos(\omega t + \phi - \beta)$$

La magnitud  $I_m$  y el ángulo de fase  $(\phi - \beta)$  junto con el conocimiento de  $\omega$ , especifican por completo la respuesta. Por lo tanto, podemos escribir  $i(t)$  como

$$i(t) = \text{Re}\{I_m e^{j(\phi - \beta)} e^{j\omega t}\}$$

Sin embargo, observamos que el factor compuesto  $e^{j\omega t}$  permanece sin cambio a pesar de todos nuestros cálculos anteriores. Por lo tanto, la información que buscamos está representada por

$$\mathbf{I} = I_m e^{j(\phi - \beta)} = I_m \angle \phi - \beta \quad (10.5-1)$$

donde a  $\mathbf{I}$  se le denomina un *fasor*. Un fasor es un número compuesto que representa la magnitud y la fase de un senoide. El término fasor se utiliza en vez de vector, porque el ángulo se basa en tiempo más que en espacio. Un fasor se puede escribir en forma exponencial, forma polar o forma rectangular.

Los **fasores** se pueden utilizar cuando el circuito es lineal, cuando se ha tratado de obtener la respuesta de estado estable, y todas las fuentes independientes son senoidales y tienen la misma frecuencia.

Una corriente senoidal real, donde  $\theta = (\phi - \beta)$ , se escribe como

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta)$$

Se puede representar por

$$i(t) = \operatorname{Re}\{I_m e^{j(\omega t + \theta)}\}$$

Entonces decidimos prescindir de la notación Re y de la redundante  $e^{j\omega t}$  para obtener la representación del fasor

$$\mathbf{I} = I_m e^{j\theta} = I_m \angle \theta$$

Esta representación abreviada es la *notación de fasor*. Las cantidades de fasor son compuestas y por tanto se imprimen en negritas en este libro. Puede elegir el uso de la notación subrayada como sigue:

$$\underline{\mathbf{I}} = I_m \underline{\angle \theta}$$

Aunque hemos eliminado o suprimido la frecuencia compuesta  $e^{j\omega t}$ , continuamos para hacer notar que estamos en la forma de frecuencia compuesta y que estamos realizando cálculos en el *dominio de frecuencia*. Hemos transformado el problema del dominio de tiempo al dominio de frecuencia mediante el uso de la notación de fasor. Una transformación es un tipo de codificación para simplificar un proceso de cálculo. Un ejemplo de una transformación matemática es la transformación logarítmica.

Una **transformación** es un cambio en la descripción matemática de una variable física para facilitar el cálculo.

Los pasos reales implicados en transformar una función en el dominio de tiempo al dominio de frecuencia se resumen en la tabla 10.5-1. Como es fácil moverse a través de estos pasos, solemos saltar directamente del paso 1 al paso 4.

Por ejemplo, determinemos la notación de fasor para

$$i = 5 \operatorname{sen}(100t + 120^\circ)$$

Preferimos utilizar funciones de coseno como la norma para la notación de fasor. Así, expresamos la corriente como una forma de onda de coseno:

$$i = 5 \cos(100t + 30^\circ)$$

En este punto es fácil ver que la información que requerimos son la amplitud y la fase. Entonces, el fasor es

$$\mathbf{I} = 5 \angle 30^\circ$$

Desde luego, el proceso inverso de la notación de fasor a la notación de tiempo es seguir exactamente al revés los pasos requeridos para ir del tiempo a la notación de fasor. Así, si tenemos un voltaje en la notación de fasor:

$$\mathbf{V} = 24 \angle 125^\circ$$

la notación de dominio de tiempo es

$$v(t) = 24 \cos(\omega t + 125^\circ)$$

**Tabla 10.5-1 Transformación del dominio de tiempo al dominio de frecuencia**

1. Escriba la función en el dominio de tiempo,  $y(t)$ , como una forma de onda de coseno con un ángulo de fase  $\phi$  como
 
$$y(t) = Y_m \cos(\omega t + \phi)$$
2. Expresar la forma de onda de coseno como la parte real de una cantidad compuesta al utilizar la identidad de Euler de modo que
 
$$y(t) = \operatorname{Re}\{Y_m e^{j(\omega t + \phi)}\}$$
3. Elimine la notación de la parte real.
4. Suprima el factor  $e^{j\omega t}$ , mientras toma nota del valor de  $\omega$  para un uso posterior, obteniendo el fasor

$$\mathbf{Y} = Y_m e^{j\phi} = Y_m \angle \phi$$

**Tabla 10.5-2 Transformación del dominio de frecuencia al dominio de tiempo**

1. Escriba el fasor en forma exponencial como

$$\mathbf{Y} = Y_m e^{j\beta}$$

2. Reinserte el factor
- $e^{j\omega t}$
- de modo que obtenga

$$Y_m e^{j\beta} e^{j\omega t}$$

3. Reinserte la parte real operador
- $\text{Re}$
- como

$$\text{Re}\{Y_m e^{j\beta} e^{j\omega t}\}$$

4. Utilice la identidad de Euler para obtener la función de tiempo

$$y(t) = \text{Re}\{Y_m e^{j(\omega t + \beta)}\} = Y_m \cos(\omega t + \beta)$$

donde la frecuencia  $\omega$  se señaló en el enunciado original de la formulación del circuito. Esta transformación de dominio de frecuencia a dominio de tiempo se resume en la tabla 10.5-2.

Un **fasor** es una versión transformada de una forma de onda de voltaje o corriente senoidal, y contiene información de magnitud y ángulo de fase de la senoide.

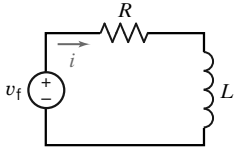


FIGURA 10.5-1 Circuito  $RL$ .

El método de fasor utiliza la transformación de dominio de tiempo a dominio de frecuencia para obtener más fácilmente la solución de estado estable senoidal de la ecuación diferencial. Considere el circuito  $RL$  de la figura 10.5-1. Nos gustaría encontrar la solución para la corriente  $i$  de estado estable cuando la fuente de voltaje es  $v_s = V_m \cos \omega t$  V y  $\omega = 100$  rad/s.

Además, para este circuito sea  $R = 200 \Omega$  y  $L = 2$  H. Entonces podemos escribir la ecuación diferencial como

$$L \frac{di}{dt} + Ri = v_s \quad (10.5-2)$$

Porque 
$$v_s = V_m \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}\{V_m e^{j(\omega t + \phi)}\} \quad (10.5-3)$$

Utilizaremos la solución asumida

$$i = I_m \cos(\omega t + \beta) = \text{Re}\{I_m e^{j(\omega t + \beta)}\} \quad (10.5-4)$$

Por consiguiente, podemos sustituir las ecuaciones 10.5-3 y 10.5-4 en la ecuación 10.5-2 y suprimir la notación  $\text{Re}$  para obtener

$$(j\omega LI_m + RI_m)e^{j(\omega t + \beta)} = V_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

Suprima  $e^{j\omega t}$  para obtener

$$(j\omega L + R)I_m e^{j\beta} = V_m e^{j\phi}$$

Ahora reconozcamos los fasores

$$\mathbf{I} = I_m e^{j\beta}$$

y

$$\mathbf{V}_s = V_m e^{j\phi}$$

Por lo tanto, en la notación de fasores, tenemos

$$(j\omega L + R)\mathbf{I} = \mathbf{V}_s$$

Despejando  $\mathbf{I}$ , tenemos

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{j\omega L + R} = \frac{\mathbf{V}_s}{j200 + 200}$$

para  $\omega = 100$ ,  $L = 2$  y  $R = 200$ . Entonces, dado que

$$\mathbf{V}_s = V_m \angle 0^\circ$$

tenemos

$$\mathbf{I} = \frac{V_m}{283 \angle 45^\circ} = \frac{V_m}{283} \angle -45^\circ$$

Siguiendo el método de la tabla 10.5-2, podemos transformar este resultado de vuelta al dominio de tiempo para obtener la solución del tiempo en estado estable como

$$i(t) = \frac{V_m}{283} \cos(100t - 45^\circ) \text{ A}$$

Desde luego, podemos utilizar fasores directamente para obtener una ecuación algebraica lineal expresada en términos de fasores y números compuestos y luego despejar la variable de interés del fasor. Después de obtener el fasor deseado, simplemente lo transformamos de nuevo en dominio de tiempo para obtener la solución de estado estable.

### EJEMPLO 10.5-1 Análisis de circuitos de CA utilizando fasores

Encuentre el voltaje  $v$  de estado estable para el circuito  $RC$  que se muestra en la figura 10.5-2 cuando  $i = 10 \cos \omega t$  A,  $R = 1 \Omega$ ,  $C = 10$  mF y  $\omega = 100$  rad/s.

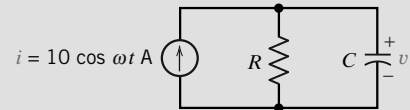


FIGURA 10.5-2 Circuito  $RC$  con una fuente de corriente senoidal.

#### Solución

Primero, encontramos la representación del fasor de la corriente de fuente como

$$\mathbf{I} = I_m \angle 0^\circ = 10 \angle 0^\circ \quad (10.5-5)$$

Tratamos de encontrar el voltaje  $v$  obteniendo primero el fasor  $\mathbf{V}$ .

Escriba la ecuación diferencial del voltaje de nodos para el circuito para obtener

$$\frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} = i \quad (10.5-6)$$

Porque

$$i = 10 \operatorname{Re}\{e^{j\omega t}\}$$

y

$$v = V_m \operatorname{Re}\{e^{j(\omega t + \phi)}\}$$

sustituimos en la ecuación 10.5-6 y suprimimos la notación  $\operatorname{Re}$  para obtener

$$\frac{V_m}{R} e^{j(\omega t + \phi)} + j\omega C V_m e^{j(\omega t + \phi)} = 10 e^{j\omega t}$$

Ahora suprimimos el factor  $e^{j\omega t}$  y obtenemos

$$\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right) V_m e^{j\phi} = 10 e^{j0^\circ}$$

Retomando la representación de fasor de la ecuación 10.5-5, tenemos

$$\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right) \mathbf{V} = \mathbf{I}$$

Dado que  $R = 1$ ,  $C = 10^{-2}$  y  $\omega = 100$ , tenemos

$$(1 + j1) \mathbf{V} = \mathbf{I}$$



o bien

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{1 + j1}$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{V} = \frac{10}{\sqrt{2} \angle 45^\circ} = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ$$

Al transformar de notación de fasor a la solución de tiempo en estado estable, tenemos

$$v = \frac{10}{\sqrt{2}} \cos(100t - 45^\circ) \text{ V}$$

**EJERCICIO 10.5-1** Exprese la corriente  $i$  como un fasor.

(a)  $i = 4 \cos(\omega t - 80^\circ)$  (b)  $i = 10 \cos(\omega t + 20^\circ)$ , (c)  $i = 8 \sin(\omega t - 20^\circ)$

**Respuestas:** (a)  $4 \angle -80^\circ$

(b)  $10 \angle +20^\circ$

(c)  $8 \angle -110^\circ$

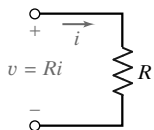
**EJERCICIO 10.5-2** Encuentre el voltaje  $v$  en estado estable representado por el fasor

(a)  $\mathbf{V} = 10 \angle -140^\circ$  (b)  $\mathbf{V} = 80 + j75$

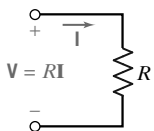
**Respuestas:** (a)  $v = 10 \cos(\omega t - 140^\circ)$

(b)  $109.7 \cos(\omega t + 43.2^\circ)$

## 10.6 RELACIONES DE FASOR PARA LOS ELEMENTOS $R$ , $L$ Y $C$



(a)



(b)

**FIGURA 10.6-1**

(a) Relación de dominio de tiempo  $v$ - $i$  para  $R$ .

(b) Relación de dominio de frecuencia para  $R$ .

En la sección anterior encontramos que la representación del fasor es en realidad una transformación de dominio de tiempo a dominio de frecuencia. Con esta transformación hemos convertido la solución de una ecuación diferencial en la solución de una ecuación algebraica.

En esta sección determinamos la relación entre el voltaje del fasor y la corriente del fasor de los elementos  $R$ ,  $L$  y  $C$ . Utilizamos la transformación del dominio de tiempo al dominio de frecuencia y luego resolvemos la relación del fasor para un elemento especificado. Aplicamos el método de las tablas 10.5-1 y 10.5-2 como se registró en la sección anterior.

Empecemos con el resistor, como se muestra en la figura 10.6-1a. La relación entre voltaje y corriente en el dominio de tiempo es

$$v = Ri \quad (10.6-1)$$

Ahora considere el voltaje de estado estable

$$v = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

Entonces

$$v = \text{Re}\{V_m e^{j(\omega t + \phi)}\} \quad (10.6-2)$$

Suponga que la corriente es de la forma

$$i = \text{Re}\{I_m e^{j(\omega t + \beta)}\} \quad (10.6-3)$$

Luego sustituya las ecuaciones 10.6-2 y 10.6-3 en la ecuación 10.6-1 y suprima la notación  $\text{Re}$  para obtener

$$V_m e^{j(\omega t + \phi)} = R I_m e^{j(\omega t + \beta)}$$

Suprima  $e^{j\omega t}$  para obtener

$$V_m e^{j\phi} = R I_m e^{j\beta}$$

Por consiguiente, observemos que  $\beta = \phi$ , y

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \quad (10.6-4)$$

Dado que  $\beta = \phi$ , las formas de onda de la corriente y el voltaje están en fase. Esta relación de fasor se muestra en la figura 10.6-1b.

Por ejemplo, si el voltaje a través de un resistor es  $v = 10 \cos 10t$ , sabemos que la corriente será

$$i = \frac{10}{R} \cos 10t$$

en el dominio de tiempo.

En el dominio de frecuencia, primero anotamos que el voltaje es

$$\mathbf{V} = 10 \angle 0^\circ$$

Luego, utilizando la relación de fasor del resistor, ecuación 10.6-4, tenemos

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{R} = \frac{10 \angle 0^\circ}{R}$$

Entonces, al obtener la expresión dominio de tiempo para  $\mathbf{I}$ , tenemos

$$i = \frac{10}{R} \cos 10t$$

Ahora, considere el inductor como se muestra en la figura 10.6-2a. La relación entre dominio de tiempo y corriente y voltaje es

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (10.6-5)$$

Nuevamente, utilizamos el voltaje compuesto como

$$v = \text{Re}\{V_m e^{j(\omega t + \phi)}\} \quad (10.6-6)$$

Y suponemos que la corriente es

$$i = \text{Re}\{I_m e^{j(\omega t + \beta)}\} \quad (10.6-7)$$

Si sustituimos las ecuaciones 10.6-6 y 10.6-5 en la ecuación 10.6-5 y suprimimos la notación  $\text{Re}$ , tenemos

$$V_m e^{j\phi} e^{j\omega t} = L \frac{d}{dt} \{I_m e^{j\omega t} e^{j\beta}\}$$

Tomando la derivada, nos da

$$V_m e^{j\phi} e^{j\omega t} = j\omega L I_m e^{j\omega t} e^{j\beta}$$

Ahora, suprimiendo el factor  $e^{j\omega t}$ , tenemos

$$V_m e^{j\phi} = j\omega L I_m e^{j\beta} \quad (10.6-8)$$

o bien

$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I} \quad (10.6-9)$$

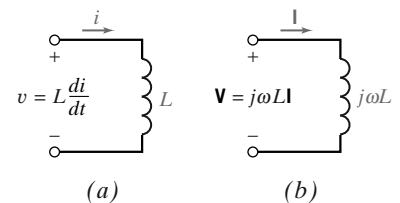


FIGURA 10.6-2 (a) Relación dominio de tiempo  $v$ - $i$  para un inductor. (b) Relación dominio de frecuencia para un inductor.

Esta relación de fasor se muestra en la figura 10.6-2b. Dado que  $j = e^{j90^\circ}$ , la ecuación 10.6-8 también se puede escribir

$$V_m e^{j\phi} = \omega L I_m e^{j90^\circ} e^{j\beta}$$

Por consiguiente,

$$\phi = \beta + 90^\circ$$

Por lo tanto, el voltaje conduce la corriente a  $90^\circ$  exactamente.

A guisa de ilustración, considere un inductor de 2 H con  $\omega = 100$  rad/s y un voltaje  $v = 10 \cos(\omega t + 50^\circ)$  V. Entonces el voltaje del fasor es

$$\mathbf{V} = 10 \angle 50^\circ$$

y la corriente del fasor es

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{j\omega L}$$

Dado que  $\omega L = 200$ , tenemos

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{j200} = \frac{10 \angle 50^\circ}{200 \angle 90^\circ} = 0.05 \angle -40^\circ \text{ A}$$

Entonces, la corriente expresada en el dominio de tiempo es

$$i = 0.05 \cos(100t - 40^\circ) \text{ A}$$

Por consiguiente, la corriente retarda  $90^\circ$  el voltaje.

Finalmente, consideremos el caso del condensador, como se muestra en la figura 10.6-3a. La relación entre corriente y voltaje es

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (10.6-10)$$

Suponemos que el voltaje es

$$v = V_m \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}\{V_m e^{j(\omega t + \phi)}\} \quad (10.6-11)$$

y que la corriente es de la forma

$$i = \text{Re}\{I_m e^{j(\omega t + \beta)}\} \quad (10.6-12)$$

Suprima la notación Re en las ecuaciones 10.6-11 y 10.6-12 y sustitúyalas en la ecuación 10.6-10 para obtener

$$I_m e^{j(\omega t + \beta)} = C \frac{d}{dt} (V_m e^{j(\omega t + \phi)})$$

Tomamos la derivada y tenemos

$$I_m e^{j\omega t} e^{j\beta} = j\omega C V_m e^{j\omega t} e^{j\phi}$$

Suprimimos el factor  $e^{j\omega t}$  y obtenemos

$$I_m e^{j\beta} = j\omega C V_m e^{j\phi}$$

o bien

$$\mathbf{I} = j\omega C \mathbf{V} \quad (10.6-13)$$

Esta relación de fasor se muestra en la figura 10.6-3b. como  $j = e^{j90^\circ}$ , la corriente conduce el voltaje a  $90^\circ$ . Como ejemplo, considere un voltaje  $v = 100 \cos \omega t$  V y busquemos la corriente cuando  $\omega = 1000$  rad/s y  $C = 1$  mF. Porque

$$\mathbf{V} = 100 \angle 0^\circ$$

tenemos

$$\mathbf{I} = j\omega C \mathbf{V} = (\omega C e^{j90^\circ}) 100 e^{j0} = (1 e^{j90^\circ}) 100 = 100 \angle 90^\circ$$

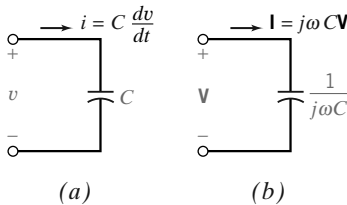


FIGURA 10.6-3 (a) Relación dominio de tiempo  $v$ - $i$  para un condensador. (b) Relación dominio de frecuencia para un condensador.

Por consiguiente, al transformar este fasor en el dominio de tiempo, tenemos

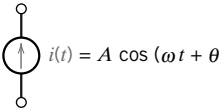
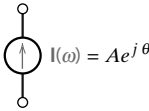
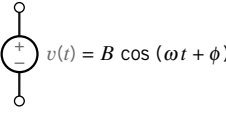
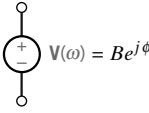
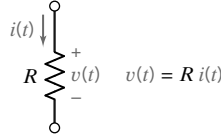
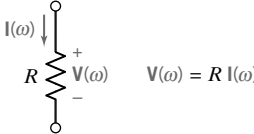
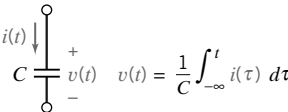
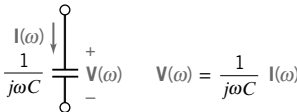
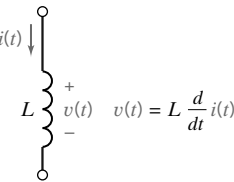
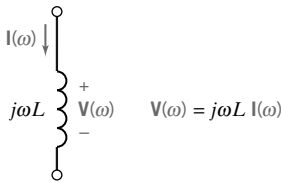
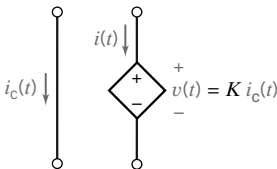
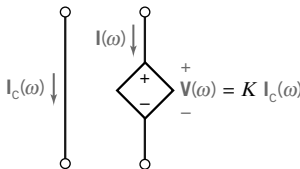
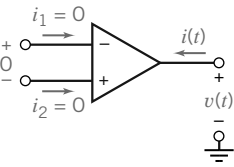
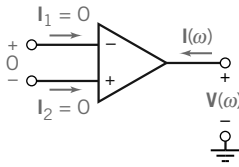
$$i = 100 \cos(\omega t + 90^\circ) \text{ A}$$

Podemos reescribir la ecuación 10.6-3 como

$$\mathbf{V} = \frac{1}{j\omega C} \mathbf{I} \quad (10.6-14)$$

Utilizando esta forma, resumimos las ecuaciones de fasor para fuentes y el resistor, inductor y condensador en la tabla 10.6-1, donde se expresa el voltaje del fasor en su relación con la corriente del fasor.

**Tabla 10.6-1 Relaciones entre dominio de tiempo y dominio de frecuencia**

ELEMENTO	DOMINIO DE TIEMPO	DOMINIO DE FRECUENCIA
Fuente de corriente	 $i(t) = A \cos(\omega t + \theta)$	 $I(\omega) = A e^{j \theta}$
Fuente de voltaje	 $v(t) = B \cos(\omega t + \phi)$	 $V(\omega) = B e^{j \phi}$
Resistor	 $v(t) = R i(t)$	 $V(\omega) = R I(\omega)$
Condensador	 $v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$	 $V(\omega) = \frac{1}{j\omega C} I(\omega)$
Inductor	 $v(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$	 $V(\omega) = j\omega L I(\omega)$
CCVS	 $v(t) = K i_c(t)$	 $V(\omega) = K I_c(\omega)$
Amp op ideal		

**EJERCICIO 10.6-1** Una corriente en un elemento es  $i = 5 \cos 100t$  A. Encuentre el voltaje  $v(t)$  en estado estable a través del elemento para (a) un resistor de  $10 \Omega$ , (b) un inductor  $L = 10$  mH y (c) un condensador  $C = 1$  mF.

**Respuestas:** (a)  $50 \cos 100t$  V  
 (b)  $5 \cos (100t + 90^\circ)$  V  
 (c)  $50 \cos (100t - 90^\circ)$  V

**EJERCICIO 10.6-2** Un condensador  $C = 10 \mu\text{F}$  tiene un voltaje en estado estable a través de sí de  $v = 100 \cos(500t + 30^\circ)$  V. Encuentre la corriente en estado estable en el condensador.

**Respuesta:**  $i = 0.5 \cos(500t - 120^\circ)$  A

**EJERCICIO 10.6-3** El voltaje  $v(t)$  y la corriente  $i(t)$  para un elemento se muestran en la figura E 10.6-3. Determine si el elemento es un inductor o un condensador.

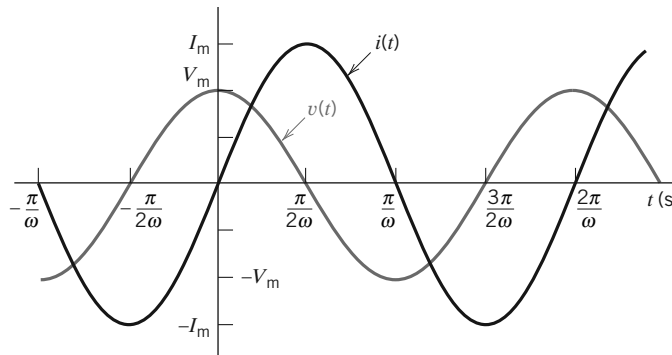


FIGURA E 10.6-3

## 10.7 IMPEDANCIA Y ADMITANCIA

Las relaciones en el dominio de frecuencia para la corriente y el voltaje del fasor de un condensador, inductor y resistor se resumen en la tabla 10.6-1. Estas relaciones parecen ser semejantes a la ley de Ohm para los resistores.

Definiremos la *impedancia* de un elemento como la razón del voltaje del fasor con la corriente del fasor, la cual indicamos como  $\mathbf{Z}$ . Por consiguiente,

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \quad (10.7-1)$$

A esto se le denomina ley de Ohm en notación de fasor.

Porque  $\mathbf{V} = V_m \angle \phi$  e  $\mathbf{I} = I_m \angle \beta$ , tenemos

$$\mathbf{Z} = \frac{V_m \angle \phi}{I_m \angle \beta} = \frac{V_m}{I_m} \angle \phi - \beta \quad (10.7-2)$$

Entonces, se dice que la impedancia tiene una magnitud  $|\mathbf{Z}|$  y un ángulo de fase  $\theta = \phi - \beta$ . Por lo tanto,

$$|\mathbf{Z}| = \frac{V_m}{I_m} \quad (10.7-3)$$

$$\theta = \phi - \beta \quad (10.7-4)$$

La impedancia en circuitos de ca tiene un rol semejante al rol de la resistencia en circuitos de cd.

Incluso, como hay una razón de voltios a amperios, la impedancia tiene unidades de ohmios. Impedancia es la razón de dos fasores; sin embargo, en sí no es un fasor. La impedancia es un número compuesto que relaciona un fasor  $\mathbf{V}$  con otro fasor  $\mathbf{I}$  como

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \quad (10.7-5)$$

Los fasores  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$  pueden ser transformados en dominio de tiempo para que den por resultado voltaje o corriente en estado estable, respectivamente. Sin embargo, la impedancia no tiene significado en el dominio de tiempo.

Con el concepto de impedancia podemos resolver el comportamiento de circuitos excitados de manera senoidal, utilizando álgebra compuesta de la misma manera en que resolvimos los circuitos resistivos.

Pero como la impedancia es un número compuesto, se puede escribir de diversas formas, como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= |\mathbf{Z}| \angle \theta \rightarrow \text{forma polar} \\ &= Z e^{j\theta} \rightarrow \text{forma exponencial} \\ &= R + jX \rightarrow \text{forma rectangular} \end{aligned} \quad (10.7-6)$$

donde  $R$  es la parte real y  $X$  es la parte imaginaria del número compuesto  $\mathbf{Z}$ . Introducimos la notación  $|\mathbf{Z}| = Z$ , en la ecuación 10.7-6. De este modo, la magnitud de la impedancia se puede escribir como  $Z$  (no negrita). La notación  $R = \text{Re}\mathbf{Z}$  se denomina la parte resistiva de la impedancia, y  $X = \text{Im}\mathbf{Z}$  se denomina la parte reactiva de la impedancia. Tanto  $R$  como  $X$  se miden en ohmios.

También observamos que la magnitud de la impedancia es

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (10.7-7)$$

y que el ángulo de fase es

$$\theta = \tan^{-1} \frac{X}{R} \quad (10.7-8)$$

Estas relaciones se resumen de manera gráfica, en el plano compuesto, en la figura 10.7-1. A guisa de ejemplo, consideremos

$$\mathbf{Z} = 2 + j2$$

Entonces,

$$Z = \sqrt{8}$$

y

$$\theta = 45^\circ$$

Los tres elementos,  $R$ ,  $L$  y  $C$ , están representados de manera singular por una impedancia que surge a partir de su relación  $\mathbf{V}$ - $\mathbf{I}$ . Para un resistor, tenemos

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I}$$

y, por consiguiente,

$$\mathbf{Z} = R \quad (10.7-9)$$

Para el inductor tenemos

$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$$

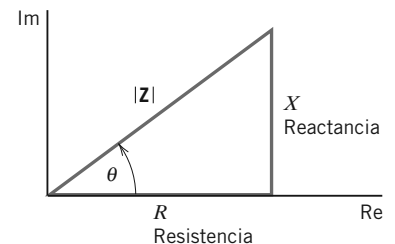


FIGURA 10.7-1 Representación gráfica de la impedancia.

y, por consiguiente

$$\mathbf{Z} = j\omega L \quad (10.7-10)$$

Finalmente, para el condensador, tenemos

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$$

por lo que

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} \quad (10.7-11)$$

Las impedancias para  $R$ ,  $L$  y  $C$  se utilizaron en la tabla 10.6-1 para representar resistores, inductores, y condensadores en el dominio de frecuencia. La unidad para una impedancia son los ohmios.

La recíproca de la impedancia se llama *admitancia* y se indica por la  $\mathbf{Y}$ :

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} \quad (10.7-12)$$

La admitancia es análoga a la conductancia para circuitos resistivos. Las unidades de admitancia son los siemens, abreviados como S. Si retomamos la ecuación 10.7-6 en que  $\mathbf{Z} = Z \angle \theta$ , tenemos

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{|\mathbf{Z}| \angle \theta} = |\mathbf{Y}| \angle -\theta \quad (10.7-13)$$

Por consiguiente,  $|\mathbf{Y}| = 1/|\mathbf{Z}|$  y el ángulo de  $\mathbf{Y}$  es  $-\theta$ . También podemos escribir la relación de magnitud como  $Y = 1/Z$ .

Utilizando la forma

$$\mathbf{Z} = R + jX$$

obtenemos

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = G + jB \quad (10.7-14)$$

Observe que  $G$  no es simplemente la recíproca de  $R$ , ni  $B$  es la recíproca de  $X$ . La parte real de la admitancia,  $G$ , se denomina conductancia, y la parte imaginaria,  $B$ , se llama *susceptancia*. Las unidades de  $G$  y  $B$  son los siemens.

La impedancia de un elemento es  $\mathbf{Z} = R + jX$ . El elemento es inductivo si la parte reactiva  $X$  es positiva, capacitiva si  $X$  es negativa. Dado que  $\mathbf{Y}$  es la recíproca de  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{Y} = G + jB$ , también se puede decir que si  $B$  es positiva, el elemento es capacitivo y que una  $B$  negativa indica un elemento inductivo.

Consideremos el condensador  $C = 1$  mF y encontremos su capacitancia y admitancia. La impedancia de un condensador es

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{j\omega C}$$

Por consiguiente, además del valor de  $C = 1$  mF, necesitamos la frecuencia  $\omega$ . Si consideramos el caso  $\omega = 100$  rad/s, obtenemos

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{j0.1} = \frac{10}{j} = -10j = 10 \angle -90^\circ \Omega$$

Para encontrar la admitancia, observemos que

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = j\omega C = j0.1 = 0.1 \angle 90^\circ \text{ S}$$

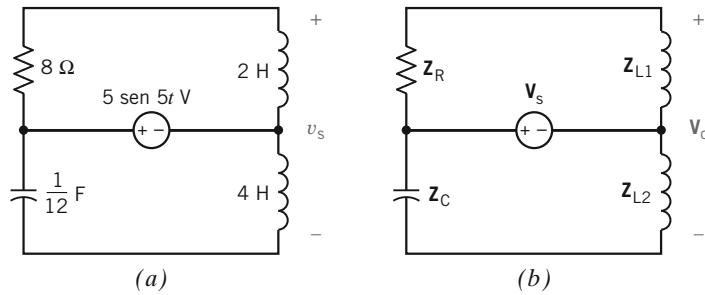


FIGURA E 10.7-1 Circuito representado (a) en el dominio de tiempo y (b) en el dominio de frecuencia.

**EJERCICIO 10.7-1** La figura E 10.7-1a muestra un circuito representado en el dominio de tiempo. La figura E 10.7-1b muestra el mismo circuito representado en el dominio de frecuencia, utilizando fasores e impedancias.  $Z_R$ ,  $Z_C$ ,  $Z_{L1}$  y  $Z_{L2}$  son las impedancias correspondientes a resistor, condensador y dos inductores en la figura E 10.7-1a.  $V_s$  es el fasor correspondiente al voltaje de la fuente de voltaje. Determine  $Z_R$ ,  $Z_C$ ,  $Z_{L1}$ ,  $Z_{L2}$  y  $V_s$ .

*Sugerencia:*  $5 \text{ sen } 5t = 5 \cos(5t - 90^\circ)$

*Respuesta:*  $Z_R = 8 \Omega$ ,  $Z_C = \frac{1}{j5\left(\frac{1}{12}\right)} = \frac{2.4}{j} = \frac{j2.4}{j \times j} = -j2.4 \Omega$ ,  $Z_{L1} = j5(2) = j10 \Omega$ ,

$Z_{L2} = j5(4) = j20 \Omega$ , y  $V_s = 5 \angle -90^\circ \text{ V}$

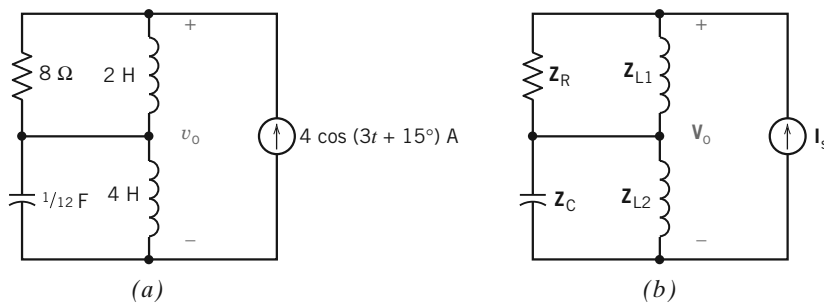


FIGURA E 10.7-2 Circuito representado (a) en el dominio de tiempo y (b) en el dominio de frecuencia.

**EJERCICIO 10.7-2** La figura E 10.7-2a muestra un circuito representado en el dominio de tiempo. La figura E 10.7-2b muestra el mismo circuito representado en el dominio de frecuencia, utilizando fasores e impedancias.  $Z_R$ ,  $Z_C$ ,  $Z_{L1}$  y  $Z_{L2}$  son las impedancias correspondientes a resistor, condensador y dos inductores en la figura E 10.7-2a.  $I_s$  es el fasor correspondiente a la corriente de la fuente de corriente. Determine  $Z_R$ ,  $Z_C$ ,  $Z_{L1}$ ,  $Z_{L2}$  e  $I_s$ .

*Respuesta:*  $Z_R = 8 \Omega$ ,  $Z_C = \frac{1}{j3\left(\frac{1}{12}\right)} = \frac{4}{j} = \frac{j4}{j \times j} = -j4 \Omega$ ,  $Z_{L1} = j3(2) = j6 \Omega$ ,

$Z_{L2} = j3(4) = j12 \Omega$  e  $I_s = 4 \angle 15^\circ \text{ A}$



## 10.8 LEYES DE KIRCHHOFF QUE UTILIZAN FASORES

La ley de la corriente y la ley del voltaje de Kirchhoff se consideraron anteriormente en el dominio de tiempo. Veamos la KVL en torno a una ruta cerrada, la cual requiere que

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n = 0 \quad (10.8-1)$$

Para voltajes en estado estable senoidales, podemos escribir la ecuación en términos de formas de onda de coseno como

$$V_{m_1} \cos(\omega t + \theta_1) + V_{m_2} \cos(\omega t + \theta_2) + \cdots + V_{m_n} \cos(\omega t + \theta_n) = 0 \quad (10.8-2)$$

Toda la información concerniente a cada voltaje  $v_n$  se incorpora en la magnitud y en la fase,  $V_{m_n}$  y  $\theta_n$  (suponiendo que tomamos nota de  $\omega$ , la cual es la misma para cada término). La ecuación 10.8-2 se puede reescribir, utilizando la identidad de Euler, como

$$\operatorname{Re}\{V_{m_1} e^{j\theta_1} e^{j\omega t}\} + \cdots + \operatorname{Re}\{V_{m_n} e^{j\theta_n} e^{j\omega t}\} = 0$$

o bien

$$\operatorname{Re}\{V_{m_1} e^{j\theta_1} e^{j\omega t} + \cdots + V_{m_n} e^{j\theta_n} e^{j\omega t}\} = 0$$

Podemos factorizar  $e^{j\omega t}$  para obtener

$$\operatorname{Re}\{(V_{m_1} e^{j\theta_1} + \cdots + V_{m_n} e^{j\theta_n}) e^{j\omega t}\} = 0$$

Escribimos  $V_{m_p} e^{j\theta_p}$  como  $\mathbf{V}_p$  y obtenemos

$$\operatorname{Re}(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{V}_n) e^{j\omega t} = 0$$

Como  $e^{j\omega t}$  no puede ser igual a cero, requerimos que

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{V}_n = 0 \quad (10.8-3)$$

Por consiguiente, tenemos el importante resultado de que la suma de los voltajes de fasor en una ruta cerrada son cero. Por lo tanto,

La ley del voltaje de Kirchhoff se mantiene en el dominio de frecuencia con voltajes de fasor.

Empleando un proceso similar, podemos mostrar que

La ley de la corriente de Kirchhoff se mantiene en el dominio de frecuencia con corrientes de fasor.

por lo que en un nodo tenemos

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \cdots + \mathbf{I}_n = 0 \quad (10.8-4)$$

Puesto que la KVL y la KCL se mantienen en el dominio de frecuencia, es fácil concluir que todas las técnicas de análisis que desarrollamos para circuitos resistivos permanecen para corrientes y voltajes de fasor. Por ejemplo, podemos aplicar el principio de superposición, transformaciones de fuentes, circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton, y análisis de voltajes de nodos y corrientes de enlaces. Todos estos métodos se aplican en cuanto el circuito sea lineal.

Primero, consideremos las impedancias conectadas en serie, como se muestra en la figura 10.8-1. La corriente del fasor  $\mathbf{I}$  fluye a través de cada impedancia. Aplicando la KVL, podemos escribir

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{V}_n = \mathbf{V}$$

Como  $\mathbf{V}_j = \mathbf{Z}_j \mathbf{I}$ , tenemos

$$(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \cdots + \mathbf{Z}_n) \mathbf{I} = \mathbf{V}$$

Por consiguiente, la impedancia equivalente que se ve en la terminal de entrada es

$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \cdots + \mathbf{Z}_n \quad (10.8-5)$$

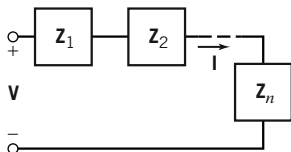


FIGURA 10.8-1 Impedancias en serie.

Por lo tanto, la impedancia equivalente para una serie de impedancias es la suma de las impedancias individuales.

Considere el conjunto de admitancias en paralelo que se muestra en la figura 10.8-2. Se puede mostrar fácilmente que la admitancia equivalente  $\mathbf{Y}_{\text{eq}}$  es

$$\mathbf{Y}_{\text{eq}} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \cdots + \mathbf{Y}_n \quad (10.8-6)$$

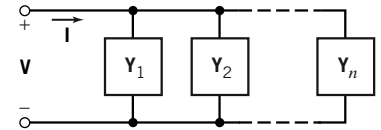


FIGURA 10.8-2 Admitancias en paralelo.

En el caso de dos admitancias en paralelo, tenemos

$$\mathbf{Y}_{\text{eq}} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2$$

y la impedancia equivalente correspondiente es

$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} = \frac{1}{\mathbf{Y}_{\text{eq}}} = \frac{1}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2} = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \quad (10.8-7)$$

Del mismo modo, las reglas del divisor de corriente y del divisor de voltaje funcionan para las corrientes y voltajes de fasor. La tabla 10.8-1 resume las ecuaciones para la división de voltaje y de corriente en el dominio de frecuencia.

Tabla 10.8-1 División de voltaje y de corriente en el dominio de frecuencia

	CIRCUITO	ECUACIONES
División de voltaje		$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}$ $\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \mathbf{V}$ $\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \mathbf{V}$
División de corriente		$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}$ $\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \mathbf{I}$ $\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \mathbf{I}$

### EJEMPLO 10.8-1 Análisis de circuitos de CA utilizando impedancias

Determine la corriente  $i(t)$  de estado estable en el circuito  $RLC$  que se muestra en la figura 10.8-3a, utilizando fasores e impedancias.

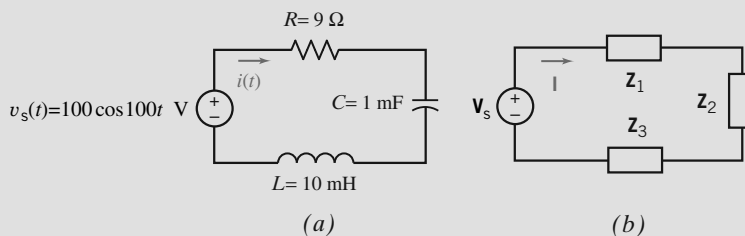


FIGURA 10.8-3 Circuito del ejemplo 10.8-1, representado (a) en el dominio de tiempo y (b) en el dominio de frecuencia.

### Solución

Primero, representamos el circuito con el uso de fasores e impedancias como se muestra en la figura 10.8-3b. Tomando en cuenta que la frecuencia de la entrada senoidal en la figura 10.8-3a es  $\omega = 100$  rad/s, las impedancias en la figura 10.8-3b se determina que sean

$$\mathbf{Z}_1 = R = 9 \Omega, \mathbf{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j(100)(0.001)} = \frac{10}{j} = -j10 \Omega$$

y 
$$\mathbf{Z}_3 = j\omega L = j(100)(0.001) = j1 \Omega$$

El fasor de entrada en la figura 10.8-3b es

$$\mathbf{V}_s = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$$

A continuación, aplicamos la KVL en la figura 10.8-3b para obtener

$$\mathbf{Z}_1 \mathbf{I} + \mathbf{Z}_2 \mathbf{I} + \mathbf{Z}_3 \mathbf{I} = \mathbf{V}_s$$

Sustituir las impedancias y el fasor de entrada nos da

$$(9 - j10 + j1) \mathbf{I} = 100 \angle 0^\circ$$

o bien

$$\mathbf{I} = \frac{100 \angle 0^\circ}{9 - j9} = \frac{10 \angle 0^\circ}{9\sqrt{2} \angle -45^\circ} = 7.86 \angle 45^\circ \text{ A}$$

Por consiguiente, la corriente en estado estable en el dominio de tiempo es

$$i(t) = 7.86 \cos(100t + 45^\circ) \text{ A}$$

### EJEMPLO 10.8-2 División de voltaje utilizando impedancias

#### EJEMPLO INTERACTIVO

Considere el circuito que se muestra en la figura 10.8-4a. La entrada al circuito es el voltaje de la fuente de voltaje,

$$v_s(t) = 7.28 \cos(4t + 77^\circ) \text{ V}$$

La salida es el voltaje a través del inductor,  $v_o(t)$ . Determine el voltaje de salida en estado estable,  $v_o(t)$ .

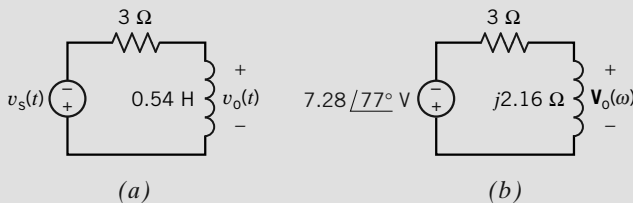


FIGURA 10.8-4 El circuito considerado en el ejemplo 10.8-2, representado (a) en el dominio de tiempo y (b) en el dominio de frecuencia.

### Solución

El voltaje de entrada es senoide. El voltaje de salida también es senoide y tiene la misma frecuencia que el voltaje de entrada. El circuito ha alcanzado el estado estable. En consecuencia, el circuito en la figura 10.8-4a se puede representar en el dominio de frecuencia utilizando fasores e impedancias. La figura 10.8-4b muestra la representación del dominio de frecuencia del circuito de la figura 10.8-4a. La impedancia del inductor es  $j\omega L = j(4)(0.54) = j2.16 \Omega$  como se muestra en la figura 10.8-4b.

Aplique el principio del divisor de voltaje al circuito de la figura 10.8-4b para representar el voltaje de salida en el dominio de frecuencia como

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_o(\omega) &= \frac{j2.16}{3 + j2.16} \left( -7.28 \angle 77^\circ \right) = \frac{2.16 \angle 90^\circ}{3.70 \angle 36^\circ} \left( -7.28 \angle 77^\circ \right) \\ &= \frac{(2.16)(-7.28)}{3.70} \angle (90^\circ + 77^\circ) - 36^\circ \\ &= -4.25 \angle 131^\circ = 4.25 \angle 311^\circ \end{aligned}$$

En el dominio de tiempo, el voltaje de salida está representado como

$$v_o(t) = 4.25 \cos(4t + 311^\circ) \text{ V}$$

### EJEMPLO 10.8-3 Análisis de circuito de CA

### EJEMPLO INTERACTIVO

Considere el circuito que se muestra en la figura 10.8-5a. La entrada al circuito es el voltaje de la fuente de voltaje,

$$v_s(t) = 7.68 \cos(2t + 47^\circ) \text{ V}$$

La salida es el voltaje a través del resistor,

$$v_o(t) = 1.59 \cos(2t + 125^\circ) \text{ V}$$

Determine la capacitancia,  $C$ , del condensador.

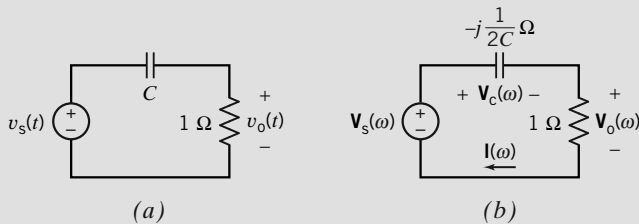


FIGURA 10.8-5 El circuito considerado en el ejemplo 10.8-3, representado (a) en el dominio de tiempo y (b) en el dominio de frecuencia.

### Solución

El voltaje de entrada es una senoide. El voltaje de salida también es senoide y tiene la misma frecuencia que el voltaje de entrada. Al parecer, el circuito ha alcanzado el estado estable. En consecuencia, el circuito en la figura 10.8-5a se puede representar en el dominio de frecuencia utilizando fasores e impedancias. La figura 10.8-5b muestra la representación del dominio de frecuencia del circuito de la figura 10.8-5a. La impedancia del condensador es

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{j}{j^2\omega C} = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{j}{2C}$$

Los fasores que corresponden a las sinusoides de entrada y de salida son

$$\mathbf{V}_s(\omega) = 7.68 \angle 47^\circ \text{ V}$$

y

$$\mathbf{V}_o(\omega) = 1.59 \angle 125^\circ \text{ V}$$

La corriente  $\mathbf{I}(\omega)$  en la figura 10.8-5b está dada por

$$\mathbf{I}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{1} = \frac{1.59 \angle 125^\circ}{1 \angle 0^\circ} = 1.59 \angle 125^\circ \text{ A}$$

El voltaje del condensador,  $\mathbf{V}_c(\omega)$ , en la figura 10.8-5b está dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_c(\omega) &= \mathbf{V}_s(\omega) - \mathbf{V}_o(\omega) = 7.68 \angle 45^\circ - 1.59 \angle 125^\circ \\ &= (5.23 + j5.62) - (-0.91 + 1.30) \\ &= (5.23 + 0.91) + j(5.62 - 1.30) \\ &= 6.14 + j4.32 \\ &= 7.51 \angle 35^\circ\end{aligned}$$

La impedancia del condensador está dada por

$$-j \frac{1}{2C} = \frac{\mathbf{V}_c(\omega)}{\mathbf{I}(\omega)} = \frac{7.51 \angle 35^\circ}{1.59 \angle 125^\circ} = 4.72 \angle -90^\circ$$

Despejando  $C$  tenemos

$$C = \frac{-j}{2(4.72 \angle -90^\circ)} = \frac{1 \angle -90^\circ}{2(4.72 \angle -90^\circ)} = 0.106 \text{ F}$$

#### EJEMPLO 10.8-4 Análisis de circuito de CA

#### EJEMPLO INTERACTIVO

Considere el circuito que se muestra en la figura 10.8-6a. La entrada al circuito es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s(t)$ , y la salida es el voltaje a través del resistor de  $4\text{-}\Omega$ ,  $v_o(t)$ . Cuando la entrada es  $v_s(t) = 8.93 \cos(2t + 54^\circ)$  V, la salida correspondiente es  $v_o(t) = 3.83 \cos(2t + 83^\circ)$  V. Determine el voltaje a través del resistor de  $9\text{-}\Omega$ ,  $v_a(t)$ , y el valor de la capacitancia,  $C$ , del condensador.

#### Solución

El voltaje de entrada es una senoide. El voltaje de salida también es senoide y tiene la misma frecuencia que el voltaje de entrada. Al parecer, el circuito ha alcanzado el estado estable. En consecuencia, el circuito en la figura 10.8-6a se puede representar en el dominio de frecuencia, utilizando fasores e impedancias. La figura 10.8-6b muestra la representación del dominio de frecuencia del circuito de la figura 10.8-6a. Los voltajes  $\mathbf{V}_s(\omega)$ ,  $\mathbf{V}_a(\omega)$  y  $\mathbf{V}_o(\omega)$ , en la figura 10.8-6b son los fasores que corresponden a  $v_s(t)$ ,  $v_a(t)$  y  $v_o(t)$  de la figura 10.8-6a. El condensador y el resistor están representados como impedancias en la figura 10.8-6b. La impedancia del condensador es  $-j1/\omega C = -j1/2C$  cuando el valor de la frecuencia de  $v_s(t)$  es 2 rad/s.

Los fasores que corresponden a las sinusoides de entrada y de salida son

$$\mathbf{V}_s(\omega) = 8.93 \angle 54^\circ \text{ V}$$

y

$$\mathbf{V}_o(\omega) = 3.83 \angle 83^\circ \text{ V}$$

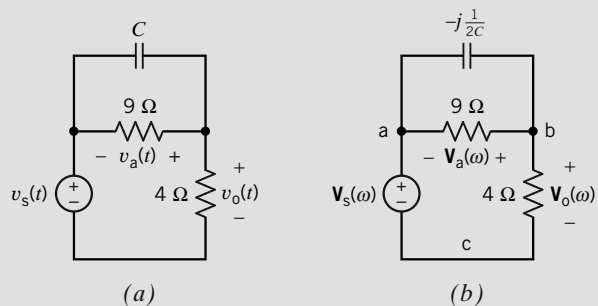


FIGURA 10.8-6 El circuito considerado en el ejemplo 10.8-4, representado (a) en el dominio de tiempo y (b) en el dominio de frecuencia.

Primero, calculamos el valor de  $\mathbf{V}_a(\omega)$ . Aplique la KVL al enlace de la figura 10.8-6b que consta de dos resistores y la fuente de voltaje para tener

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_a(\omega) &= \mathbf{V}_o(\omega) - \mathbf{V}_s(\omega) = (3.83 \angle 83^\circ) - (8.93 \angle 54^\circ) \\ &= (0.47 + j3.80) - (5.25 + j7.22) \\ &= -4.78 - j3.42 \\ &= 5.88 \angle 216^\circ\end{aligned}$$

El voltaje a través del resistor de  $9\text{-}\Omega$ ,  $v_a(t)$ , es la senoide que corresponde a este fasor

$$v_a(t) = 5.88 \cos(2t + 216^\circ) \text{ V}$$

Podemos determinar el valor de la capacitancia si aplicamos la ley de la corriente de Kirchhoff (KCL) al nodo b en la figura 10.8-6a:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{V}_a(\omega)}{-j\frac{1}{2C}} + \frac{\mathbf{V}_a(\omega)}{9} + \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{4} &= 0 \\ (j2C)\mathbf{V}_a(\omega) + \frac{\mathbf{V}_a(\omega)}{9} + \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{4} &= 0\end{aligned}$$

Despejando esta ecuación para  $j2C$  nos da

$$j2C = \frac{4\mathbf{V}_a(\omega) + 9\mathbf{V}_o(\omega)}{-36\mathbf{V}_a(\omega)}$$

Sustituyendo los valores de los fasores  $\mathbf{V}_a(\omega)$  y  $\mathbf{V}_o(\omega)$  en esta ecuación nos da

$$\begin{aligned}j2C &= \frac{4(-4.78 - j3.42) + 9(0.47 + j3.80)}{-36(5.88 \angle 216^\circ)} \\ &= \frac{-14.89 + j20.52}{-36(5.88 \angle 216^\circ)} \\ &= \frac{25.35 \angle 126^\circ}{(36 \angle -180^\circ)(5.88 \angle 216^\circ)} \\ &= \frac{25.35}{(36)(5.88)} \angle 126^\circ - (-180^\circ + 216^\circ) \\ &= 0.120 \angle 90^\circ \\ &= j0.120\end{aligned}$$

Por consiguiente, el valor de la capacitancia es  $C = \frac{0.12}{2} = 0.06 = 60 \text{ mF}$ .

## 10.9 ANÁLISIS DEL VOLTAJE DE NODOS Y DE LA CORRIENTE DE ENLACES UTILIZANDO FASORES

El análisis de circuitos en el dominio de frecuencia sigue el mismo procedimiento que hemos aplicado para los circuitos resistivos; sin embargo, utilizamos impedancias y fasores en vez de resistencias y funciones de tiempo. Dado que la ley de Ohm se puede aplicar en el dominio de frecuencia, utilizamos la relación  $\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$  para los elementos pasivos y procedemos a utilizar las técnicas del voltaje de nodos y la corriente de enlaces.

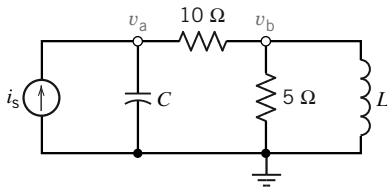


FIGURA 10.9-1 Circuito para el cual queremos determinar  $v_a$  y  $v_b$ .

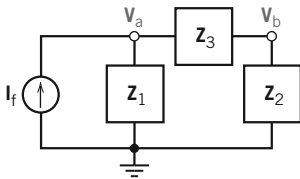


FIGURA 10.9-2 Circuito equivalente para el de la figura 10.9-1 en forma de fasor

A guisa de ejemplo del método de voltaje de nodos utilizando fasores, considere los circuitos de la figura 10.9-1 cuando  $i_s = I_m \cos \omega t$ . Para un  $\omega$  específico y para  $L$  y  $C$  específicos, podemos obtener la impedancia para los elementos  $L$  y  $C$ . Cuando  $\omega = 1000$  rad/s y  $C = 100 \mu\text{F}$ , obtenemos

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C} = -j10 \Omega$$

Cuando  $L = 5$  mH para el inductor, tenemos la impedancia

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L = j5 \Omega$$

Entonces, podemos dibujar de nuevo el circuito que se muestra en la figura 10.9-1, utilizando el formato de fasor que se muestra en la figura 10.9-2. Desde luego,  $\mathbf{Z}_3 = 10 \Omega$ , y  $\mathbf{Z}_2$  se obtiene de la combinación en paralelo del resistor de  $5\text{-}\Omega$  y de la impedancia,  $\mathbf{Z}_L$ , del inductor. En vez de obtener  $\mathbf{Z}_2$ , determinemos  $\mathbf{Y}_2$ , la cual se encuentra fácilmente sumando las dos admitancias en paralelo como sigue:

$$\mathbf{Y}_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{\mathbf{Z}_L} = \frac{1}{5} + \frac{1}{j5} = \frac{1}{5}(1 - j) \text{ S}$$

Aplicando la KCL en el nodo a, tenemos

$$\frac{\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_1} + \frac{\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b}{\mathbf{Z}_3} = \mathbf{I}_s \quad (10.9-1)$$

En el nodo b tenemos

$$\frac{\mathbf{V}_b}{\mathbf{Z}_2} + \frac{\mathbf{V}_b - \mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_3} = 0 \quad (10.9-2)$$

Reordenando las ecuaciones 10.9-1 y 10.9-2, tenemos

$$(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_3)\mathbf{V}_a + (-\mathbf{Y}_3)\mathbf{V}_b = \mathbf{I}_s \quad (10.9-3)$$

$$(-\mathbf{Y}_3)\mathbf{V}_a + (\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3)\mathbf{V}_b = 0 \quad (10.9-4)$$

donde utilizamos la admitancia  $\mathbf{Y}_n = 1/\mathbf{Z}_n$  e  $\mathbf{I}_s = I_m \angle 0^\circ$

Encontramos que las ecuaciones 10.9-3 y 10.9-4 son semejantes a las ecuaciones de voltaje de nodos que encontramos en el capítulo 4 para circuitos resistivos. En este caso, sin embargo, obtenemos las ecuaciones de voltaje de nodos en términos de corrientes de fasor, voltajes de fasor e impedancias y admitancias compuestas.

En general, podemos establecer que para circuitos que contienen sólo admitancias y fuentes independientes, la KCL en el nodo  $k$  requiere que el coeficiente de  $\mathbf{V}_k$  sea la suma de las admitancias en el nodo  $k$ , y los coeficientes de otros términos sean la negativa de la admitancia entre esos nodos y el  $k$ -ésimo nodo.

Procedamos a despejar  $\mathbf{V}_a$  para el circuito que se muestra en las figuras 10.9-1 y 10.9-2 cuando  $I_m = 10$  A. Al sustituir las admitancias en las ecuaciones 10.9-3 y 10.9-4, tenemos

$$\left(\frac{1}{-j10} + \frac{1}{10}\right)\mathbf{V}_a + \frac{-1}{10}\mathbf{V}_b = 10 \quad (10.9-5)$$

$$\frac{-1}{10}\mathbf{V}_a + \left[\frac{1}{5}(1 - j) + \frac{1}{10}\right]\mathbf{V}_b = 0 \quad (10.9-6)$$

Entonces aplicamos la regla de Cramer para despejar  $\mathbf{V}_a$ , obteniendo

$$\mathbf{V}_a = \frac{100(3 - 2j)}{4 + j} = \frac{100(3 - 2j)(4 - j)}{17} = \frac{100}{17}(10 - 11j) = 87.5 \angle -47.7^\circ$$

Por consiguiente, tenemos el voltaje  $v_a$  en estado estable:

$$v_a = 87.5 \cos(1000t - 47.7^\circ) \text{ V}$$

Aquí se pueden utilizar los métodos de análisis nodal generales del capítulo 4, donde somos cautos al observar que utilizamos impedancias y admitancias compuestas, así como voltajes y corrientes de fasor. Una vez que determinamos los voltajes o corrientes de fasor deseados, los transformamos de vuelta al dominio de tiempo para obtener la corriente o el voltaje senoidal de estado estable deseados. Empleamos el concepto de un supernodo, si fuera necesario, e incluimos el efecto de una fuente dependiente, si se requiriera.

**EJEMPLO 10.9-1** Circuito de CA con un supernodo

En la figura 10.9-3 se muestra un circuito con  $\omega = 10$  rad/s,  $L = 0.5$  H y  $C = 10$  mF. Encuentre el voltaje de nodo  $v$  en su forma senoidal en estado estable cuando  $v_s = 10 \cos \omega t$  V.

**Solución**

El circuito tiene una fuente dependiente entre dos nodos, de modo que identificamos un supernodo como se muestra en la figura 10.9-4, cuando también mostramos la impedancia para cada elemento. Por ejemplo, la impedancia del inductor es  $\mathbf{Z}_L = j\omega L = j5$ . Del mismo modo, la impedancia para el condensador es

$$\mathbf{Z}_c = \frac{1}{j\omega C} = \frac{10}{j} = -j10$$

Primero, observamos que  $\mathbf{Y}_1 = 1/R_1 = 1/10$ . Ahora queremos dar a ambas las dos admitancias en paralelo para  $R_2$  y  $C$  para obtener una admitancia  $\mathbf{Y}_2$ , como se muestra en la figura 10.9-5. Entonces obtenemos

$$\mathbf{Y}_2 = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\mathbf{Z}_c} = \frac{1}{10} + \frac{j}{10} = \frac{1}{10}(1 + j) \text{ S}$$

Podemos obtener  $\mathbf{Y}_3$  para la resistencia e inductancia en serie como

$$\mathbf{Y}_3 = \frac{1}{\mathbf{Z}_3}$$

donde  $\mathbf{Z}_3 = R_3 + \mathbf{Z}_L = 5 + j5\Omega$ . Por consiguiente, tenemos

$$\mathbf{Y}_3 = \frac{1}{5 + j5} = \frac{1}{50}(5 - j5) \text{ S}$$

Si escribimos la KCL en el supernodo de la figura 10.9-5, tenemos

$$\mathbf{Y}_1(\mathbf{V} - \mathbf{V}_s) + \mathbf{Y}_2\mathbf{V} + \mathbf{Y}_3(\mathbf{V} + 10\mathbf{I}) = 0 \quad (10.9-7)$$

Además, observamos que

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_1(\mathbf{V}_s - \mathbf{V}) \quad (10.9-8)$$

Sustituyendo la ecuación 10.9-8 en la ecuación 10.9-7, obtenemos

$$\mathbf{Y}_1(\mathbf{V} - \mathbf{V}_f) + \mathbf{Y}_2\mathbf{V} + \mathbf{Y}_3[\mathbf{V} + 10\mathbf{Y}_1(\mathbf{V}_f - \mathbf{V})] = 0$$

Reordenando, tenemos

$$(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 - 10\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_3)\mathbf{V} = (\mathbf{Y}_1 - 10\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_3)\mathbf{V}_s$$

Por consiguiente

$$\mathbf{V} = \frac{(\mathbf{Y}_1 - 10\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_3)\mathbf{V}_s}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3 - 10\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_3}$$

Dado que  $\mathbf{V}_s = 10 \angle 0^\circ$ , tenemos

$$\mathbf{V} = \frac{\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{50}(5 - j5)\right)10}{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}(1 + j)} = \frac{1 - (1 - j)}{\frac{1}{10}(2 + j)} = \frac{10j}{2 + j}$$

Por consiguiente, obtenemos

$$v = \frac{10}{\sqrt{5}} \cos(10t + 63.4^\circ) \text{ V}$$

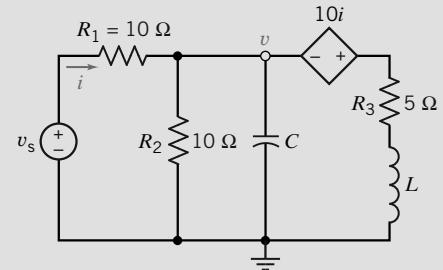


FIGURA 10.9-3 Circuito para el ejemplo 10.9-1.

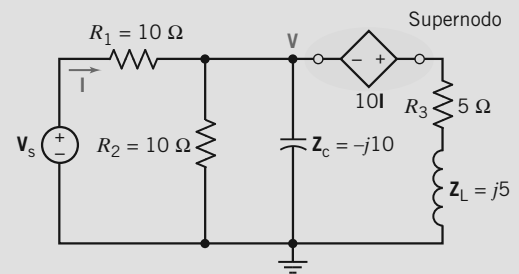


FIGURA 10.9-4 Representación de dominio de frecuencia para el circuito del ejemplo 10.9-1.

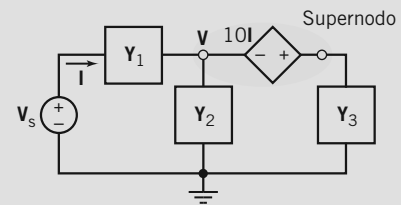


FIGURA 10.9-5 Circuito para el ejemplo 10.9-1 con tres admitancias y el supernodo identificados.



**Tabla 10.9-1 Análisis del voltaje de nodos utilizando el concepto de fasores para encontrar los voltajes de nodos de estado estable senoidales**

1. Convierta las fuentes independientes en forma de fasor.
2. Seleccione los nodos y el nodo de referencia y etiquete los voltajes de nodos en el dominio de tiempo,  $v_n$ , y sus voltajes de fasor correspondientes,  $V_n$ .
3. Si el circuito contiene solamente fuentes de corriente independientes, proceda con el paso 5, de otro modo, proceda con el paso 4.
4. Si el circuito contiene una fuente de voltaje, seleccione uno de los tres casos siguientes y el método asociado:

**CASO**

- a. La fuente de voltaje conecta el nodo  $q$  y el nodo de referencia.
- b. La fuente de voltaje se ubica entre dos nodos.
- c. La fuente de voltaje en serie con la impedancia se ubica entre el nodo  $d$  y la tierra, con su terminal positiva en el nodo  $d$ .

**MÉTODO**

Establezca  $Vq = V_s$  y proceda.  
 Cree un supernodo que incluya ambos nodos.  
 Reemplace la fuente de voltaje y la impedancia en serie con una combinación en paralelo de una admitancia  $Y_1 = 1/Z_1$  y una fuente de corriente  $I_1 = V_s Y_1$  introduciendo el nodo  $d$ .

5. Utilizando la frecuencia conocida de las fuentes,  $\omega$ , encuentre la impedancia de cada elemento en el circuito.
6. Para cada extensión en un nodo dado, encuentre la admitancia equivalente de esa extensión  $Y_n$ .
7. Escriba la KCL en cada nodo.
8. Resuelva el voltaje de nodos deseado  $V_a$ , siguiendo la regla de Cramer.
9. Convierta el voltaje de fasor  $V_a$  de nuevo en la forma de dominio de tiempo.

**Tabla 10.9-2 Análisis de la corriente de enlaces utilizando el concepto de fasor para encontrar las corrientes de enlace de estado estable**

1. Convierta las fuentes independientes en forma de fasor.
2. Seleccione las corrientes de enlaces y etiquete las corrientes en el dominio de tiempo,  $i_m$ , y las corrientes de fasor independientes,  $I_n$ .
3. Si el circuito contiene solamente fuentes de voltaje independientes, proceda al paso 5; de otro modo, proceda al paso 4.
4. Si el circuito contiene una fuente de corriente, seleccione uno de los dos casos siguientes y el método asociado:

**CASO**

- a. La fuente de corriente aparece como un elemento de sólo un enlace,  $n$ .
- b. La fuente de corriente es común a los dos enlaces.

**MÉTODO**

Igualé la corriente de enlace  $I_n$  con la corriente de la fuente de corriente, teniendo en cuenta la dirección de la corriente de fuente.  
 Cree un superenlace como la periferia de los dos enlaces. En el paso 6.  
 Escriba una ecuación de KVL en torno a la periferia del superenlace.  
 Registre también la ecuación de restricción que incurrió por la fuente de corriente.

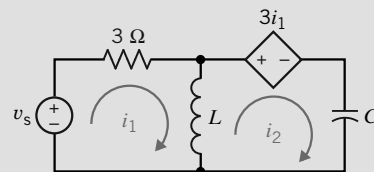
5. Utilizando la frecuencia conocida de las fuentes,  $\omega$ , encuentre la impedancia de cada elemento en el circuito.
6. Escriba la KCL en cada nodo.
7. Resuelva la corriente de enlaces deseada  $I_n$ , siguiendo la regla de Cramer.
8. Convierta la corriente de fasor  $I_n$  de nuevo en la forma de dominio de tiempo.

El análisis del proceso de voltaje de nodos y de la corriente de enlaces, utilizando fasores para determinar la respuesta senoidal de estado estable de un circuito, se registran en las tablas 10.9-1 y 10.9-2, respectivamente.

El análisis de la corriente de enlaces, siguiendo el método de la tabla 10.9-2, es relativamente directo. Cuando tiene la impedancia de cada elemento, puede escribir fácilmente las ecuaciones de la KVL para cada enlace.

**EJEMPLO 10.9-2 Análisis de circuitos de CA utilizando ecuaciones de enlaces**

Encuentre la corriente senoidal de estado estable  $i_1$  para el circuito de la figura 10.9-6 cuando  $v_s = 10\sqrt{2} \cos(\omega t + 45^\circ)$  V y  $\omega = 100$  rad/s. Además,  $L = 30$  mH y  $C = 5$  mF.

**FIGURA 10.9-6** Circuito del ejemplo 10.9-2.

## Solución

Primero, transformamos el voltaje de fuente a forma de fasor para obtener

$$\mathbf{V}_s = 10\sqrt{2} \angle 45^\circ = 10 + j10 \text{ V}$$

Luego seleccionamos las dos corrientes de enlaces como  $\mathbf{I}_1$  e  $\mathbf{I}_2$ , como se muestra en la figura 10.9-7. Dado que la frecuencia de la fuente es  $\omega = 100$ , encontramos que la inductancia tiene una impedancia de

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L = j3 \Omega$$

El condensador tiene una impedancia de

$$\mathbf{Z}_c = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\left(\frac{1}{2}\right)} = -j2 \Omega$$

Podemos resumir las corrientes de fasor del circuito y la impedancia de cada elemento dibujando de nuevo el circuito en términos de fasores, como se muestra en la figura 10.9-7. Ahora podemos escribir las ecuaciones de la KVL para cada enlace, obteniendo

$$\text{enlace 1: } (3 + j3)\mathbf{I}_1 - j3\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_s$$

$$\text{enlace 2: } (3 + j3)\mathbf{I}_1 + (j3 - j2)\mathbf{I}_2 = 0$$

Despejando  $\mathbf{I}_1$ , siguiendo la regla de Cramer, tenemos

$$\mathbf{I}_1 = \frac{(10 + j10)j}{\Delta}$$

donde la determinante es

$$\Delta = (3 + j3)(j) + j3(3 - j3) = 6 + 12j$$

Por consiguiente, tenemos

$$\mathbf{I}_1 = \frac{10j - 10}{6 + 12j}$$

Si continuamos, obtenemos

$$\mathbf{I}_1 = \frac{10(j - 1)}{6(1 + 2j)} = \frac{10(\sqrt{2} \angle 135^\circ)}{6(\sqrt{5} \angle 63.4^\circ)} = 1.05 \angle 71.6^\circ$$

Por lo tanto, la respuesta del tiempo en estado estable es

$$i_1 = 1.05 \cos(100t + 71.6^\circ) \text{ A}$$

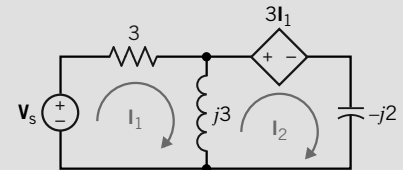


FIGURA 10.9-7 Circuito del ejemplo 10.9-2 con fasores e impedancias.

### EJEMPLO 10.9-3 Análisis de circuitos de Ca utilizando impedancias

Encuentre la corriente de estado estable  $i_1$  cuando la fuente de voltaje es  $v_s = 10\sqrt{2} \cos(\omega t + 45^\circ) \text{ V}$  y la fuente de corriente es  $i_s = 3 \cos \omega t \text{ A}$  para el circuito de dominio de frecuencia de la figura 10.9-8. El circuito de la figura proporciona la impedancia en ohmios para cada elemento en el  $\omega$  especificado.

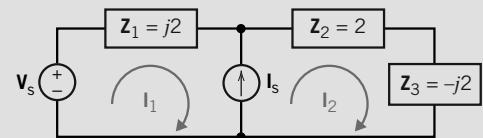


FIGURA 10.9-8 Circuito de dominio de frecuencia del ejemplo 10.9-3.

### Solución

Primero, transformamos las fuentes independientes en forma de fasor. La fuente de voltaje es

$$\mathbf{V}_s = 10\sqrt{2} \angle 45^\circ = 10(1 + j) \text{ V}$$

y la fuente de corriente es

$$\mathbf{I}_s = 3 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Observamos que la fuente de corriente conecta los dos enlaces y proporciona una ecuación de restricción:

$$\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_s \quad (10.9-9)$$

Al crear un superenlace en torno a la periferia de los dos enlaces, escribimos una ecuación de la KVL, obteniendo

$$\mathbf{I}_1 \mathbf{Z}_1 + \mathbf{I}_2(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3) = \mathbf{V}_s \quad (10.9-10)$$

Dado que deseamos despejar  $\mathbf{I}_1$ , utilizaremos  $\mathbf{I}_2$  de la ecuación 10.9-9 y la sustituimos en la ecuación 10.9-10, con lo que obtenemos

$$\mathbf{I}_1 \mathbf{Z}_1 + (\mathbf{I}_s + \mathbf{I}_1)(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3) = \mathbf{V}_s$$

Reordenamos para obtener

$$(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_s - (\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)\mathbf{I}_s$$

Por consiguiente, tenemos

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_s - (\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3)\mathbf{I}_s}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}$$

Sustituimos las impedancias y las fuentes y tenemos

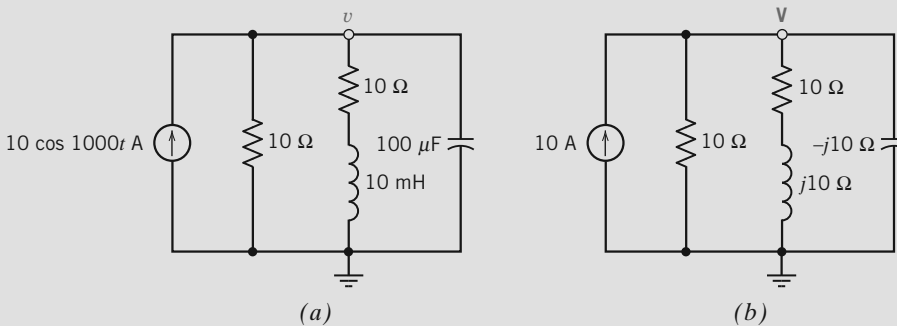
$$\mathbf{I}_1 = \frac{(10 + j10) - (2 - j2)3}{2} = 2 + j8 = 8.25 \angle 76^\circ \text{ A}$$

Por tanto, obtenemos

$$i_1 = 8.25 \cos(\omega t + 76^\circ) \text{ A}$$

### EJEMPLO 10.9-4 Análisis de un circuito de CA utilizando ecuaciones nodales

Encuentre el voltaje  $v$  de estado estable para el circuito de la figura 10.9-9a



**FIGURA 10.9-9**  
(a) Representación del dominio de tiempo y  
(b) del dominio de frecuencia del circuito para el ejemplo 10.9-4.

### Solución

Primero, represente el circuito en el dominio de frecuencia, utilizando impedancias y fasores. La impedancia del inductor es

$$j\omega L = j1000(10 \times 10^{-3}) = j10 \Omega$$

La impedancia del condensador es

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j1000(100 \times 10^{-6})} = \frac{10}{j} = -j10 \Omega$$

La representación de fasor de la corriente de entrada es

$$10 \angle 0^\circ = 10 \text{ A}$$

La figura 10.9-9b muestra la representación de dominio de frecuencia del circuito. El voltaje de fasor  $\mathbf{V}$  se puede obtener aplicando la ley de la corriente de Kirchhoff en el nodo superior del circuito en la figura 10.9-9b para obtener

$$\frac{\mathbf{V}}{10} + \frac{\mathbf{V}}{10 + j10} + \frac{\mathbf{V}}{-j10} = 10$$

o bien

$$\frac{\mathbf{V}}{10} + \frac{\mathbf{V}}{10 + j10} \left( \frac{10 - j10}{10 - j10} \right) + \frac{\mathbf{V}}{-j10} = 0.1\mathbf{V} + (0.05 - j0.05)\mathbf{V} + j0.1\mathbf{V} = 10$$

Despejamos  $\mathbf{V}$  y tenemos

$$\mathbf{V} = \frac{10}{0.158 \angle -18.4^\circ} = 63.3 \angle -18.4^\circ$$

Por consiguiente, tenemos el voltaje de estado estable como

$$v = 63.3 \cos(1000t - 18.4^\circ) \text{ V.}$$

## 10.10 SUPERPOSICIÓN, EQUIVALENTES DE THÉVENIN Y NORTON Y TRANSFORMACIONES DE FUENTES

Los circuitos en el dominio de frecuencia con corrientes y voltajes de fasor e impedancias, son análogos a los circuitos resistivos que ya consideramos antes. Dado que son lineales, esperamos que el principio de superposición y el método de transformación de fuentes se mantendrán. Además, podemos definir los circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton en términos de impedancia o admitancia.

Primero, consideremos el *principio de superposición*, el cual se puede redefinir como sigue: para un circuito lineal que contiene dos o más fuentes independientes, cualquier voltaje o corriente se puede calcular como la suma algebraica de todas corrientes o voltajes individuales ocasionados por cada fuente independiente que actúe sola.

Si un circuito lineal es excitado por varias fuentes senoidales y todas con la misma frecuencia,  $\omega$ , entonces se *puede* utilizar la superposición. Si un circuito lineal es excitado por varias fuentes pero todas de diferentes frecuencias, entonces se *debe* utilizar la superposición.

El principio de superposición es particularmente útil si un circuito tiene dos o más fuentes que actúan en diferentes frecuencias. Desde luego, el circuito tendrá un conjunto de valores de impedancia en una frecuencia y un conjunto diferente de valores de impedancia en otra frecuencia. Podemos determinar la respuesta de fasor en cada frecuencia. Entonces encontramos la respuesta de tiempo que corresponde a cada respuesta de fasor y las agregamos. Observe que la superposición, en el caso de fuentes que operan en diferentes frecuencias, aplica solamente a las respuesta de tiempo. No podemos sobreponer las respuestas de fasor.

## EJEMPLO 10.10-1 Superposición

Aplicando el principio de la superposición, encuentre la corriente  $i$  de estado estable para el circuito que se muestra en la figura 10.10-1 cuando  $v_s = 10 \cos 10t \text{ V}$ ,  $i_s = 3 \text{ A}$ ,  $L = 1.5 \text{ H}$  y  $C = 10 \text{ mF}$ .

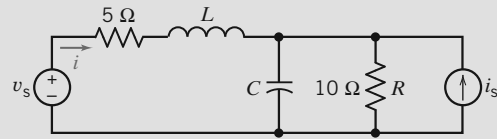


FIGURA 10.10-1 Circuito del ejemplo 10.10-1

## Solución

El principio de superposición indica que la respuesta a la fuente de voltaje y a la fuente de corriente actuando solas es igual a la suma de la respuesta a la fuente de voltaje actuando sola más la respuesta a la fuente de corriente actuando sola. Sea  $i_1$  que indique la respuesta a la fuente de voltaje actuando sola. La figura 10.10-2a muestra el circuito que se utiliza para calcular  $i_1$ . En la figura 10.10-2b, este circuito ha sido representado en el dominio de frecuencia utilizando impedancias y fasores. Del mismo modo, sea  $i_2$  que indique la respuesta a la fuente de corriente actuando sola. La figura 10.10-3a muestra el circuito que se utiliza para calcular  $i_2$ . En la figura 10.10-3b, este circuito se ha representado en el dominio de frecuencia.

El primer paso es convertir las fuentes independientes en forma de fasor, teniendo en cuenta que las fuentes operan en frecuencias diferentes. Para la fuente de voltaje que opera en  $\omega = 10$ , tenemos

$$\mathbf{V}_s = 10 \angle 0^\circ \text{ V}$$

Observamos que la fuente de corriente es una corriente directa, podemos establecer que  $\omega = 0$  para la fuente de corriente. La forma de fasor de la fuente de corriente es, entonces,

$$\mathbf{I}_s = 10 \angle 0^\circ \text{ A}$$

El segundo paso es convertir en fasor el circuito con la impedancia de cada elemento como se muestra en la figura 10.10-2b.

Ahora determinemos la corriente de fasor  $\mathbf{I}_1$ , la cual es componente de la corriente  $\mathbf{I}$  debido a la fuente de voltaje. Eliminamos la fuente de corriente, reemplazándola con un circuito abierto a través del resistor de  $10 \Omega$ . Luego podemos encontrar la corriente  $\mathbf{I}_1$  por la primera fuente, como

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_f}{5 + j\omega L + \mathbf{Z}_p} \quad (10.10-1)$$

donde  $\mathbf{Z}_p$  es la impedancia del condensador y la resistencia de  $10 \Omega$  en paralelo. Recuerde que  $\omega = 10$  y  $C = 10 \text{ mF}$ . Por lo tanto, dado que  $\mathbf{Z}_c = -j10 \Omega$ , tenemos

$$\mathbf{Z}_p = \frac{\mathbf{Z}_c R}{R + \mathbf{Z}_c} = \frac{(-j10)10}{10 - j10} = 5(1 - j) \Omega$$

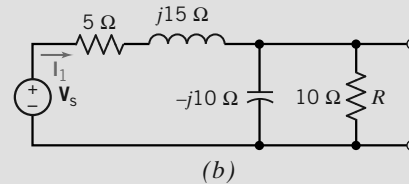
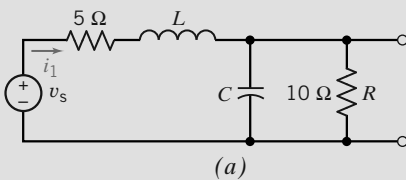


FIGURA 10.10-2

(a) Circuito para el ejemplo 10.10-1 para la fuente de voltaje que actúa sola.  
(b) Representación en el dominio de frecuencia.

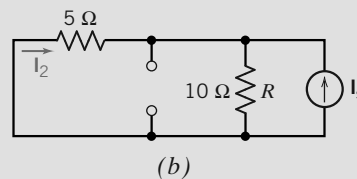
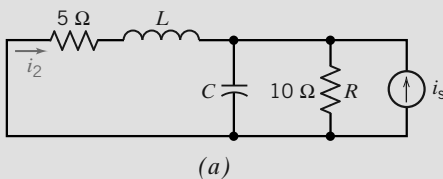


FIGURA 10.10-3 (a) Circuito para el ejemplo 10.10-1 para la fuente de corriente que actúa sola.  
(b) Representación en el dominio de frecuencia.

Si sustituimos  $Z_p$  y  $\omega L = 15$  en la ecuación 10.10-1, tenemos

$$I_1 = \frac{10 \angle 0^\circ}{5 + j15 + (5 - j5)} = \frac{10}{10 + j10} = \frac{10}{\sqrt{200}} \angle -45^\circ$$

Por lo tanto, la corriente en dominio de tiempo resultante de la fuente de voltaje es

$$i_1 = 0.71 \cos(10t - 45^\circ) \text{ A.}$$

Ahora determinemos la corriente de fasor  $I_2$  debida a la fuente de corriente. Estableciendo la fuente de voltaje a cero resulta un cortocircuito. Como  $\omega = 0$  para la fuente de cd, la impedancia del condensador se vuelve un circuito abierto porque  $Z_C = 1/j\omega C = \infty$ . La impedancia del inductor se vuelve un cortocircuito porque  $Z_L = j\omega L = 0$ . Por lo tanto, obtenemos el circuito que se muestra en la figura 10.10-3b. Vemos que hemos vuelto al ya familiar circuito resistivo para una fuente de cd. Entonces, la respuesta debida a la fuente de corriente es

$$I_2 = -\frac{10}{15}(3) = -2 \text{ A}$$

En consecuencia, siguiendo el principio de superposición, la corriente total de estado estable es  $i = i_1 + i_2$  o

$$i = 0.71 \cos(10t - 45^\circ) - 2 \text{ A.}$$

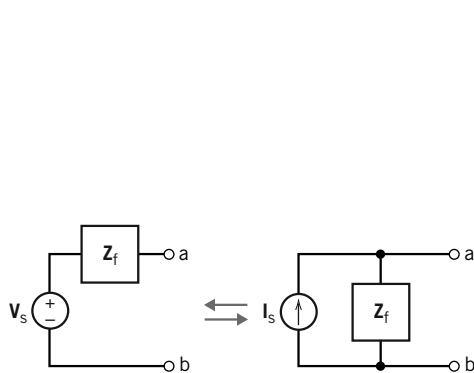


FIGURA 10.10-4 Las fuentes equivalentes cuando  $V_s = Z_f I_s$ .

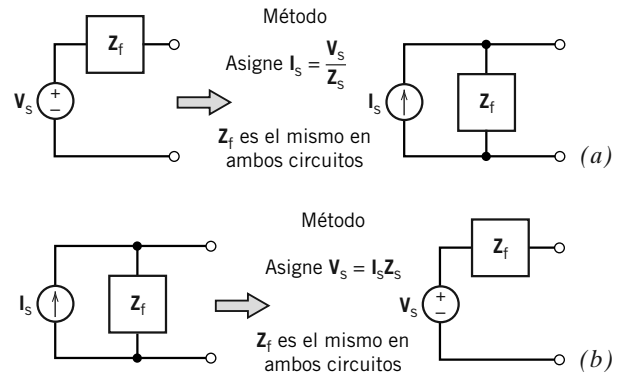


FIGURA 10.10-5 Método de transformaciones de fuentes. (a) conversión de una fuente de voltaje a fuente de corriente. (b) Conversión de una fuente de corriente en una fuente de voltaje.

Ahora considere la *transformación de fuentes* para circuitos de dominio de frecuencia (fasor). Las técnicas para circuitos resistivos que vimos en el capítulo 5 se pueden ampliar fácilmente. La transformación de fuentes se refiere a transformar una fuente de voltaje y su impedancia en serie asociada en una fuente de corriente y su impedancia en paralelo asociada, o viceversa, como se muestra en la figura 10.10-4. El método de transformación de una fuente a otra se resume en la figura 10.10-5.

**EJEMPLO 10.10-2** Transformaciones de fuentes en circuitos de CA

Un circuito tiene una fuente de voltaje  $v_s$  en serie con dos elementos, como se muestra en la figura 10.10-6. Determine la forma de fasor de la fuente de corriente equivalente cuando  $v_s = 10 \cos(\omega t + 45^\circ) \text{ V}$  y  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ .

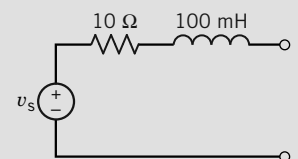


FIGURA 10.10-6 Circuito del ejemplo 10.10-2

## Solución

Primero, determinamos la fuente de corriente equivalente como

$$\mathbf{I}_s = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_s}$$

Como  $\mathbf{Z}_s = 10 + j10 \Omega$  y  $\mathbf{V}_s = 10 \angle 45^\circ$ , obtenemos

$$\mathbf{I}_s = \frac{10 \angle 45^\circ}{\sqrt{200} \angle 45^\circ} = \frac{10}{\sqrt{200}} \angle 0^\circ \text{ A}$$

El equivalente del circuito de la fuente de corriente es mostrado en la figura 10.10-7

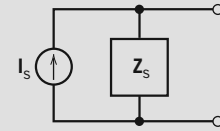


FIGURA 10.10-7 Circuito del ejemplo 10.10-2 transformado en fuente de corriente donde  $\mathbf{Z}_s = 10 + j10 \Omega$  e  $\mathbf{I}_s = 1/\sqrt{2} \text{ A}$ .

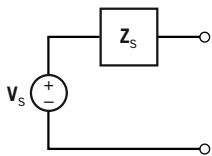


FIGURA 10.10-8 Circuito equivalente de Thévenin.

Los teoremas de Thévenin y Norton aplican a las corrientes o voltajes de fasor e impedancias del mismo modo que con los circuitos resistivos. El teorema de Thévenin se aplica para obtener un circuito equivalente, como se explicó en el capítulo 5. El circuito equivalente de Thévenin se muestra en la figura 10.10-8.

Un procedimiento para determinar el circuito equivalente de Thévenin es como sigue:

1. Identifique una porción de circuito separada de un circuito completo.
2. Determine el voltaje de Thévenin  $\mathbf{V}_t = \mathbf{V}_{oc}$ , el voltaje de circuito abierto en las terminales.
3. (a) Encuentre  $\mathbf{Z}_t$  desactivando todas las fuentes independientes y reduciendo el circuito a una impedancia equivalente; (b) si el circuito tiene una o más fuentes dependientes, entonces una u otra pone en cortocircuito las terminales y determine  $\mathbf{I}_{sc}$  a partir de  $\mathbf{Z}_t = \mathbf{V}_{oc}/\mathbf{I}_{sc}$ ; o bien, (c) desactive las fuentes independientes, junte una corriente de fuente en las terminales, y determine  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$  en las terminales de las cuales  $\mathbf{Z}_t = \mathbf{V}/\mathbf{I}$ .

### EJEMPLO 10.10-3 Circuito equivalente de Thévenin

Encuentre el circuito equivalente de Thévenin para el circuito que se muestra en la figura 10.10-9 cuando  $\mathbf{Z}_1 = 1 + j\Omega$  y  $\mathbf{Z}_2 = -j1 \Omega$

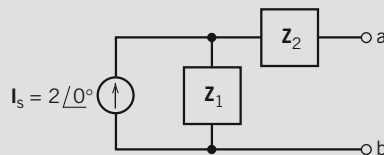


FIGURA 10.10-9 Circuito del ejemplo 10.10-3.

## Solución

El voltaje de circuito abierto es

$$\mathbf{V}_{oc} = \mathbf{I}_s \mathbf{Z}_1 = (2 \angle 0^\circ)(1 + j) = 2\sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ V}$$

La impedancia  $\mathbf{Z}_t$  se encuentra desactivando la fuente de corriente al reemplazarla con un circuito abierto. Entonces tenemos  $\mathbf{Z}_1$  en series con  $\mathbf{Z}_2$ , por tanto

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = (1 + j) - j = 1 \Omega$$

**EJEMPLO 10.10-4** Circuito equivalente de Thévenin

Encuentre el circuito equivalente de Thévenin del circuito de dominio de frecuencia que se muestra en la figura 10.10-10 en forma de fasor.

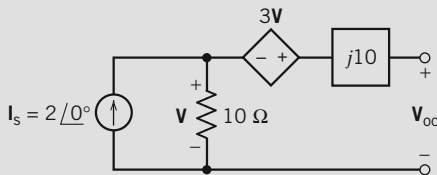


FIGURA 10.10-10 Circuito del ejemplo 10.10-4.

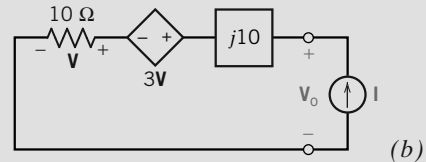
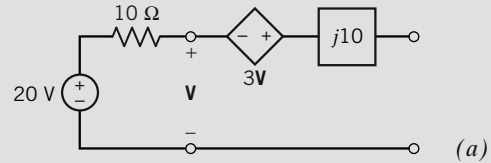


FIGURA 10.10-11 (a) Circuito del ejemplo 10.10-4 con un circuito abierto en la salida y en la fuente de corriente transformada en una fuente de voltaje. (b) Circuito con una fuente de corriente de prueba conectada en la terminal de salida.

**Solución**

El voltaje de Thévenin  $V_t = V_{oc}$ , de modo que primero determinamos el  $V_{oc}$ . Observe que con el circuito abierto,

$$V = 10 I_s = 20 \angle 0^\circ \text{ V}$$

Entonces, para el enlace a la derecha, aplicamos la KVL y tenemos

$$V_{oc} = 3V + V = 4V = 80 \angle 0^\circ \text{ V}$$

Al examinar el circuito de la figura 10.10-10, transformamos la fuente de corriente en una resistencia de  $10\text{-}\Omega$  para la fuente de voltaje y una resistencia de  $10\text{-}\Omega$  en serie, como se muestra en la figura 10.10-11a. Cuando la fuente de voltaje está desactivada y se conecta una fuente de corriente en las terminales, como se muestra en la figura 10.10-11b, la KVL da

$$V_o = j10I + 4V = (j10 + 40) I$$

$$Z_t = 40 + j10 \Omega$$

Por consiguiente,

Ahora consideremos el procedimiento para encontrar el circuito equivalente de Norton. Los pasos son similares a los que se usaron para el equivalente de Thévenin porque  $Z_t$  en serie con el voltaje de Thévenin es igual a la impedancia de Norton en paralelo con la fuente de corriente de Norton. El circuito equivalente de Norton se muestra en la figura 10.10-12.

Para determinar el circuito de Norton, seguimos este procedimiento:

1. Identifique una porción de circuito separada de un circuito completo.
2. La corriente de Norton  $I_n$  es la corriente a través de un cortocircuito en las terminales, por lo que  $I_n = I_{sc}$ .
3. Encuentre  $Z_t$  (a) desactivando todas las fuentes independientes y reduciendo el circuito a una impedancia equivalente, o bien (b) si el circuito tiene una o más fuentes dependientes, encuentre el voltaje de circuito abierto en las terminales  $V_{oc}$  de modo que

$$Z_t = \frac{V_{oc}}{I_{sc}}$$

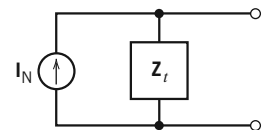


FIGURA 10.10-12 El circuito equivalente de Norton, expresado en términos de una corriente de fasor y una impedancia.



### EJEMPLO 10.10-5 Circuito equivalente de Norton

Encuentre el equivalente de Norton del circuito que se muestra en la figura 10.10-13 en formas de fasor e impedancia. Suponga que  $V_s = 100 \angle 0^\circ$  V.

#### Solución

Primero, encontremos la impedancia equivalente desactivando la fuente de voltaje al reemplazarla con un cortocircuito. Como  $Z_1$  aparece en paralelo con  $Z_2$ , tenemos

$$\begin{aligned} Z_t &= Z_3 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = (1 - j2) + \frac{(5 + j5)(j4)}{(5 + j5) + (j4)} \\ &= (1 - j2) + \left(\frac{20}{53}\right)(2 + j7) = \frac{93}{53} + j\frac{34}{53} = \left(\frac{1}{53}\right)(93 + j34) \end{aligned}$$

Ahora procedemos a determinar la fuente de corriente equivalente de Norton determinando la corriente que fluye a través de un cortocircuito conectado en las terminales a-b, como se muestra en la figura 10.10-14.

Utilizaremos las corrientes de enlaces para encontrar  $I_{sc}$  como se muestra en la figura 10.10-14. Las dos ecuaciones de la KVL de enlaces son

$$\text{enlace 1: } (Z_1 + Z_2)I + (-Z_2)I_{sc} = V_s$$

$$\text{enlace 2: } (-Z_2)I + (Z_2 + Z_3)I_{sc} = 0$$

Seguimos la regla de Cramer, encontramos  $I_N = I_{cc}$  como sigue:

$$\begin{aligned} I_{sc} &= \frac{Z_2 V_s}{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) - Z_2^2} = \frac{(j4)100}{(5 + j9)(1 + j2) - (-16)} \\ &= \frac{j400}{3 + j19} = \frac{400}{370}(19 + 3j) \text{ A} \end{aligned}$$

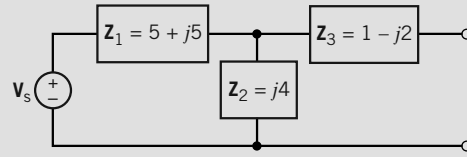


FIGURA 10.10-13 Circuito del ejemplo 10.10-5

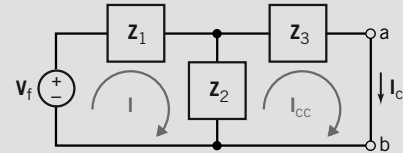


FIGURA 10.10-14 Circuito del ejemplo 10.10-5 con un cortocircuito en las terminales a-b.

## 10.11 DIAGRAMAS DE FASORES

Los fasores que representan el voltaje o la corriente de un circuito son cantidades de tiempo transformadas o convertidas en el dominio de frecuencia. Los fasores son números complejos y se pueden describir gráficamente en un plano complejo. La relación de fasores en un plano complejo se llama *diagrama de fasor*.

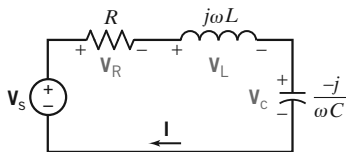


FIGURA 10.11-1 Circuito RLC.

Consideremos un circuito serie  $RLC$  como se muestra en la figura 10.11-1. La impedancia de cada elemento también se identifica en el diagrama. Dado que la corriente fluye a través de todos los elementos y es común a todos, tomamos  $I$  como fasor de referencia.

$$I = I \angle 0^\circ$$

Entonces los fasores de voltaje son

$$V_R = RI = RI \angle 0^\circ \quad (10.11-1)$$

$$V_L = j\omega LI = \omega LI \angle 90^\circ \quad (10.11-2)$$

$$V_C = \frac{-jI}{\omega C} = \frac{I}{\omega C} \angle -90^\circ \quad (10.11-3)$$

Estos fasores se muestran en el diagrama de fasores de la figura 10.11-2. Observe que la KVL para este circuito requiere que

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_c$$

Un **diagrama de fasores** es una representación gráfica de fasores y su relación en el plano complejo.

La corriente  $\mathbf{I}$  y el voltaje a través del resistor están en fase. El voltaje del inductor conduce la corriente a  $90^\circ$ , y el voltaje del condensador retarda la corriente a  $90^\circ$ . Para un  $L$  y  $C$  dados, habrá una frecuencia  $\omega$  que da por resultado

$$|\mathbf{V}_L| = |\mathbf{V}_c|$$

Refiriéndonos a las ecuaciones 10.11-2 y 10.11-3, esta cualidad de magnitudes de voltaje ocurre cuando

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

o bien

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

Cuando  $\omega^2 = 1/LC$ , las magnitudes del voltaje del inductor y el voltaje del condensador son iguales. Como están desfasados por  $180^\circ$ , cancelan y la condición resultante es

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_c$$

y entonces  $\mathbf{V}_s$  está en fase con  $\mathbf{I}$ . Esta condición se denomina *resonancia*.

**EJERCICIO 10.11-1** Considere el circuito serie  $RLC$  de la figura 10.11-1 cuando  $L = 1$  mH y  $C = 1$  mF. Encuentre la frecuencia  $\omega$  cuando la corriente, voltaje de fuente y  $\mathbf{V}_R$  están todos en fase.

**Respuesta:**  $\omega = 1000$  rad/s

**EJERCICIO 10.11-2** Dibuje el diagrama de fasores para el circuito de la figura E 10.11-2 cuando  $\mathbf{V} = V \angle 0^\circ$ . Muestre cada corriente en el diagrama.

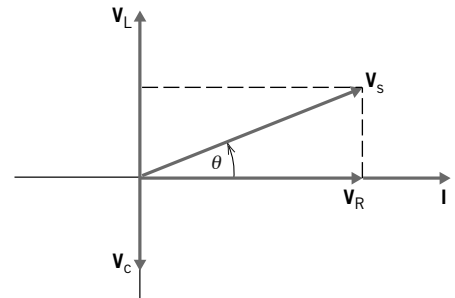


FIGURA 10.11-2 Diagrama de fasores para el circuito  $RLC$  de la figura 10.11-1.

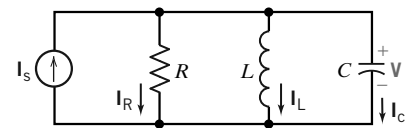


FIGURA E 10.11-2

## 10.12 CIRCUITOS DE FASORES Y EL AMPLIFICADOR OPERACIONAL

La exposición en las anteriores secciones consideraba el comportamiento de los amplificadores operacionales y sus circuitos asociados en el dominio de tiempo. En esta sección consideramos el comportamiento de los amplificadores operacionales y los circuitos  $RLC$  asociados en el dominio de frecuencia, utilizando fasores.

La figura 10.12-1 muestra dos circuitos de amplificador operacional de uso muy frecuente, el amplificador inversor y el amplificador no inversor. Estos circuitos se representan utilizando impedancias y fasores. Esta representación es adecuada cuando la entrada es senoidal y el circuito se encuentra en estado estable.  $\mathbf{V}_s$  es el fasor que corresponde al voltaje de entrada senoidal, y  $\mathbf{V}_o$  es el fasor que representa el voltaje de salida senoidal resultante. Ambos circuitos implican dos impedancias,  $\mathbf{Z}_1$  y  $\mathbf{Z}_2$ .

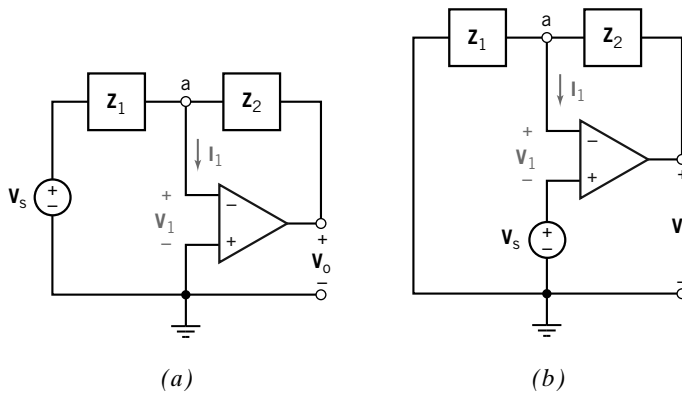


FIGURA 10.12-1 (a) Amplificador inversor y (b) amplificador no inversor.

Ahora determinemos la razón del voltaje de entrada a salida,  $V_o/V_s$ , para el amplificador inversor que se muestra en la figura 10.12-1a. Este circuito se puede analizar al escribir la ecuación nodal en el nodo a como

$$\frac{V_s - V_1}{Z_1} + \frac{V_o - V_1}{Z_2} - I_1 = 0 \quad (10.12-1)$$

Cuando el amplificador operacional es ideal,  $V_1$  e  $I_1$  son 0. Entonces,

$$\frac{V_s}{Z_1} + \frac{V_o}{Z_2} = 0 \quad (10.12-2)$$

Finalmente,

$$\frac{V_o}{V_s} = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad (10.12-3)$$

A continuación, determinaremos la razón del voltaje de entrada a salida,  $V_o/V_s$ , para el amplificador no inversor que se muestra en la figura 10.12-1b. Este circuito se puede analizar al escribir la ecuación nodal en el nodo a como

$$\frac{(V_s + V_1)}{Z_1} - \frac{V_o - (V_s + V_1)}{Z_2} + I_1 = 0 \quad (10.12-4)$$

Cuando el amplificador operacional es ideal,  $V_1$  e  $I_1$  son 0. Entonces,

$$\frac{V_s}{Z_1} - \frac{V_o - V_s}{Z_2} = 0$$

Finalmente,

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1} \quad (10.12-5)$$

Por lo común las impedancias  $Z_1$  y  $Z_2$  se obtienen utilizando solamente resistores y condensadores. Desde luego, en teoría, podríamos utilizar inductores, pero por su costo y tamaño con respecto a los condensadores se usan poco con amplificadores operacionales.

Un ejemplo del amplificador inversor se muestra en la figura 10.12-2. La impedancia  $Z_n$ , donde  $n$  es igual a 1 o 2, es una impedancia  $R_n C_n$  en paralelo, por lo que

$$Z_n = \frac{R_n \frac{1}{j\omega C_n}}{R_n + \frac{1}{j\omega C_n}} = \frac{R_n}{1 + j\omega C_n R_n} \quad (10.12-6)$$

Utilizando las ecuaciones 10.12-3 y 10.12-6 se puede obtener la razón  $V_o/V_s$ .

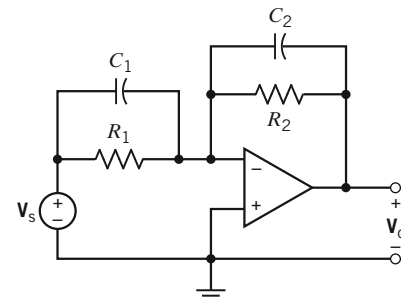


FIGURA 10.12-2 Amplificador operacional con dos circuitos RLC conectados.

**EJEMPLO 10.12-1** Amplificador de CA

Encuentre la razón  $V_o/V_s$  para el circuito de la figura 10.12-2 cuando  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 0$  y  $C_2 = 0.1 \text{ }\mu\text{F}$  para  $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ .

**Solución**

El circuito de la figura 10.12-2 es un ejemplo de amplificador inversor que se muestra en la figura 10.12-1a. Con las ecuaciones 10.12-3 y 10.12-6 obtenemos

$$\frac{V_o}{V_s} = -\frac{Z_1}{Z_2} = -\frac{\frac{R_2}{1+j\omega C_2 R_2}}{\frac{R_1}{1+j\omega C_1 R_1}} = -\frac{R_2(1+j\omega C_1 R_1)}{R_1(1+j\omega C_2 R_2)}$$

Si sustituimos los valores dados de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $\omega$  resulta

$$\frac{V_o}{V_s} = -\frac{10^4(1+j10^0(0)10^3)}{10^3(1+j10^3(0.1 \times 10^{-6})10^4)} = -\frac{10}{1+j} = 7.07 \angle 135^\circ$$

**EJERCICIO 10.12-1** Encuentre la razón  $V_o/V_s$  para el circuito que se muestra en la figura 10.12-2 cuando  $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C_2 = 0$ ,  $C_1 = 1 \text{ }\mu\text{F}$  y  $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ .

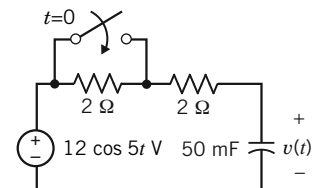
**Respuesta:**  $V_o/V_s = -1 - j$

**10.13 LA RESPUESTA TOTAL**

A continuación, consideramos circuitos con entradas senoidales que están sujetos a cambios abruptos, como cuando un interruptor se abre o se cierra. Para hallar la respuesta total de tales circuitos:

- Representamos el circuito por una ecuación diferencial.
- Encontramos la solución general de la ecuación diferencial homogénea. Esta solución es la respuesta natural,  $v_n(t)$ . La respuesta natural contendrá constantes desconocidas que se evaluarán posteriormente.
- Hallamos una solución particular de la ecuación diferencial. Dicha solución es la respuesta forzada  $v_f(t)$ .
- Representamos la respuesta del circuito como  $v(t) = v_n(t) + v_f(t)$ .
- Utilizamos las condiciones iniciales, por ejemplo, los valores iniciales de las corrientes en inductores y los voltajes a través de condensadores para evaluar las constantes desconocidas.

Considere el circuito que se muestra en la figura 10.13-1. Antes del tiempo  $t = 0$ , este circuito se encuentra en estado estable, por lo tanto todos sus voltajes y corrientes son senoidales con una frecuencia de  $5 \text{ rad/s}$ . En tiempo  $t = 0$ , el interruptor se cierra, con lo que altera el circuito. Inmediatamente antes de  $t = 0$ , las corrientes y voltajes no son senoidales. A fin de cuentas, la alteración termina y el circuito de nuevo está en estado estable (más bien ligeramente diferente de un estado estable). Una vez más, todas las corrientes y voltajes son senoidales con una frecuencia de  $5 \text{ rad/s}$ .



**FIGURA 10.13-1** El circuito considerado en el ejemplo 10.13-1.

Para encontrar la respuesta total de este circuito se utilizan dos diferentes respuestas de estado estable. La respuesta de estado estable antes que el interruptor se cierre, se utiliza para determinar la condición inicial. La respuesta de estado estable después que se cierra el interruptor se utiliza en la solución particular de la ecuación diferencial que representa este circuito.

### EJEMPLO 10.13-1 Respuesta total

Determine  $v(t)$ , el voltaje a través del condensador en la figura 10.13-1, antes y después de que el interruptor se cierre.

#### Solución

**Paso 1:** Para  $t < 0$ , el interruptor se abre y el circuito se encuentra en estado estable.

El interruptor abierto actúa como un circuito abierto, de modo que los dos resistores de  $2\text{-}\Omega$  están conectados en serie. Reemplazar los resistores en serie con un resistor equivalente hace que el interruptor se muestre en la figura 10.13-2a. Luego, utilizamos impedancias y fasores para representar el circuito en el dominio de frecuencia como se muestra en la figura 10.13-2b.

Si utilizamos la división de voltaje en el dominio de frecuencia nos da

$$\mathbf{V}(\omega) = \left( \frac{-j4}{4 - j4} \right) (12 \angle 0^\circ) = \frac{48 \angle -90^\circ}{5.66 \angle -45^\circ} = 8.485 \angle -45^\circ \text{ V}$$

En el dominio de tiempo,

$$v(t) = 8.485 \cos(5t - 45^\circ) \text{ V}$$

Inmediatamente antes de que se cierre el interruptor, el voltaje del condensador es

$$v(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} v(t) = 8.485 \cos(0 - 45^\circ) = 6 \text{ V}$$

El voltaje del condensador es continuo, por lo que el voltaje del condensador inmediatamente después de que se cierra el interruptor es el mismo que inmediatamente antes. Es decir,

$$v(0^+) = v(0^-) = 6 \text{ V}$$

**Paso 2:** Para  $t > 0$ , el interruptor está cerrado. A fin de cuentas, el circuito alcanzará un nuevo estado estable.

El interruptor cerrado actúa como un cortocircuito. Un cortocircuito en paralelo con un resistor es equivalente a un cortocircuito, de modo que tenemos el circuito que se muestra en la figura 10.13-3a. La respuesta de estado estable del circuito se puede obtener representando el circuito en el dominio de frecuencia como se muestra en la figura 10.13-3b.

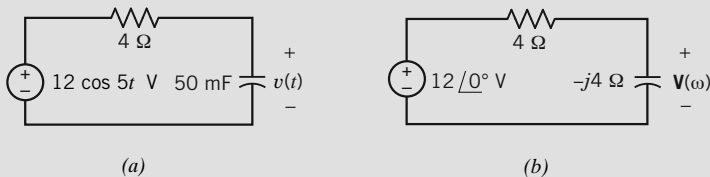


FIGURA 10.13-2 Circuito de la figura 10.13-1 antes de que se cierre el circuito, representado (a) en el dominio de tiempo y (b) en el dominio de frecuencia.

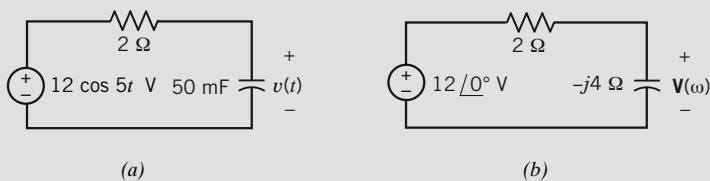


FIGURA 10.13-3 Circuito de la figura 10.13-1 después de que se cierra el circuito, representado (a) en el dominio de tiempo y (b) en el dominio de frecuencia.

Utilizando la división de voltaje en el dominio de frecuencia resulta

$$\mathbf{V}(\omega) = \left( \frac{-j4}{2-j4} \right) (12 \angle 0^\circ) = \frac{48 \angle -90^\circ}{4.47 \angle -63.4^\circ} = 10.74 \angle -26.6^\circ \text{ V}$$

En el dominio de tiempo,

$$v(t) = 10.74 \cos(5t - 26.6^\circ) \text{ V}$$

**Paso 3:** Inmediatamente después de  $t = 0$ , el interruptor está cerrado pero el circuito no se encuentra en estado estable. Debemos encontrar la respuesta total de un circuito de primer orden.

En la figura 10.13-2a, el condensador está conectado a una fuente de voltaje y resistor en serie, es decir, un circuito equivalente de Thévenin. Podemos identificar  $R_t$  y  $v_{oc}$  como se muestra en la figura 10.13-4.

En consecuencia, la constante de tiempo del circuito es

$$\tau = R_t C = 2 \times 0.05 = 0.1 \text{ s}$$

La respuesta natural del circuito es

$$v_n(t) = K e^{-10t}$$

La respuesta en estado estable para  $t > 0$  se puede usar como la respuesta forzada, entonces

$$v_f(t) = 10.74 \cos(5t - 26.6^\circ) \text{ V}$$

La respuesta total es

$$v(t) = v_n(t) + v_f(t) = K e^{-10t} + 10.74 \cos(5t - 26.6^\circ)$$

La constante,  $K$ , se evalúa utilizando el voltaje inicial del condensador,  $v(0+)$ :

$$6 = v(0+) = K e^{-0} + 10.74 \cos(0 - 26.6^\circ) = K + 9.6$$

Por lo tanto,  $K = -3.6$  y

$$v(t) = -3.6 e^{-10t} + 10.74 \cos(5t - 26.6^\circ) \text{ V}$$

**Paso 4:** Resuma los resultados.

El voltaje del condensador es

$$v(t) = \begin{cases} 8.485 \cos(5t - 45^\circ) \text{ V} & \text{para } t \leq 0 \\ -3.6 e^{-10t} + 10.74 \cos(5t - 26.6^\circ) \text{ V} & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

La figura 10.13-5 muestra el voltaje del condensador como una función de tiempo:

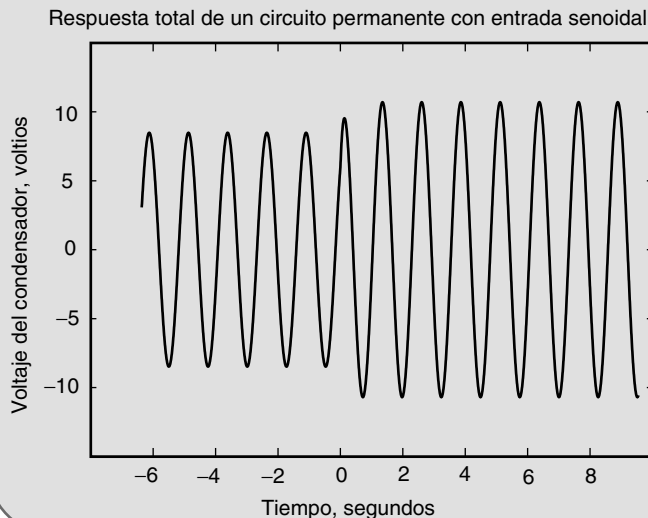


FIGURA 10.13-5 La respuesta total, trazada utilizando MATLAB.

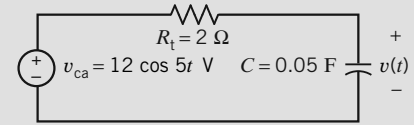


FIGURA 10.13-4 Identificación de  $R_t$  y  $v_{oc}$  en la figura 10.13-2a.

### EJEMPLO 10.13-2 Respuestas de varios tipos de circuitos

La entrada a cada circuito de los mostrados en la figura 10.13-6 es el voltaje de la fuente de voltaje. La salida de cada circuito es la corriente  $i(t)$ . Determine la salida de cada uno de los circuitos.

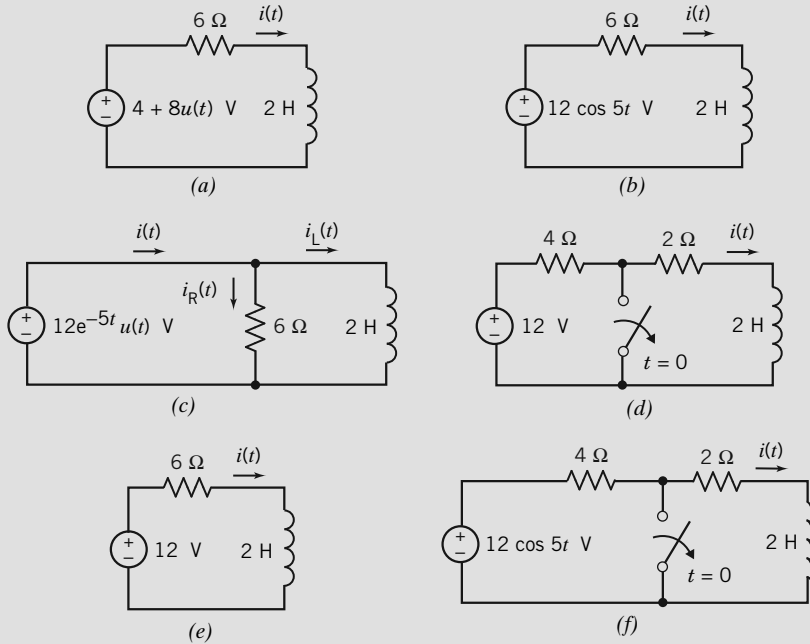


FIGURA 10.13-6 Seis circuitos considerados en el ejemplo 10.13-2.

### Solución

En este ejemplo consideramos circuitos semejantes en situaciones contrastantes. En algunos casos el circuito cambia abruptamente en tiempo  $t = 0$ . En consecuencia, el circuito no se encuentra en estado estable y lo que queremos es una respuesta total, que conste de una parte en estado estable y una parte transitoria. En otros casos no hay un cambio abrupto y por lo tanto no hay parte transitoria de la respuesta. Buscamos solamente la respuesta de estado estable. En un caso, la entrada proporciona directamente el voltaje del inductor, y podemos determinar la respuesta utilizando la ecuación constitutiva del inductor.

**Caso 1:** El circuito en la figura 10.13-6a estará en estado estable hasta el tiempo  $t = 0$ . Como la entrada es constante antes del tiempo  $t = 0$ , todos los voltajes y corrientes de los elementos serán constantes. En el tiempo  $t = 0$  la entrada cambia abruptamente, alterando el estado estable. A fin de cuentas, la perturbación se acabará y el circuito estará nuevamente en estado estable. Todos los voltajes y corrientes de los elementos serán constantes una vez más, pero tendrán diferentes valores de constantes porque la entrada ha cambiado.

Las tres etapas se pueden ilustrar como se muestra en la figura 10.13-7. La figura 10.13-7a representa el circuito para  $t < 0$ . El voltaje de fuente es constante y el circuito se encuentra en estado estable. La corriente del inductor es

$$i(t) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ A}$$

En particular, inmediatamente antes de  $t = 0$ ,  $i(0^-) = 0.667 \text{ A}$ . La corriente en un inductor es constante, por lo que

$$i(0^+) = i(0^-) = 0.667 \text{ A}$$

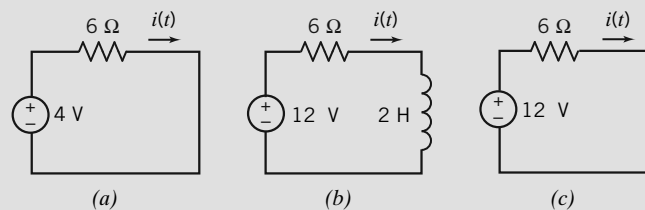


FIGURA 10.13-7 El circuito de la figura 10.13-6a, (a) en estado estable para  $t < 0$ ; (b) después de  $t = 0$  pero antes el circuito alcanza el estado estable, y (c) en estado estable para  $t > 0$ .

La figura 10.13-7b representa el circuito inmediatamente después de  $t = 0$ . La entrada es constante pero el circuito no se encuentra en estado estable, por lo que el inductor no actúa como un cortocircuito. La parte del circuito que está conectada al inductor tiene la forma de un circuito de Thévenin, por lo tanto reconocemos que

$$R_t = 6 \Omega \quad \text{y} \quad v_{oc} = 12 \text{ V}$$

En consecuencia,

$$i_{sc} = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}$$

La constante de tiempo del circuito es

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Finalmente,

$$i(t) = i_{sc} + (i(0+) - i_{sc})e^{-t/\tau} = 2 + (0.667 - 2)e^{-3t} = 2 - 1.33e^{-3t} \text{ A}$$

Al aumentar  $t$ , la parte exponencial de  $i(t)$  disminuye. Cuando  $t = 5\tau = 1.667 \text{ s}$ ,

$$i(t) = 2 - 1.33e^{-3(1.667)} = 2 - 0.009 \approx 2 \text{ A}$$

La parte exponencial de  $i(t)$  se vuelve insignificante, por lo tanto reconocemos que el circuito está de nuevo en estado estable y que la nueva corriente en estado estable es  $i(t) = 2 \text{ A}$ .

La figura 10.13-7c representa el circuito luego de que la perturbación ha pasado y el circuito ha alcanzado el estado estable, es decir, cuando  $t > 5\tau$ . La fuente de voltaje es constante y el circuito se encuentra en estado estable, por lo tanto el inductor actúa como un cortocircuito. Como se esperaba, la corriente del inductor es 2 A.

**Caso 2:** El circuito en la figura 10.13-6b no contiene un interruptor y la entrada no cambia abruptamente, por lo que esperamos que el circuito se encuentre en estado estable. La entrada es senoidal en una frecuencia de 5 rad/s, de modo que todas las corrientes y voltajes de los elementos serán senoidales en una frecuencia de 5 rad/s. Podemos encontrar la respuesta de estado estable si representamos el circuito en el dominio de frecuencia, utilizando impedancias y fasores como se muestra en la figura 10.13-8.

La ley de Ohm da

$$\mathbf{I}(\omega) = \frac{12 \angle 0^\circ}{6 + j10} = \frac{12 \angle 0^\circ}{11.66 \angle 59^\circ} = 1.03 \angle -59^\circ \text{ A}$$

La corriente correspondiente en el dominio de tiempo es

$$i(t) = 1.03 \cos(5t - 59^\circ) \text{ A}$$

**Caso 3:** La fuente de voltaje, el resistor y el inductor en el circuito de la figura 10.13-6c están conectados en paralelo. El voltaje del elemento del resistor y del inductor son iguales al voltaje de la fuente de voltaje. La corriente en el resistor la da la ley de Ohm para que

$$i_R(t) = \frac{12e^{-5t}}{6} = 2e^{-5t} \text{ A}$$

La corriente en el inductor es

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau + i_L(0) = \frac{1}{2} \int_0^t 12e^{-5\tau} d\tau + i_L(0) \\ &= \frac{12}{2(-5)}(e^{-5t} - 1) + i_L(0) = -1.2e^{-5t} + 1.2 + i_L(0) \end{aligned}$$

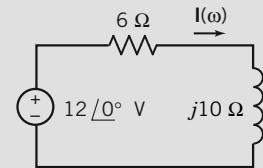


FIGURA 10.13-8 El circuito en la figura 10.13-6b está representado en el dominio de frecuencia.



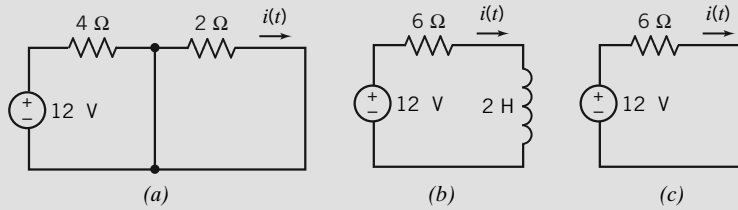


FIGURA 10.13-9 El circuito de la figura 10.13-6d (a) en estado estable para  $t < 0$ ; (b) luego de que  $t = 0$  pero antes de que el circuito alcance el estado estable y (c) en estado estable para  $t > 0$ .

Finalmente, utilizando la KCL se obtiene

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) = 2e^{-5t} + 1.2e^{-5t} + 1.2 + i_L(0) = 0.8e^{-5t} + 1.2 + i_L(0)$$

Antes del tiempo  $t = 0$ , el voltaje de la fuente de voltaje es cero. Si el circuito se encuentra en estado estable,  $i_L(0) = 0$ . Entonces

$$i(t) = 0.8e^{-5t} + 1.2 \text{ A}$$

**Caso 4:** El circuito en la figura 10.13-6d estará en estado estable hasta que el interruptor se abra en tiempo  $t = 0$ . Como el voltaje de fuente es constante, todos los voltajes y corrientes de los elementos serán constantes. En el tiempo  $t = 0$  el interruptor se abre, alterando el estado estable. A fin de cuentas, la perturbación se acabará y el circuito estará nuevamente en estado estable. Todos los voltajes y corrientes de los elementos serán constantes, pero tendrán diferentes valores de constantes porque el circuito ha cambiado.

Las tres etapas se pueden ilustrar como se muestra en la figura 10.13-9. La figura 10.13-9a representa el circuito para  $t < 0$ . El interruptor cerrado está representado como un cortocircuito. El voltaje de fuente es constante y el circuito se encuentra en estado estable, por lo que el inductor actúa como un cortocircuito. La corriente del inductor es

$$i(t) = 0 \text{ A}$$

En particular, inmediatamente antes de  $t = 0$ ,  $i(0^-) = 0 \text{ A}$ . La corriente en un inductor es continua, por lo que

$$i(0^+) = i(0^-) = 0 \text{ A}$$

La figura 10.13-9b representa el circuito inmediatamente después de  $t = 0$ . La entrada es constante pero el circuito no se encuentra en estado estable, por lo que el inductor no actúa como un cortocircuito. La parte del circuito que está conectada al inductor tiene la forma de un circuito equivalente de Thévenin, por lo tanto reconocemos que

$$R_t = 6 \Omega \quad \text{y} \quad v_{oc} = 12 \text{ V}$$

En consecuencia,

$$i_{sc} = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}$$

La constante de tiempo del circuito es

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Finalmente,

$$i(t) = i_{sc} + (i(0^+) - i_{sc})e^{-t/\tau} = 2 + (0 - 2)e^{-3t} = 2 - 2e^{-3t} \text{ A}$$

Al aumentar  $t$ , la parte exponencial de  $i(t)$  disminuye. Cuando  $t = 5\tau = 1.667 \text{ s}$ ,

$$i(t) = 2 - 2e^{-3(1.667)} = 2 - 0.013 \approx 2 \text{ A}$$

La parte exponencial de  $i(t)$  se vuelve insignificante, por lo tanto reconocemos que el circuito está de nuevo en estado estable y que la corriente en estado estable es  $i(t) = 2 \text{ A}$ .

La figura 10.13-9c representa el circuito luego de que la perturbación ha pasado y el circuito ha alcanzado el estado estable, es decir, cuando  $t = 5\tau$ . El voltaje de fuente es constante y el circuito se encuentra en estado estable, por lo tanto el inductor actúa como un cortocircuito. Como se esperaba, la corriente del inductor es  $2 \text{ A}$ .

**Caso 5:** El circuito en la figura 10.13-6e no contiene un interruptor y la entrada no cambia abruptamente, por lo que esperamos que el circuito se encuentre en estado estable. Como el voltaje de fuente es constante, todos los voltajes y corrientes de los elementos serán constantes. Como el voltaje de fuente es constante y el circuito se encuentra en estado estable, el inductor actúa como un cortocircuito. (Nos hemos encontrado con este circuito dos veces antes en este ejemplo, desapareció luego de la perturbación en los casos 2 y 4.) La corriente está dada por

$$i(t) = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}$$

**Caso 6:** Esperamos que el circuito en la figura 10.13-6f se encontrará en estado estable antes de que el interruptor se abra. Como antes, abrir el interruptor modificará el circuito y alterará el estado estable. A fin de cuentas, la perturbación cederá y el circuito se encontrará nuevamente en estado estable. Veremos que la corriente de estado estable es constante antes de que se abra el interruptor y senoidal después de que se abre el interruptor.

La figura 10.13-10a muestra el circuito antes de que se abra el interruptor. Aplicamos la KVL y obtenemos

$$2i(t) + 2 \frac{d}{dt} i(t) = 0$$

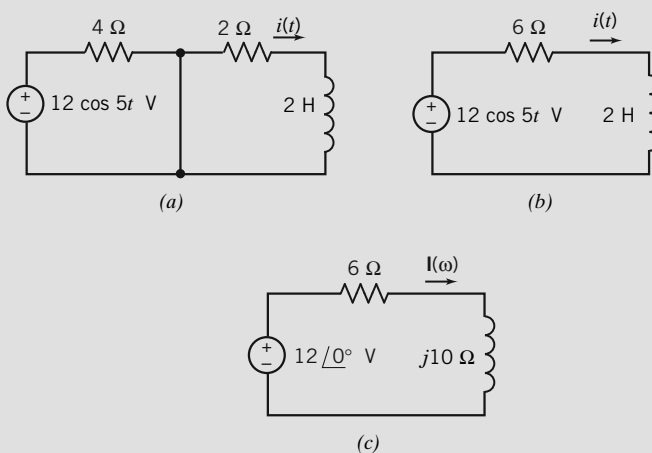
En consecuencia, la corriente del inductor es  $i(t) = 0$  antes de que se abra el interruptor. La corriente en el inductor es continua, por lo que

$$i(0+) = i(0-) = 0 \text{ A}$$

La figura 10.13-10b representa el circuito luego de abrirse el interruptor. Podemos determinar la corriente del inductor agregando la respuesta natural a la respuesta forzada y utilizando luego la condición inicial para evaluar la constante en la respuesta natural.

Primero encontramos la respuesta natural. La parte del circuito que está conectada al inductor tiene la forma del circuito equivalente de Thévenin, por lo que reconocemos que

$$R_t = 6 \Omega$$



**FIGURA 10.13-10** El circuito de la figura 10.13-6f (a) antes de que se abra el interruptor; (b) luego de abierto el interruptor, y (c) el circuito en estado estable para  $t > 0$  representado en el dominio de frecuencia.

La constante de tiempo del circuito es

$$\tau = \frac{L}{R_t} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

La respuesta natural es

$$i_n(t) = Ke^{-3t} \text{ A}$$

Podemos utilizar la respuesta en estado estable como la respuesta forzada. Como en el caso 2, obtenemos la respuesta en estado estable representando el circuito en la frecuencia como se muestra en la figura 10.13-10c. Como antes, encontramos  $\mathbf{I}(\omega) = 1.03 \angle -59^\circ \text{ A}$ . La respuesta forzada es

$$i_f(t) = 1.03 \cos(5t - 59^\circ) \text{ A}$$

Entonces,  $i(t) = i_n(t) + i_f(t) = Ke^{-3t} + 1.03 \cos(5t - 59^\circ) \text{ A}$ .

En  $t = 0$ ,

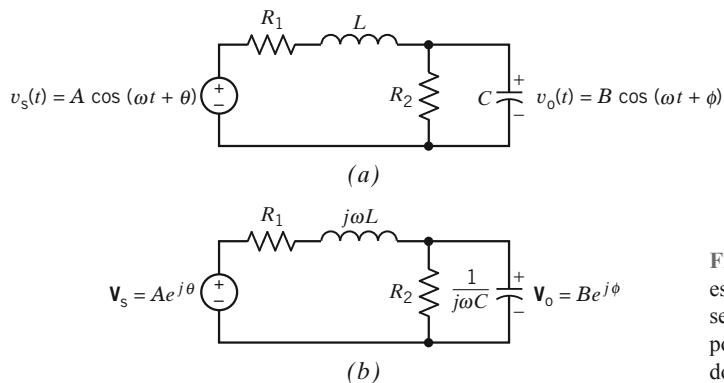
$$i(0) = Ke^{-0} + 1.03 \cos(-59^\circ) = K + 0.53$$

o bien

$$i(t) = -0.53e^{-3t} + 1.03 \cos(5t - 59^\circ) \text{ A}$$

## 10.14 USO DE MATLAB PARA EL ANÁLISIS DE CIRCUITOS EN ESTADO ESTABLE CON ENTRADAS SENOIDALES

El análisis de circuitos lineales de estado estable con entradas senoidales utilizando fasores e impedancias requiere aritmética compleja. Se puede utilizar MATLAB para reducir el esfuerzo requerido para manejar esta aritmética compleja. Considere el circuito que se muestra en la figura 10.14-1a. La entrada a este circuito,  $v_s(t)$ , es un voltaje senoidal. En estado estable, la salida,  $v_o(t)$  también será un voltaje senoidal como se muestra en la figura 10.14-1a. Este circuito se puede representar en el dominio de frecuencia, utilizando fasores e impedancias como se muestra en la figura 10.14-1b. El



**FIGURA 10.14-1** Circuito en estado estable excitado por un voltaje de entrada senoidal. Este circuito está representado por (a) el dominio de tiempo y por (b) el dominio de frecuencia.

análisis de este circuito procede como sigue. Sea  $\mathbf{Z}_1$  que indique la impedancia de la combinación en serie de  $R_1$  y  $j\omega L$ . Es decir,

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 + j\omega L \quad (10.14-1)$$

A continuación, sea  $\mathbf{Y}_2$  que indique la admitancia de la combinación en paralelo de  $R_2$  y  $1/j\omega C$ . Es decir,

$$\mathbf{Y}_2 = \frac{1}{R_2} + j\omega C \quad (10.14-2)$$

Sea  $\mathbf{Z}_2$  que indique la impedancia correspondiente, es decir,

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{1}{\mathbf{Y}_2} \quad (10.14-3)$$

```

%-----
%       Describe the input voltage source.
%-----
w = 2;
A = 12;
theta = (pi/180)*60;
Vs = A*exp(j*theta)
%-----
%Describe the resistors, inductor and capacitor.
%-----
R1 = 6;
L = 4;
R2 = 12;
C = 1/24;
%-----
% Calculate the equivalent impedances of the
% series resistor and inductor and of the
% parallel resistor and capacitor
%-----
Z1 = R1 + j*w*L           % Eqn 10.14-1
Y2 = 1/R2 + j*w*C;       % Eqn 10.14-2
Z2 = 1 / Y2              % Eqn 10.14-3
%-----
% Calculate the phasor corresponding to the
% output voltage.
%-----
Vo = Vs * Z2/(Z1 + Z2) % Eqn 10.14-4
B = abs(Vo);
phi = angle(Vo);
%-----
%
%
%-----
T = 2*pi/w;
tf = 2*T; N = 100; dt = tf/N;
t = 0 : dt : tf;
%-----
%       Plot the input and output voltages.
%-----
for k = 1 : 101
    vs(k) = A * cos(w * t(k) + theta);
    vo(k) = B * cos(w * t(k) + phi);
end
plot (t, vs, t, vo)

```

FIGURA 10.14-2 Archivo de entrada de MATLAB que corresponde al circuito que se muestra en la figura 10.14-1.

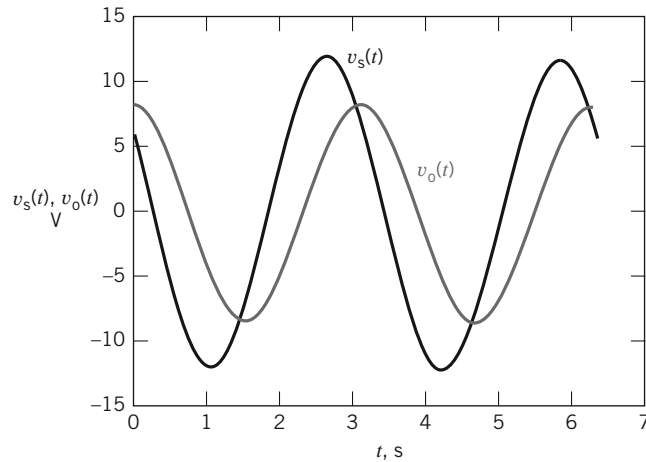


FIGURA 10.14-3 Trazos de MATLAB que muestran los voltajes de entrada y de salida del circuito que se muestra en la figura 10.14-1.

Finalmente,  $\mathbf{V}_o$  se calcula a partir de  $\mathbf{V}_s$  utilizando la división de voltaje. Es decir,

$$\mathbf{V}_o = \frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} \mathbf{V}_s \quad (10.14-4)$$

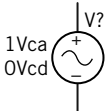
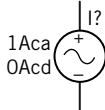



La figura 10.14-2 muestra un archivo de entrada de MATLAB que utiliza de las ecuaciones 10.14-1 a 10.14-3 para encontrar la respuesta de estado estable del circuito que se muestra en la figura 10.14-1. La ecuación 10.14-4 se utiliza para calcular  $\mathbf{V}_o$ . A continuación,  $B = |\mathbf{V}_o|$  y  $\phi = \angle \mathbf{V}_o$  se calculan y utilizan para determinar la magnitud y el ángulo de fase del voltaje de salida senoidal. Observe que MATLAB, no el usuario, ejecuta la aritmética compuesta que se necesita para despejar estas ecuaciones. Finalmente, MATLAB produce el trazo que se muestra en la figura 10.14-3 el cual despliega los voltajes senoidales de entrada y salida en el dominio de tiempo.

## 10.15 USO DE PSPICE PARA ANALIZAR CIRCUITOS DE CA

Para utilizar PSpice y analizar un circuito de ca, hacemos lo siguiente:

1. Dibujamos el circuito en el taller de OrCAD Capture.
2. Especificamos una simulación de AC Sweep\Noise.
3. Ejecute la simulación
4. Archivo de entrada y salida para ver los resultados de la simulación.

La tabla 10.15-1 muestra algunas partes de PSpice que se utilizan para analizar circuitos de ca. Al momento de simular circuitos de ca, representaremos fuentes de corriente y voltaje independientes al utilizar las partes VAC e IAC de PSpice respectivamente. Cada una de estas partes tiene propiedades denominadas ACMAG y ACPHASE. Editaremos el valor de estas propiedades para especificar la amplitud y el ángulo de fase de una senoide. (Por consiguiente, ACMAG y ACPHASE también representan la magnitud y el ángulo de fase del fasor que corresponda a esta senoide.)

Tabla 10.15-1 Partes de PSpice para circuitos de CA y bibliotecas en que se encuentran			
SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN	NOMBRE PSPICE	BIBLIOTECA
	Fuente de voltaje de CA	VAC	SOURCE
	Fuente de corriente de CA	IAC	SOURCE
	Voltaje de elemento de impresión	VPRINT2	SPECIAL
	Voltaje de nodo de impresión	VPRINT1	SPECIAL
	Corriente de elemento de impresión	IPRINT	SPECIAL

Agregaremos las partes VPRINT1, VPRINT2 e IPRINT de PSpice de la tabla 10.15-1 para especificar esos valores de corriente y voltaje que PSpice va a imprimir en el archivo de salida. Cada una de estas partes de PSpice tiene propiedades llamadas AC, REAL, IMAG, MAG y PHASE. Editaremos el valor de cada una de estas propiedades para que sean y. Entonces, cuando simulemos el circuito, PSpice imprimirá el valor del fasor correspondiente en forma rectangular y en forma polar.

**EJEMPLO 10.15-1** Uso de PSpice para analizar circuitos de CA

Considere el circuito de ca que se muestra en la figura 10.15-1, en el cual

$$v_s(t) = 12 \cos(100t + 15^\circ) \text{V} \quad \text{e} \quad i_s(t) = 1.5 \cos(100t + 135^\circ) \text{A}$$

Utilice PSpice para determinar los voltajes  $v_1$  y  $v_3$ , así como la corriente  $i_2$ .

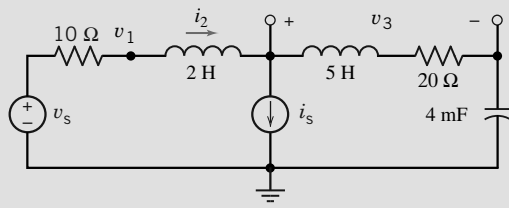


FIGURA 10.15-1 Circuito de CA.

**Solución**

Empezamos por dibujar el circuito en el taller de OrCAD como se muestra en la figura 10.15-2 (vea el apéndice A). Observe que hemos utilizado las partes VAC e IAC de PSpice de la tabla 10.15-1 para representar las fuentes.

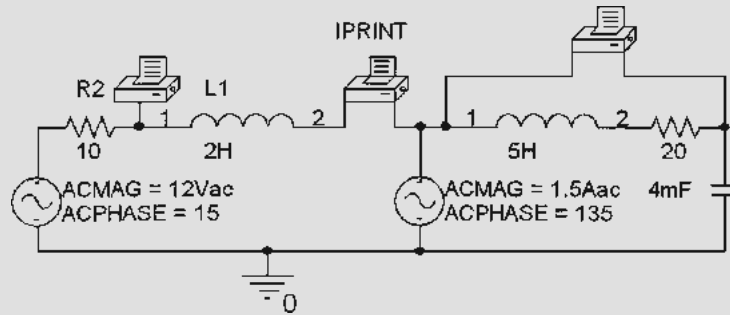


FIGURA 10.15-2 El circuito de la figura 10.15-1 como se dibujó en el taller de OrCAD.

Incluso, hemos editado las propiedades AC MAG y AC PHASE de estas fuentes, estableciendo AC MAG = 12 y AC PHASE = 15 para la fuente de voltaje, y AC MAG = 1.5 y AC PHASE = 135 para la fuente de corriente.

La figura 10.15-2 también muestra que hemos agregado las partes VPRINT1, IPRINT y VPRINT2 de PSpice para medir  $v_1$ ,  $i_2$  y  $v_3$ . Estos impresores están conectados al circuito de la misma manera que se conectarían amperímetros y voltímetros para medir  $v_1$ ,  $i_2$  y  $v_3$ . Observe el signo menos en el impresor VPRINT2. Indica la terminal cercana al signo menos de la polaridad del voltaje medido. Del mismo modo, la corriente medida por el impresor IPRINT es la corriente dirigida hacia la terminal marcada por el signo menos. El signo menos en el impresor VPRINT1 se puede pasar por alto. Este impresor mide el voltaje de nodos en el nodo a que está conectado.

Realizaremos una simulación AC Sweep\Noise. (En la barra de menús de OrCAD Capture, seleccione el menú New Simulation Profile de PSpice y haga clic en la opción AC Sweep\Noise del menú contextual Analysis Type. Establezca Start Frequency y End Frequency en  $100/(2\pi) = 15.92$  cada una. Seleccione Linear Sweep y establezca Total Points en 1.) Para ejecutar la simulación, seleccione en la barra de menús de OrCAD Capture el menú Run Simulation Profile.

Después de ejecutar la simulación, OrCAD Capture abrirá la ventana Schematics. En la barra de menús de Schematics seleccione el menú View y haga clic en la opción Output File. Recorra hacia abajo el archivo de entrada hasta encontrar el voltaje y las corrientes del impresor:

FREQ	VM(N615)	VP(N615)	VR(N615)	VI(N615)
15.92E+00	1.579E+01	-8.112E+00	1.564E+01	-2.229E+00
FREQ	IM(V_PRINT2)	IP(V_PRINT2)	IR(V_PRINT2)	II(V_PRINT2)
15.92E+00	6.694E-01	1.272E+02	-4.045E-01	5.334E-01
FREQ	VM(N256,N761)	VP(N256,N761)	VR(N256,N761)	VI(N256,N761)
15.92E+00	4.533E+01	2.942E+01	3.949E+01	2.227E+01

Esta salida requiere cierta interpretación. Las etiquetas VM, VP, VR y VI indican magnitud, ángulo, parte real y parte imaginaria de un voltaje, y las etiquetas IM, I, IR e II indican magnitud, ángulo, parte real y parte imaginaria de una corriente. Las etiquetas N1614, N256 y N761 son números de nodos generados por PSpice. VM(N615) se refiere al voltaje en un nodo único, es decir, el voltaje de nodos  $v_1$ . IM(V\_PRINT2) se refiere a la corriente, que es  $i_2$ . VM(N256,N761) se refiere a un voltaje entre dos nodos, es decir,  $v_3$ . En consecuencia, los resultados de la simulación indican que

$$v_1(t) = 15.79 \cos(100t - 8.1^\circ) = 15.64 \cos(100t) + 2.229 \sin(100t) \text{ V,}$$

$$i_2(t) = 0.6694 \cos(100t + 127.2^\circ) = -0.4045 \cos(100t) - 0.5334 \sin(100t) \text{ V,}$$

y

$$v_3(t) = 45.33 \cos(100t + 29.40) = 39.49 \cos(100t) - 22.27 \sin(100t) \text{ V}$$

## 10.16 ¿CÓMO LO PODEMOS COMPROBAR...?

A los ingenieros se les suele solicitar comprobar que la solución de un problema sea la correcta. Por ejemplo, las soluciones propuestas para problemas de diseño se deben comprobar para confirmar que se ha cumplido con todas las especificaciones. Además, se deben revisar los resultados de la computadora para protegerse contra errores de captura de datos, así como las exigencias de los comerciantes, las cuales se deben analizar a fondo.

También a los estudiantes de ingeniería se les pide que verifiquen la exactitud de sus trabajos. Por ejemplo, tomarse un breve lapso antes de terminar un examen permitiría dar una vista rápida e identificar esas soluciones que podrían requerir un poco más de aplicación.

Los ejemplos siguientes ilustran técnicas útiles para comprobar las soluciones a los diversos problemas analizados en este capítulo.

### EJEMPLO 10.16-1 ¿Cómo podemos comprobar la aritmética con números compuestos?

Sabemos que

$$\frac{10}{R - j4} = A \angle 53^\circ$$

Un programa de computadora establece que  $A = 2$ . ¿Cómo podemos comprobar este resultado? (Observe que los valores están dados para sólo dos figuras importantes.)

#### Solución

La ecuación para el ángulo es

$$-\tan^{-1}\left(\frac{-4}{R}\right) = 53^\circ$$

Entonces, tenemos

$$R = \frac{-4}{\tan(-53^\circ)} = 3.014$$

Despejamos  $A$  en términos de  $R$  y obtenemos

$$A = \frac{10}{(R^2 + 16)^{1/2}} = 1.997$$

Por lo tanto,  $A = 2$  es correcto para dos figuras importantes.

### EJEMPLO 10.16-2 ¿Cómo podemos comprobar el análisis de circuitos de CA?

Considere el circuito que se muestra en la figura 10.16-1. Suponga que sabemos que los voltajes del condensador son

$$1.96 \cos(100t - 101.3^\circ) \text{ V} \quad \text{y} \quad 4.39 \cos(100t - 37.88^\circ) \text{ V}$$

pero no sabemos qué voltaje es  $v_1(t)$  y cuál es  $v_2(t)$ . ¿Cómo podemos comprobar los voltajes del condensador?



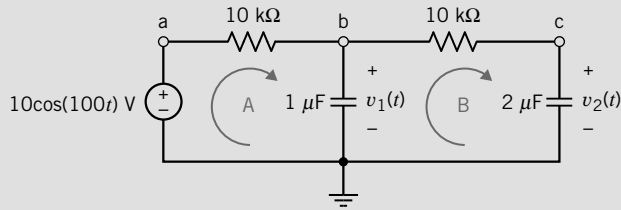


FIGURA 10.16-1 Ejemplo de circuito.

### Solución

Supongamos que

$$v_1(t) = 1.96 \cos(100t - 101.3^\circ)$$

y

$$v_2(t) = 4.39 \cos(100t - 37.88^\circ)$$

y entonces verificamos si esta elección satisface las ecuaciones nodales que representan el circuito. Estas ecuaciones nodales son

$$\frac{10 - \mathbf{V}_1}{R_1} = j\omega C_1 \mathbf{V}_1 + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{R_2}$$

y

$$j\omega C_2 \mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{R_2}$$

donde  $\mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$  son los fasores que corresponden a  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$ . Es decir,

$$\mathbf{V}_1 = 1.96e^{-j101.3^\circ} \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_2 = 4.39e^{-j37.88^\circ}$$

Sustituir los fasores  $\mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$  en el lado izquierdo de la primera ecuación nodal resulta

$$\frac{10 - 1.96e^{-j101.3^\circ}}{10 \times 10^3} = 0.001 + j1.92 \times 10^{-4}$$

Sustituir los fasores  $\mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$  en el lado derecho de la primera ecuación nodal resulta

$$\begin{aligned} j \cdot 100 \times 10^{-6} \cdot 1.96e^{-j101.3^\circ} + \frac{1.96e^{-j101.3^\circ} - 4.39e^{-j37.88^\circ}}{10 \times 10^3} \\ = -19.3 \times 10^{-4} + j3.89 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

Como el lado derecho no es igual al izquierdo,  $\mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$  no satisfacen la ecuación nodal. Eso significa que el orden seleccionado de  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$  no es correcto. En cambio, utilice el orden inverso de modo que

$$v_1(t) = 4.39 \cos(100t - 37.88^\circ)$$

y

$$v_2(t) = 1.96 \cos(100t - 101.3^\circ)$$

Ahora los fasores  $\mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$  serán

$$\mathbf{V}_1 = 4.39e^{-j37.88^\circ} \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_2 = 1.96e^{-j101.3^\circ}$$

Si sustituimos los nuevos valores de los fasores  $\mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$  en el lado izquierdo de la primera ecuación nodal, resulta

$$\frac{10 - 4.39e^{-j37.88^\circ}}{10 \times 10^3} = 6.353 \times 10^{-4} + j2.696 \times 10^{-4}$$

Si sustituimos los nuevos valores de los fasores  $V_1$  y  $V_2$  en el lado derecho de la primera ecuación nodal, resulta

$$j \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 4.39e^{-j37.88} + \frac{4.39e^{-j37.88} - 1.96e^{-j101.3}}{10 \times 10^3} \\ = +6.545 \times 10^{-4} + j2.69 \times 10^{-4}$$

Dado que el lado derecho está muy próximo a ser igual al lado izquierdo,  $V_1$  y  $V_2$  satisfacen la primera ecuación nodal. Eso significa que  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$  son probablemente correctos. Para tener una certeza, también comprobaremos la segunda ecuación nodal. Si sustituimos los fasores  $V_1$  y  $V_2$  en el lado izquierdo de la segunda ecuación nodal, resulta

$$j \cdot 100 \cdot 2 \times 10^{-6} \cdot 1.96e^{-j101.3} = +3.84 \times 10^{-4} - j7.681 \times 10^{-5}$$

Si sustituimos los fasores  $V_1$  y  $V_2$  en el lado derecho de la segunda ecuación nodal, resulta

$$\frac{4.39e^{-j37.88} - 1.96e^{-j101.3}}{10 \times 10^3} = 3.85 \times 10^{-4} - j7.735 \times 10^{-5}$$

Dado que el lado derecho es igual al lado izquierdo,  $V_1$  y  $V_2$  satisfacen la segunda ecuación nodal. Ahora tenemos la certeza de que

$$v_1(t) = 4.39 \cos(100t - 37.88^\circ) \text{ V}$$

y

$$v_2(t) = 1.96 \cos(100t - 101.3^\circ) \text{ V}$$

## 10.17 EJEMPLO DE DISEÑO

### CIRCUITO DEL AMPLIFICADOR OPERACIONAL

La figura 10.17-1a muestra dos voltajes senoidales, uno etiquetado como entrada y el otro como salida. Queremos diseñar un circuito que transformará la entrada senoide en la salida senoide. La figura 10.17-1b muestra un circuito candidato. Primero debemos determinar si este circuito puede funcionar como tal. Y si así es, diseñaremos el circuito, es decir, especificamos los valores requeridos de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $C$ .

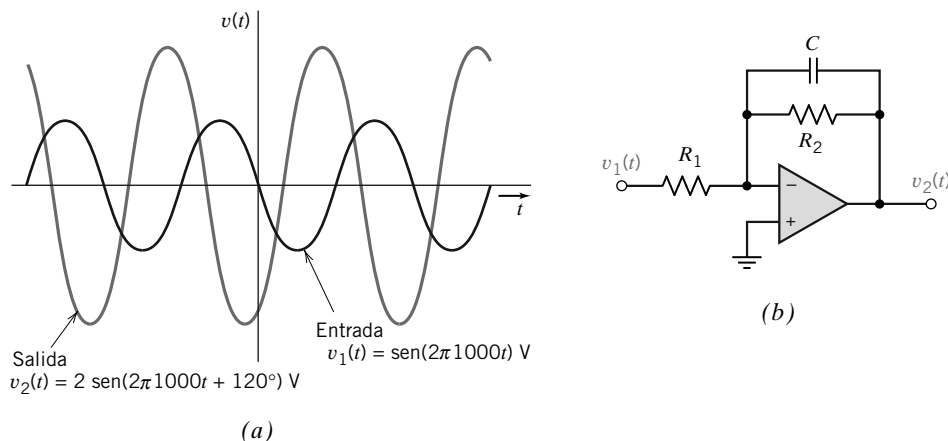


FIGURA 10.17-1 (a) Voltajes de entrada y salida. (b) Circuito propuesto.

**Defina la situación y los supuestos**

La entrada y salida senoidales tiene amplitudes y ángulos de fase diferentes pero la misma frecuencia:

$$f = 1\,000 \text{ Hz}$$

o, de manera equivalente,

$$\omega = 2\pi 1\,000 \text{ rad/s}$$

Sabemos que éste deber ser el caso. Cuando la entrada a un circuito lineal es una senoide, la salida en estado estable también será una senoide que tenga la misma frecuencia.

En este caso, la senoide de entrada es

$$v_1(t) = \text{sen}(2\pi 1\,000t) = \cos(2\pi 1\,000t - 90^\circ) \text{ V}$$

y el fasor correspondiente es

$$\mathbf{V}_1 = 1e^{-j90^\circ} = 1 \angle -90^\circ \text{ V}$$

La senoide de salida es

$$v_2(t) = 2 \text{sen}(2\pi 1000t + 120^\circ) = 2 \cos(2\pi 1000t + 30^\circ) \text{ V}$$

y el fasor correspondiente es

$$\mathbf{V}_2 = 2e^{j30^\circ} \text{ V}$$

La razón de estos fasores es

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \frac{2e^{j30^\circ}}{1e^{-j90^\circ}} = 2e^{j120^\circ}$$

La magnitud de esta razón, denominada ganancia,  $G$ , del circuito utilizado para transformar la senoide de entrada en una senoide de salida es

$$G = \left| \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} \right| = 2$$

El ángulo de esta razón se denomina cambio de fase,  $\theta$ , del circuito requerido:

$$\theta = \angle \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = 120^\circ$$

Por consiguiente, necesitamos un circuito que tenga una ganancia de 2 y un cambio de fase de  $120^\circ$ .

**Establezca el objetivo**

Determine si es posible diseñar el circuito que se muestra en la figura 10.17-1b para tener una ganancia de 2 y un cambio de fase de  $120^\circ$ . Si es posible, especifique los valores apropiados de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $C$ .

**Genere un plan**

Analice el circuito que se muestra en la figura 10.17-1b para determinar la razón entre el fasor de salida y el fasor de entrada,  $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$ . Determine si el circuito puede tener una ganancia de 2 y un cambio de fase de  $120^\circ$ . Si es así, determine los valores requeridos de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $C$ .

**Actúe sobre el plan**

El circuito en la figura 10.17-1b es un caso especial del circuito de la figura 10.12-1. La impedancia  $\mathbf{Z}_1$  en dicha figura corresponde al resistor  $R_1$  en la figura 10.17-1b, y la impedancia  $\mathbf{Z}_2$

corresponde a la combinación en paralelo del resistor  $R_2$  y el condensador  $C$ . Es decir,

$$\mathbf{Z}_1 = R_1$$

y

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{R_2(1/j\omega C)}{R_2 + 1/j\omega C} = \frac{R_2}{1 + j\omega CR_2}$$

Entonces, utilizando la ecuación 10.12-3,

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = -\frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1} = -\frac{R_2/(1 + j\omega CR_2)}{R_1} = -\frac{R_2/R_1}{1 + j\omega CR_2}$$

El cambio de fase del circuito en la figura 10.17-1b está dado por

$$\theta = \angle \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = \angle -\frac{R_2/R_1}{1 + j\omega CR_2} = 180^\circ - \tan^{-1} \omega CR_2 \quad (10-17-1)$$

¿Qué valores de cambio de fase son posibles? Observe que  $\omega$ ,  $C$  y  $R_2$  son positivos, lo que significa que

$$0^\circ \leq \tan^{-1} \omega CR_2 \leq 90^\circ$$

Por consiguiente, el circuito que se muestra en la figura 10.17-1b se puede utilizar para obtener cambios de fase entre  $90^\circ$  y  $180^\circ$ . Por lo tanto, podemos usar este circuito para producir una cambio de fase de  $120^\circ$ .

La ganancia del circuito en la figura 10.17-1b la da

$$\begin{aligned} G &= \left| \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} \right| = \left| -\frac{R_2/R_1}{1 + j\omega CR_2} \right| \\ &= \frac{R_2/R_1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R_2^2}} = \frac{R_2/R_1}{\sqrt{1 + \tan^2(180^\circ - \theta)}} \end{aligned} \quad (10-17-2)$$

A continuación, primero despejamos la ecuación 10.17-1 para  $R_2$  y luego la ecuación 10.17-1 para  $R_1$  para obtener

$$R_2 = \frac{\tan(180^\circ - \theta)}{\omega C}$$

y

$$R_1 = \frac{R_2/G}{\sqrt{1 + \tan^2(180^\circ - \theta)}}$$

Estas ecuaciones se pueden utilizar para diseñar el circuito. Primero, tome un valor conveniente, fácilmente disponible y no costoso del condensador, digamos

$$C = 0.02 \mu\text{F}$$

A continuación, calcule valores de  $R_1$  y  $R_2$  a partir de los valores de  $\omega$ ,  $C$ ,  $G$  y  $\theta$ . Para  $\omega = 6283 \text{ rad/s}$ ,  $C = 0.02 \mu\text{F}$ ,  $G = 2$  y  $\theta = 120^\circ$ , calculamos

$$R_1 = 3446 \Omega \quad \text{y} \quad R_2 = 13.78 \text{ k}\Omega$$

y el diseño está completo.

**Verifique la solución propuesta**

Cuando  $C = 0.02 \mu\text{F}$ ,  $R_1 = 3446 \Omega$  y  $R_2 = 13.78 \text{ k}\Omega$ , la función red del circuito es

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = -\frac{R_2/R_1}{1 + j\omega CR_2} = -\frac{4}{1 + j\omega(0.2756 \times 10^{-3})}$$

En este caso,  $\omega = 2\pi \cdot 1000$  y  $\mathbf{V}_1 = 1 \angle -90^\circ$ , por lo que

$$\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} = -\frac{4}{1 + j(2\pi \times 10^3)(0.2756 \times 10^{-3})} = 2 \angle 120^\circ$$

como lo requerían las especificaciones.

**10.18 RESUMEN**

- Con el uso penetrante de la energía eléctrica de ca en el hogar y en la industria, es importante para los ingenieros el análisis de circuitos con fuentes independientes senoidales.
- La respuesta de estado estable de un circuito lineal a una entrada senoidal es en sí misma una senoide que contiene la misma frecuencia que la señal de entrada.
- Los circuitos que contienen inductores y condensadores están representados por ecuaciones diferenciales. Cuando la entrada al circuito es senoidal, se pueden utilizar fasores e impedancias para representar el circuito en el dominio de frecuencia. En dicho dominio el circuito está representado por ecuaciones algebraicas. El circuito original, representado por una ecuación diferencial, se denomina la representación en dominio de tiempo del circuito.
- La respuesta de estado estable de un circuito lineal con una entrada senoidal se obtiene a partir de lo siguiente:
  1. Transforme el circuito en el dominio de frecuencia, utilizando fasores e impedancias.
  2. Represente el circuito del dominio de frecuencia con ecuaciones algebraicas, por ejemplo, ecuaciones de enlaces o nodales.
  3. Despeje las ecuaciones algebraicas para obtener la respuesta del circuito.
- 4. Transforme la respuesta en el dominio de tiempo, utilizando fasores.
- La tabla 10.6-1 resume las relaciones utilizadas para transformar un circuito de dominio de tiempo a dominio de frecuencia o viceversa.
- Cuando un circuito contiene varias fuentes senoidales, distinguimos dos casos.
  1. Cuando todas las fuentes senoidales tienen la misma frecuencia, la respuesta será una senoide con esa frecuencia, y el problema se puede resolver de la misma manera que si fuera solamente una fuente.
  2. Cuando las fuentes senoidales tienen frecuencias diferentes, la superposición se utiliza para desmembrar el circuito de dominio de tiempo en varios circuitos, cada uno con entradas senoidales todas en la misma frecuencia. Cada uno de los circuitos separados se analizó por separado y las respuestas se resumen *en el dominio de tiempo*.
- MATLAB reduce enormemente la rutina computacional asociada con la solución de enlaces o ecuaciones nodales que contiene coeficientes compuestos.

**PROBLEMAS****Sección 10.2 Fuentes senoidales**

**P 10.2-1** Expresé las siguientes adiciones de sinusoides en la forma general  $A \sin(\omega t + \theta)$  utilizando identidades trigonométricas.

- (a)  $i(t) = 2 \cos(6t + 120^\circ) + 4 \sin(6t - 60^\circ)$   
 (b)  $v(t) = 5\sqrt{2} \cos 8t + 10 \sin(8t + 45^\circ)$

**P 10.2-2** Un voltaje senoidal tiene un valor máximo de 100V, y el valor es 10 V en  $t = 0$ . El periodo es  $T = 1$  ms. Determine  $v(t)$ .

**P 10.2-3** Una corriente senoidal está dada por  $i = 300 \cos(1200\pi t + 55^\circ)$  mA. Determine la frecuencia  $f$  y el valor de la corriente en  $t = 2$  ms.

**P 10.2-4** Trace una gráfica de la señal del voltaje

$$v(t) = 15 \cos(628t + 45^\circ) \text{ mV}$$

**P 10.2-5** La figura P 10.2-5 muestra un voltaje senoidal,  $v(t)$ , trazado como una función de tiempo,  $t$ . Represente  $v(t)$  por una función de la forma  $A \cos(\omega t + \theta)$ .

*Respuesta:*  $v(t) = 18 \cos(393t - 27^\circ)$

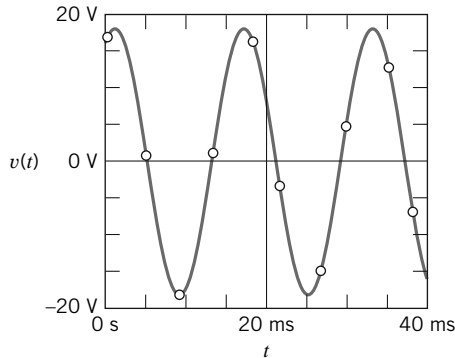


Figura P 10.2-5

**P 10.2-6** La figura 10.2-6 muestra un voltaje senoidal,  $v(t)$ , trazado como una función de tiempo,  $t$ . Represente  $v(t)$  por una función de la forma  $A \cos(\omega t + \theta)$ .

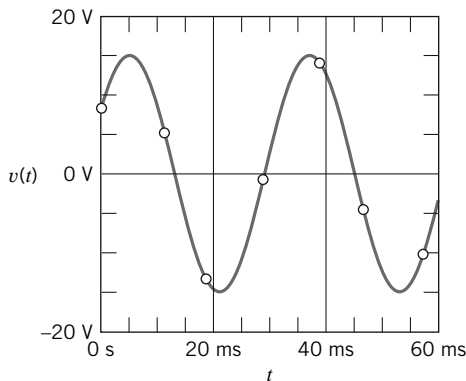


Figura P 10.2-6

**Sección 10.3 Respuesta de estado estable de un circuito RL para una función de forzamiento senoidal**

**P 10.3-1** Encuentre la respuesta forzada  $i$  para el circuito de la figura P 10.3-1 cuando  $v_s(t) = 10 \cos(300t) \text{ V}$ .

*Respuesta:*  $i(t) = 1.24 \cos(300t - 68^\circ) \text{ A}$

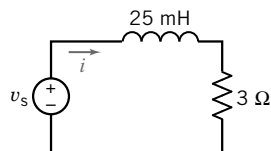


Figura P 10.3-1

**P 10.3-2** Encuentre la respuesta forzada  $v$  para el circuito de la figura P 10.3-2 cuando  $i_s(t) = 0.5 \cos \omega t \text{ A}$  y  $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ .

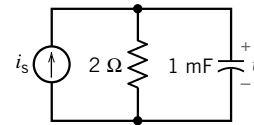


Figura P 10.3-2

**P 10.3-3** Encuentre la respuesta forzada  $i(t)$  para el circuito de la figura P 10.3-3.

*Respuesta:*  $i(t) = 2 \cos(4t + 45^\circ) \text{ mA}$

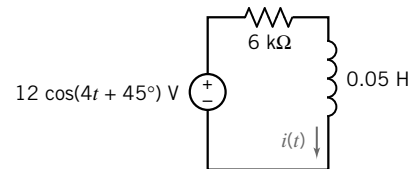


Figura P 10.3-3

**Sección 10.4 Función de forzamiento exponencial compuesta**

**P 10.4-1** Determine la forma polar de la cantidad

$$\frac{(5 \angle 36.9^\circ)(10 \angle -53.1^\circ)}{(4 + j3) + (6 - j8)}$$

*Respuesta:*  $2\sqrt{5} \angle 10.36^\circ$

**P 10.4-2** Determine la forma polar y rectangular de la expresión

$$5 \angle +81.87^\circ \left( 4 - j3 + \frac{3\sqrt{2} \angle -45^\circ}{7 - j1} \right)$$

*Respuesta:*  $28 \angle +45^\circ = 14\sqrt{2} + j14\sqrt{2}$

**P 10.4-3** Dadas  $\mathbf{A} = 3 + j7$ ,  $\mathbf{B} = 6 \angle 15^\circ$  y  $\mathbf{C} = 5e^{j2.3^\circ}$ , encuentre  $(\mathbf{A} * \mathbf{C}^*) / \mathbf{B}$ .

*Respuesta:*  $0.65 - j6.32$

**P 10.4-4** Determine  $a$  y  $b$  cuando (ángulos en grados)

$$(6 \angle 120^\circ)(-4 + j3 + 2e^{j15^\circ}) = a + jb$$

**P 10.4-5** Encuentre  $a$ ,  $b$ ,  $A$  y  $\theta$  como se requiere (ángulos dados en grados).

- (a)  $Ae^{j120^\circ} + jb = -4 + j3$
- (b)  $6e^{j120^\circ}(-4 + jb + 8e^{j\theta}) = 18$
- (c)  $(a + j4)j2 = 2 + Ae^{j60^\circ}$

**P 10.4-6** Encuentre la respuesta de estado estable,  $v(t)$  para el circuito que se muestra en la figura P 10.4-6.

*Respuesta:*  $v(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2t - 45^\circ) \text{ V}$

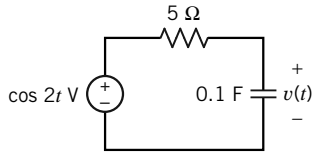


Figura P 10.4-6

**P 10.4-7** Encuentre la respuesta de estado estable,  $v(t)$  para el circuito que se muestra en la figura P 10.4-7.

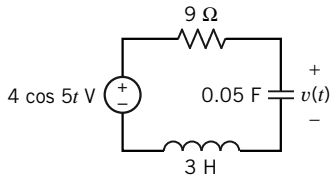


Figura P 10.4-7

### Sección 10.5 El fasor

**P 10.5-1** Encuentre la respuesta de estado estable,  $v(t)$  para el circuito que se muestra en la figura P 10.5-1.

*Sugerencia:* Primero, muestre que  $2 \frac{d}{dt}i + 6i = 15 \cos 4t$

*Respuesta:*  $v(t) = 12 \cos(4t + 37^\circ)$  V

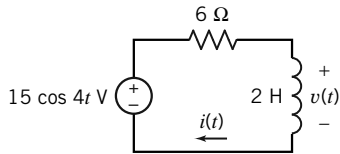


Figura P 10.5-1

**P 10.5-2** Encuentre la respuesta de estado estable,  $i(t)$  para el circuito que se muestra en la figura P 10.5-2.

*Respuesta:*  $i(t) = 0.398 \cos(2t - 85^\circ)$  A

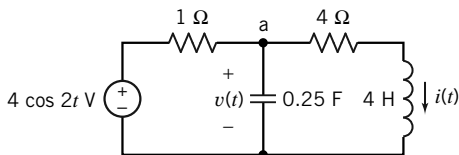


Figura P 10.5-2

**P 10.5-3** Para el circuito de la figura P 10.5-3, encuentre  $v(t)$  cuando  $v_s = 2 \sin 500t$  V.

*Respuesta:*  $v(t) = 1.25 \cos(500t - 141^\circ)$  V

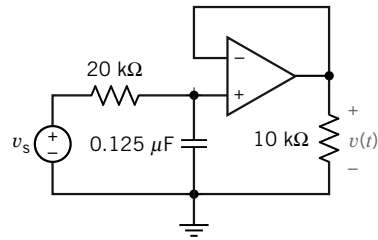


Figura P 10.5-3

**P 10.5-4** Encuentre la respuesta  $v$  para el circuito que se muestra en la figura P 10.5-4 cuando  $i_s = 10 \cos 100t$  A.

*Respuesta:*  $v = 7.071 \cos(100t - 45^\circ)$

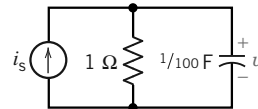


Figura P 10.5-4

**P 10.5-5** Encuentre la corriente  $i(t)$  para el circuito  $RLC$  de la figura P 10.5-5 cuando  $v_s = 4 \cos 100t$  V.

*Respuesta:*  $i(t) = 2\sqrt{2} \cos(100t + 45^\circ)$  A

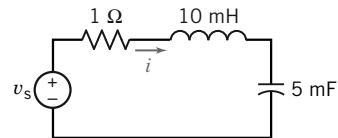


Figura P 10.5-5

### Sección 10.6 Relaciones de fasor para los elementos $R$ , $L$ y $C$

**P 10.6-1** Represente el circuito que se muestra en la figura P 10.6-1 en el dominio de frecuencia, utilizando impedancias y fasores.

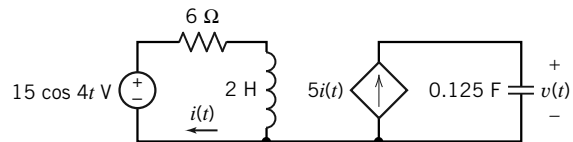


Figura P 10.6-1

**P 10.6-2** Represente el circuito que se muestra en la figura P 10.6-2 en el dominio de frecuencia, utilizando impedancias y fasores.

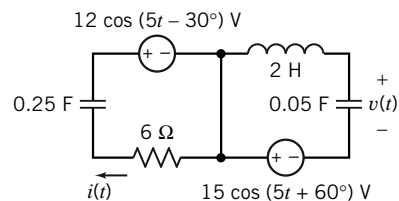


Figura P 10.6-2

**P 10.6-3** Represente el circuito que se muestra en la figura P 10.6-3 en el dominio de frecuencia, utilizando impedancias y fasores.

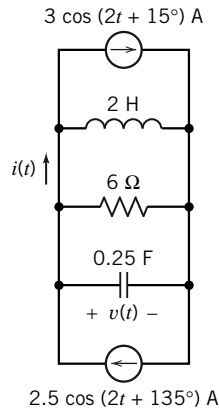


Figura P 10.6-3

**P 10.6-4** Represente el circuito que se muestra en la figura P 10.6-4 en el dominio de frecuencia, utilizando impedancias y fasores.

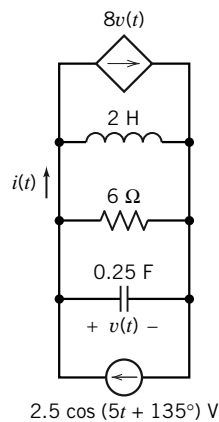


Figura P 10.6-4

**P 10.6-5** Cada uno de los siguientes pares de voltaje de elemento y de corriente de elemento se apega a la convención pasiva. Indique si el elemento es capacitivo, inductivo o resistivo y encuentre el valor de los elementos.

- (a)  $v(t) = 15 \cos(400t + 30^\circ)$ ;  $i = 3 \sin(400t + 30^\circ)$
- (b)  $v(t) = 8 \sin(900t + 50^\circ)$ ;  $i = 2 \sin(900t + 140^\circ)$
- (c)  $v(t) = 20 \cos(250t + 60^\circ)$ ;  $i = 5 \sin(250t + 150^\circ)$

**Respuestas:** (a)  $L = 12.5 \text{ mH}$   
 (b)  $C = 277.77 \text{ } \mu\text{F}$   
 (c)  $R = 4 \text{ } \Omega$

**P 10.6-6** Dos elementos de circuito están conectados en serie, por lo que  $v = v_1 + v_2$ . Encuentre  $v(t)$  cuando  $v_1(t) = 150 \cos(377t - \pi/6) \text{ V}$  y  $V_2 = 200 \angle +60^\circ \text{ V}$ .

**Respuesta:**  $v(t) = 250 \cos(377t + 23.1^\circ) \text{ V}$

**P 10.6-7** El voltaje y la corriente para el circuito que se muestra en la figura P 10.6-7 están dados por

$v(t) = 20 \cos(20t + 15^\circ) \text{ V}$  e  $i(t) = 1.49 \cos(20t + 63^\circ) \text{ A}$   
 Determine los valores de la resistencia,  $R$ , y la capacitancia,  $C$ .

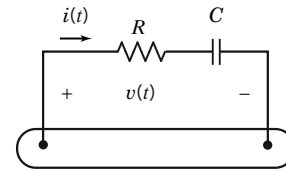


Figura P 10.6-7

**P 10.6-8** Dado que

$$i_1(t) = 30 \cos(4t + 45^\circ) \text{ mA}$$

e

$$i_2(t) = -40 \cos(4t) \text{ mA}$$

Determine  $v(t)$  para el circuito que se muestra en la figura P 10.6-8.

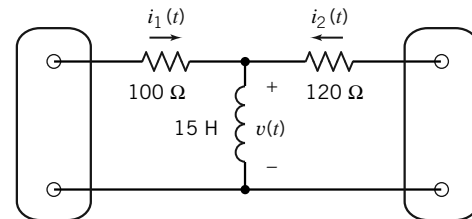


Figura P 10.6-8

**P 10.6-9** La figura P 10.6-9 muestra un circuito de ca representado en el dominio de tiempo y en el dominio de frecuencia. Determine los valores de  $A$ ,  $B$ ,  $a$  y  $b$ .

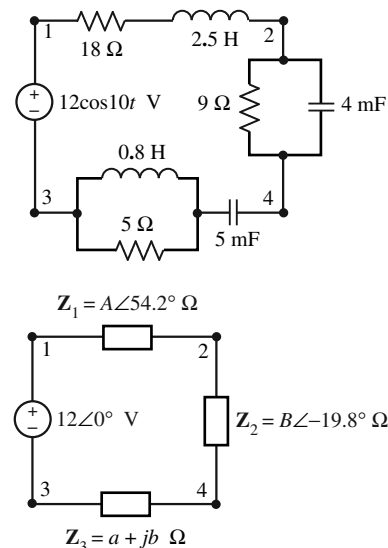


Figura P 10.6-9



### Sección 10.7 Impedancia y admitancia

**P 10.7-1** Encuentre  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{Y}$  para el circuito de la figura P 10.7-1 que opere a 10 kHz.

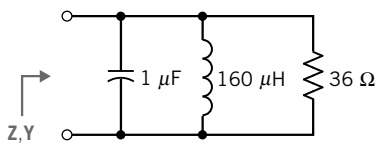


Figura P 10.7-1

**P 10.7-2** Encuentre  $R$  y  $L$  del circuito de la figura P 10.7-2 cuando  $v(t) = 10 \cos(\omega t + 40^\circ)$  V,  $i(t) = 2 \cos(\omega t + 15^\circ)$  mA y  $\omega = 2 \times 10^6$  rad/s.

*Respuesta:*  $R = 4.532$  k $\Omega$ ,  $L = 1.057$  mH

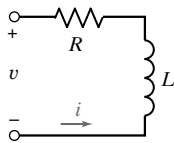


Figura P 10.7-2

**P 10.7-3** Considere el circuito de la figura P 10.7-3 cuando  $R = 6 \Omega$ ,  $L = 27$  mH y  $C = 22 \mu\text{F}$ . Determine la frecuencia  $f$  cuando la impedancia  $\mathbf{Z}$  es puramente resistiva, y encuentre la resistencia de entrada en esa frecuencia.

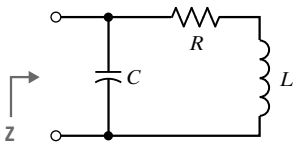


Figura P 10.7-3

**P 10.7-4** Considere el circuito de la figura P 10.7-4 cuando  $R = 10$  k $\Omega$  y  $f = 1$  kHz. Encuentre  $L$  y  $C$  de modo que  $\mathbf{Z} = 100 + j0 \Omega$ .

*Respuesta:*  $L = 0.1587$  H y  $C = 0.158 \mu\text{F}$

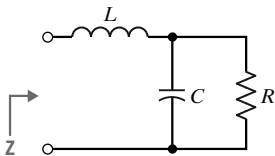


Figura P 10.7-4

**P 10.7-5** Para el circuito de la figura P 10.7-5, encuentre el valor de  $C$  requerido de modo que  $\mathbf{Z} = 590.7 \Omega$  cuando  $f = 1$  MHz.

*Respuesta:*  $C = 0.27$  nF

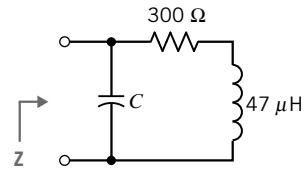


Figura P 10.7-5

**P 10.7-6** Determine la impedancia  $\mathbf{Z}$  para el circuito que se muestra en la figura P 10.7-6.

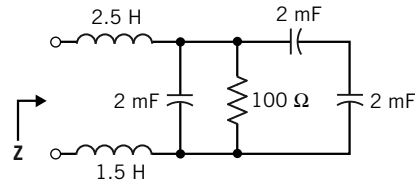


Figura P 10.7-6

**P 10.7-7** La figura P 10.7-7 muestra un circuito de ca representado en el dominio de tiempo y en el dominio de frecuencia. Suponga

$$\mathbf{Z}_1 = 15.3 \angle -24.1^\circ \Omega \quad \text{y} \quad \mathbf{Z}_2 = 14.4 \angle 53.1^\circ \Omega$$

Determine el voltaje  $v(t)$  y los valores de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L$  y  $C$ .

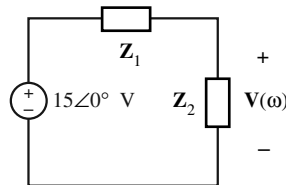
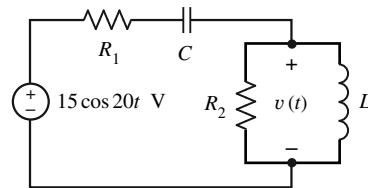


Figura P 10.7-7

### Sección 10.8 Leyes de Kirchhoff que utilizan fasores

**P 10.8-1** Para el circuito que se muestra en la figura P 10.8-1, encuentre (a) las impedancias  $\mathbf{Z}_1$  y  $\mathbf{Z}_2$  en forma polar; (b) la impedancia total combinada en forma polar, y (c) la corriente  $i(t)$  en estado estable.

*Respuestas:* (a)  $\mathbf{Z}_1 = 5 \angle 53.1^\circ$ ;  $\mathbf{Z}_2 = 8\sqrt{2} \angle -45^\circ$

(b)  $\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = 11.7 \angle -20^\circ$

(c)  $i(t) = (8.55) \cos(1250t + 20^\circ)$  A

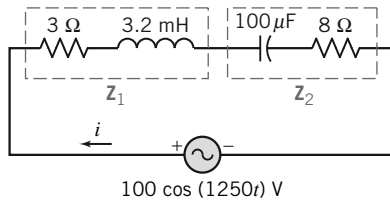


Figura P 10.8-1

**P 10.8-2** El circuito que se muestra en la figura P 10.8-2 se encuentra en estado estable. Los voltajes  $v_s(t)$  y  $v_2(t)$  están dados por

$$v_s(t) = 7.68 \cos(2t + 47^\circ) \text{ V}$$

y

$$v_2(t) = 1.59 \cos(2t + 125^\circ) \text{ V}$$

Encuentre el voltaje de estado estable  $v_1(t)$ .

**Respuesta:**  $v_1(t) = 7.51 \cos(2t + 35^\circ) \text{ V}$

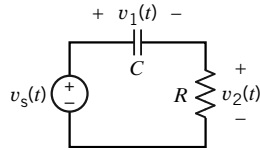


Figura P 10.8-2

**P 10.8-3** El circuito que se muestra en la figura P 10.8-3 se encuentra en estado estable. Las corrientes  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  están dadas por

$$i_1(t) = 7.44 \cos(2t - 118^\circ) \text{ mA}$$

e

$$i_2(t) = 540.5 \cos(2t + 100^\circ) \text{ mA}$$

Encuentre la corriente de estado estable  $i(t)$ .

**Respuesta:**  $i(t) = 460 \cos(2t + 196^\circ) \text{ mA}$

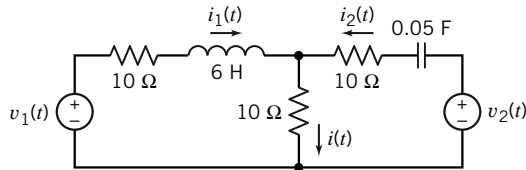


Figura P 10.8-3

**P 10.8-4** Determine  $i(t)$  del circuito  $RLC$  que se muestra en la figura P 10.8-4 cuando  $v_s = 2 \cos(4t + 30^\circ) \text{ V}$ .

**Respuesta:**  $i(t) = 0.185 \cos(4t - 26.3^\circ) \text{ A}$

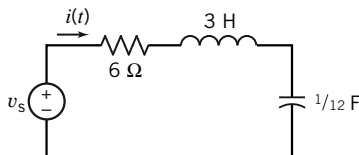


Figura P 10.8-4

**P 10.8-5** El gran juguete que surgió del éxito de taquilla *Big* es la fantasía musical de un niño, la cual se hace realidad: un piano del tamaño de una acera. Como un juego infantil de rayuela, este vehemente juego navideño invita a todo el que pasa a saltar en él, moverse de aquí para allá y hacer música. El desarrollador del piano de juguete utilizó un sintetizador musical y altavoces estereofónicos como se muestra en la figura P 10.8-5. (Gardner, 1988). Determine la corriente  $i(t)$  para un tono a 796 Hz cuando  $C = 10 \mu\text{F}$ .

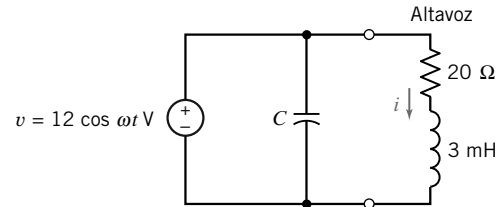


Figura P 10.8-5 Sintetizador de tonos.

**P 10.8-6** Determine  $B$  y  $L$  para el circuito de la figura P 10.8-6 cuando  $i(t) = B \cos(3t - 51.87^\circ) \text{ A}$ .

**Respuestas:**  $B = 1.6$ , y  $L = 2 \text{ H}$

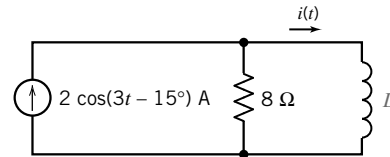


Figura P 10.8-6

**P 10.8-7** Determine  $i(t)$ ,  $v(t)$  y  $L$  para el circuito que se muestra en la figura P 10.8-7.

**Respuesta:**  $i(t) = 1.34 \cos(2t - 87^\circ) \text{ A}$ ,  $v(t) = 7.29 \cos(2t - 24^\circ) \text{ V}$ , y  $L = 4 \text{ H}$

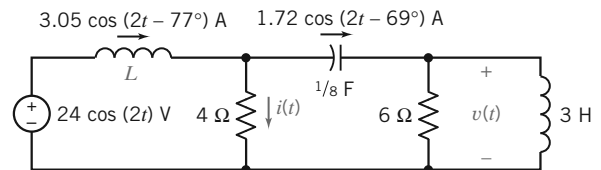


Figura P 10.8-7

**P 10.8-8** Las lesiones en la espina dorsal resultan en parálisis de la parte inferior del cuerpo y pueden causar pérdida del control de la vejiga. Se han propuesto numerosos dispositivos eléctricos para reemplazar el estímulo normal de la ruta del nervio del control de la vejiga. La figura P 10.8-8 muestra el modelo de un sistema de control de vejiga en el cual  $v_s = 20 \cos \omega t \text{ V}$  y  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ . Encuentre el voltaje de estado estable a través del resistor de carga de  $10 \Omega$ .

**Respuesta:**  $v(t) = 10\sqrt{2} \cos(100t + 45^\circ) \text{ V}$

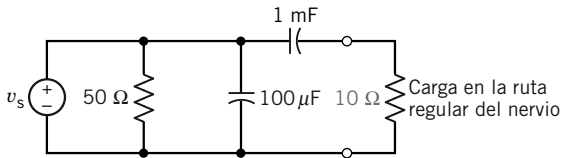


Figura P 10.8-8

**P 10.8-9** Cada año suceden de 500 a 1 000 decesos por choque eléctrico en Estados Unidos. Si una persona efectúa un buen contacto con sus manos, el circuito se puede representar por la figura P 10.8-9, en el cual  $v_s = 160 \cos \omega t$  V y  $\omega = 2\pi f$ . Encuentre la corriente  $i$  de estado estable que fluye a través del cuerpo cuando (a)  $f = 60$  Hz y (b)  $f = 400$  Hz.

**Respuesta:** (a)  $i(t) = 0.53 \cos(120\pi t + 5.9^\circ)$   
 (b)  $i(t) = 0.625 \cos(800\pi t + 59.9^\circ)$  A

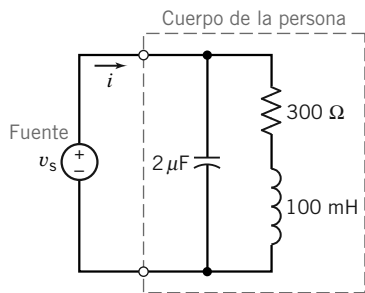
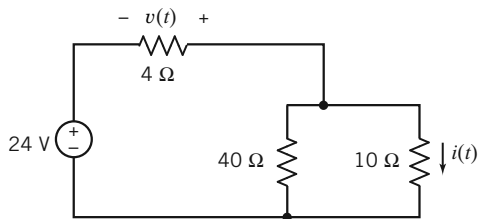
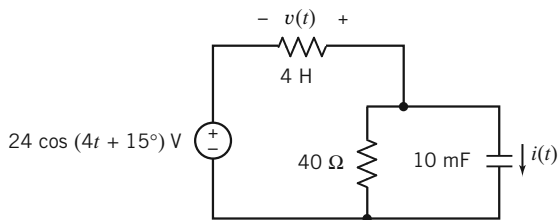


Figura P 10.8-9

**P 10.8-10** Determine el voltaje de estado estable,  $v(t)$ , y la corriente  $i(t)$ , para cada uno de los circuitos que se muestran en la figura P 10.8-10.



(a)



(b)

Figura P 10.8-10

**P 10.8-11** Determine la corriente de estado estable,  $i(t)$ , para el circuito que se muestra en la figura P 10.8-11.

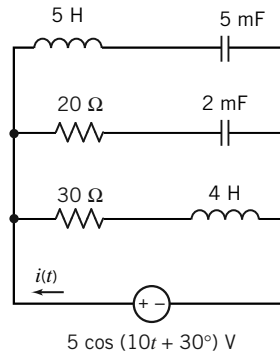


Figura P 10.8-11

**P 10.8-12** Determine el voltaje de estado estable,  $v(t)$ , para el circuito que se muestra en la figura P 10.8-12.

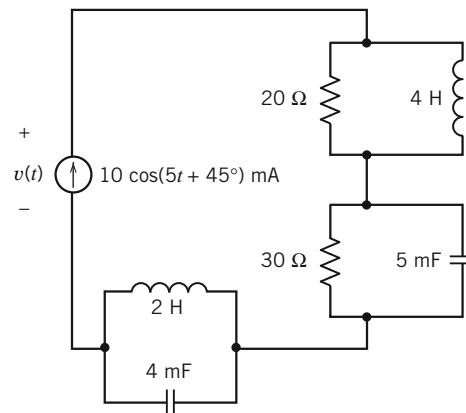


Figura P 10.8-12

**P 10.8-13** Determine el voltaje de estado estable,  $v(t)$ , para cada circuito que se muestra en la figura P 10.8-13.

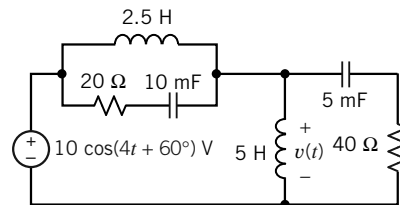


Figura P 10.8-13

**P 10.8-14** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 10.8-14 es la corriente de la fuente de corriente

$$i_s(t) = 25 \cos(10t + 15^\circ) \text{ mA}$$

La salida es la corriente  $i_1(t)$ . Determine la respuesta de estado estable,  $i_1(t)$ .

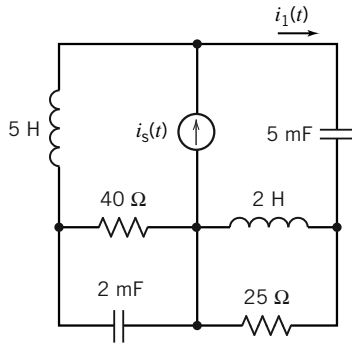
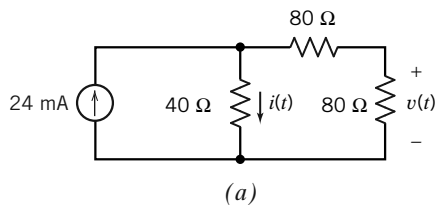
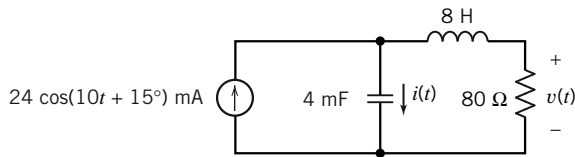


Figura P 10.8-14

**P 10.8-15** Determine el voltaje de estado estable,  $v(t)$ , y la corriente  $i(t)$ , para cada uno de los circuitos que se muestran en la figura P 10.8-15.



(a)



(b)

Figura P 10.8-15

**P 10.8-16** Determine la corriente de estado estable,  $i(t)$ , para el circuito en la figura P 10.8-16.

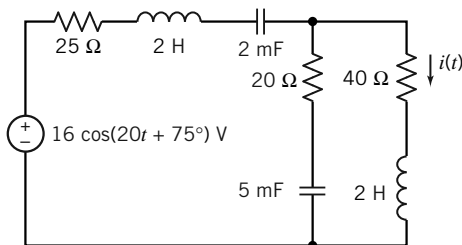


Figura P 10.8-16

**P 10.8-17** Cuando el interruptor en el circuito que se muestra en la figura P 10.8-17 está abierto y el circuito se encuentra en estado estable, el voltaje del condensador es

$$v(t) = 14.14 \cos(100t - 45^\circ) \text{ V}$$

Cuando el interruptor está cerrado y el circuito se encuentra en estado estable, el voltaje del condensador es

$$v(t) = 17.89 \cos(100t - 26.6^\circ) \text{ V}$$

Determine los valores de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ .

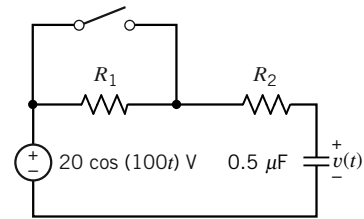


Figura P 10.8-17

**P 10.8-18** Determine la corriente de estado estable,  $i(t)$ , para el circuito que se muestra en la figura P 10.8-18.

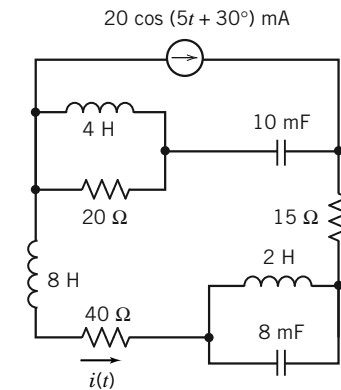
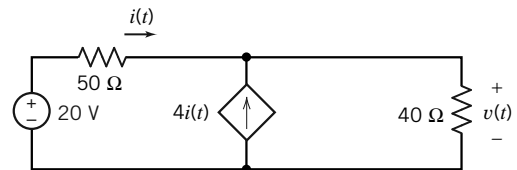
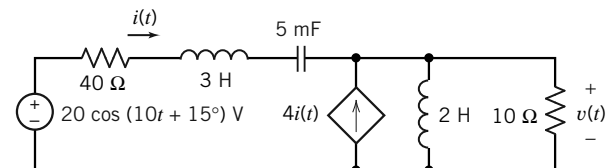


Figura P 10.8-18

**P 10.8-19** Determine el voltaje de estado estable,  $v(t)$ , y la corriente  $i(t)$ , para cada uno de los circuitos que se muestran en la figura P 10.8-19.



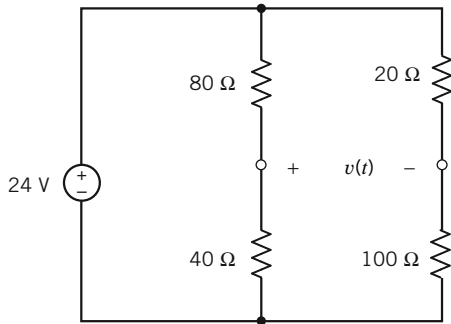
(a)



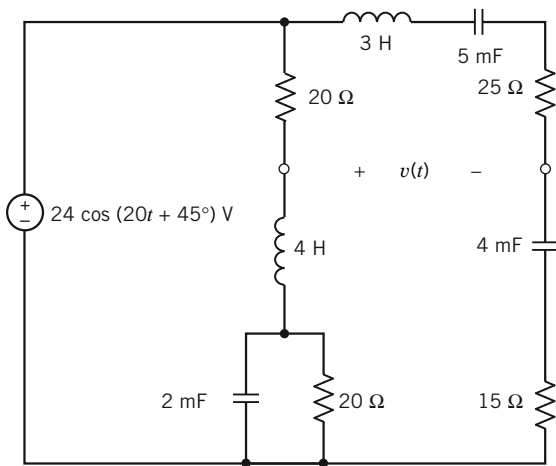
(b)

Figura P 10.8-19

**P 10.8-20** Determine el voltaje de estado estable,  $v(t)$ , para cada uno de los circuitos que se muestran en la figura P 10.8-20.



(a)



(b)

Figura P 10.8-20

**P 10.8-21** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 10.8-21 es el voltaje de la fuente de voltaje

$$v_s(t) = 5 \cos(2t + 45^\circ) \text{ V}$$

La salida es el voltaje del inductor,  $v(t)$ . Determine el voltaje de salida de estado estable.

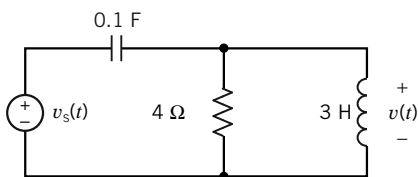


Figura P 10.8-21

**P 10.8-22** Determine el voltaje de estado estable,  $v(t)$ , para el circuito de la figura P 10.8-22.

*Sugerencia:* Analice el circuito en el dominio de frecuencia, utilizando impedancias y fasores. Utilice dos veces la división de voltaje. Agregue los resultados.

*Respuesta:*  $v(t) = 3.58 \cos(5t + 47.2^\circ) \text{ V}$

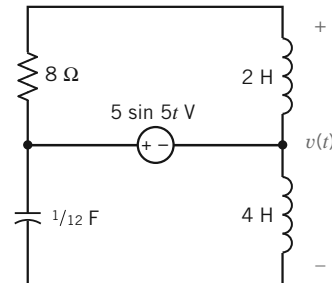


Figura P 10.8-22

**P 10.8-23** Determine el voltaje,  $v(t)$ , para el circuito de la figura P 10.8-23.

*Sugerencia:* Analice el circuito en el dominio de frecuencia, utilizando impedancias y fasores. Reemplace las impedancias en paralelo con una impedancia equivalente dos veces. Aplique la KVL.

*Respuesta:*  $v(t) = 14.4 \cos(3t - 22^\circ) \text{ V}$

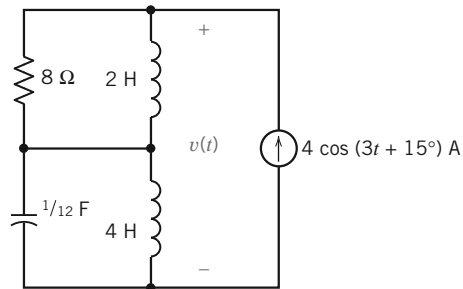


Figura P 10.8-23

**P 10.8-24** La entrada al circuito en la figura P 10.8-24 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s(t)$ . La salida es el voltaje  $v_o(t)$ . Cuando la entrada es  $v_s(t) = 8 \cos(40t) \text{ V}$ , la salida es  $v_o(t) = 2.5 \cos(40t + 14^\circ) \text{ V}$ . Determine los valores de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ .

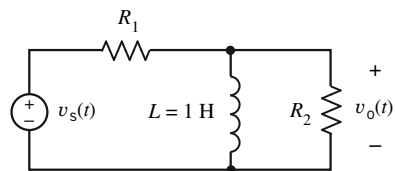


Figura P 10.8-24

## 10.9 Análisis del voltaje de nodos y de la corriente de enlaces utilizando fasores

**P 10.9-1** Encuentre el voltaje del fasor  $V_c$  para el circuito que se muestra en la figura P 10.9-1.

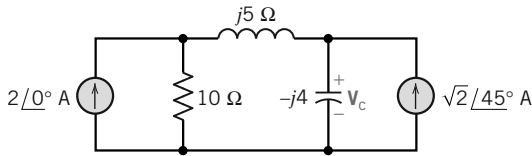


Figura P 10.9-1

**P 10.9-2** Para el circuito que se muestra en la figura P 10.9-2, determine las corrientes de fasores  $I_s$ ,  $I_c$ ,  $I_L$  e  $I_R$  si  $\omega = \text{rad/s}$ .

**Respuesta:**  $I_s = 0.347 \angle -25.5^\circ \text{ A}$

$I_c = 0.461 \angle 112.9^\circ \text{ A}$

$I_L = 0.720 \angle -67.1^\circ \text{ A}$

$I_R = 0.230 \angle 22.9^\circ \text{ A}$

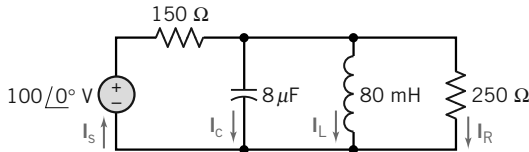


Figura P 10.9-2

**P 10.9-3** Encuentre los dos voltajes de nodos,  $v_a(t)$  y  $v_b(t)$ , para el circuito de la figura P 10.9-3 cuando  $v_s(t) = 12 \cos 4000t$ .

**Respuesta:**  $v_s(t) = 1.97 \cos (4000t - 171^\circ) \text{ V}$

$v_b(t) = 2.21 \cos (4000t - 144^\circ) \text{ V}$

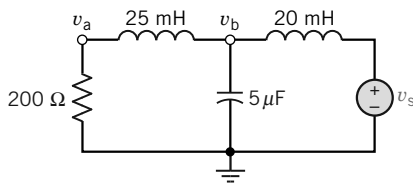


Figura P 10.9-3

**P 10.9-4** Determine el voltaje  $v_a$  para el circuito en la figura P 10.9-4 cuando  $i_s = 20 \cos (\omega t + 53.13^\circ) \text{ A}$  y  $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$ .

**Respuesta:**  $v_a(t) = 339.4 \cos (10^4 t + 45^\circ) \text{ V}$

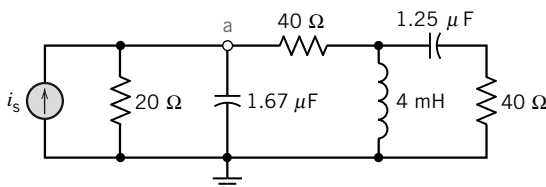


Figura P 10.9-4

**P 10.9-5** Una avión comercial tiene dispositivos sensores para indicar a la tripulación de la cabina que todas las puertas y la compuerta de la carga están cerradas. Un dispositivo llamado magnetómetro de bobina de búsqueda, también conocido como sensor de proximidad, proporciona una señal indicativa de la proximidad de metal o de otro material de conducción a una bobina sensora inductiva. La inductancia de la bobina sensora cambia al aproximarse algún metal a la bobina. La inductancia de la bobina sensora se compara a una inductancia de bobina de referencia con un circuito denominado puente de inductancia equilibrado (vea la figura P 10.9-5). En el puente de inductancia se observa una señal indicadora de proximidad entre las terminales a y b al sustraerse el voltaje en b,  $v_b$ , del voltaje en a,  $v_a$  (Lenz, 1990).

El circuito de puente es excitado por una fuente de voltaje senoidal  $v_s = \sin (800\pi t) \text{ V}$ . Los dos resistores,  $R = 100 \Omega$ , son de igual resistencia. Al abrirse la puerta (no hay metal), la inductancia de la bobina sensora,  $L_S$ , es igual a la inductancia de la bobina de referencia,  $L_R = 40 \text{ mH}$ . En este caso, ¿cuál es la magnitud de la señal  $V_a - V_b$ ?

Cuando la puerta del avión está completamente cerrada,  $L_S = 60 \text{ mH}$ . Con la puerta cerrada, ¿cuál es la representación del fasor de la señal  $V_a - V_b$ ?

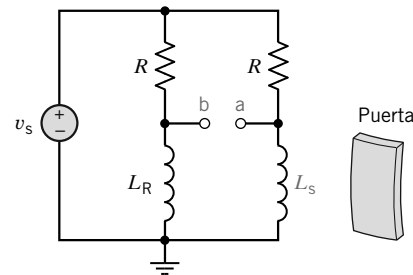


Figura P 10.9-5 Unidad sensora de la puerta de un avión comercial.

**P 10.9-6** Utilizando un fino taladro con punta de diamante que funciona a 190 000 rpm, los cardiólogos pueden remover en las arterias coronarias depósitos de plaquetas que ponen en peligro la vida. El procedimiento es rápido, sin complicaciones y relativamente indoloro (McCarthy, 1991). El *Rotablator*, un sistema de angioplastia consta de un impulsor de catéter, un cable guía, una consola y una fuente de poder. El impulsor de catéter contiene un delgada turbina que dirige el eje flexible que hace girar el taladro del catéter. El modelo del circuito operacional y de control se muestra en la figura P 10.9-6. Determine  $v(t)$ , el voltaje que dirige la punta, cuando  $v_s = \sqrt{2} \cos (40t - 135^\circ) \text{ V}$ .

**Respuesta:**  $v(t) = \sqrt{2} \cos (40t - 135^\circ) \text{ V}$

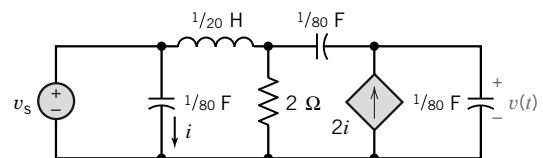


Figura P 10.9-6 Circuito de control para el *Rotablator*.

**P 10.9-7** Se sabe que para el circuito de la figura 10.9-7,

$$v_2(t) = 0.7571 \cos(2t + 66.7^\circ) \text{ V}$$

$$v_3(t) = 0.6064 \cos(2t - 69.8^\circ) \text{ V}$$

Determine  $i_1(t)$ .

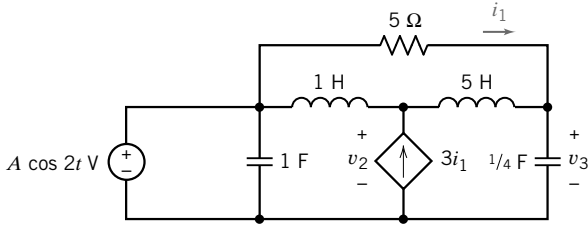


Figura P 10.9-7

**P 10.9-8** Determine  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $V_L$  y  $V_c$  para el circuito de la figura P 10.9-8, utilizando la KVL y el análisis de enlaces.

**Respuesta:**  $I_1 = 2.5 \angle 29.0^\circ \text{ A}$

$$I_2 = 1.8 \angle 105^\circ \text{ A}$$

$$V_L = 16.3 \angle 78.7^\circ \text{ V}$$

$$V_c = 7.2 \angle 15^\circ \text{ V}$$

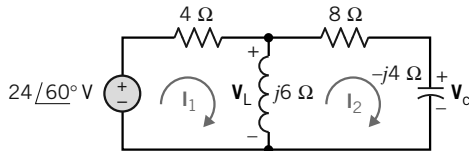


Figura P 10.9-8

**P 10.9-9** Determine la corriente  $i(t)$  para el circuito de la figura P 10.9-9, utilizando corrientes de enlace cuando  $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ .

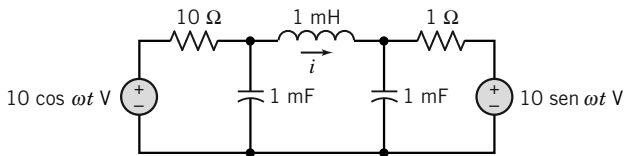


Figura P 10.9-9

**P 10.9-10** La idea de utilizar una bobina de inducción en una lámpara no es nueva, pero aplicarla en un producto disponible comercialmente sí lo es. Una bobina de inducción en una bombilla induce el flujo de una energía de alta frecuencia en vapor de mercurio para producir luz. La lámpara utiliza casi la misma cantidad de energía que un bulbo fluorescente pero seis veces más tiempo, con 60 veces la vida de un foco incandescente convencional. El modelo del circuito del bulbo y su circuito asociado se muestran en la figura P 10.9-10. Determine el voltaje  $v(t)$  a través del resistor de  $2\text{-}\Omega$  cuando  $C = 40 \mu\text{F}$ ,  $L = 40 \mu\text{H}$ ,  $v_f = 10 \cos(\omega_0 t + 30^\circ)$  y  $\omega_0 = 10^5 \text{ rad/s}$ .

**Respuesta:**  $v(t) = 6.45 \cos(10^5 t + 44^\circ) \text{ V}$

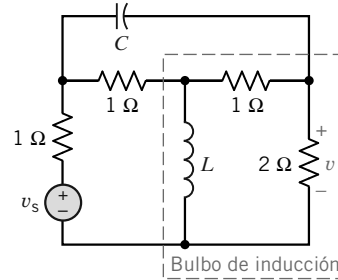
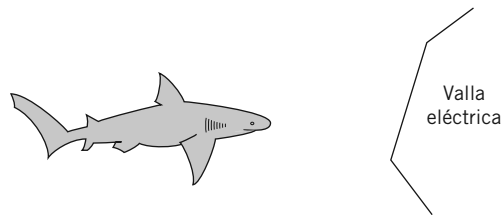
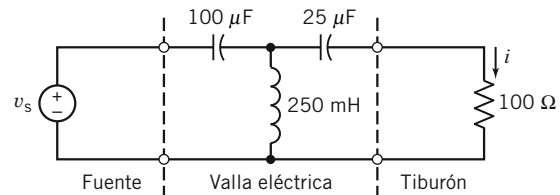


Figura P 10.9-10 Circuito del bulbo de inducción.

**P 10.9-11** El desarrollo de hoteles en las costas en varias partes del mundo es una empresa que va en rápido crecimiento. La necesidad de una protección contra tiburones de una manera aceptable para el ambiente se manifiesta al situarse estos desarrollos al lado de aguas que pululan de tiburones (Smith, 1991). Un concepto es el uso de una línea electrificada sumergida para disuadir a los tiburones, como se muestra en la figura P 10.9-11a. El modelo del circuito de la valla eléctrica se muestra en la figura P 10.9-11b, en la cual el tiburón está representado por una resistencia equivalente de  $100 \Omega$ . Determine la corriente que fluye a través del cuerpo del tiburón,  $i(t)$ , cuando  $v_s = 375 \cos 400t \text{ V}$ .



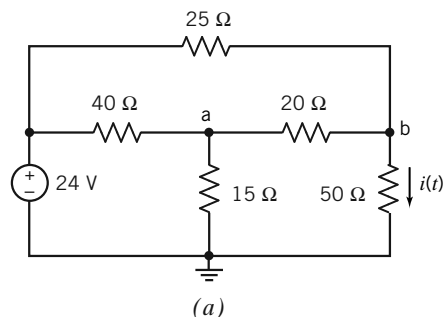
(a)



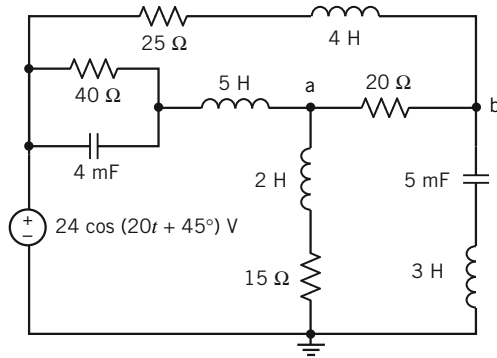
(b)

Figura P 10.9-11 Valla eléctrica para repeler tiburones.

**P 10.9-12** Determine los voltajes de nodos a y b de cada uno de los circuitos en la figura P 10.9-12.



(a)



(b)

Figura P 10.9-12

**P 10.9-13** Determine el voltaje de estado estable,  $v(t)$ , para el circuito en la figura P 10.9-13.

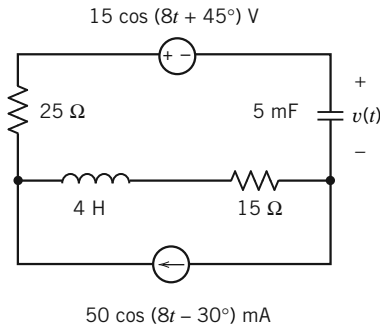


Figura P 10.9-13

**P 10.9-14** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 10.9-14 es el voltaje del voltaje de fuente,  $v_s(t)$ . La salida es el voltaje del resistor,  $v_o(t)$ . Determine el voltaje de la salida cuando el circuito se encuentra en estado estable y la entrada es

$$v_s(t) = 25 \cos(100t - 15^\circ) \text{ V}$$

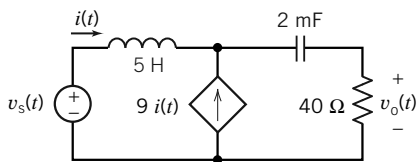


Figura P 10.9-14

**P 10.9-15** Cuando el circuito que se muestra en la figura P 10.9-15 se encuentra en estado estable, la corriente de enlace es

$$i(t) = 0.8394 \cos(10t + 138.5^\circ) \text{ A}$$

Determine los valores de  $L$  y  $R$ .

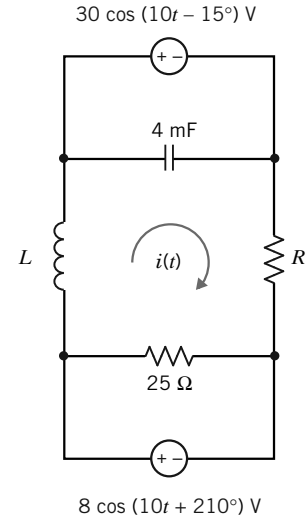


Figura P 10.9-15

**P 10.9-16** El circuito que se muestra en la figura P 10.9-16 tiene dos entradas:

$$v_1(t) = 50 \cos(20t - 75^\circ) \text{ V}$$

$$v_2(t) = 35 \cos(20t + 110^\circ) \text{ V}$$

Cuando el circuito se encuentra en estado estable, el voltaje de nodos es

$$v(t) = 21.25 \cos(20t - 168.8^\circ) \text{ V}$$

Determine los valores de  $L$  y  $R$ .

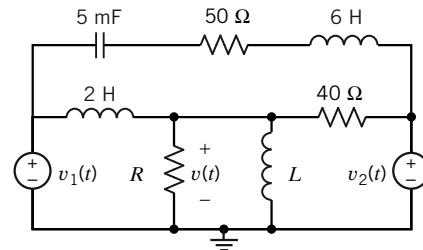


Figura P 10.9-16

**P 10.9-17** Determine la corriente de estado estable,  $i(t)$ , para el circuito que se muestra en la figura P 10.9-17.

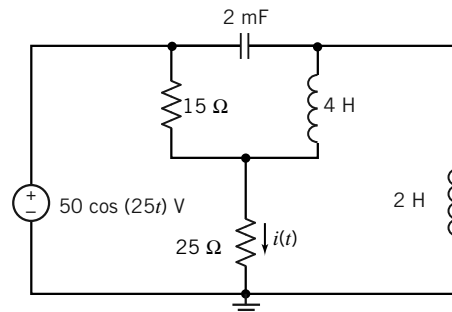


Figura P 10.9-17



**P 10.9-18** Determine la corriente de estado estable,  $i(t)$ , para el circuito que se muestra en la figura P 10.9-18.

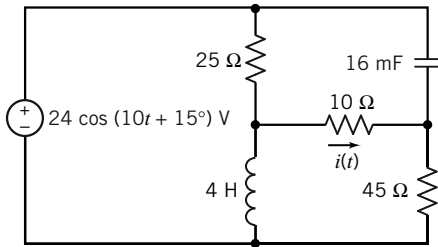


Figura P 10.9-18

**P 10.9-19** Determine el voltaje de estado estable,  $v_o(t)$ , para el circuito que se muestra en la figura P 10.9-19.

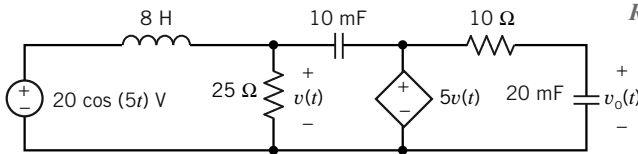


Figura P 10.9-19

**P 10.9-20** Determine la corriente de estado estable,  $i(t)$ , para cada uno de los circuitos que se muestran en la figura P 10.9-20.

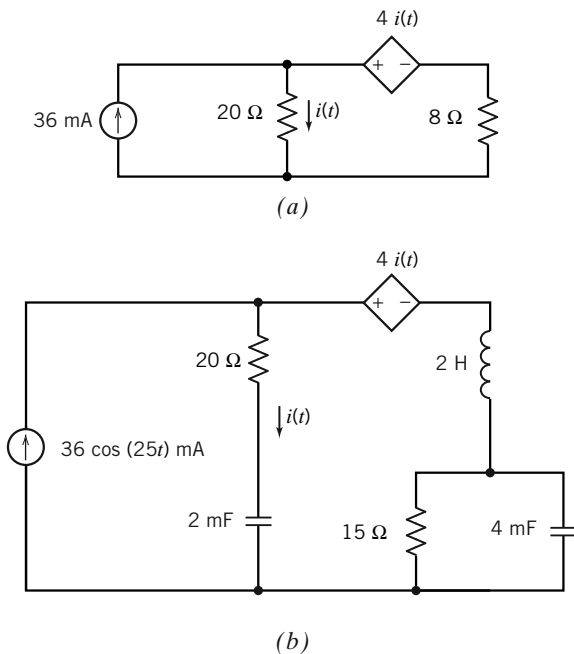


Figura P 10.9-20

**P 10.9-21** Un circuito tiene la forma que se muestra en la figura P 10.9-21 cuando  $i_{s1} = 1 \cos 100t$  A, e  $i_{s2} = 0.5 \cos(100t - 90^\circ)$  A. Encuentre el voltaje  $v_a$  en el dominio de tiempo.

*Respuesta:*  $v_a = \sqrt{5} \cos(100t - 63.5^\circ)$  V

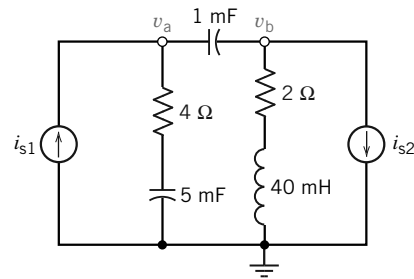


Figura P 10.9-21

**P 10.9-22** Utilice el análisis de la corriente de enlaces para el circuito de la figura P 10.9-22 para encontrar el voltaje de estado estable a través del inductor,  $v_L$ , cuando  $v_{s1} = 20 \cos \omega t$  V,  $v_{s2} = 30 \cos(\omega t - 90^\circ)$  V y  $\omega = 100$  rad/s.

*Respuesta:*  $v_L = 24\sqrt{2} \cos(\omega t + 82^\circ)$  V

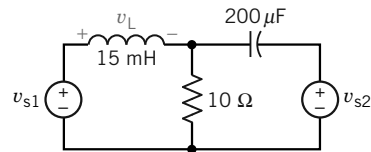


Figura P 10.9-22

**P 10.9-23** Determine los voltajes de fasores de nodos en las terminales a y b para el circuito de la figura P 10.9-23 cuando  $\mathbf{V}_s = j50$  V y  $\mathbf{V}_1 = j30$  V.

*Respuesta:*  $\mathbf{V}_a = 14.33 \angle -71.75^\circ$  V y  $\mathbf{V}_b = 36.67 \angle 83^\circ$  V

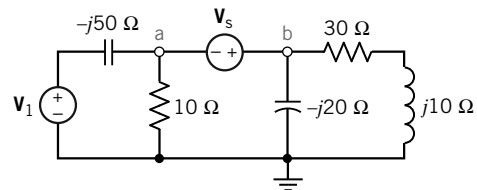


Figura P 10.9-23

**P 10.9-24** El circuito que se muestra en la figura P 10.9-24 se encuentra en estado estable. Los voltajes de la fuente de voltajes están dados por

$$v_1(t) = 12 \cos(2t - 90^\circ) \text{ V y } v_2(t) = 5 \cos(2t + 90^\circ) \text{ V}$$

Las corrientes están dadas por

$$i_1(t) = 744 \cos(2t - 118^\circ) \text{ mA, } i_2(t) = 540.5 \cos(2t + 100^\circ) \text{ mA}$$

Determine los valores de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C$  y  $C$ .

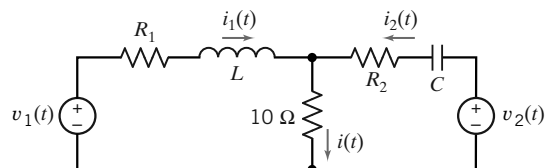


Figura P 10.9-24

**Sección 10.10 Superposición, equivalentes de Thévenin y de Norton, y transformaciones de fuentes**

**P 10.10-1** Para el circuito de la figura P 10.10-1, encuentre  $i(t)$  cuando  $v_1 = 12 \cos(4000t + 45^\circ)$  V y  $v_2 = 5 \cos 3000t$  V.

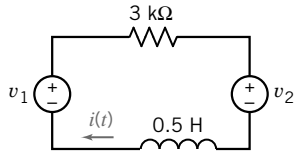


Figura P 10.10-1

**P 10.10-2** Determine  $i(t)$  del circuito de la figura P 10.10-2.

*Sugerencia:* Reemplace la fuente de voltaje por una combinación en serie de un voltaje de cd y una fuente de voltaje senoidal.

*Respuesta:*  $i(t) = 0.166 \cos(4t - 135^\circ) + 0.5$  mA

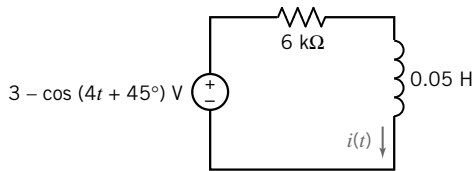


Figura P 10.10-2

**P 10.10-3** Determine  $i(t)$  para el circuito de la figura P 10.10-3.

*Respuesta:*  $i(t) = 1.9 \cos(4t + 26.6^\circ) + 0.8 \cos(3t + 166^\circ)$  A

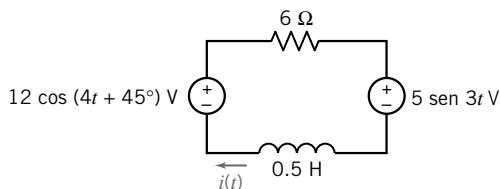


Figura P 10.10-3

**P 10.10-4** Determine el circuito equivalente de Thévenin para el circuito que se muestra en la figura P 10.10-4 cuando  $v_s = 5 \cos(4000t + 30^\circ)$ .

*Respuesta:*  $V_t = 5.7 \angle -21.9^\circ$  V

$Z_t = 23 \angle -81.9^\circ \Omega$

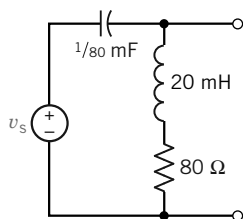


Figura P 10.10-4

**P 10.10-5** Encuentre el circuito equivalente de Thévenin para el circuito que se muestra en la figura P 10.10-5 siguiendo el método de la corriente de enlaces.

*Respuesta:*  $V_t = 3.71 \angle -16^\circ$  V

$Z_t = 247 \angle -16^\circ \Omega$

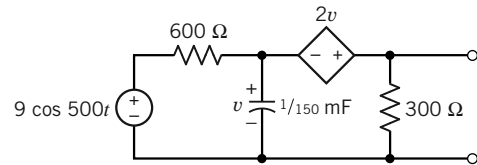


Figura P 10.10-5

**P 10.10-6** Un sistema de reproductor de minidiscos CD tamaño bolsillo tiene un circuito de amplificador que se muestra en la figura P 10.10-6 con una señal  $v_s = 10 \cos(\omega t + 53.1^\circ)$  en  $\omega = 10\,000$  rad/s. Determine el equivalente de Thévenin en las terminales de salida a y b.

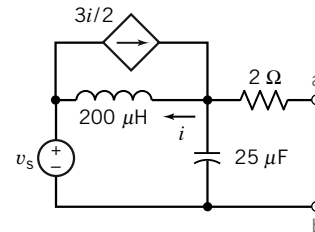


Figura P 10.10-6

**P 10.10-7** Un radioreceptor de AM utiliza el circuito RCL en paralelo que se muestra en la figura P 10.10-7. Determine la frecuencia,  $f_0$ , en el cual la admitancia  $Y$  sea una conductancia pura. El radio de AM recibirá la señal emitida en la frecuencia  $f_0$ . ¿Cuál es el “número” de esta estación en el cuadrante del radio de AM?

*Respuesta:*  $f_0 = 800$  kHz, la cual corresponde a 80 en el cuadrante del radio de AM.

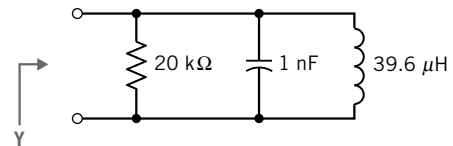


Figura P 10.10-7

**P 10.10-8** Un circuito lineal se coloca dentro de una caja negra con sólo dos terminales a-b disponibles, como se muestra en la figura P 10.10-8. Hay tres elementos disponibles en el laboratorio: (1) un resistor de 50 Ω; (2) un condensador de 2.5 μF, y (3) un inductor de 50 mH. Estos tres elementos se ubican a través de las terminales a-b en cuanto la carga  $Z_L$ , y la magnitud de  $V$  se miden como (1) 25 V, (2) 100 V, y (3) 50 V, respectivamente. Se sabe que las fuentes dentro de la caja son senoidales con  $\omega = 2 \times 10^3$  rad/s. Determine el equivalente de Thévenin para el circuito en la caja como se muestra en la figura P 10.10-8.

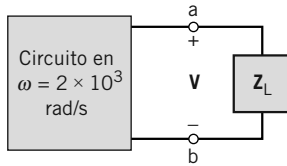


Figura P 10.10-8 Un circuito dentro de una caja negra está conectado a una impedancia  $Z_L$  seleccionada.

**P 10.10-9** Considere el circuito de la figura 10.10-9, del cual deseamos determinar la corriente  $I$ . Utilice una serie de transformaciones de fuentes para reducir la parte del circuito conectado al resistor de  $2\text{-}\Omega$  a un circuito equivalente de Norton, y luego encuentre la corriente en el resistor de  $2\text{-}\Omega$  por división de corriente.

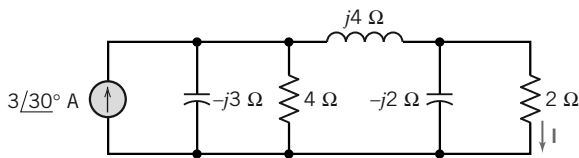
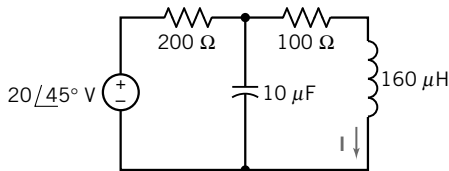


Figura P 10.10-9

**P 10.10-10** Para el circuito de la figura P 10.10-10, determine la corriente  $I$  utilizando una serie de transformaciones de fuentes. La fuente tiene  $\omega = 25 \times 10^3 \text{ rad/s}$ .

Respuesta:  $i(t) = 4 \cos(25\,000t - 44^\circ) \text{ mA}$



**P 10.10-11** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 10.10-11 es la corriente de la fuente de corriente

$$i_s(t) = 36 \cos(25t) + 48 \cos(50t + 45^\circ) \text{ mA}$$

Determine la corriente en estado estable,  $i(t)$ .

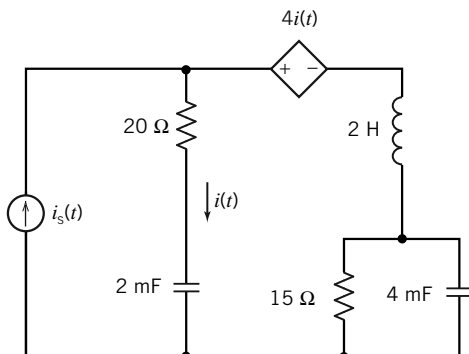


Figura P 10.10-11

**P 10.10-12** Las entradas al circuito que se muestran en la figura P 10.10-12 son

$$v_{s1}(t) = 30 \cos(20t + 70^\circ) \text{ V}$$

y

$$v_{s2}(t) = 18 \cos(10t - 15^\circ) \text{ V}$$

La respuesta de este circuito es la corriente  $i(t)$ . Determine la respuesta de estado estable del circuito.

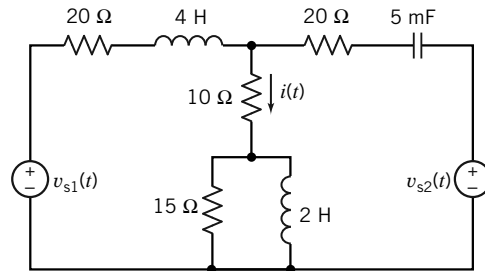


Figura P 10.10-12

**P 10.10-13** El circuito que se muestra en la figura P 10.10-13 ilustra un procedimiento experimental para determinar el equivalente de Thévenin de un circuito de ca. Cuando  $R = 20 \text{ }\Omega$ , el voltaje en estado estable a través de las terminales a-b se mide que sea

$$v(t) = 3.0 \cos(20t - 100.9^\circ) \text{ V}$$

Cuando esa resistencia se cambia a  $R = 40 \text{ }\Omega$ , el voltaje en estado estable se mide que sea

$$v(t) = 4.88 \cos(20t - 95.8^\circ) \text{ V}$$

Determine los valores de  $A$ ,  $\theta$ ,  $R_t$  y  $L_t$ .

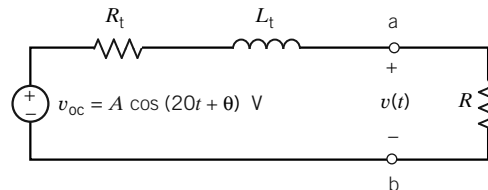


Figura P 10.10-13

**P 10.10-14** El circuito en la figura P 10.10-14 ilustra un procedimiento experimental para determinar el equivalente de Norton de un circuito de ca. Cuando  $R = 20 \text{ }\Omega$ , la corriente de salida en estado estable se mide que sea

$$i(t) = 1.025 \cos(10t - 108.5^\circ) \text{ A}$$

Cuando la resistencia se cambia a  $R = 40 \text{ }\Omega$ , la corriente de salida en estado estable se mide que sea

$$i(t) = 0.848 \cos(10t - 100.7^\circ) \text{ A}$$

Determine los valores de  $B$ ,  $\theta$ ,  $R_t$  y  $L_t$ .

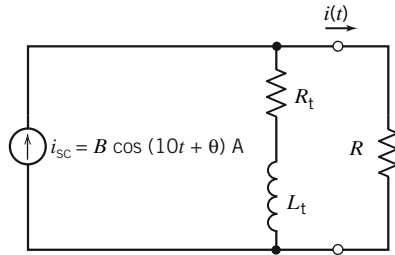


Figura P 10.10-14

\*P 10.10-15 La entrada al circuito que se muestra en la figura P 10.10-15 es el voltaje de la fuente de voltaje

$$v_s(t) = A \cos(25t + \theta) \text{ V}$$

La salida es el voltaje,  $v(t)$ . El “circuito RLC” consta solamente de resistores, condensadores e inductores. Considere el experimento siguiente. Conectamos un resistor y un inductor en serie entre las terminales a y b, como se muestra, y medimos el voltaje en estado estable,  $v(t)$ . Cuando  $R = 10 \Omega$  y  $L = 5 \text{ H}$ , medimos

$$v(t) = 7.063 \cos(25t + 50.2^\circ) \text{ V}$$

Cuando cambiamos la resistencia y la inductancia en serie a  $R = 25 \Omega$  y  $L = 10 \text{ H}$ , medimos

$$v(t) = 8.282 \cos(25t - 47.8^\circ) \text{ V}$$

Determine el voltaje de estado estable,  $v(t)$ , que mediremos después de cambiar la resistencia y la inductancia a  $R = 10 \Omega$  y  $L = 8 \text{ H}$ .

**Sugerencia:** Determine el equivalente de Thévenin del circuito a la izquierda de las terminales a-b.

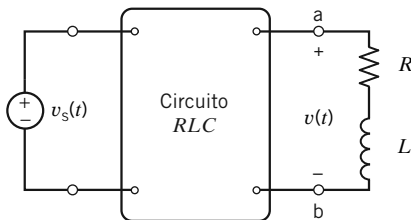


Figura P 10.10-15

\*P 10.10-16 La entrada al circuito que se muestra en la figura P 10.10-16 es el voltaje de la fuente de voltaje

$$v_s(t) = A \cos(15t + \theta) \text{ V}$$

La salida es el voltaje,  $v(t)$ . El “circuito RLC” consta solamente de resistores, condensadores e inductores. Considere el experimento siguiente. Conectamos un resistor de  $25 \Omega$  a través de las terminales a y b, como se muestra, y medimos que el voltaje de salida de estado estable sea

$$v(t) = 9.77 \cos(15t + 31.6^\circ) \text{ V}$$

A continuación, reemplazamos el resistor de  $25 \Omega$  con un inductor de  $4 \text{ H}$ , y medimos que el voltaje de salida de estado estable sea

$$v(t) = 18.9 \cos(15t + 90.9^\circ) \text{ V}$$

Luego reemplazamos el inductor de  $4 \text{ H}$  con un condensador que tenga capacitancia  $C$  y medimos que el voltaje de salida de estado estable sea

$$v(t) = B \cos(15t - 45^\circ) \text{ V}$$

¿Qué valor de capacitancia  $C$  se requiere para hacer que el ángulo de fase de la salida sea de  $-45^\circ$ ?

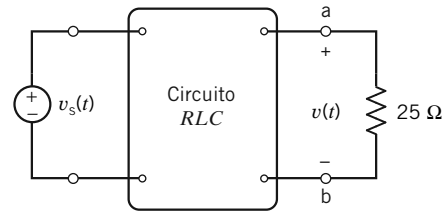


Figura P 10.10-16

P 10.10-17 La entrada al circuito que se muestra en la figura P 10.10-17 es el voltaje de la fuente de voltaje

$$v_s(t) = 5 + 30 \cos(100t) \text{ V}$$

Determine la corriente en estado estable,  $i(t)$ .

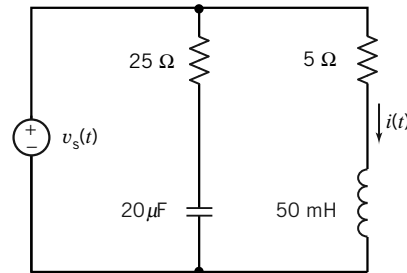


Figura P 10.10-17

P 10.10-18 Determine el valor de  $V_t$  y  $Z_t$  de tal modo que el circuito que se muestra en la figura P 10.10-18b sea el circuito equivalente de Thévenin como se muestra en la figura P 10.10-18a.

**Respuesta:**  $V_t = 3.58 \angle 47^\circ$  y  $Z_t = 4.9 + j1.2 \Omega$

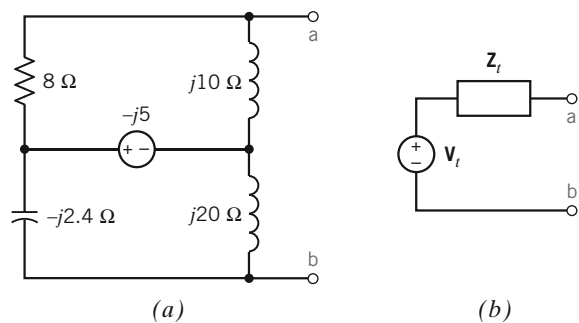


Figura P 10.10-18

P 10.10-19 Determine el voltaje  $v(t)$  para el circuito de la figura P 10.10-19.

**Sugerencia:** Aplique la superposición.

**Respuesta:**  $v(t) = 3.58 \cos(5t + 47.2^\circ) + 14.4 \cos(3t - 22^\circ) \text{ V}$

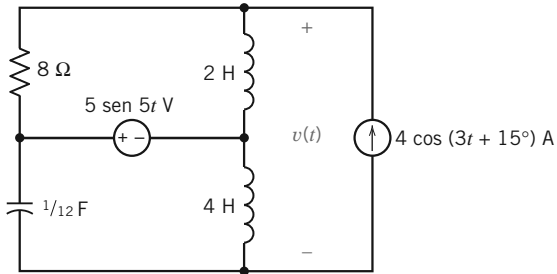


Figura P 10.10-19

**P 10.10-20** Aplicando el principio de la superposición, determine  $i(t)$  del circuito que se muestra en la figura P 10.10-20 cuando  $v_1 = 10 \cos 10t$  V.

**Respuesta:**  $i = -2 + 0.71 \cos(10t - 45^\circ)$  A

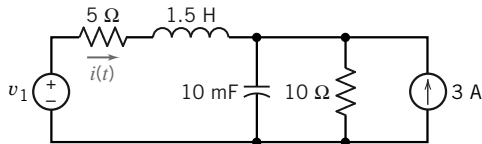


Figura P 10.10-20

### Sección 10.11 Diagramas de fasores

**P 10.11-1** Utilizando un diagrama de fasores, determine  $\mathbf{V}$  cuando  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3$  y  $\mathbf{V}_1 = 3 + j3$ ,  $\mathbf{V}_2 = 4 + j2$  y  $\mathbf{V}_3 = -3 - j2$ . (Las unidades son voltios).

**Respuesta:**  $\mathbf{V} = 5 \angle 143.1^\circ$  V

**P 10.11-2** Considere el circuito serie  $RLC$  de la figura P 10.11-2 cuando  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 1$  mH,  $C = 100 \mu\text{F}$  y  $\omega = 10^3$  rad/s. Encuentre  $\mathbf{I}$  y trace el diagrama de fasores.

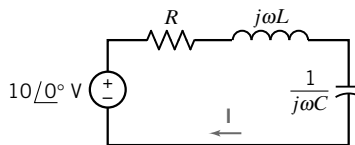


Figura P 10.11-2

**P 10.11-3** Considere la señal

$$i(t) = 72\sqrt{3} \cos 8t + 36\sqrt{3} \sin(8t + 140^\circ) + 144 \cos(8t + 210^\circ) + 25 \cos(8t + \phi)$$

Utilizando el plano de fasores, ¿para qué valor de  $\phi$  el fasor  $\|\mathbf{I}\|$  llega a su máximo?

**P 10.11-4** El circuito que se muestra en la figura P 10.11-4 contiene un fuente de corriente senoidal de  $25 \angle 0^\circ$  A. Un amperímetro lee la magnitud de la corriente. El amperímetro  $A_1$  lee 15 A y el amperímetro  $A_2$  lee 6 A. Encuentre la lectura del amperímetro  $A_3$ .

**Sugerencia:** El amperímetro mide la magnitud de la corriente a través del amperímetro.

**Respuesta:** 26 A

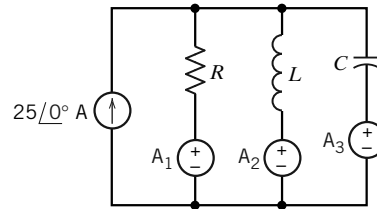


Figura P 10.11-4

### Sección 10.12 Circuitos de fasores y el amplificador operacional

**P 10.12-1** Encuentre la respuesta de estado estable  $v_o(t)$  si  $v_s(t) = \sqrt{2} \cos 1000t$  para el circuito de la figura P 10.12-1.

**Respuesta:**  $v_s(t) = 10 \cos(1000t - 225^\circ)$

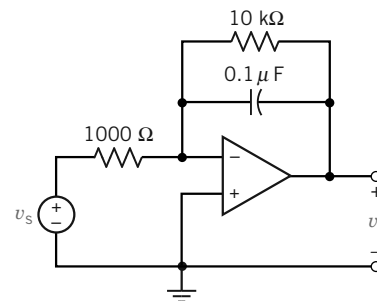


Figura P 10.12-1

**P 10.12-2** Determine  $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$  para el circuito del amplificador operacional que se muestra en la figura P 10.12-2.

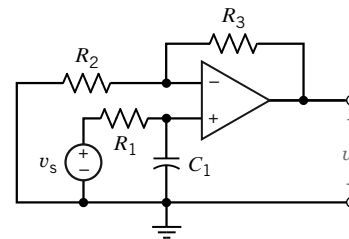


Figura P 10.12-2 Circuito de amplificador para reproductor de discos.

**P 10.12-3** Determine  $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$  para el circuito del amplificador operacional que se muestra en la figura P 10.12-3.

**Respuesta:**  $\frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_s} = \frac{j\omega R_1 C_1 (1 + R_3/R_2)}{1 + j\omega R_1 C_1}$

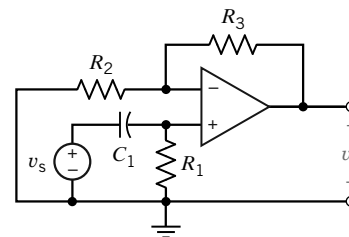


Figura P 10.12-3

**P 10.12-4** Para el circuito de la figura P 10.12-4, determine  $v_o(t)$  cuando  $v_s = 5 \cos \omega t$  mV y  $f = 10$  kHz.

*Respuesta:*  $v_s = 0.5 \cos (\omega t - 89.5^\circ)$  mV

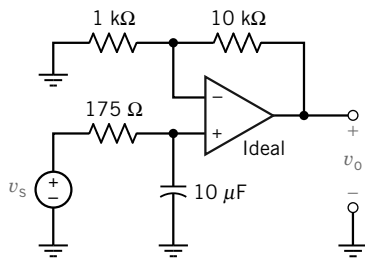


Figura P 10.12-4

**P 10.12-5** Determine la razón  $V_o/V_s$  para el circuito que se muestra en la figura P 10.12-5.

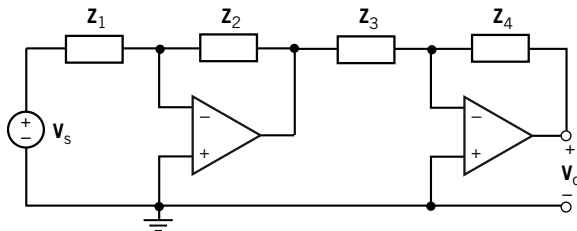
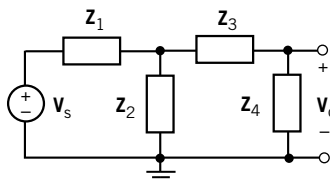
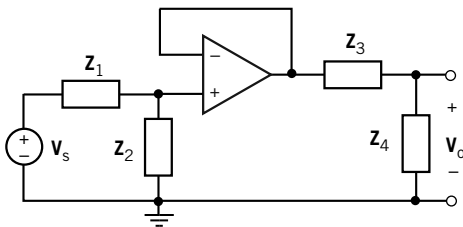


Figura P 10.12-5

**P 10.12-6** Determine la razón  $V_o/V_s$  para los dos circuitos que se muestran en la figura P 10.12-6.



(a)



(b)

Figura P 10.12-6

**P 10.12-7** Determine la razón  $V_o/V_s$  para el circuito que se muestra en la figura P 10.12-7.

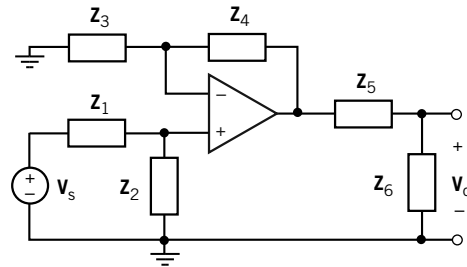


Figura P 10.12-7

**P 10.12-8** Cuando la entrada al circuito que se muestra en la figura 10.12-8 es el voltaje de la fuente de voltaje

$$v_s(t) = 2 \cos (1000t) \text{ V}$$

la salida es el voltaje

$$v_o(t) = 5 \cos (1000t - 71.6^\circ) \text{ V}$$

Determine los valores de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ .

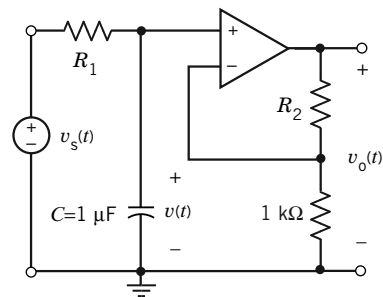


Figura P 10.12-8

**P 10.12-9** Cuando la entrada al circuito que se muestra en la figura 10.12-9 es el voltaje de la fuente de voltaje

$$v_s(t) = 4 \cos (100t) \text{ V}$$

la salida es el voltaje

$$v_o(t) = 8 \cos (100t - 135^\circ) \text{ V}$$

Determine los valores de  $C$  y  $R$ .

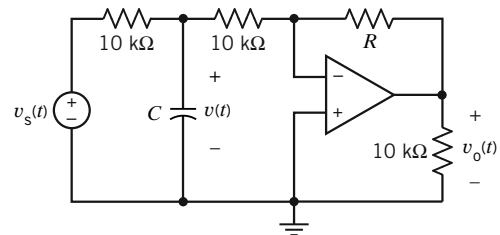


Figura P 10.12-9

**P 10.12-10** El circuito que se muestra en la figura 10.12-10 se denomina inductor simulado aterrizado porque su impedancia de entrada está dada por

$$\mathbf{Z} = j\omega L_{eq}$$

Es decir, el circuito actúa como un inductor aterrizado cuya inductancia es  $L_{eq}$ . Exprese la  $L_{eq}$  como una función de la capacitancia y las resistencias.

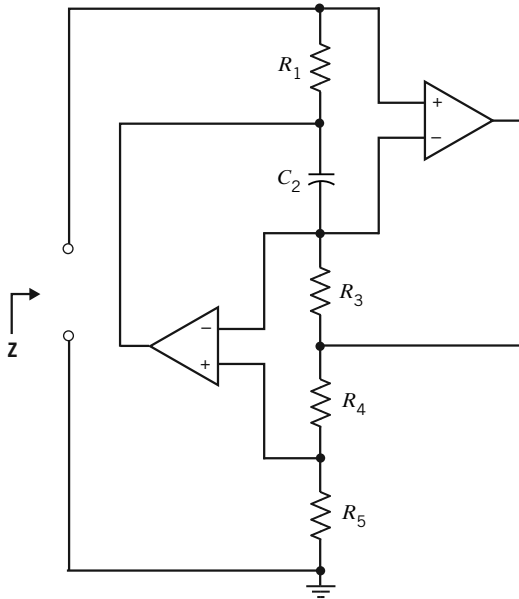


Figura P 10.12-10

**P 10.12-11** La entrada al circuito que se muestra en la figura 10.12-11 es el voltaje de la fuente de voltaje  $v_s(t)$ . La salida es el voltaje  $v_o(t)$ . La entrada  $v_s(t) = 2.5 \cos(1000t)$  V hace que la salida sea  $v_o(t) = 8 \cos(1000t + 104^\circ)$  V. Determine los valores de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ .

**Respuestas:**  $R_1 = 1515 \Omega$  y  $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ .

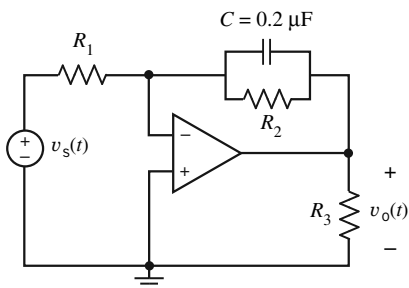


Figura P 10.12-11

### Sección 10.16 ¿Cómo lo podemos comprobar...?

**P 10.16-1** El análisis por computadora del circuito en la figura P 10.16-1 indica que los valores de los voltajes de nodos son  $V_1 = 20 \angle -90^\circ$  y  $V_2 = 44.7 \angle -63.4^\circ$ . ¿Son correctos los valores?

**Sugerencia:** Calcule la corriente en cada elemento de circuito, utilizando los valores de  $V_1$  y  $V_2$ . Compruebe si se satisface la KCL en cada nodo del circuito.

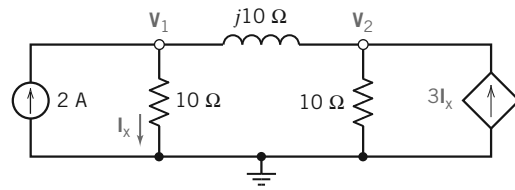


Figura P 10.16-1

**P 10.16-2** El análisis por computadora del circuito en la figura P 10.16-2 indica que las corrientes de enlaces son  $i_1(t) = 0.39 \cos(5t + 39^\circ)$  A e  $i_2(t) = 0.28 \cos(5t + 180^\circ)$  A. ¿Es correcto este análisis?

**Sugerencia:** Represente el circuito en el dominio de frecuencia, utilizando impedancias y fasores. Calcule el voltaje a través de cada elemento del circuito, utilizando los valores de  $I_1$  e  $I_2$ . Compruebe si se satisface la KCL en cada enlace del circuito.

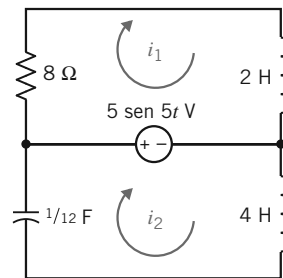


Figura P 10.16-2

**P 10.16-3** El análisis por computadora del circuito en la figura P 10.16-3 indica que los valores de los voltajes de nodos son  $v_1(t) = 19.2 \cos(3t + 68^\circ)$  V y  $v_2(t) = 2.4 \cos(3t + 105^\circ)$  V. ¿Es correcto este análisis?

**Sugerencia:** Represente el circuito en el dominio de frecuencia, utilizando impedancias y fasores. Calcule la corriente en cada elemento del circuito, utilizando los valores de  $V_1$  y  $V_2$ . Compruebe si se satisface la KCL en cada nodo del circuito.

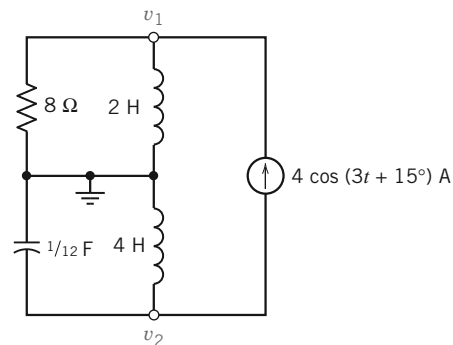


Figura P 10.16-3

**P 10.16-4** Un programa de computadora informa que las corrientes del circuito de la figura P 10.16-4 son  $I = 0.2 \angle 53.1^\circ$  A,  $I_1 = 632 \angle -18.4^\circ$  mA e  $I_2 = 190 \angle 71.6^\circ$  mA. Verifique este resultado.

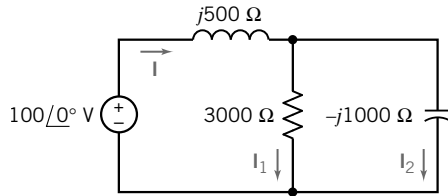


Figura P 10.16-4

**P 10.16-5** El circuito que se muestra en la figura P 10.16-5 se construyó utilizando un resistor al 2%, con una resistencia nominal de 500 Ω y un condensador al 10% con una capacitancia nominal de 5 μF. El voltaje del condensador en estado estable se midió que fuera

$$v(t) = 18.3 \cos(200t - 24^\circ) \text{ V}$$

La fuente de voltaje representa un generador de señales. Suponga que el generador de señales se ajustó tan cuidadosamente que los errores en la amplitud, frecuencia y ángulo del voltaje de la fuente de voltaje son insignificantes. ¿La respuesta medida se explicó por las tolerancias de los componentes? Es decir, podría la  $v(t)$  medida haber sido producida por este circuito con una resistencia  $R$  que está entre 2% de 500 Ω y una capacitancia  $C$  que está entre 5% de 5 μF?

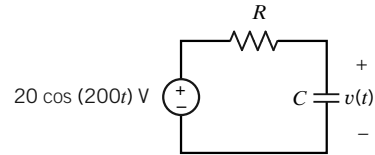


Figura P 10.16-5

## Problemas de PSpice

**PS 10-1** El circuito que se muestra en la figura PS 10.1 tiene dos entradas,  $v_s(t)$  e  $i_s(t)$ , y una salida,  $v(t)$ . Las entradas están dadas por

$$v_s(t) = 10 \text{ sen}(6t + 45^\circ) \text{ V}$$

e

$$i_s(t) = 2 \text{ sen}(6t + 60^\circ) \text{ A}$$

Utilice PSpice para demostrar superposición. Simule tres versiones simultáneas del circuito. (Dibuje el circuito en el taller de PSpice. Corte y pegue para hacer dos copias. Edite los nombres de partes en las copias para evitar duplicidad de nombres. Por ejemplo, en el circuito original el resistor será R1. Cambie R1 a R2 y R3 en las dos copias.) Utilice las  $v_s(t)$  e  $i_s(t)$  dadas en la primera versión. Ajuste  $i_s(t) = 0$  en la segunda versión y  $v_s(t) = 0$  en la tercera versión. Trace el voltaje del condensador,  $v(t)$ , para las tres versiones del circuito. Muestre que el voltaje del condensador en la primera versión del circuito es igual a la suma de los voltajes del condensador en la segunda y tercera versiones.

**Sugerencia:** Utilice las partes VSIN e ISIN de PSpice para la fuente del voltaje y de la corriente. PSpice utiliza hertz en vez de rad/s como la unidad de frecuencia.

**Advertencia:** Observe que  $v(t)$  es senoidal y que tiene la misma frecuencia que  $v_s(t)$  e  $i_s(t)$ .

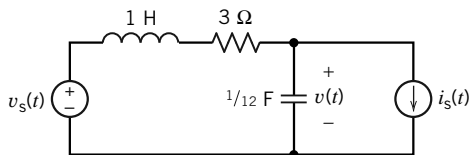


Figura PS 10.1

**PS 10-2** El circuito que se muestra en la figura PS 10-1 tiene dos entradas,  $v_s(t)$  e  $i_s(t)$ , y una salida,  $v(t)$ . Las entradas están

dadas por

$$v_s(t) = 10 \text{ sen}(6t + 45^\circ) \text{ V}$$

e

$$i_s(t) = 2 \text{ sen}(18t + 60^\circ) \text{ A}$$

Utilice PSpice para demostrar superposición. Simule tres versiones simultáneas del circuito. (Dibuje el circuito en el taller de PSpice. Corte y pegue para hacer dos copias. Edite los nombres de partes en las copias para evitar duplicidad de nombres. Por ejemplo, en el circuito original el resistor será R1. Cambie R1 a R2 y R3 en las dos copias.) Utilice las  $v_s(t)$  e  $i_s(t)$  dadas en la primera versión. Ajuste  $i_s(t) = 0$  en la segunda versión y  $v_s(t) = 0$  en la tercera versión. Trace el voltaje del condensador,  $v(t)$ , para las tres versiones del circuito. Muestre que el voltaje del condensador en la primera versión del circuito es igual a la suma de los voltajes del condensador en la segunda y tercera versiones.

**Sugerencia:** Utilice las partes VSIN e ISIN de PSpice para la fuente del voltaje y de la corriente. PSpice utiliza hertz en vez de rad/s como la unidad de frecuencia.

**Advertencia:** Observe que  $v(t)$  no es senoidal.

**PS 10-3** El circuito que se muestra en la figura PS 10-1 tiene dos entradas,  $v_s(t)$  e  $i_s(t)$ , y una salida,  $v(t)$ . Las entradas están dadas por

$$v_s(t) = 10 \text{ sen}(6t + 45^\circ) \text{ V}$$

e

$$i_s(t) = 0.8 \text{ A}$$

Utilice PSpice para demostrar superposición. Simule tres versiones simultáneas del circuito. (Dibuje el circuito en el taller de PSpice. Corte y pegue para hacer dos copias. Edite los nombres de partes en las copias para evitar duplicidad de nombres. Por ejemplo, en el circuito original el resistor será R1. Cambie R1 a R2 y R3 en las dos copias.) Utilice las  $v_s(t)$  e  $i_s(t)$  dadas en la primera versión. Ajuste  $i_s(t) = 0$  en la segunda versión y  $v_s(t) = 0$  en la tercera versión. Trace el voltaje del



condensador,  $v(t)$ , para las tres versiones del circuito. Muestre que el voltaje del condensador en la primera versión del circuito es igual a la suma de los voltajes del condensador en la segunda y tercera versiones.

**Sugerencia:** Utilice las partes VSIN e IDC de PSpice para la fuente del voltaje y de la corriente. PSpice utiliza hertz en vez de rad/s como la unidad de frecuencia.

**Advertencia:** Observe que  $v(t)$  parece senoidal, pero no lo es debido al ramal de cd.

**PS 10-4** El circuito que se muestra en la figura PS 10-1 tiene dos entradas,  $v_s(t)$  e  $i_s(t)$ , y una salida,  $v(t)$ . Cuando las entradas están dadas por

$$v_s(t) = V_m \sin 6t \text{ V}$$

e

$$i_s(t) = I_m \text{ A}$$

la salida será

$$v_o(t) = A \sin(6t + \theta) + B \text{ V}$$

La linealidad requiere que  $A$  sea proporcional a  $V_m$  y que  $B$  sea proporcional a  $I_m$ . En consecuencia, podemos escribir  $A = k_1 V_m$  y  $B = k_2 I_m$ , donde  $k_1$  y  $k_2$  sean constantes que aún se deben determinar.

- Utilice PSpice para determinar el valor de  $k_1$  por simulación del circuito y aprovechando que  $V_m = 1 \text{ V}$  e  $I_m = 0$ .
- Utilice PSpice para determinar el valor de  $k_2$  por simulación del circuito y aprovechando que  $V_m = 0 \text{ V}$  e  $I_m = 1$ .
- Conocidas  $k_1$  y  $k_2$ , especifique los valores de  $V_m$  e  $I_m$  que se requieren para que

$$v_o(t) = 5 \sin(6t + \theta) + 5 \text{ V}$$

Simule el circuito, utilizando PSpice para verificar los valores especificados de  $V_m$  e  $I_m$ .

## Problemas de diseño

**PD 10.1** Diseñe el circuito que se muestra en la figura PD 10-1 para producir el voltaje de salida especificado  $v_o(t)$  cuando se proporciona con el voltaje de entrada  $v_i(t)$ .

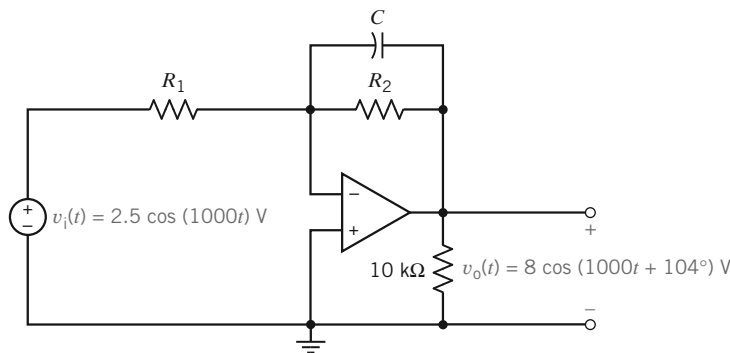


Figura PD 10.1

**PD 10.2** Diseñe el circuito que se muestra en la figura PD 10-2 para producir el voltaje de salida especificado  $v_o(t)$  cuando se proporciona con el voltaje de entrada  $v_i(t)$ .

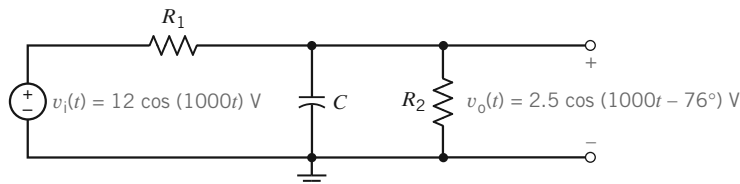


Figura PD 10.2

**PD 10.3** Diseñe el circuito que se muestra en la figura PD 10-3 para producir el voltaje de salida especificado  $v_o(t)$  cuando se proporciona con el voltaje de entrada  $v_i(t)$ .

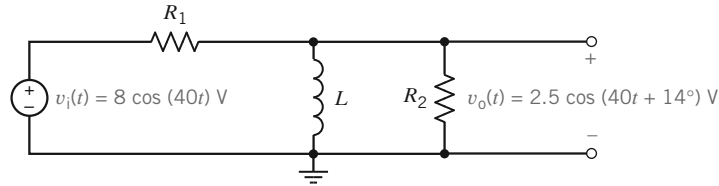


Figura PD 10.3

**PD 10.4** Muestre que no es posible diseñar el circuito que se presenta en la figura PD 10-4 para producir el voltaje de salida especificado  $v_o(t)$  cuando se proporciona con el voltaje de entrada  $v_i(t)$ .

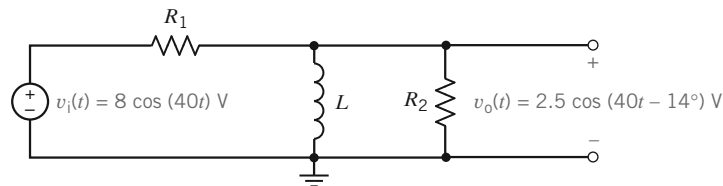


Figura PD 10-4

**PD 10.5** En la figura PD 10-5 se muestra un circuito con  $R$ ,  $L$  y  $C$  no especificados. La fuente de entrada es  $i_s = 10 \cos 1000t$  A, y el objetivo es seleccionar  $R$ ,  $L$  y  $C$  de modo que el voltaje de nodos sea  $v = 80 \cos 1000t$  V.

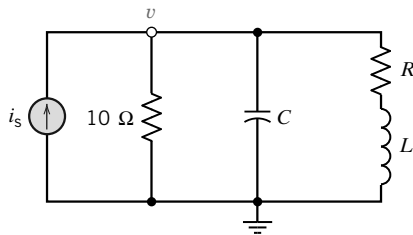


Figura PD 10.5

**PD 10.6** La entrada al circuito que se muestra en la figura PD 10-6 es el voltaje de la fuente de voltaje

$$v_s(t) = 10 \cos(1000t) \text{ V}$$

La salida es el voltaje del condensador en estado estable

$$v_o(t) = A \cos(1000t + \theta) \text{ V}$$

- Especifique valores para  $R$  y  $C$  tales que  $\theta = -30^\circ$ . Determine el valor que resulte de  $A$ .
- Especifique valores para  $R$  y  $C$  tales que  $A = 5$  V. Determine el valor que resulte de  $\theta$ .
- ¿Se pueden especificar valores para  $R$  y  $C$  tales que  $A = 4$  y  $\theta = -60^\circ$ ? (Si no, justifique su respuesta. Si es así, especifique  $R$  y  $C$ .)
- ¿Es posible especificar valores de  $R$  y  $C$  tales que  $A = 7.07$  V y  $\theta = -45^\circ$ ? (Si no, justifique su respuesta. Si es así, especifique  $R$  y  $C$ .)

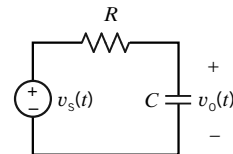


Figura PD 10-6

# Potencia de CA de estado estable

## CAPÍTULO

# 11

### EN ESTE CAPÍTULO

- |      |  |       |   |
|------|--|-------|---|
| 11.1 | Introducción                                   | 11.9  | Inductores acoplados  |
| 11.2 | Potencia eléctrica                             | 11.10 | El transformador ideal                                      |
| 11.3 | Potencia instantánea y potencia promedio       | 11.11 | ¿Cómo lo podemos comprobar...?                              |
| 11.4 | Valor efectivo de una forma de onda periódica  | 11.12 | <b>EJEMPLO DE DISEÑO</b> — Transferencia de potencia máxima |
| 11.5 | Potencia compleja                              | 11.13 | Resumen   |
| 11.6 | Factor de potencia                             |       | Problemas   |
| 11.7 | Principio de superposición de potencia         |       | Problemas de PSpice   |
| 11.8 | Teorema de la transferencia de potencia máxima |       | Problemas de diseño   |

## 11.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo continuamos nuestro estudio de circuitos de ca. En particular, veremos lo siguiente:

- La potencia alimentada o recibida por algún elemento de un circuito de ca se puede calcular de manera adecuada luego de representar el circuito en el dominio de frecuencia.  
La potencia en circuitos de ca es un tema importante. Los ingenieros han desarrollado un amplio vocabulario para describir la potencia en un circuito de ca. Encontraremos potencia promedio, potencia real y reactiva, potencia compleja, el factor de potencia, valores rcm y otros más.
- Los circuitos de ca que contienen inductores acoplados y/o transformadores ideales se pueden analizar de manera muy conveniente en el dominio de frecuencia.  
Tanto los inductores como los transformadores ideales constan de bobinas acopladas magnéticamente. (Las bobinas se pueden acoplar apretadas o en forma libre. Las bobinas de un transformador ideal están perfectamente acopladas.) Después de representar inductores y transformadores en el dominio de frecuencia, tendremos la capacidad para analizar circuitos de ca que contengan estos dispositivos.

## 11.2 POTENCIA ELÉCTRICA

El progreso de la civilización humana se ha intensificado por la habilidad de la sociedad para controlar y distribuir la energía. La electricidad sirve como un vehículo de energía al usuario. La energía presente en un combustible fósil o un combustible nuclear se convierte en energía eléctrica para ser transportada y distribuida fácilmente a sus consumidores. Por medio de líneas de transmisión, la potencia eléctrica se distribuye en esencia a todas las residencias, industrias y edificios comerciales en el país.

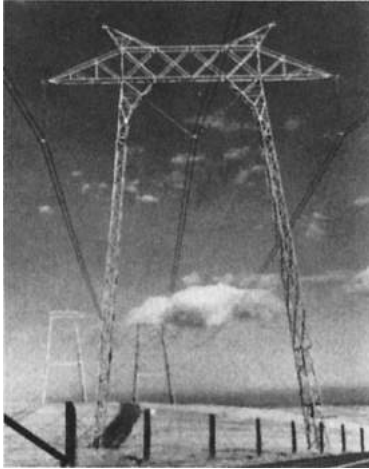


FIGURA 11.2-1 Líneas de transmisión de potencia de ca de alto voltaje. Cortesía de Pacific Gas and Electric Company.



FIGURA 11.2-2 Planta de energía eléctrica. Cortesía de Hydro Quebec.

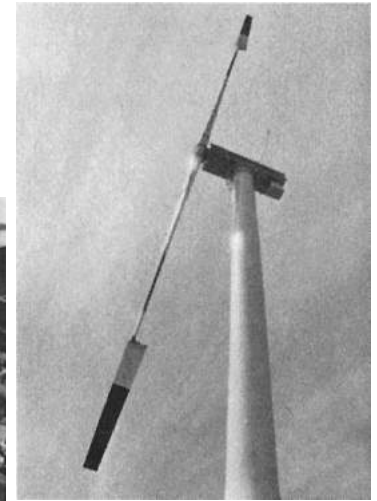


FIGURA 11.2-3 Generador y turbina de energía eólica. Cortesía de EPRI Journal.

La potencia eléctrica se puede transportar sin dificultad con poca pérdida, y en los últimos 90 años se han desarrollado métodos de mejora para el manejo seguro de la potencia eléctrica. Además, se han desarrollado de manera económica y segura métodos para convertir combustibles fósiles en energía eléctrica.

Actualmente, medios para convertir la energía solar y nuclear en potencia eléctrica están en varias etapas de desarrollo o de seguridad comprobada. La energía geotérmica, la energía de las mareas y la energía del viento también se pueden convertir en potencia eléctrica. La energía cinética de las cascadas se puede utilizar para generar potencia hidroeléctrica.

La necesidad de transmitir la potencia eléctrica a través de largas distancias impulsó el desarrollo de líneas de potencia de alto voltaje desde la planta de potencia hasta el usuario final. En la figura 11.2-1 se muestra una moderna línea de transmisión.

La generación de la energía eléctrica utiliza fuentes originales como fuerza hidroeléctrica, carbón y energía nuclear. Un ejemplo de un gran proyecto de fuerza hidroeléctrica se muestra en la figura 11.2-2. Una típica planta de fuerza hidroeléctrica puede generar 1 000 MW. Por otra parte, muchas regiones se están volviendo pequeños generadores como los dispositivos de fuerza eólica en la figura 11.2-3. Una máquina de fuerza eólica puede llegar a generar 75 kW.

Un elemento único del sistema estadounidense de energía es su interconectividad. Aun cuando el sistema de energía de Estados Unidos consiste en muchas compañías independientes, está interconectado por grandes instalaciones de transmisión. En ocasiones, una instalación eléctrica puede ahorrar dinero al comprar electricidad de otra planta y transmitir la energía a través de las líneas de transmisión de una tercera.

Los niveles de potencia para dispositivos o fenómenos eléctricos seleccionados se muestran en la figura 11.2-4.

### 11.3 POTENCIA INSTANTÁNEA Y POTENCIA PROMEDIO

Nuestro interés es determinar la potencia generada y absorbida en un circuito o en un elemento de un circuito. Los ingenieros eléctricos hablan de diversos tipos de potencia, por ejemplo, la potencia instantánea, la potencia promedio y la potencia compleja. Empezaremos por examinar la potencia instantánea, la cual es el producto del voltaje del dominio de tiempo y la corriente asociada con uno o más

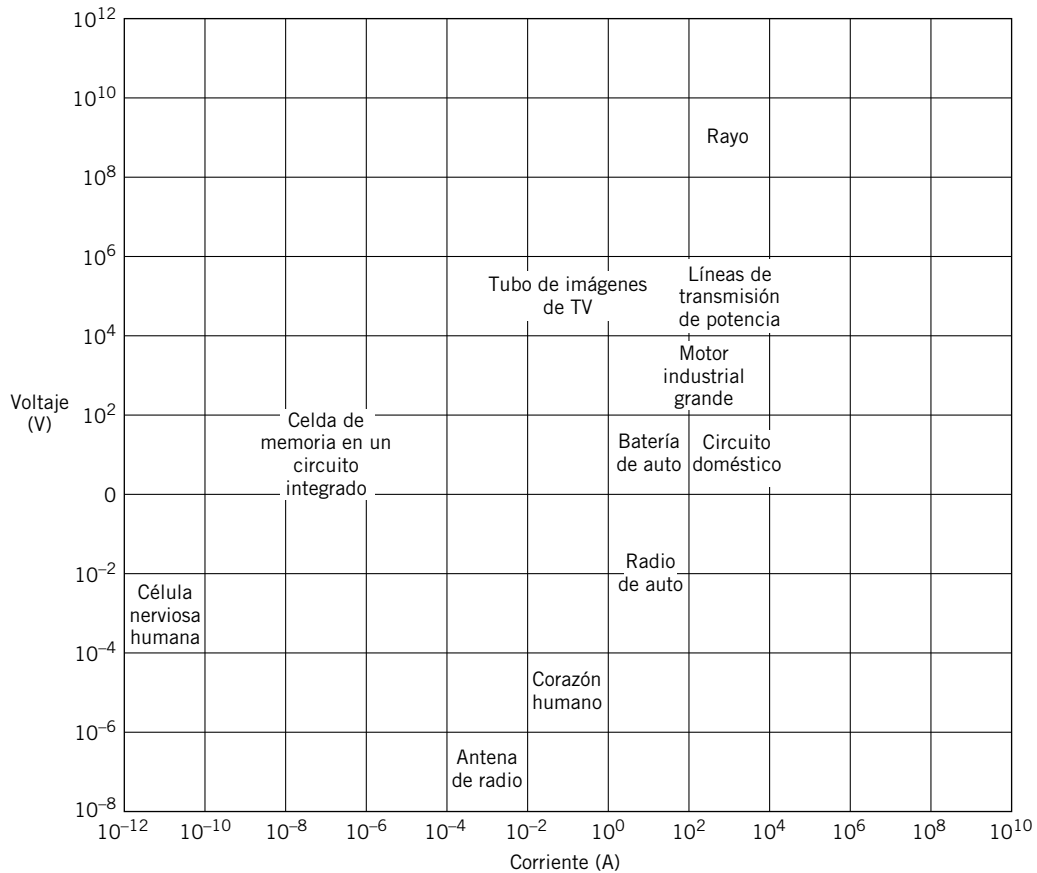


FIGURA 11.2-4 Niveles de potencia para dispositivos o fenómenos eléctricos seleccionados.

elementos del circuito. Es probable que la potencia instantánea sea una complicada función de tiempo. Esto nos mueve a buscar una medida más sencilla de la potencia generada y absorbida en un elemento de circuito, como la potencia promedio.

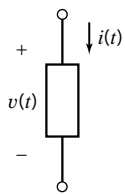


FIGURA 11.3-1  
Un elemento de circuito

Considere el elemento de circuito que se muestra en la figura 11.3-1. Observe que el voltaje  $v(t)$  del elemento y la corriente  $i(t)$  del elemento se apegan a la convención pasiva. La **potencia instantánea** transmitida a este elemento del circuito es el producto del voltaje  $v(t)$  y de la corriente  $i(t)$ , por lo que

$$p(t) = v(t) i(t) \quad (11.3-1)$$

La unidad de potencia son los watts (W). Siempre podemos calcular la potencia instantánea porque no se han puesto restricciones ni en  $v(t)$  ni en  $i(t)$ . La potencia instantánea puede llegar a ser una función algo complicada de  $t$  cuando  $v(t)$  o  $i(t)$  es en sí misma una función complicada de  $t$ .

Suponga que el voltaje  $v(t)$  es una función periódica que tiene el periodo  $T$ . Es decir,

$$v(t) = v(t + T)$$

porque el voltaje se repite cada  $T$  segundos. Entonces, para un circuito lineal, la corriente también será una función periódica que tiene el mismo periodo, por lo tanto

$$i(t) = i(t + T)$$

Por consiguiente, la potencia instantánea es

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) \\ &= v(t + T)i(t + T) \end{aligned}$$

El valor medio de una función periódica es la integral de la función de tiempo durante un periodo completo, dividido entre el periodo. Utilizamos la  $P$  mayúscula para indicar potencia promedio y

$p$  minúscula para la potencia instantánea. Por consiguiente, la potencia promedio  $P$  está dada por

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt \quad (11.3-2)$$

donde  $t_0$  es un punto de inicio arbitrario en el tiempo.

A continuación, suponga que el voltaje  $v(t)$  es senoidal, es decir,

$$v(t) = V_m(\cos \omega t + \theta_v)$$

Entonces, para un circuito lineal en estado estable, la corriente también será senoidal y tendremos la misma frecuencia, de modo que

$$i(t) = I_m(\cos \omega t + \theta_i)$$

El periodo y la frecuencia de  $v(t)$  e  $i(t)$  se relacionan por

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

La potencia instantánea transmitida al elemento es

$$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \theta_v) \cos(\omega t + \theta_i)$$

Utilizando la identidad trigonométrica (vea el apéndice C) para el producto de dos funciones de coseno,

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2} [\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)]$$

Vemos que la potencia instantánea tiene dos términos. El primer término entre corchetes es independiente del tiempo, y el segundo término varía de manera senoidal durante el tiempo en dos veces la frecuencia de radianes de  $v(t)$ .

La potencia promedio transmitida al elemento es

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_m I_m}{2} [\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)] dt$$

donde hemos elegido  $t_0 = 0$ . Entonces tenemos

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) dt \\ &= \frac{V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)}{2T} \int_0^T dt + \frac{V_m I_m}{2T} \int_0^T \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) dt \end{aligned}$$

La segunda integral es cero porque el valor medio de la función coseno durante un periodo completo es cero. Así tenemos

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (11.3-3)$$

### EJEMPLO 11.3-1 Potencia promedio

Encuentre la potencia promedio transmitida a un resistor  $R$  cuando la corriente a través del resistor es  $i(t)$ , como se muestra en la figura 11.3-2.

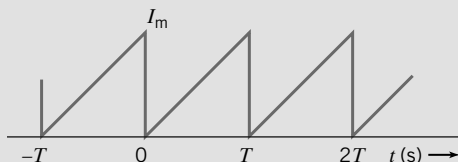


FIGURA 11.3-2 Corriente a través de un resistor en el ejemplo 11.3-1.

### Solución

La forma de onda de la corriente se repite cada  $T$  segundos y alcanza un valor máximo de  $I_m$ . Si utilizamos el periodo de  $t = 0$  a  $t = T$ , tenemos

$$i = \frac{I_m}{T} t \quad 0 \leq t < T$$

Entonces la potencia instantánea es

$$p = i^2 R = \frac{I_m^2 t^2}{T^2} R \quad 0 \leq t < T$$

Eso es suficiente para encontrar la potencia promedio durante  $0 < t < T$  porque la potencia es periódica con el periodo  $T$ . Así, la potencia promedio es

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_m^2 R}{T^2} t^2 dt$$

Al hacer la integración tenemos

$$P = \frac{I_m^2 R}{T^3} \int_0^T t^2 dt = \frac{I_m^2 R}{T^3} \frac{T^3}{3} = \frac{I_m^2 R}{3} \text{ W}$$

### EJEMPLO 11.3-2 Potencia promedio

El circuito que se muestra en la figura 11.3-3 se encuentra en estado estable. La corriente de enlaces es

$$i(t) = 721 \cos(100t - 41^\circ) \text{ mA}$$

Los voltajes de los elementos son

$$v_s(t) = 20 \cos(100t - 15^\circ) \text{ V}$$

$$v_R(t) = 18 \cos(100t - 41^\circ) \text{ V}$$

$$v_L(t) = 8.66 \cos(100t + 49^\circ) \text{ V}$$

Encuentre la potencia promedio *transmitida* a cada dispositivo en este circuito.

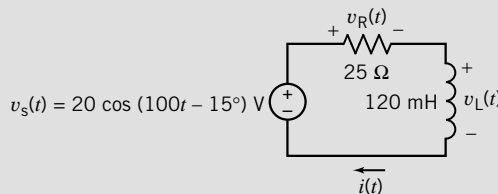


FIGURA 11.3-3 Circuito RL con una fuente de voltaje senoidal.

### Solución

Observe que  $v_s(t)$  e  $i(t)$  no se apegan a la convención pasiva. De este modo,  $v_s(t) i(t)$  es la potencia *transmitida por* la fuente de voltaje. Por consiguiente, la potencia promedio calculada utilizando la ecuación 11.3-3 es la potencia promedio *transmitida por* la fuente de voltaje. La potencia promedio *transmitida por* la fuente de voltaje es

$$P_s = \frac{(20)(0.721)}{2} \cos(-15^\circ - (-41^\circ)) = 6.5 \text{ W}$$

La potencia promedio *transmitida* a la fuente de voltaje es  $-6.5 \text{ W}$ .

Dado que  $v_R(t)$  e  $i(t)$  se apegan a la convención pasiva, la potencia promedio calculada utilizando la ecuación 11.3-3 es la potencia promedio *transmitida al resistor*. La potencia *transmitida al resistor* es

$$P_R = \frac{(18)(0.721)}{2} \cos(-41^\circ - (-41^\circ)) = 6.5 \text{ W}$$

La potencia *transmitida al inductor* es

$$P_L = \frac{(8.66)(0.721)}{2} \cos(49^\circ - (-41^\circ)) = 0 \text{ W}$$

¿Por qué la potencia transmitida al inductor es igual a cero? El ángulo del voltaje del elemento es  $90^\circ$  más grande que el ángulo de la corriente del elemento. Dado que  $\cos(90^\circ) = 0$ , la potencia promedio transmitida al inductor es cero. El ángulo del voltaje del inductor siempre será  $90^\circ$  más grande que el ángulo de la corriente del inductor. Por lo tanto, la potencia promedio transmitida a cualquier inductor es cero.

**EJERCICIO 11.3-1** Determine la potencia instantánea transmitida a un elemento y bosqueje  $p(t)$  cuando el elemento es (a) una resistencia  $R$  y (b) un inductor  $L$ . El voltaje a través del elemento es  $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \text{ V}$ .

*Respuestas:*

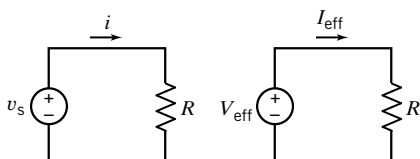
$$(a) P_R = \frac{V_m^2}{2R} [1 + \cos(2\omega t + 2\theta)] \text{ W}$$

$$(b) P_L = \frac{V_m^2}{2\omega L} \cos(2\omega t + 2\theta - 90^\circ) \text{ W}$$

## 11.4 VALOR EFECTIVO DE UNA FORMA DE ONDA PERIÓDICA

Se dice que el voltaje disponible para un enchufe de pared en una residencia debe ser de 110 V. Desde luego, éste no es el valor medio del voltaje senoidal porque sabemos que el voltaje debería ser cero. Tampoco es el valor instantáneo o el valor máximo,  $V_m$ , del voltaje  $v = V_m \cos \omega t$ .

El valor efectivo de un voltaje es una medida de su efectividad al transmitir potencia a un resistor de carga. El concepto de un *valor efectivo* viene desde un deseo de contar con un voltaje (o corriente) senoidal. El objetivo es encontrar un  $V_{\text{eff}}$  (o  $I_{\text{eff}}$ ) de cd que transmita la misma potencia promedio al resistor como la debiera transmitir una fuente variable de manera periódica, como se muestra en la figura 11.4-1.



**FIGURA 11.4-1** El objetivo es encontrar un voltaje de cd,  $V_{\text{eff}}$ , para un  $v_s(t)$  específico que transmita la misma potencia promedio a  $R$  como la debiera transmitir la fuente de cd.



La potencia promedio transmitida al resistor  $R$  por una corriente periódica es

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt \quad (11.4-1)$$

Seleccionamos el periodo,  $T$ , de la corriente periódica como el intervalo de integración.

La potencia transmitida por una corriente directa es

$$P = I_{\text{eff}}^2 R \quad (11.4-2)$$

Donde  $I_{\text{eff}}$  es la corriente de cd que transmitirá la misma potencia que la corriente variable de manera periódica. Es decir,  $I_{\text{eff}}$  está definida como la corriente estable (constante) que es tan *efectiva* al transmitir potencia como la corriente variable de manera periódica.

Igualamos las ecuaciones 11.4-1 y 11.4-2 y obtenemos

$$I_{\text{eff}}^2 R = \frac{R}{T} \int_0^T i^2 dt$$

Despejando  $I_{\text{eff}}$  tenemos

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (11.4-3)$$

Vemos que  $I_{\text{eff}}$  es la raíz cuadrada de la media del valor al cuadrado. Entonces, la corriente efectiva  $I_{\text{eff}}$  se suele denominar corriente de la raíz cuadrada de la media  $I_{\text{rms}}$ .

El **valor efectivo** de una corriente es la corriente estable (cd) que transfiere la misma potencia promedio que la corriente variable dada.

Desde luego, el valor efectivo del voltaje en un circuito se encuentra de la misma manera a partir de la ecuación

$$V_{\text{eff}}^2 = V_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T v^2 dt$$

Por lo tanto

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2 dt}$$

Ahora encontremos la  $I_{\text{rms}}$  de una corriente variable senoidal  $i = I_m \cos \omega t$ . Utilizando la ecuación 11.4-3 y una fórmula trigonométrica del apéndice C, tenemos

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (11.4-4)$$

porque la integral de  $\cos 2\omega t$  es cero durante el periodo  $T$ . Recuerde que la ecuación 11.4-4 es verdadera sólo para las corrientes senoidales.

En la práctica, debemos ser cuidadosos al determinar si un voltaje senoidal está expresado en términos de su valor efectivo o de su valor máximo  $I_m$ . En el caso de transmisión de potencia y su uso en el hogar, se supone que el voltaje debe ser de 110 o de 220 V, y se entiende que estos valores se refieren a la rms o a los valores efectivos del voltaje senoidal.

En electrónica o circuitos de comunicaciones, el voltaje podría describirse como 10 V, y por lo común se hace la indicación de la amplitud máxima o pico,  $V_m$ . En lo sucesivo utilizaremos  $V_m$  como el valor pico y  $V_{\text{rms}}$  como el valor rms. En ocasiones será necesario distinguir  $V_{\text{rms}}$  de  $V_m$  por el contexto en que se dé el voltaje.

**EJEMPLO 11.4-1** Valor efectivo

Encuentre el valor efectivo de la corriente para la forma de onda dentada que se muestra en la figura 11.4-2

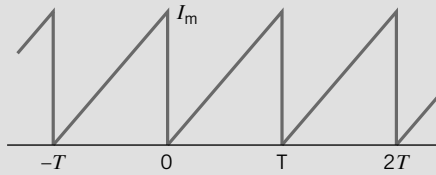


FIGURA 11.4-2 Forma de onda dentada de corriente.

**Solución**

Primero, expresaremos la forma de onda de la corriente durante el periodo  $0 \leq t < T$ . Entonces, la corriente es

$$i = \frac{I_m}{T} t \quad 0 \leq t < T$$

El valor efectivo se encuentra a partir de

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_m^2}{T^2} t^2 dt = \frac{I_m^2}{T^3} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^T = \frac{I_m^2}{3}$$

Por consiguiente, despejando  $I_{\text{eff}}$  tenemos

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{3}}$$

Es importante tener en cuenta que el valor rcm de una forma de onda dentada con amplitud  $I_m$  es diferente del valor rcm de una forma de onda senoidal que tenga amplitud  $I_m$ .

**EJERCICIO 11.4-1** Encuentre el valor efectivo de las corrientes siguientes: (a)  $\cos 3t + \cos 3t$ ; (b)  $\text{seno } 3t + \cos(3t + 60^\circ)$ ; (c)  $2 \cos 3t + 3 \cos 5t$ .

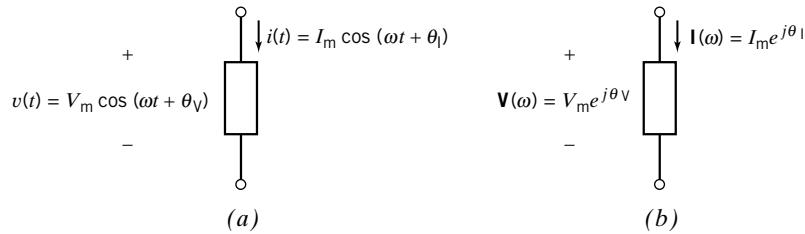
**Respuesta:** (a)  $\sqrt{2}$  (b) 0.366 (c) 2.55

**11.5 POTENCIA COMPLEJA**

Suponga que un circuito lineal con una entrada senoidal se encuentra en estado estable. Todos los voltajes y corrientes de los elementos serán senoidales, con la misma frecuencia que la entrada. Un circuito tal se puede analizar en el dominio de frecuencia utilizando fasores. En verdad, podemos calcular la potencia generada o absorbida en un circuito o en un elemento de un circuito, en el dominio de frecuencia, utilizando fasores.

La figura 11.5-1 representa el voltaje y la corriente de un elemento en el dominio de tiempo y en el dominio de frecuencia. Observe que la corriente y el voltaje del elemento se apegan a la convención pasiva. En una sección anterior, la potencia instantánea y la potencia promedio se calculaban a partir de las representaciones del dominio de tiempo de la corriente y el voltaje del elemento,  $v(t)$  o  $i(t)$ . Por el contrario, ahora volvemos nuestra atención a las representaciones del dominio de frecuencia de la corriente y el voltaje del elemento

$$\mathbf{I}(\omega) = I_m \angle \theta_I \quad \text{y} \quad \mathbf{V}(\omega) = V_m \angle \theta_V \quad (11.5-1)$$



**FIGURA 11.5-1** Un circuito lineal es excitado por una entrada senoidal. El circuito ha llegado al estado estable. El voltaje y la corriente del elemento se pueden representar (a) en el dominio de tiempo o (b) en el dominio de frecuencia.

Se define que la **potencia compleja** transmitida al elemento sea

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{V}\mathbf{I}^*}{2} = \frac{(V_m \angle \theta_v)(I_m \angle -\theta_i)}{2} = \frac{V_m I_m}{2} \angle \theta_v - \theta_i \quad (11.5-2)$$

donde  $\mathbf{I}^*$  indica la conjugada compleja de  $\mathbf{I}$  (vea el apéndice B). La magnitud de  $\mathbf{S}$

$$|\mathbf{S}| = \frac{V_m I_m}{2} \quad (11.5-3)$$

se denomina **potencia aparente**.

Al convertir la potencia compleja,  $\mathbf{S}$ , de la forma polar a la rectangular, nos da

$$\mathbf{S} = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) + j \frac{V_m I_m}{2} \sin(\theta_v - \theta_i) \quad (11.5-4)$$

La parte real de  $\mathbf{S}$  es igual a la potencia promedio que calculamos antes en el dominio de tiempo! (vea la ecuación 11.3-3). Recuerde que la potencia promedio se indicaba como  $P$ . Podemos representar la potencia compleja como

$$\mathbf{S} = P + jQ \quad (11.5-5)$$

donde

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) \quad (11.5-6)$$

es la **potencia promedio** y

$$Q = \frac{V_m I_m}{2} \sin(\theta_v - \theta_i) \quad (11.5-7)$$

es la **potencia reactiva**. Potencia compleja, potencia promedio y potencia reactiva, son producto de un voltaje y una corriente. Con todo, es convencional utilizar diferentes unidades para estos tres tipos de potencia. Ya hemos visto que las unidades de la potencia promedio son los watts. Las unidades de la potencia compleja son voltios y amperios (VA), y las unidades de la potencia reactiva son voltios y amperios reactivos (VAR). Las fórmulas utilizadas para calcular la potencia en el dominio de frecuencia se resumen en la tabla 11.5-1.

Volvamos a la figura 11.5-1b. La impedancia del elemento se puede expresar como

$$\mathbf{Z}(\omega) = \frac{\mathbf{V}(\omega)}{\mathbf{I}(\omega)} = \frac{V_m \angle \theta_v}{I_m \angle \theta_i} = \frac{V_m}{I_m} \angle \theta_v - \theta_i \quad (11.5-8)$$

Convertir la impedancia,  $\mathbf{Z}$ , de forma polar a rectangular, resulta

$$\mathbf{Z}(\omega) = \frac{V_m}{I_m} \cos(\theta_v - \theta_i) + j \frac{V_m}{I_m} \sin(\theta_v - \theta_i) \quad (11.5-9)$$

Podemos representar la impedancia como

$$\mathbf{Z}(\omega) = R + jX$$

Tabla 11.5-1 Relaciones de potencia en el dominio de frecuencia

CANTIDAD	RELACIÓN UTILIZANDO VALORES PICO	RELACIÓN UTILIZANDO VALORES rms	UNIDADES
Voltaje de elemento, $v(t)$	$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$	$v(t) = V_{rms} \sqrt{2} \cos(\omega t + \theta_v)$	V
Corriente de elemento, $i(t)$	$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$	$i(t) = I_{rms} \sqrt{2} \cos(\omega t + \theta_i)$	A
Potencia compleja, $\mathbf{S}$	$\mathbf{S} = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) + j \frac{V_m I_m}{2} \sin(\theta_v - \theta_i)$	$\mathbf{S} = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i) + j V_{rms} I_{rms} \sin(\theta_v - \theta_i)$	VA
Potencia aparente, $ \mathbf{S} $	$ \mathbf{S}  = \frac{V_m I_m}{2}$	$ \mathbf{S}  = V_{rms} I_{rms}$	VA
Potencia promedio, $P$	$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i)$	$P = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i)$	W
Potencia reactiva, $Q$	$Q = \frac{V_m I_m}{2} \sin(\theta_v - \theta_i)$	$Q = V_{rms} I_{rms} \sin(\theta_v - \theta_i)$	VAR

donde  $R = \frac{V_m}{I_m}$  es la resistencia y  $X = \frac{V_m}{I_m} \sin(\theta_v - \theta_i)$  es la reactancia.

La semejanza entre las ecuaciones 11.5-4 y 11.5-9 hace suponer que la potencia compleja se puede utilizar en términos de la impedancia.

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) + j \frac{V_m I_m}{2} \sin(\theta_v - \theta_i) \\ &= \left(\frac{I_m^2}{2}\right) \frac{V_m}{I_m} \cos(\theta_v - \theta_i) + j \left(\frac{I_m^2}{2}\right) \frac{V_m}{I_m} \sin(\theta_v - \theta_i) \\ &= \left(\frac{I_m^2}{2}\right) \text{Re}(\mathbf{Z}) + j \left(\frac{I_m^2}{2}\right) I_m(\mathbf{Z}) \end{aligned} \quad (11.5-10)$$

En particular, la potencia promedio transmitida al elemento está dada por

$$P = \left(\frac{I_m^2}{2}\right) \text{Re}(\mathbf{Z}) \quad (11.5-11)$$

Cuando el elemento es un resistor, entonces  $\text{Re}(\mathbf{Z}) = R$

$$P_R = \left(\frac{I_m^2}{2}\right) R$$

Cuando el elemento es un condensador o un inductor, entonces  $\text{Re}(\mathbf{Z}) = 0$ ; por lo tanto, la potencia promedio transmitida a un condensador o un inductor es cero.

La figura 11.5-2 resume las ecuaciones 11.5-4 y 11.5-9 utilizando (a) el triángulo de impedancia y (b) el triángulo de potencia.

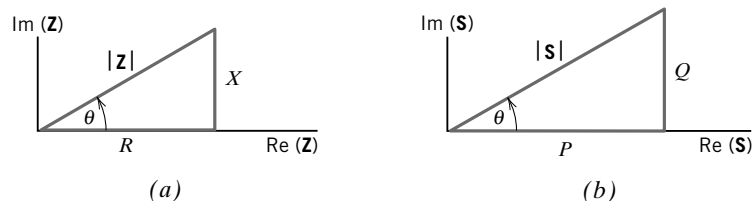


FIGURA 11.5-2 (a) El triángulo de impedancia cuando  $\mathbf{Z} = R + jX = Z$ . (b) El triángulo de potencia compleja en el que  $\mathbf{S} = P + jQ$ .

**EJEMPLO 11.5-1** Potencia compleja

El circuito que se muestra en la figura 11.5-3 consta de una fuente que conduce una carga. La corriente de la fuente de corriente es

$$i(t) = 1.25 \cos(5t - 15^\circ) \text{ A}$$

- (a) ¿Cuál es el valor de la potencia compleja transmitida por la fuente a la carga cuando  $R = 20 \Omega$  y  $L = 3 \text{ H}$ ?
- (b) ¿Cuáles son los valores de la resistencia,  $R$ , y la inductancia,  $L$ , cuando la fuente transmite  $11.72 + j11.72 \text{ VA}$  a la carga?

**Solución**

Represente el circuito en el dominio de frecuencia como se muestra en la figura 11.5-4, donde  $\mathbf{I} = 1.25 \angle -15^\circ \text{ A}$ . La impedancia equivalente al resistor y al inductor en paralelo es

$$\mathbf{Z} = \frac{j\omega LR}{R + j\omega L}$$

- (a) Cuando  $R = 20 \Omega$  y  $L = 3 \text{ H}$ , la impedancia equivalente es

$$\mathbf{Z} = \frac{j300}{20 + j15} = 12 \angle 53^\circ \Omega$$

El voltaje a través de esta impedancia es

$$\mathbf{V} = \mathbf{IZ} = (1.25 \angle -15^\circ)(12 \angle 53^\circ) = 15 \angle 38^\circ \text{ V}$$

La potencia compleja transmitida por la fuente es

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{VI}^*}{2} = \frac{(15 \angle 38^\circ)(1.25 \angle -15^\circ)^*}{2} = \frac{(15 \angle 38^\circ)(1.25 \angle 15^\circ)}{2} = 9.375 \angle 53^\circ \text{ VA}$$

- (b) El voltaje a través de la impedancia equivalente se puede calcular a partir de la potencia compleja y la corriente, utilizando

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{VI}^*}{2} \Rightarrow \mathbf{V} = \frac{2\mathbf{S}}{\mathbf{I}^*}$$

Cuando  $\mathbf{S} = 11.72 + j11.72 = 16.57 \angle 45^\circ \text{ VA}$

$$\mathbf{V} = \frac{2\mathbf{S}}{\mathbf{I}^*} = \frac{2(16.57 \angle 45^\circ)}{(1.25 \angle -15^\circ)^*} = \frac{2(16.57 \angle 45^\circ)}{1.25 \angle 15^\circ} = 26.52 \angle 30^\circ \text{ V}$$

La impedancia equivalente es

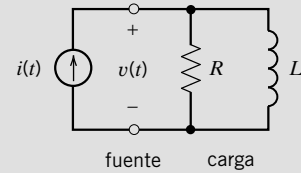
$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{26.52 \angle 30^\circ}{1.25 \angle -15^\circ} = 21.21 \angle 45^\circ \Omega$$

Es conveniente tomar la recíproca:

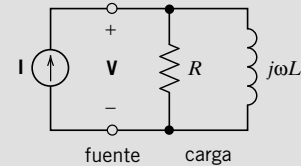
$$\frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L} = \frac{1}{21.21 \angle 45^\circ} = 0.033338 - j0.033338$$

En consecuencia,

$$R = \frac{1}{0.033338} = 30 \Omega \quad \text{y} \quad 5L = \frac{1}{0.033338} = 30 \Rightarrow L = 6 \text{ H}$$



**FIGURA 11.5-3** Circuito que consta de un fuente que conduce una carga.



**FIGURA 11.5-4** El circuito de la figura 11.5-3, representado en el dominio de frecuencia.

**EJEMPLO 11.5-2** Cargas en paralelo

El circuito que se muestra en la figura 11.5-5 consta de una fuente que conduce una carga consistente en la conexión en paralelo de dos cargas. El voltaje de la fuente de voltaje es

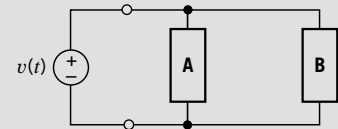
$$v(t) = 24 \cos(5t + 30^\circ) \text{ V}$$

La carga A recibe

$$S_A = 9.216 + j6.912 \text{ VA}$$

La impedancia de la carga B es

$$Z_B = 42.426 \angle 45^\circ \text{ VA}$$



**FIGURA 11.5-5** Circuito que consta de una fuente que conduce una carga en paralelo.

- (a) Determine el valor de la potencia compleja transmitida por la fuente a la carga en paralelo.  
 (b) Determine el valor de la impedancia equivalente de la carga en paralelo.

**Solución**

Represente el circuito en el dominio de frecuencia como se muestra en la figura 11.5-6, donde  $V = 24 \angle 30^\circ \text{ V}$ . La corriente en la carga A se puede calcular a partir de la potencia compleja recibida por la carga A, utilizando

$$S_A = \frac{VI_1^*}{2} \Rightarrow I_1 = \left( \frac{2S_A}{V} \right)^*$$

Cuando  $S_A = 9.216 + j6.912 = 11.52 \angle 36.9^\circ \text{ VA}$

$$I_1 = \left( \frac{2(11.52 \angle 36.9^\circ)}{24 \angle 30^\circ} \right)^* = (0.96 \angle 7^\circ)^* = 0.96 \angle -7^\circ \text{ A}$$

La corriente en la carga B se puede calcular como

$$I_2 = \frac{V}{Z_B} = \frac{24 \angle 30^\circ}{42.426 \angle 45^\circ} = 0.566 \angle -15^\circ \text{ A}$$

La fuente de corriente es

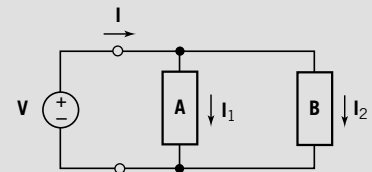
$$I = I_1 + I_2 = 1.522 \angle -9.9^\circ \text{ A}$$

- (a) La potencia compleja transmitida por la fuente es

$$S = \frac{VI^*}{2} = \frac{(24 \angle 30^\circ)(1.522 \angle -9.9^\circ)^*}{2} = 18.265 \angle 39.9^\circ = 14.02 + j11.71 \text{ VA}$$

- (b) La impedancia equivalente de la carga en paralelo es

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{24 \angle 30^\circ}{1.522 \angle -9.9^\circ} = 15.768 \angle 39.9^\circ \Omega$$



**FIGURA 11.5-6** El circuito a partir de la figura 11.5-5, representado en el dominio de frecuencia.

La potencia compleja se conservó. La suma de la potencia compleja recibida por todos los elementos de un circuito es cero. Este hecho se puede expresar por la ecuación

$$\sum_{\text{todos los elementos}} \frac{V_k I_k^*}{2} = 0 \quad (11.5-12)$$

donde  $\mathbf{V}_k$  e  $\mathbf{I}_k$  son los fasores que corresponden al voltaje y la corriente del elemento del  $k$ -ésimo elemento del circuito. Los fasores  $\mathbf{V}_k$  e  $\mathbf{I}_k$  se deben apegar a la convención pasiva de modo que  $\mathbf{V}_k \mathbf{I}_k^*/2$  sea la potencia compleja *recibida* por la  $k$ -ésima extensión. La suma en la ecuación 11.5-12 agrega las potencias complejas de todos los elementos del circuito. Cuando un elemento del circuito es una fuente que está alimentando la potencia del circuito,  $\mathbf{V}_k \mathbf{I}_k^*/2$  será negativa, indicando que la potencia compleja positiva está siendo alimentada en vez de recibida. En ocasiones la conservación de la potencia compleja se expresa como

$$\sum_{\text{fuentes}} \frac{\mathbf{V}_k \mathbf{I}_k^*}{2} = \sum_{\text{demás elementos}} \frac{\mathbf{V}_k \mathbf{I}_k^*}{2} \quad (11.5-13)$$

donde los fasores  $\mathbf{V}_k$  e  $\mathbf{I}_k$  se apegan a la convención pasiva para los “demás elementos” pero no se apegan a la convención pasiva para las fuentes. Cuando  $\mathbf{V}_k$  e  $\mathbf{I}_k$  no se apegan a la convención pasiva, entonces  $\mathbf{V}_k \mathbf{I}_k^*/2$  es la potencia compleja *transmitida* por la  $k$ -ésima extensión. Leemos la ecuación 11.5-13 para decir que la potencia compleja total transmitida por las fuentes es igual a la potencia compleja total recibida por los demás elementos del circuito.

La ecuación 11.5-12 implica que ambas

$$\sum_{\text{todos los elementos}} \operatorname{Re} \left( \frac{\mathbf{V}_k \mathbf{I}_k^*}{2} \right) = 0$$

y

$$\sum_{\text{todos los elementos}} \operatorname{Im} \left( \frac{\mathbf{V}_k \mathbf{I}_k^*}{2} \right) = 0$$

Por consiguiente,

$$\sum_{\text{todos los elementos}} P_k = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{\text{todos los elementos}} Q_k = 0$$

En otras palabras, la potencia promedio y la potencia reactiva se han conservado.

### EJEMPLO 11.5-3 Conservación de la potencia compleja

Compruebe que la potencia compleja se conserva en el circuito de la figura 11.5-7 cuando  $v_s = 100 \cos 1000t$  V.

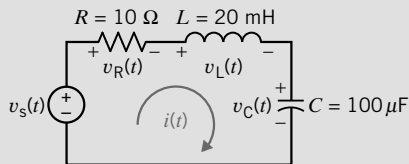


FIGURA 11.5-7 Circuito para los ejemplos 11.5-3 y 11.5-4.

#### Solución

El fasor que corresponde al voltaje de la fuente es

$$\mathbf{V}_s(\omega) = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$$

Si escribimos y despejamos una ecuación de enlaces, encontramos que el fasor que corresponde a la corriente de enlaces es

$$\mathbf{I}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_f(\omega)}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{100}{10 + j(1000)(0.02) - j\frac{1}{(1000)10^4}} = 7.07 \angle -45^\circ \text{ A}$$

La ley de Ohm proporciona los fasores correspondientes a los voltajes de los elementos:

$$\mathbf{V}_R(\omega) = R \mathbf{I}(\omega) = 10(7.07 \angle -45^\circ) = 70.7 \angle -45^\circ \text{ V}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_L(\omega) &= j\omega L \mathbf{I}(\omega) = j(1\,000)(0.02)(7.07 \angle 45^\circ) \\ &= (20 \angle 90^\circ)(7.07 \angle -45^\circ) = 141.4 \angle 45^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_C(\omega) &= -j \frac{1}{\omega C} \mathbf{I}(\omega) = -j \frac{1}{(1\,000)(10^{-4})} (7.07 \angle -45^\circ) \\ &= (10 \angle 90^\circ)(7.07 \angle -45^\circ) = 70.7 \angle -135^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Considere la fuente de voltaje. Los fasores  $\mathbf{V}_s$  e  $\mathbf{I}$  no se apegan a la convención pasiva. La potencia compleja

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_V &= \frac{\mathbf{V}_s \mathbf{I}^*}{2} = \frac{100(7.07 \angle -45^\circ)^*}{2} = \frac{100(7.07 \angle 45^\circ)}{2} \\ &= \frac{100(7.07)}{2} \angle 45^\circ = 353.5 \angle 45^\circ \text{ VA} \end{aligned}$$

es la potencia compleja transmitida por la fuente de voltaje.

Los fasores  $\mathbf{I}$  y  $\mathbf{V}_R$  se apegan a la convención pasiva. La potencia compleja

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_R &= \frac{\mathbf{V}_R \mathbf{I}^*}{2} = \frac{(70.7 \angle -45^\circ)(7.07 \angle -45^\circ)^*}{2} \\ &= \frac{(70.7 \angle -45^\circ)(7.07 \angle 45^\circ)}{2} = \frac{(70.7)(7.07)}{2} \angle -45^\circ + 45^\circ = 250 \angle 0^\circ \text{ VA} \end{aligned}$$

es la potencia compleja absorbida por el resistor. Del mismo modo,

$$\mathbf{S}_L = \frac{\mathbf{V}_L \mathbf{I}^*}{2} = \frac{(141.4 \angle 45^\circ)(7.07 \angle 45^\circ)^*}{2} = \frac{(141.4)(7.07)}{2} \angle 45^\circ + 45^\circ = 500 \angle 90^\circ \text{ VA}$$

es la potencia compleja transmitida al inductor, y

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_C &= \frac{\mathbf{V}_C \mathbf{I}^*}{2} = \frac{(70.7 \angle -135^\circ)(7.07 \angle 45^\circ)^*}{2} = \frac{(70.7)(7.07)}{2} \angle -135^\circ + 45^\circ \\ &= 250 \angle -90^\circ \text{ VA} \end{aligned}$$

es la potencia compleja transmitida al condensador.

Para comprobar que la potencia compleja se ha conservado, calculamos la potencia compleja recibida por los “demás elementos” y la comparamos con la potencia máxima alimentada por la fuente:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_R + \mathbf{S}_L + \mathbf{S}_C &= 250 \angle 0^\circ + 500 \angle 90^\circ + 250 \angle -90^\circ \\ &= (250 + j0) + (0 + j500) + (0 - j250) \\ &= 250 + j250 = 353.5 \angle 45^\circ = \mathbf{S}_V \end{aligned}$$

Como se esperaba, la potencia compleja transmitida por la fuente es igual a la potencia compleja recibida por los demás elementos del circuito.



**EJEMPLO 11.5-4** Conservación de la potencia promedio

Compruebe que la potencia promedio se conserva en el circuito de la figura 11.5-7 cuando  $v_s = 100 \cos 1000t$  V.

**Solución**

El fasor que corresponde al voltaje de fuente es

$$\mathbf{V}_s(\omega) = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$$

Si escribimos y despejamos una ecuación de enlaces, encontramos que el fasor que corresponde a la corriente de enlaces es

$$\mathbf{I}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_s(\omega)}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{100}{10 + j(1000)(0.02) - j\frac{1}{(1000)10^{-4}}} = 7.07 \angle -45^\circ \text{ A}$$

La potencia promedio absorbida por el resistor, el condensador y el inductor se puede calcular utilizando

$$P = \left(\frac{I_m^2}{2}\right) \text{Re}(\mathbf{Z})$$

Como  $\text{Re}(\mathbf{Z}) = 0$  para el condensador y el inductor, la potencia promedio absorbida por cada uno de estos dispositivos es cero.  $\text{Re}(\mathbf{Z}) = R$  para el resistor, por lo tanto

$$P_R = \left(\frac{I_m^2}{2}\right) R = \frac{(7.07^2)}{2} 10 = 250 \text{ W}$$

La potencia promedio alimentada por la fuente es

$$P_V = \text{Re}(\mathbf{S}_V) = \text{Re}\left(\frac{\mathbf{V}_s \mathbf{I}^*}{2}\right) = \text{Re}\left(\frac{100(7.07) \angle 45^\circ}{2}\right) = \text{Re}(353.5 \angle 45^\circ) = 250 \text{ W}$$

Para comprobar que la potencia promedio se ha conservado, calculamos la potencia promedio recibida por los “demás elementos” y la comparamos con la potencia promedio alimentada por la fuente:

$$P_R + P_L + P_C = 250 + 0 + 0 = 250 = P_V$$

Como se esperaba, la potencia promedio alimentada por las fuentes es igual a la potencia promedio recibida por los demás elementos del circuito.

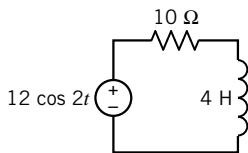


FIGURA E 11.5-1

**EJERCICIO 11.5-1** Determine la potencia promedio transmitida a cada elemento del circuito que se muestra en la figura E 11.5-1. Verifique que la potencia promedio se conserva.

*Respuesta:*  $4.39 + 0 = 4.39 \text{ W}$

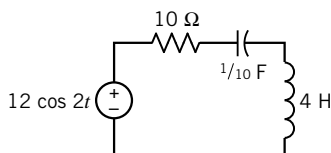


FIGURA E 11.5-2

**EJERCICIO 11.5-2** Determine la potencia promedio transmitida a cada elemento del circuito que se muestra en la figura E 11.5-2. Verifique que la potencia compleja se conserva.

*Respuesta:*  $6.606 + j5.248 - j3.303 = 6.606 + j1.982 \text{ VA}$

## 11.6 FACTOR DE POTENCIA

En esta sección, como en la anterior, consideramos un circuito lineal con una entrada sinusoidal que se encuentra en estado estable. Todos los voltajes y corrientes de los elementos serán senoidales y tendrán la misma frecuencia que la entrada. Un circuito de estas características se puede analizar en el dominio de frecuencia, utilizando fasores. En particular, podemos calcular la potencia generada o absorbida en un circuito o en cualquier elemento de un circuito, en el dominio de frecuencia, utilizando fasores e impedancias.

Recuerde que en la sección 11.5 mostramos que la potencia promedio absorbida por el elemento que se muestra en la figura 11.5-1 es

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_V - \theta_I)$$

y que la potencia aparente es

$$|S| = \frac{V_m I_m}{2}$$

La razón de la potencia promedio con la potencia aparente se denomina **factor de potencia** ( $pf$ ). El factor de potencia se calcula como

$$pf = \cos(\theta_V - \theta_I)$$

En ocasiones, el ángulo  $(\theta_V - \theta_I)$  se suele citar como *ángulo del factor de potencia*. La potencia promedio absorbida por el elemento que se muestra en el figura 11.5-1 se puede expresar como

$$P = \frac{V_m I_m}{2} pf \quad (11.6-1)$$

El coseno es una función par, es decir,  $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ . Por lo tanto,

$$pf = \cos(\theta_V - \theta_I) = \cos(\theta_I - \theta_V)$$

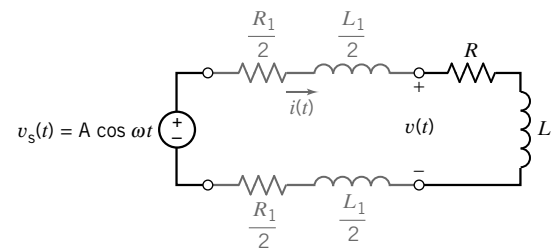
Esto ocasiona una leve dificultad. No podemos calcular  $\theta_V - \theta_I$  a partir de  $pf$  sin alguna información adicional. Por ejemplo, suponga que  $pf = 0.8$ . Calculamos

$$36.87^\circ = \cos^{-1}(0.8)$$

pero no basta para determinar  $\theta_V - \theta_I$  de manera singular. Dado que el coseno es par,  $\cos(36.87^\circ) = 0.8$  y  $\cos(-36.87^\circ) = 0.8$ , de modo que  $\theta_V - \theta_I = 36.87^\circ$  o bien  $\theta_V - \theta_I = -36.87^\circ$ . Esta dificultad se resuelve etiquetando el factor de potencia como *conduciendo* o *retardando*. Cuando  $\theta_V - \theta_I > 0$  se dice que el factor de potencia está retardando, y cuando  $\theta_V - \theta_I < 0$  se dice que el factor de potencia está conduciendo. Si el factor de potencia se especifica a que conduzca a 0.8, entonces  $\theta_V - \theta_I = -36.87^\circ$ . Por otra parte, si el factor de potencia se especifica a 0.8 de retardo, entonces  $\theta_V - \theta_I = 36.87^\circ$ .

El significado del factor de potencia se ilustra por el circuito que se muestra en la figura 11.6-1. Este circuito modela la transmisión de la potencia eléctrica desde las instalaciones de una compañía de energía hasta un consumidor. La carga del consumidor está conectada a la potencia de la planta de energía de la compañía por una línea de transmisión. Por lo común, el cliente requiere potencia a un voltaje especificado. La compañía debe alimentar la potencia utilizada por el cliente y la potencia absorbida por la línea de transmisión. La potencia absorbida por la línea es pérdida; no beneficia a nadie, y queremos minimizarla.

El circuito en la figura 11.6-2 modela la transmisión de energía eléctrica desde la planta de potencia de una compañía hasta un cliente en el dominio de frecuencia, con el uso de



Planta de energía   Línea de transmisión   Carga del cliente

**FIGURA 11.6-1** Planta de energía alimentando una carga eléctrica de un cliente. Una línea de transmisión conecta la planta de energía a las terminales del cliente.

impedancias y fasores. Nuestro objetivo es encontrar una manera de reducir la potencia absorbida por la línea de transmisión. En esta situación, es parecido a que no podemos cambiar la línea de transmisión  $R_1$  o  $j\omega L_1$ . Del mismo modo, dado que el cliente requiere una potencia promedio específica a un voltaje especificado, no podemos cambiar  $V_m$  o  $P$ . En el análisis siguiente, dejamos  $R_1$ ,  $L_1$ ,  $V_m$  y  $P$  como variables por cuestión de generalidad. No necesitaremos repetir más tarde el análisis si nos

encontramos en una situación semejante con un cliente distinto y una línea de transmisión diferente. Veremos que es posible ajustar el factor de potencia si agregamos una impedancia de compensación a la carga del cliente. Dejaremos el factor de potencia,  $pf$ , como una variable en nuestro análisis, ya que planeamos variar el factor de potencia para reducir la potencia absorbida por la carga.

La impedancia de la línea es

$$\mathbf{Z}_{\text{LÍNEA}}(\omega) = \frac{R_1}{2} + j\omega \frac{L_1}{2} + \frac{R_1}{2} + j\omega \frac{L_1}{2} = R_1 + j\omega L_1$$

La potencia promedio absorbida por la línea es

$$P_{\text{LÍNEA}} = \frac{I_m^2}{2} \text{Re}(\mathbf{Z}_{\text{LÍNEA}}) = \frac{I_m^2}{2} R_1$$

Como el cliente requiere potencia a un voltaje especificado, trataremos el voltaje a través de la carga,  $V_m$ , y la potencia promedio transmitida a la carga,  $P$ , como cantidades conocidas. Recuerde de la ecuación 11.6-1 que

$$P = \frac{V_m I_m}{2} pf$$

Despejamos  $I_m$  y nos da

$$I_m = \frac{2P}{V_m pf}$$

por lo tanto

$$P_{\text{LÍNEA}} = 2 \left( \frac{P}{V_m pf} \right)^2 R_1$$

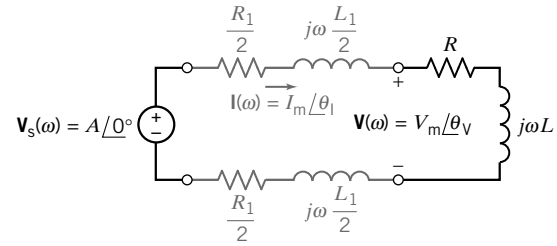
Incrementar el  $pf$  reducirá la potencia absorbida en la línea de transmisión. El factor de potencia es el coseno de un ángulo, por lo tanto su valor máximo es 1. Observe que  $pf = 1$  ocurre cuando  $\theta_V = \theta_I$ , es decir, cuando pareciera que la carga fuera resistiva.

En la figura 11.6-3a se ha agregado una impedancia de compensación a través de las terminales de la carga del cliente. El plan es utilizar esta impedancia para ajustar el factor de potencia de la carga del cliente. Como tener el factor de potencia de una carga lo más cercano posible a la unidad es una ventaja para la compañía y para el usuario, decimos que estamos *corrigiendo* el factor de potencia de la carga. Así, indicaremos como  $pf_c$  el factor de potencia corregido y el ángulo de fase que le corresponde como  $\theta_c$ . Es decir,

$$pf_c = \cos \theta_c$$

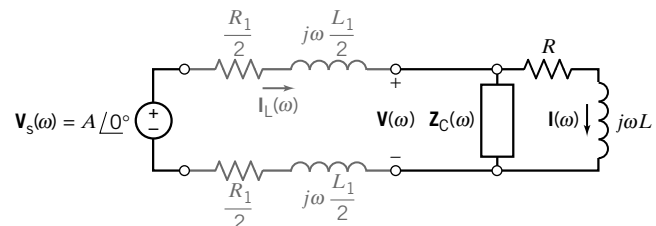
Podemos representar la impedancia de una carga como

$$\mathbf{Z} = R + jX$$



Planta de energía Línea de transmisión Carga del cliente

FIGURA 11.6-2 Representación del dominio de frecuencia de la planta de energía alimentando una carga eléctrica de un cliente.



Planta de energía Línea de transmisión Carga del cliente

FIGURA 11.6-3 Planta de energía alimentando una carga de un cliente. Se ha agregado una impedancia de compensación a la carga del cliente para corregir el factor de potencia.

Del mismo modo, podemos representar la impedancia de la impedancia de compensación como

$$\mathbf{Z}_C = R_C + jX_C$$

Puesto que  $\mathbf{Z}$  está conectada para dibujar una corriente  $\mathbf{I}$ , la potencia transmitida a  $\mathbf{Z}$  permanecerá  $P$ . El beneficio de la impedancia en paralelo es que la combinación en paralelo aparece como la carga de la fuente, e  $\mathbf{I}_L$  es la corriente que fluye a través de la línea de transmisión. Lo que queremos es que lo que absorba  $\mathbf{Z}_C$  no sea potencia promedio. Por lo tanto, elegimos un elemento reactivo de modo que

$$\mathbf{Z}_C = jX_C$$

La impedancia de la combinación en paralelo,  $\mathbf{Z}_P$ , es

$$\mathbf{Z}_P = \frac{\mathbf{Z}\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_C}$$

La impedancia en paralelo se puede escribir como

$$\mathbf{Z}_P = R_P + jX_P = Z_P \angle \theta_P$$

y el factor de potencia de la nueva combinación es

$$pfc = \cos \theta_P = \cos \left( \tan^{-1} \frac{X_P}{R_P} \right) \quad (11.6-2)$$

donde  $pfc$  es el factor de potencia corregido, y la fase corregida  $\theta_C = \theta_P$ . Se requiere algo de álgebra para calcular  $R_P$  y  $X_P$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_P &= \frac{(R + jX)jX_C}{R + jX + jX_C} \\ &= \frac{RX_C^2 + j[R^2X_C + (X_C + X)X X_C]}{R^2 + (X + X_C)^2} \\ &= \frac{RX_C^2}{R^2 + (X + X_C)^2} + j \frac{R^2X_C + (X_C + X)X X_C}{R^2 + (X + X_C)^2} \end{aligned}$$

Por consiguiente, la razón de  $X_P$  a  $R_P$  es

$$\frac{X_P}{R_P} = \frac{R^2 + (X_C + X)X}{RX_C} \quad (11.6-3)$$

La ecuación 11.6-2 se puede escribir como

$$\frac{X_P}{R_P} = \tan (\cos^{-1} pfc) \quad (11.6-4)$$

Al combinar las ecuaciones 11.6-3 y 11.6-4 y despejar  $X_C$ , tenemos

$$X_C = \frac{R^2 + X^2}{R \tan (\cos^{-1} pfc) - X} \quad (11.6-5)$$

Observamos que  $X_C$  puede ser positiva o negativa, dependiendo del  $pfc$  requerido, de la  $R$  original, y de la  $X$  de la carga. El factor  $\tan[\cos^{-1}(pfc)]$  será positivo si el  $pfc$  está especificado como de retardo y negativo si está especificado como de conducción.

Por lo común, encontraremos que la carga del cliente es inductiva, y necesitaremos una impedancia capacitiva  $\mathbf{Z}_C$ . Recuerde que para un condensador tenemos

$$\mathbf{Z}_C = \frac{-j}{\omega C} = jX_C \quad (11.6-6)$$

Tenga presente que determinamos que  $X_C$  por lo común fuera negativa. Combinar las ecuaciones 11.6-5 y 11.6-6 da

$$\frac{-1}{\omega C} = \frac{R^2 + X^2}{R \tan(\cos^{-1} pfc) - X}$$

Si despejamos  $\omega C$  nos da

$$\omega C = \frac{X - R \tan(\cos^{-1} pfc)}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} \left( \frac{X}{R} - \tan(\cos^{-1} pfc) \right)$$

Sea  $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$ . Entonces

$$\omega C = \frac{R}{R^2 + X^2} (\tan \theta - \tan \theta_C) \quad (11.6-7)$$

donde  $\theta = \cos^{-1}(fp)$  y  $\theta_C = \cos^{-1}(pfc)$ .

### EJEMPLO 11.6-1 Cargas en paralelo

La planta de un cliente tiene dos cargas en paralelo conectadas a las líneas de distribución de la planta de potencia. La primera carga consta de 50 kW de calefacción y es resistiva. La segunda carga es un conjunto de motores que funcionan a 0.86 del factor de potencia de retardo. La carga del motor es de 100 kVA. La potencia se alimenta a la planta a 10 000 voltios rms. Determine la corriente total que fluye de las líneas de la instalación en la planta y el factor de potencia de toda la planta.

#### Solución

La figura 11.6-4a resume lo que se sabe de este sistema de potencia.

Primero, considere la carga de calefacción. Como la carga es resistiva, la potencia reactiva es cero. Por consiguiente,

$$\mathbf{S}_1 = P_1 = 50 \text{ kW}$$

A continuación considere los motores. El factor de potencia es de retardo, por lo tanto  $\theta_2 > 0^\circ$ :

$$\theta_2 = \cos^{-1}(pfc) = \cos^{-1}(0.86) = 30.7^\circ$$

La potencia compleja absorbida por los motores es

$$\mathbf{S}_2 = |\mathbf{S}_2| \angle \theta_2 = 100 \angle 30.7^\circ \text{ kVA}$$

La potencia promedio y la potencia reactiva absorbida por los motores se obtiene al convertir la potencia compleja en la forma rectangular:

$$\mathbf{S}_2 = |\mathbf{S}_2| \cos \theta_2 + j|\mathbf{S}_2| \sin \theta_2 = 100 \cos 30.7^\circ + j100 \sin 30.7^\circ = 86 + j51 \text{ kVA}$$

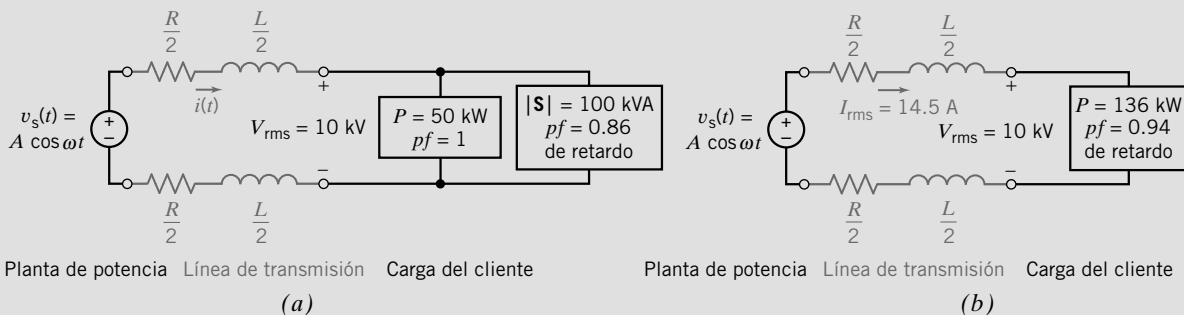


FIGURA 11.6-4 Sistema de potencia para el ejemplo 11.6-1.

Por consiguiente,

$$P_2 = 86 \text{ kW} \quad \text{y} \quad Q_2 = 51 \text{ kVAR}$$

La potencia compleja total  $\mathbf{S}$  transmitida a la carga total es la suma de la potencia compleja transmitida a cada carga:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = 50 + (86 + j51) = 136 + j51 \text{ kVA}$$

La potencia promedio y la potencia reactiva de la carga del cliente son

$$P = 136 \text{ kW} \quad \text{y} \quad Q = 51 \text{ kVAR}$$

Para calcular el factor de potencia de la carga del cliente, primero hay que convertir  $\mathbf{S}$  en forma polar

$$\mathbf{S} = 145.2 \angle 20.6^\circ \text{ kVA}$$

Entonces

$$pf = \cos(20.6^\circ) = 0.94 \text{ de retardo}$$

La corriente que fluye desde las líneas de las instalaciones a la planta se puede calcular a partir de la potencia aparente absorbida por la carga del cliente y el voltaje a través de las terminales de la carga del cliente. Recuerde que

$$|\mathbf{S}| = \frac{V_m I_m}{2} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}$$

Despejamos la corriente y nos da

$$I_{\text{rms}} = \frac{|\mathbf{S}|}{V_{\text{rms}}} = \frac{145\,200}{10^4} = 14.52 \text{ A rms}$$

La figura 11.6-4b resume los resultados de este ejemplo.

### EJEMPLO 11.6-2 Corrección del factor de potencia

Una carga como la que se muestra en la figura 11.6-5 tiene una impedancia de  $\mathbf{Z} = 100 + j100 \Omega$ . Encuentre la capacitancia en paralelo requerida para corregir el factor de potencia en (a) 0.95 con retardo y (b) 1.0. Suponga que la fuente está operando a  $\omega = 377 \text{ rad/s}$ .

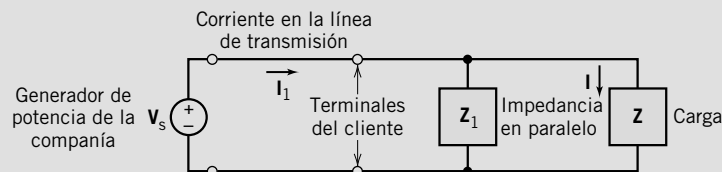


FIGURA 11.6-5 Uso de una impedancia  $\mathbf{Z}_1$  en paralelo agregada para corregir el factor de potencia del cliente.

#### Solución

El ángulo de fase de la impedancia es  $\theta = 45^\circ$ , por lo que la carga original tiene un factor de potencia de retardo con  $\cos \theta = \cos 45^\circ = 0.707$

Primero, lo que queremos es corregir el  $pf$  de modo que  $pf_c = 0.95$  con retardo. Luego, utilizamos la ecuación 11.6-5 como sigue:

$$X_C = \frac{100^2 + 100^2}{100 \tan(\cos^{-1} 0.95) - 100} = -297.9 \Omega$$

El condensador que se requiere está determinado por

$$-\frac{1}{\omega C} = X_C$$

Por consiguiente, dado que  $\omega = 377$  rad/s.

$$C = -\frac{1}{\omega X_C} = \frac{-1}{377(-297.9)} = 8.9 \mu\text{F}$$

Si nuestro deseo es corregir la carga a  $\text{pfc} = 1$ , tenemos

$$X_C = \frac{2 \times 10^4}{100 \tan(\cos^{-1} 1) - 100} = -200$$

El condensador que se requiere para corregir el factor de potencia a 1.0 está determinado por

$$C = \frac{-1}{\omega X_C} = \frac{-1}{377(-200)} = 13.3 \mu\text{F}$$

Como el factor de potencia no corregido es de retardo, podemos usar como alternativa la ecuación 11.6-7 para determinar C. Por ejemplo, se sigue que  $\text{pfc} = 1$ . Entonces  $\theta_C = 0^\circ$ . Por lo tanto,

$$\omega C = \frac{100}{2 \times 10^4} (\tan \theta - \tan \theta_C) = (5 \times 10^{-3}) (\tan(45^\circ) - \tan(0^\circ)) = 5 \times 10^{-3}$$

y

$$C = \frac{5 \times 10^{-3}}{377} = 13.3 \mu\text{F}$$

Como se esperaba, éste es el mismo valor de capacitancia que el que se calculó utilizando la ecuación 11.6-5.

### EJEMPLO 11.6-3 Potencia compleja

### EJEMPLO INTERACTIVO

La entrada al circuito que se muestra en la figura 11.6-6a es el voltaje de la fuente de voltaje

$$v_s(t) = 7.28 \cos(4t + 77^\circ) \text{ V}$$

La salida es el voltaje a través del inductor,

$$v_o(t) = 4.254 \cos(4t + 311^\circ) \text{ V}$$

Determine lo siguiente:

- La potencia promedio a por la fuente de voltaje
- La potencia promedio recibida por el resistor
- La potencia promedio recibida por el inductor
- El factor de potencia de la impedancia de la conexión en serie del resistor y el inductor

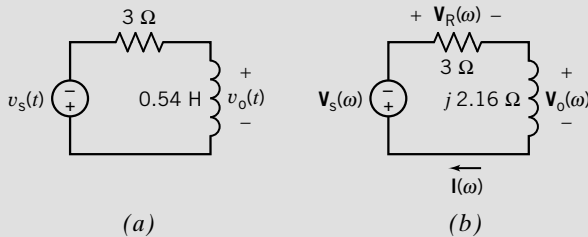


FIGURA 11.6-6 El circuito considerado en el ejemplo 11.6-3, representado (a) en el dominio de tiempo y (b) en el dominio de frecuencia.

### Solución

El voltaje de entrada es senoide. El voltaje de salida también es senoide y tiene la misma frecuencia que el voltaje de la entrada. Al parecer, el circuito ha alcanzado el estado estable. Por consiguiente, el circuito en la figura 11.6-6a se puede representar en el dominio de frecuencia utilizando fasores e impedancias. La figura 11.6-6b

muestra la representación del dominio de frecuencia del circuito de la figura 11.6-6a. La impedancia del inductor es  $j\omega L = j(4)(0.54) = j2.16 \Omega$ , como se muestra en la figura 11.6-6b.

Los fasores que corresponden a los sinusoides de entrada y salida son

$$\mathbf{V}_s(\omega) = 7.28 \angle 77^\circ \text{ V}$$

y

$$\mathbf{V}_o(\omega) = 4.254 \angle 311^\circ \text{ V}$$

La corriente  $\mathbf{I}(\omega)$  en la figura 11.6-6b se calcula a partir de  $\mathbf{V}_o(\omega)$  y la impedancia del inductor, aplicando la ley de Ohm:

$$\mathbf{I}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{j2.16} = \frac{4.254 \angle 311^\circ}{2.16 \angle 90^\circ} = \frac{4.254}{2.16} \angle 311^\circ - 90^\circ = 1.969 \angle 221^\circ \text{ A}$$

Una vez conocida  $\mathbf{I}(\omega)$ , estamos listos para responder las propuestas de este ejemplo.

- (a) La potencia promedio alimentada por la fuente de voltaje se calcula a partir de  $\mathbf{I}(\omega)$  y  $\mathbf{V}_s(\omega)$ . La potencia promedio de la fuente la da

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{V}_s(\omega)||\mathbf{I}(\omega)|}{2} \cos(\angle \mathbf{V}_s(\omega) - \angle \mathbf{I}(\omega)) &= \frac{(7.28)(1.969)}{2} \cos(77^\circ - 221^\circ) \\ &= 7.167 \cos(-144^\circ) = -5.8 \text{ W} \end{aligned} \quad (11.6-8)$$

Observe que  $\mathbf{I}(\omega)$  y  $\mathbf{V}_s(\omega)$  se apegan a la convención pasiva. En consecuencia, la ecuación 11.6-8 proporciona la potencia recibida por la fuente de voltaje en vez de la potencia alimentada por la fuente de voltaje. La potencia alimentada es lo negativo de la potencia recibida. Por lo tanto, la potencia alimentada por la fuente de voltaje es

$$P_s = 5.8 \text{ W}$$

- (b) El voltaje del resistor,  $\mathbf{V}_R(\omega)$ , en la figura 11.6-6b está dada por

$$\mathbf{V}_R(\omega) = R \mathbf{I}(\omega) = 3(1.969 \angle 221^\circ) = 5.907 \angle 221^\circ \text{ V}$$

La potencia promedio recibida por el resistor se calcula a partir de  $\mathbf{I}(\omega)$  y  $\mathbf{V}_R(\omega)$ :

$$\begin{aligned} P_R &= \frac{|\mathbf{V}_R(\omega)||\mathbf{I}(\omega)|}{2} \cos(\angle \mathbf{V}_R(\omega) - \angle \mathbf{I}(\omega)) = \frac{(5.907)(1.969)}{2} \cos(221^\circ - 221^\circ) \\ &= 5.8 \cos(0^\circ) = 5.8 \text{ W} \end{aligned} \quad (11.6-9)$$

Observe que  $\mathbf{I}(\omega)$  y  $\mathbf{V}_R(\omega)$  se apegan a la convención pasiva. En consecuencia,  $P_R$  es la potencia recibida por el resistor, como se requería.

Como alternativa, la potencia recibida por un resistor se puede calcular a partir de la corriente  $\mathbf{I}(\omega)$  y la resistencia,  $R$ . Para ver cómo, primero observe que el voltaje y la corriente de un resistor se relacionan por

$$\mathbf{V}_R(\omega) = R \mathbf{I}(\omega) \Rightarrow |\mathbf{V}_R(\omega)| \angle \mathbf{V}_R(\omega) = R(|\mathbf{I}(\omega)| \angle \mathbf{I}(\omega)) \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{V}_R(\omega)| = R|\mathbf{I}(\omega)| \\ \angle \mathbf{V}_R(\omega) = \angle \mathbf{I}(\omega) \end{cases}$$

Si sustituimos estas expresiones por  $|\mathbf{V}_R(\omega)|$  y  $\angle \mathbf{V}_R(\omega)$  en la ecuación 11.6-9 nos da

$$\begin{aligned} P_R &= \frac{R|\mathbf{I}(\omega)| |\mathbf{I}(\omega)|}{2} \cos(\angle \mathbf{I}(\omega) - \angle \mathbf{I}(\omega)) = \frac{R|\mathbf{I}(\omega)|^2}{2} \\ &= \frac{(3)(1.969)^2}{2} = 5.8 \text{ W} \end{aligned}$$

- (c) La potencia promedio recibida por el inductor se calcula a partir de  $\mathbf{I}(\omega)$  y  $\mathbf{V}_o(\omega)$ :

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{|\mathbf{V}_o(\omega)||\mathbf{I}(\omega)|}{2} \cos(\angle \mathbf{V}_o(\omega) - \angle \mathbf{I}(\omega)) = \frac{(4.254)(1.969)}{2} \cos(311^\circ - 221^\circ) \\ &= 4.188 \cos(90^\circ) = 0 \text{ W} \end{aligned} \quad (11.6-10)$$

El ángulo de fase del voltaje del inductor siempre es  $90^\circ$  más grande que el ángulo de fase de la corriente del inductor. En consecuencia, el valor de la potencia promedio recibida por cualquier inductor es cero.



- (d) El factor de potencia de la impedancia de la conexión en serie del resistor y el inductor se puede calcular a partir de  $\mathbf{I}(\omega)$  y el voltaje a través de la impedancia. Ese voltaje es  $\mathbf{V}_R(\omega) + \mathbf{V}_o(\omega)$ , el cual se calcula aplicando la ley del voltaje de Kirchhoff al circuito en la figura 11.6-6b:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_R(\omega) + \mathbf{V}_o(\omega) + \mathbf{V}_s(\omega) &= 0 \\ \mathbf{V}_R(\omega) + \mathbf{V}_o(\omega) &= -\mathbf{V}_s(\omega) = -7.28 \angle 77^\circ \\ &= (1 \angle 180^\circ)(7.28 \angle 77^\circ) \\ &= 7.28 \angle 257^\circ\end{aligned}$$

Ahora el factor de potencia se calcula como

$$pf = \cos(\angle(\mathbf{V}_R(\omega) + \mathbf{V}_o(\omega)) - \angle\mathbf{I}(\omega)) = \cos(257^\circ - 221^\circ) = 0.809$$

Se dice que el factor de potencia se está retardando porque  $257^\circ - 221^\circ = 36^\circ > 0$ .

La potencia promedio se conserva. En este ejemplo, eso quiere decir que la potencia promedio alimentada por la fuente de voltaje debe ser igual a la suma de las potencias promedio recibidas por el resistor y el inductor. Este hecho proporciona una comprobación sobre la seguridad de nuestros cálculos.

Si el valor de  $\mathbf{V}_o(\omega)$  no se ha dado, entonces  $\mathbf{I}(\omega)$  se debería calcular mediante la escritura y despeje de una ecuación de enlaces. Refiriéndonos a la figura 11.6-6b, la ecuación de enlaces es

$$3\mathbf{I}(\omega) + j2.16 \mathbf{I}(\omega) + 7.28 \angle 77^\circ = 0$$

Despejamos  $\mathbf{I}(\omega)$  y nos da

$$\begin{aligned}\mathbf{I}(\omega) &= \frac{-7.28 \angle 77^\circ}{3 + j2.16} = \frac{(1 \angle 180^\circ)(7.28 \angle 77^\circ)}{3.697 \angle 36^\circ} \\ &= \frac{(1)(7.28)}{3.697} \angle 180 + 77 - 36 = 1.969 \angle 221^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

como antes.

**EJERCICIO 11.6-1** Un circuito tiene un motor grande conectado a líneas de potencia de ca [ $\omega = (2\pi)60 = 377 \text{ rad/s}$ ]. El modelo del motor es un resistor con un inductor de 5 H. Encuentre el factor de potencia del motor.

*Respuesta:*  $pf = 0.053$  en retardo

**EJERCICIO 11.6-2** Un circuito tiene una impedancia de carga  $Z = 50 + j80 \Omega$ , como se muestra en la figura 11.6-5. Determine el factor de potencia del circuito no corregido. Determine la impedancia  $\mathbf{Z}_C$  requerida para obtener un factor de potencia de 1.0 corregido.

*Respuesta:*  $pf = 0.53$  con retardo,  $\mathbf{Z}_C = -j111.25 \Omega$

**EJERCICIO 11.6-3** Determine el factor de potencia para toda la planta del ejemplo 11.6-1 cuando la carga de calefacción resistiva ha disminuido a 30 kW. La carga del motor y la alimentación del voltaje permanecen como se describe en el ejemplo 11.6-1.

*Respuesta:*  $pf = 0.915$

**EJERCICIO 11.6-4** Una carga de 4-kW,  $110\text{-}V_{\text{rms}}$ , como se muestra en la figura 11.6-5, tiene un factor de potencia de 0.82 con retardo. Encuentre el valor del condensador en paralelo que corregirá el factor de potencia a 0.95 de retardo cuando  $\omega = 377 \text{ rad/s}$ .

*Respuesta:*  $C = 0.3224 \text{ mF}$

## 11.7 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN DE POTENCIA

En esta sección consideraremos el caso de cuando el circuito tiene dos o más fuentes. Por ejemplo, considere el circuito de la figura 11.7-1a con dos fuentes de voltaje senoidales. El principio de superposición establece que la respuesta de ambas fuentes actuando en conjunto es igual a la suma de las respuestas a cada fuente de voltaje actuando solas. La aplicación del principio de superposición se ilustra en la figura 11.7-1b, cuando  $i_1$  es la respuesta a la fuente 1 que actúa sola, y la respuesta  $i_2$  es la respuesta a la fuente 2 que actúa sola. La respuesta total es

$$i = i_1 + i_2 \quad (11.7-1)$$

La potencia instantánea es

$$p = i^2 R = R(i_1 + i_2)^2 = R(i_1^2 + i_2^2 + 2i_1 i_2)$$

donde  $R$  es la resistencia del circuito. Entonces la potencia promedio es

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{R}{T} \int_0^T (i_1^2 + i_2^2 + 2i_1 i_2) \, dt \\ &= \frac{R}{T} \int_0^T i_1^2 \, dt + \frac{R}{T} \int_0^T i_2^2 \, dt + \frac{2R}{T} \int_0^T i_1 i_2 \, dt = P_1 + P_2 + \frac{2R}{T} \int_0^T i_1 i_2 \, dt \end{aligned} \quad (11.7-2)$$

donde  $P_1$  es la potencia promedio debido a que  $v_1$  y  $P_2$  son la potencia promedio derivada de  $v_2$ . Veremos que cuando  $v_1$  y  $v_2$  son sinusoides con frecuencias diferentes, entonces

$$\frac{2R}{T} \int_0^T i_1 i_2 \, dt = 0 \quad (11.7-3)$$

Cuando se satisface la ecuación 11.7-3, la ecuación 11.7-2 se reduce a

$$P = P_1 + P_2 \quad (11.7-4)$$

Esta ecuación establece que la potencia promedio transmitida al resistor por ambas fuentes actuando en conjunto es igual a la suma de la potencia promedio transmitida al resistor por cada fuente de voltaje actuando solas. Éste es el principio de la superposición de potencia. Observe que el principio de superposición de potencia es válido sólo cuando se satisface la ecuación 11.7-3.

Ahora determinemos en qué condiciones se satisface la ecuación 11.7-3. Sea  $m\omega$  la frecuencia de radianes para la primera fuente, que la frecuencia de radianes para la segunda fuente sea  $n\omega$ . Las corrientes se pueden representar por la forma general

$$i_1 = I_1 \cos(m\omega t + \phi)$$

y

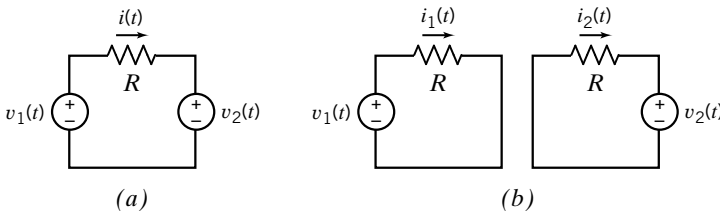
$$i_2 = I_2 \cos(n\omega t + \theta)$$

Se puede mostrar que

$$\int_0^T \cos(m\omega t + \phi) \cos(n\omega t + \theta) \, dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \cos(\phi - \theta) & m = n \end{cases}$$

En consecuencia,

$$\frac{2R}{T} \int_0^T i_1 i_2 \, dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ RI_1 I_2 \cos(\phi - \theta) & m = n \end{cases} \quad (11.7-5)$$



**FIGURA 11.7-1** (a) Un circuito con dos fuentes. (b) Utilizando la superposición para calcular la corriente del resistor como  $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ .

Por consiguiente, en resumen, la *superposición de la potencia promedio* establece que la potencia promedio transmitida a un circuito por varias fuentes senoidales, actuando en conjunto, es igual a la suma de la potencia promedio transmitida al circuito por cada fuente actuando sola. Argumentos semejantes muestran que la superposición se puede usar para calcular la potencia reactiva o la potencia compleja transmitidas a un circuito por varias fuentes senoidales, siempre que, una vez más, no haya dos fuentes que tengan la misma frecuencia.

Si dos o más fuentes están operando en la misma frecuencia, el principio de la superposición *de potencia* no es válido, pero el principio de superposición sigue siendo válido. En este caso utilizamos el principio de superposición para encontrar cada corriente de fasor y luego sumamos las corrientes para obtener el total de corrientes de fasor

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \cdots + \mathbf{I}_N$$

para  $N$  fuentes. Entonces ya tenemos la potencia promedio

$$P = \frac{I_m^2 R}{2} \quad (11.7-6)$$

donde  $|\mathbf{I}| = I_m$ .

### EJEMPLO 11.7-1 Superposición de potencia

El circuito en la figura 11.7-2 contiene dos fuentes senoidales. Para ilustrar la superposición de potencia, considere dos casos:

(1)  $v_A(t) = 12 \cos 3t \text{ V}$  y  $v_B(t) = 4 \cos 4t \text{ V}$

(2)  $v_A(t) = 12 \cos 4t \text{ V}$  y  $v_B(t) = 4 \cos 4t \text{ V}$

Encuentre la potencia promedio absorbida por el resistor de  $6\text{-}\Omega$ .

#### Solución

La aplicación del principio de superposición se ilustra en la figura 11.7-2b, donde  $i_1$  es la respuesta a la fuente de voltaje A que actúa sola, y la respuesta  $i_2$  es la respuesta a la fuente de voltaje B que actúa sola. La respuesta

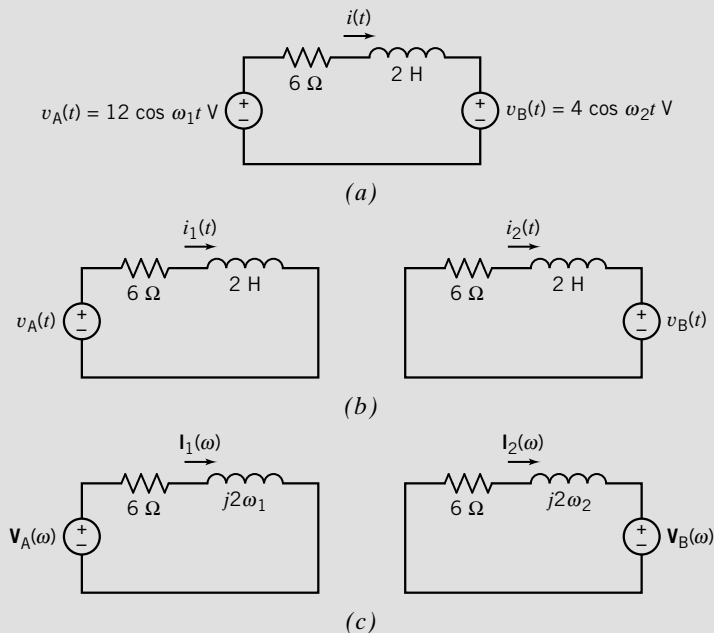


FIGURA 11.7-2 (a) Circuito con dos fuentes senoidales. (b) Uso de la superposición para encontrar la respuesta a cada fuente por separado. (c) Representación de los circuitos a partir de (b) en el dominio de frecuencia.

total es  $i = i_1 + i_2$ . En la figura 11.7-2c, los circuitos de la figura 11.7-2b están representados en el dominio de frecuencia, utilizando impedancias y fasores.

Ahora analicemos los dos casos:

**Caso 1:** El análisis de los circuitos de la figura 11.7-2c da

$$\mathbf{I}_1(\omega) = 1.414 \angle -45^\circ \text{ A} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_2(\omega) = 0.4 \angle 127^\circ \text{ A}$$

Estos fasores corresponden a frecuencias diferentes y no se pueden sumar. Las corrientes de dominio de tiempo correspondientes son

$$i_1(t) = 1.414 \cos(3t - 45^\circ) \text{ A} \quad \text{e} \quad i_2(t) = 0.4 \cos(4t - 143^\circ) \text{ A}$$

Utilizando la superposición encontramos que la corriente total en el resistor es

$$i(t) = 1.414 \cos(3t - 45^\circ) + 0.4 \cos(4t + 127^\circ) \text{ A}$$

La potencia promedio se puede calcular como

$$P = \frac{R}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{R}{T} \int_0^T (1.414 \cos(3t - 45^\circ) + 0.4 \cos(4t + 127^\circ))^2 dt$$

Como las dos fuentes senoidales tienen frecuencias diferentes, la potencia promedio se puede calcular más fácilmente utilizando la superposición de potencia:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1.414^2}{2} 6 + \frac{0.4^2}{2} 6 = 6.48 \text{ W}$$

Observe que en este caso se utilizaron la superposición y la superposición de potencia. Primero, la superposición se utilizó para calcular  $\mathbf{I}_1(\omega)$  e  $\mathbf{I}_2(\omega)$ . Luego se calculó  $P_1$  utilizando  $\mathbf{I}_1(\omega)$ , y utilizando  $\mathbf{I}_2(\omega)$  se calculó  $P_2$ . Finalmente, la superposición de potencia se utilizó para calcular  $P$  a partir de  $P_1$  y  $P_2$ .

**Caso 2:** Del análisis de los circuitos en la figura 11.7-2c resulta

$$\mathbf{I}_1(\omega) = 1.2 \angle -53^\circ \text{ A} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_2(\omega) = 0.4 \angle 127^\circ \text{ A}$$

Estos dos fasores corresponden a la misma frecuencia,  $\omega = 4 \text{ rad/s}$ . Por consiguiente, estos fasores se pueden sumar para obtener el fasor correspondientes a  $i(t)$ .

$$\mathbf{I}(\omega) = \mathbf{I}_1(\omega) + \mathbf{I}_2(\omega) = (1.2 \angle -53^\circ) + (0.4 \angle 127^\circ) = 0.8 \angle -53^\circ \text{ A}$$

La corriente senoidal que corresponde a este fasor es

$$i(t) = 0.8 \cos(4t - 53^\circ) \text{ A}$$

La potencia promedio absorbida por el resistor es

$$P = \frac{0.8^2}{2} 6 = 1.92 \text{ W}$$

Como alternativa, las corrientes en el dominio de tiempo que corresponden a  $\mathbf{I}_1(\omega)$  e  $\mathbf{I}_2(\omega)$  son

$$i_1(t) = 1.2 \cos(4t - 53^\circ) \text{ A} \quad \text{e} \quad i_2(t) = 0.4 \cos(4t + 127^\circ) \text{ A}$$

Si aplicamos la superposición, encontramos que la corriente total en el resistor es

$$i(t) = 1.2 \cos(4t - 53^\circ) + 0.4 \cos(4t + 127^\circ) = 0.8 \cos(4t - 53^\circ) \text{ A}$$

De modo que  $P = 1.92 \text{ W}$ , como antes.

La superposición de potencia no se puede utilizar en este caso porque las dos fuentes senoidales tienen la misma frecuencia.

**EJERCICIO 11.7-1** Determine la potencia promedio absorbida por el resistor en la figura 11.7-2a para estos dos casos:

(a)  $v_A(t) = 12 \cos 3t \text{ V}$  y  $v_B(t) = 4 \cos 3t \text{ V}$ ;

(b)  $v_A(t) = 12 \cos 4t \text{ V}$  y  $v_B(t) = 4 \cos 3t \text{ V}$

**Respuestas:** (a) 2.66 W (b) 4.99 W

## 11.8 TEOREMA DE LA TRANSFERENCIA DE POTENCIA MÁXIMA

En el capítulo 5 probamos que para una red resistiva una potencia máxima de una fuente se transfiere a una carga cuando la resistencia de carga se establece iguala a la resistencia de Thévenin de la fuente equivalente de Thévenin. Ahora consideremos un circuito representado por un circuito equivalente de Thévenin para un circuito senoidal de estado estable, como se muestra en la figura 11.8-1, cuando la carga es  $\mathbf{Z}_L$ .

Entonces tenemos

$$\mathbf{Z}_t = R_t + jX_t$$

y

$$\mathbf{Z}_L = R_L + jX_L$$

La potencia promedio transmitida a la carga es

$$P = \frac{I_m^2}{2} R_L$$

La corriente  $\mathbf{I}$  de fasor está dada por

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_t}{\mathbf{Z}_t + \mathbf{Z}_L} = \frac{\mathbf{V}_t}{(R_t + jX_t) + (R_L + jX_L)}$$

donde podemos seleccionar los valores de  $R_L$  y  $X_L$ . La potencia promedio transmitida a la carga es

$$P = \frac{I_m^2 R_L}{2} = \frac{|\mathbf{V}_t|^2 R_L / 2}{(R_t + R_L)^2 + (X_t + X_L)^2}$$

y queremos maximizar  $P$ . El término  $(X_t + X_L)^2$  se puede eliminar al establecer  $X_L = -X_t$ . Tenemos

$$P = \frac{|\mathbf{V}_t|^2 R_L}{2(R_t + R_L)^2}$$

El valor de  $R_L$  que maximiza  $P$  se determina al tomar la derivada  $dP/dR_L$  y establecerla igual a cero. De aquí encontramos que  $dP/dR_L = 0$  cuando  $R_L = R_t$ .

En consecuencia, tenemos

$$\mathbf{Z}_L = R_t - jX_t$$

Por lo tanto, la *transferencia de potencia máxima* de un circuito con un circuito equivalente de Thévenin con una impedancia  $\mathbf{Z}_t$  se obtiene cuando  $\mathbf{Z}_L$  se establece igual a  $\mathbf{Z}_t^*$ , la conjugada compleja de  $\mathbf{Z}_t$ .

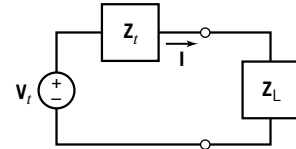


FIGURA 11.8-1 El circuito equivalente de Thévenin con una impedancia de carga.

### EJEMPLO 11.8-1 Transferencia de potencia máxima

Encuentre la impedancia de carga que transfiere la potencia máxima a la carga y determine la potencia máxima transmitida a la carga para el circuito que se muestra en la figura 11.8-2.

#### Solución

Seleccionamos la impedancia de carga,  $\mathbf{Z}_L$ , para que sea la conjugada compleja de  $\mathbf{Z}_t$  de modo que

$$\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_t^* = 5 + j6 \Omega$$

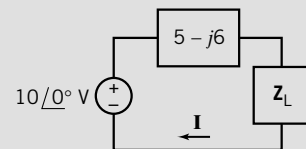


FIGURA 11.8-2 Circuito para el ejemplo 11.8-1. Las impedancias están en ohmios.

Entonces la potencia máxima transferida se puede obtener anotando que

$$\mathbf{I} = \frac{10 \angle 0^\circ}{5 + 5} = 1 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Por consiguiente, la potencia promedio transferida a la carga es

$$P = \frac{I_m^2}{2} R_L = \frac{(1)^2}{2} 5 = 2.5 \text{ W}$$

**EJERCICIO 11.8-1** Para el circuito de la figura E 11.8-1, encuentre  $\mathbf{Z}_L$  para obtener la potencia máxima transferida cuando el circuito equivalente de Thévenin tiene  $\mathbf{V}_t = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$  y  $\mathbf{Z}_t = 10 + j14 \Omega$ . Incluso, determine la potencia máxima transferida a la carga.

**Respuesta:**  $\mathbf{Z}_L = 10 - j14 \Omega$  y  $P = 125 \text{ W}$

**EJERCICIO 11.8-2** Un receptor de televisión utiliza cable para conectar la antena a la TV, como se muestra en la figura E 11.8-2, con  $v_s = 4 \cos \omega t \text{ mV}$ . La estación de TV se recibe a 52 MHz. Determine la potencia promedio transmitida a cada aparato de TV si (a) la impedancia de carga es  $\mathbf{Z} = 300 \Omega$ ; (b) dos aparatos de TV idénticos están conectados en paralelo con  $\mathbf{Z} = 300 \Omega$  para cada uno; (c) dos aparatos idénticos están conectados en paralelo y se debe seleccionar  $\mathbf{Z}$  de modo que se transmita la potencia máxima a cada aparato.

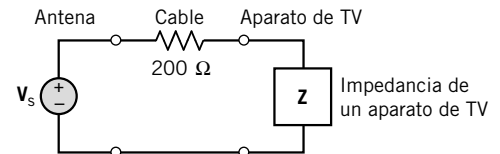


FIGURA E 11.8-2

**Respuestas:** (a) 9.6 nW; (b) 4.9 nW; (c) 5 nW

## 11.9 INDUCTORES ACOPLADOS

El concepto de autoinductancia se introdujo en el capítulo 7. Por lo común utilizamos el término *inductancia* para indicar el concepto de autoinductancia, y manejamos más los circuitos que contienen inductores. En esta sección estudiaremos los inductores acoplados, los cuales son muy útiles en circuitos con voltajes y corrientes (ca) en estado estable, e incluso se les utiliza ampliamente en circuitos electrónicos.

**Inductores acoplados**, o *bobinas acopladas*, son dispositivos magnéticos que constan de dos o más bobinas de gran devanado arrolladas en un centro común.

La figura 11.9-1a muestra las dos bobinas de cable arrollado en torno a un centro magnético. Se dice que estas bobinas deben estar acopladas magnéticamente. Un voltaje aplicado a una bobina, como se muestra en la figura 11.9-1a, genera un voltaje a través de la segunda bobina. He aquí por qué. El voltaje de entrada,  $v_1(t)$  ocasiona una corriente  $i_1(t)$  en la bobina 1. La corriente y el voltaje se relacionan por

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \quad (11.9-1)$$

donde  $L_1$  es la autoinductancia de la bobina 1. La corriente  $i_1(t)$  ocasiona un flujo en el centro magnético. Este flujo se relaciona con la corriente por

$$\phi = c_1 N_1 i_1 \quad (11.9-2)$$

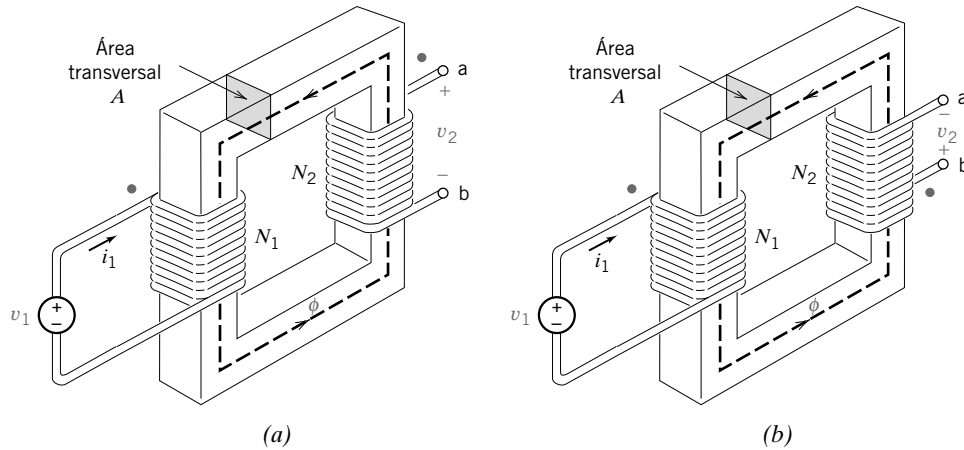


FIGURA 11.9-1 Dos bobinas acopladas magnéticamente montadas en un material magnético. El flujo  $\phi$  se contiene en el centro magnético.

donde  $c_1$  es una constante que depende de las propiedades magnéticas y geométricas del centro, y  $N_1$  es la cantidad de vueltas en la bobina 1. El número de vueltas en una bobina indica la cantidad de veces que el alambre se enrolla alrededor del centro. El flujo,  $\phi$ , se contiene en el interior del centro magnético. El centro tiene un área transversal  $A$ . El voltaje a través de la bobina 1 se relaciona con el flujo por

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} = N_1 \frac{d}{dt}(c_1 N_1 i_1) = c_1 N_1^2 \frac{di_1}{dt} \quad (11.9-3)$$

La comparación de las ecuaciones 11.9-1 y 11.9-3 muestra que

$$L_1 = c_1 N_1^2 \quad (11.9-4)$$

En las terminales de la segunda bobina,  $\phi$  induce un voltaje,  $v_2$ , el cual fluye a través de la segunda bobina. Este voltaje se relaciona con el flujo por

$$v_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt} = c_M N_1 N_2 \frac{di_1}{dt} = M \frac{di_1}{dt} \quad (11.9-5)$$

donde  $c_M$  es una constante que depende de las propiedades magnéticas y geométricas del centro,  $N_2$  es la cantidad de vueltas en la segunda bobina, y  $M = c_M N_1 N_2$  es un número positivo denominado **inductancia mutua**. La unidad de la inductancia mutua es el henry, H.

La polaridad del voltaje  $v_2$ , comparada con la polaridad de  $v_1$ , depende de la manera en que estén arrolladas las bobinas en el centro. Hay dos casos distintos, y se muestran en las figuras 11.9-1a, b. La diferencia entre estas dos figuras es la dirección en que la bobina 2 se ha arrollado en torno al centro. Se utiliza una **convención de puntos** para indicar la manera en que las bobinas se han arrollado en la bobina. Observe que un extremo de cada bobina está marcado con un punto. Cuando la dirección de referencia de la corriente de una bobina llega al extremo con punto de esa bobina, la polaridad de referencia del voltaje inducido es positiva en el extremo con punto de la otra bobina. Por ejemplo, en las figuras 11.9-1a, b, la dirección de referencia de la corriente  $i_1$  llega al extremo con punto de la bobina izquierda. En consecuencia, en las figuras 11.9-1a, b, el signo + de la polaridad de referencia de  $v_2$  se localiza en el extremo con punto de la bobina derecha.

El símbolo de circuito que se utiliza para representar inductores acoplados se muestra en la figura 11.9-2 con los puntos mostrados, y la inductancia mutua identificada como  $M$ . En la figura 11.9-2 se muestran dos casos. En la figura 11.9-2a, ambas corrientes de bobina llegan a los extremos con punto de las bobinas. En la figura 11.9-2b, una corriente,  $i_1$ , llega al extremo con punto de una bobina, pero la otra corriente,  $i_2$ , llega al extremo sin punto en la bobina. En ambos casos, las direcciones de referencia del voltaje y la corriente de cada bobina se apegan a la convención pasiva.

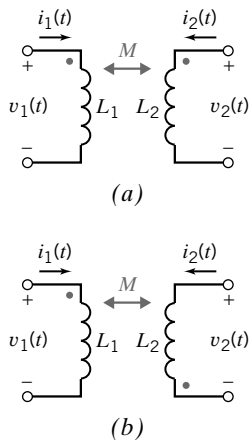


FIGURA 11.9-2 Símbolo de circuito para inductores acoplados. En (a) las dos corrientes de bobina llegan a los extremos con punto de las bobinas. En (b) una corriente de bobina llega al extremo con punto de la bobina, pero la otra corriente de bobina llega al extremo sin punto.

Suponga que las dos corrientes de bobina llegan a los extremos con punto de las bobinas, como en la figura 11.9-1a, o que las corrientes de ambas bobinas lleguen a los extremos sin punto de las bobinas. El voltaje a través de la primera bobina,  $v_1$ , se relaciona con las corrientes de bobina por

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (11.9-6)$$

Del mismo modo, el voltaje a través de la segunda bobina se relaciona con las corrientes de bobina por

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad (11.9-7)$$

Por el contrario, suponga que una corriente de bobina llega al extremo con punto de una bobina en tanto que la corriente de la otra bobina llega al extremo sin punto de una bobina, como en la figura 11.9-2b. El voltaje a través de la primera bobina,  $v_1$ , se relaciona con las corrientes de bobina por

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \quad (11.9-8)$$

Del mismo modo, el voltaje a través de la segunda bobina se relaciona con las corrientes de bobina por

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \quad (11.9-9)$$

De este modo, la inductancia mutua se puede ver que induce un voltaje en una bobina debido a la corriente en la otra bobina.

Los inductores acoplados se pueden modelar utilizando inductores (sin acoplamiento) y fuentes dependientes. La figura 11.9-3 muestra un circuito equivalente para inductores acoplados.

El uso de inductores acoplados se suele limitar a aplicaciones de no cd porque las bobinas se comportan como cortocircuitos para una corriente estable.

Suponga que los inductores acoplados son parte de un circuito lineal con una entrada senoidal y que el circuito se encuentra en estado estable. Un circuito de estas características se puede analizar en el dominio de frecuencia, utilizando fasores. Los inductores acoplados que se muestran en la figura 11.9-2a están representados por ecuaciones de fasores

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2 \quad (11.9-10)$$

y

$$\mathbf{V}_2 = j\omega L_2 \mathbf{I}_2 + j\omega M \mathbf{I}_1 \quad (11.9-11)$$

Por el contrario, los inductores acoplados que se muestran en la figura 11.9-2b están representados por ecuaciones de fasores

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 - j\omega M \mathbf{I}_2 \quad (11.9-12)$$

y

$$\mathbf{V}_2 = j\omega L_2 \mathbf{I}_2 - j\omega M \mathbf{I}_1 \quad (11.9-13)$$

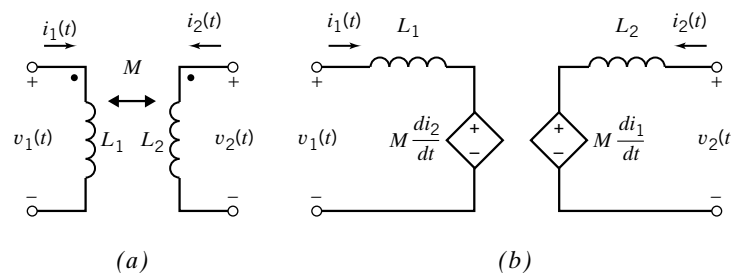


FIGURA 11.9-3 (a) Inductores acoplados y (b) un circuito equivalente.



Las inductancias,  $L_1$  y  $L_2$ , y la inductancia mutua,  $M$ , dependen de las propiedades magnéticas y geométricas del centro y de la cantidad de vueltas en las bobinas. Refiriéndonos a las ecuaciones 11.9-4 y 11.9-5, podemos escribir

$$L_1 L_2 = (c_1 N_1^2)(c_2 N_2^2) = c_1 c_2 (N_1 N_2)^2 = \left( \frac{c_M N_1 N_2}{k} \right)^2 = \frac{M^2}{k^2} \quad (11.9-14)$$

donde la constante  $k = c_M / \sqrt{c_1 c_2}$  se denomina **coeficiente de acoplamiento**. Como el coeficiente de acoplamiento depende de  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_M$ , depende de las propiedades magnéticas y geométricas del centro. Despejamos la ecuación 11.9-14 para el coeficiente de acoplamiento y nos da

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (11.9-15)$$

La potencia instantánea absorbida por los inductores acoplados es

$$\begin{aligned} p(t) &= v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) \\ &= \left( L_1 \frac{d}{dt} i_1(t) \pm M \frac{d}{dt} i_2(t) \right) i_1(t) + \left( L_2 \frac{d}{dt} i_2(t) \pm M \frac{d}{dt} i_1(t) \right) i_2(t) \\ &= L_1 i_1(t) \frac{d}{dt} i_1(t) \pm M \frac{d}{dt} (i_1(t)i_2(t)) + L_2 i_2(t) \frac{d}{dt} i_2(t) \end{aligned} \quad (11.9-16)$$

donde  $-M$  se utiliza si una corriente llega al extremo sin punto de una bobina, en tanto que la otra corriente llega al extremo con punto; de otra manera, se utiliza  $+M$ . La energía almacenada en los inductores acoplados se calcula al integrar la potencia absorbida por los inductores acoplados. La energía almacenada en los inductores acoplados es

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2 \quad (11.9-17)$$

donde, una vez más, se utiliza  $-M$  si una corriente llega al extremo sin punto de una bobina en tanto que la otra corriente llega al extremo con punto; de otra manera, se utiliza  $+M$ . Podemos utilizar esta ecuación para encontrar qué tan grande puede llegar a ser un valor  $M$  en términos de  $L_1$  y  $L_2$ . Como los inductores acoplados son un elemento pasivo, la energía almacenada debe ser mayor que o igual a cero. La cantidad limitante para  $M$  se obtiene cuando  $w = 0$  en la ecuación 11.9-17. Entonces tenemos

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - M i_1 i_2 = 0 \quad (11.9-18)$$

como la condición limitante para el caso en el que una corriente llegue a la terminal con punto y la otra corriente deje la terminal con punto. Ahora sume y reste el término  $i_1 i_2 = \sqrt{L_1 L_2}$  en la ecuación para generar un término que sea un cuadrado perfecto como sigue:

$$\left( \sqrt{\frac{L_1}{2}} i_1 - \sqrt{\frac{L_2}{2}} i_2 \right)^2 + i_1 i_2 (\sqrt{L_1 L_2} - M) = 0$$

El término de cuadrado perfecto puede ser positivo o cero. Por consiguiente, para tener  $w \geq 0$ , requerimos que

$$\sqrt{L_1 L_2} \geq M \quad (11.9-19)$$

De este modo, el valor máximo de  $M$  es  $\sqrt{L_1 L_2}$ .

Por consiguiente, el coeficiente de acoplamiento de los inductores acoplados pasivos puede no ser más grande que 1. Además, el coeficiente de acoplamiento no puede ser negativo porque  $L_1$ ,  $L_2$  y  $M$  son no negativos. Cuando  $k = 0$  no se da el acoplamiento. Por consiguiente, el coeficiente de acoplamiento debe satisfacer

$$0 \leq k \leq 1 \quad (11.9-20)$$

La mayoría de los transformadores del sistema de potencia tiene una  $k$  que se aproxima a 1, en tanto que  $k$  es baja para circuitos de radio.

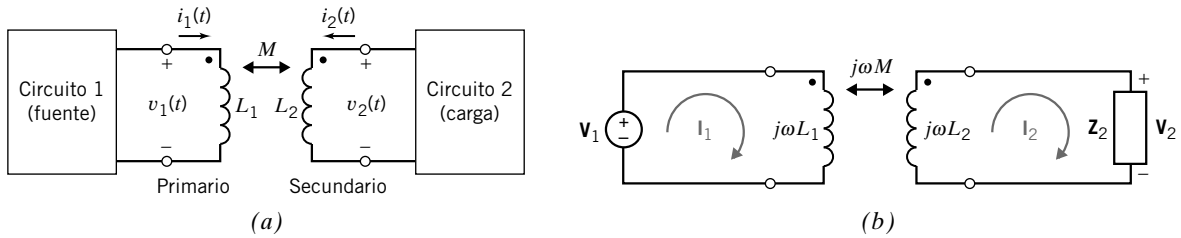


FIGURA 11.9-4 (a) Inductores acoplados utilizados como un transformador para acoplar magnéticamente dos circuitos, y (b) un transformador utilizado para acoplar magnéticamente una fuente de voltaje a una impedancia.

La figura 11.9-4a muestra inductores acoplados utilizados como un transformador para conectar una fuente a una carga. La bobina conectada a la fuente se denomina **bobina primaria**, y la bobina conectada a la carga se llama **bobina secundaria**. El circuito 2 está conectado al circuito 1 a través del acoplamiento magnético del transformador pero no es una conexión eléctrica entre estos dos circuitos. Por ejemplo, no hay una ruta para la corriente que fluye del circuito 1 al circuito 2. Además, ningún elemento del circuito está conectado entre un nodo del circuito 1 y un nodo del circuito 2.

La figura 11.9-4b muestra un ejemplo específico de la situación que se presenta en la figura 11.9-4a. La fuente es una fuente de voltaje senoidal única y la carga es una impedancia individual. El circuito se ha representado en el dominio de frecuencia, utilizando fasores e impedancias. El circuito en la figura 11.9-4b se puede analizar escribiendo ecuaciones de enlaces. Las dos ecuaciones de enlaces son

$$\begin{aligned} j\omega L_1 \mathbf{I}_1 - j\omega M \mathbf{I}_2 &= \mathbf{V}_1 \\ -j\omega M \mathbf{I}_1 + (j\omega L_2 + \mathbf{Z}_2) \mathbf{I}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Despejamos  $\mathbf{I}_2$  en términos de  $\mathbf{V}_1$ , y tenemos

$$\mathbf{I}_2 = \left[ \frac{j\omega M}{(j\omega)^2 (L_1 L_2 - M^2) + (j\omega L_1 \mathbf{Z}_2)} \right] \mathbf{V}_1 \quad (11.9-21)$$

Cuando el coeficiente de acoplamiento de los inductores acoplados es unidad, entonces  $M = \sqrt{L_1 L_2}$  y la ecuación 11.9-21 se reduce a

$$\mathbf{I}_2 = \left[ \frac{j\omega M}{j\omega L_1 \mathbf{Z}_2} \right] \mathbf{V}_1 = \left[ \frac{j\omega \sqrt{L_1 L_2}}{j\omega L_1 \mathbf{Z}_2} \right] \mathbf{V}_1 = \frac{\sqrt{L_2}}{\mathbf{Z}_2 \sqrt{L_1}} \mathbf{V}_1 \quad (11.9-22)$$

El voltaje a través de la impedancia está dado por

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{Z}_2 \mathbf{I}_2 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \mathbf{V}_1 \quad (11.9-23)$$

La razón de las inductancias se relaciona con las propiedades magnéticas y geométricas del centro y la cantidad de vueltas en las bobinas. Refiriéndonos a la ecuación 11.9-4, podemos escribir

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{c_2 N_2^2}{c_1 N_1^2}$$

Cuando ambas bobinas se han arrollado simétricamente en el mismo centro, entonces  $c_1 = c_2$ . En este caso,

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{N_2^2}{N_1^2} = n^2 \quad (11.9-24)$$

donde a  $n$  se le llama **proporción de vueltas** del transformador. La combinación de las ecuaciones 11.9-23 y 11.9-24 nos da

$$\mathbf{V}_2 = n \mathbf{V}_1 \quad (11.9-25)$$

donde  $\mathbf{V}_1$  es el voltaje a través de la bobina primaria,  $\mathbf{V}_2$  es el voltaje a través de la bobina secundaria, y  $n$  es la proporción de vueltas.

## EJEMPLO 11.9-1 Inductores acoplados

## EJEMPLO INTERACTIVO

Encuentre el voltaje  $v_2(t)$  en el circuito que se muestra en la figura 11.9-5a.

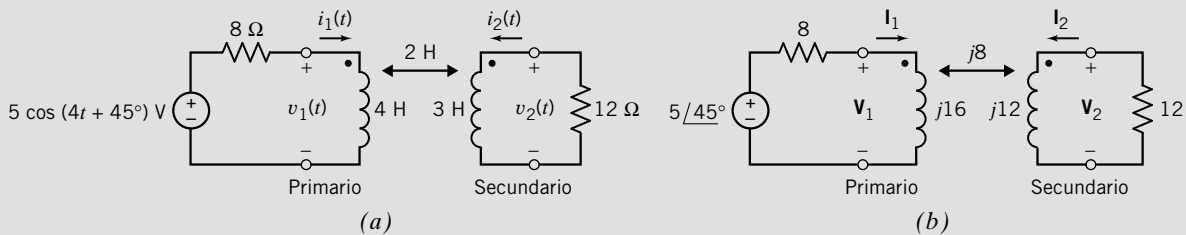


FIGURA 11.9-5 Circuito en el cual los inductores acoplados se usan como un transformador. El circuito está representado (a) en el dominio de tiempo y (b) en el dominio de frecuencia, utilizando fasores e impedancias.

## Solución

Primero, represente el circuito en el dominio de frecuencia, utilizando fasores e impedancias, como se muestra en la figura 11.9-5b. Observe que ambas corrientes de bobina,  $I_1$  e  $I_2$ , llegan al extremo con punto de las bobinas. Expresar los voltajes de bobina como funciones de las corrientes de bobina, utilizando las ecuaciones que describen los inductores acoplados, ecuaciones 11.9-10 y 11.9-11.

$$V_1 = j16 I_1 + j8 I_2$$

$$V_2 = j8 I_1 + j12 I_2$$

A continuación escribimos dos ecuaciones de enlaces

$$5 \angle 45^\circ = 8 I_1 + V_1$$

y

$$V_2 = -12 I_2$$

Sustituir las ecuaciones para los voltajes de bobina en las ecuaciones de enlaces da

$$5 \angle 45^\circ = 8 I_1 + (j16 I_1 + j8 I_2) = (8 + j16) I_1 + j8 I_2$$

y

$$j8 I_1 + j12 I_2 = -12 I_2$$

Despejar  $I_2$  resulta en

$$I_2 = 0.138 \angle -141^\circ \text{ A}$$

A continuación,  $V_2$  lo da

$$V_2 = -12 I_2 = 1.656 \angle 39^\circ \text{ V}$$

Volviendo al dominio de tiempo,

$$v_2(t) = 1.656 \cos(4t + 39^\circ) \text{ V}$$

## EJEMPLO 11.9-2 Inductores acoplados

## EJEMPLO INTERACTIVO

La entrada al circuito que se muestra en la figura 11.9-6a es el voltaje de la fuente de voltaje,

$$v_s(t) = 5.94 \cos(3t + 140^\circ) \text{ V}$$

La salida es el voltaje  $v_o(t)$  a través de la bobina de la derecha. Determine el voltaje de la salida,  $v_o(t)$ .

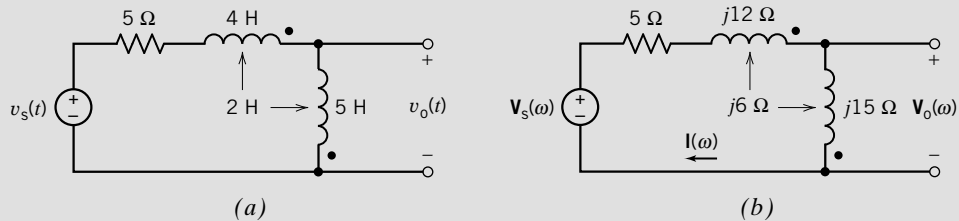


FIGURA 11.9-6 El circuito considerado en el ejemplo 11.9-2, representado (a) en el dominio de tiempo y (b) en el dominio de frecuencia.

## Solución

El voltaje de entrada es una senoide El voltaje de salida también es una senoide y tiene la misma frecuencia que el voltaje de entrada. Al parecer, el circuito se encuentra en estado estable. En consecuencia, el circuito en la figura 11.9-6a se puede representar en el dominio de frecuencia utilizando fasores e impedancias. La figura 11.96b muestra la representación en el dominio de frecuencia del circuito de la figura 11.9-6a.

El fasor correspondiente a las sinusoides de entrada es

$$\mathbf{V}_s(\omega) = 5.94 \angle 140^\circ \text{ V}$$

El circuito en la figura 11.9-6b consta de un único enlace. Observe que la corriente de enlaces,  $\mathbf{I}(\omega)$  llega a los extremos sin punto de ambas bobinas. Aplique la KVL a los enlaces para obtener

$$\begin{aligned} 5 \mathbf{I}(\omega) + (j12 \mathbf{I}(\omega) + j6 \mathbf{I}(\omega)) + (j6 \mathbf{I}(\omega) + j15 \mathbf{I}(\omega)) - 5.94 \angle 140^\circ &= 0 \\ 5 \mathbf{I}(\omega) + (j12 + j6 + j6 + j15) \mathbf{I}(\omega) - 5.94 \angle 140^\circ &= 0 \end{aligned}$$

Despejar  $\mathbf{I}(\omega)$  nos da

$$\mathbf{I}(\omega) = \frac{5.94 \angle 140^\circ}{5 + j(12 + 6 + 6 + 15)} = \frac{5.94 \angle 140^\circ}{5 + j39} = \frac{5.94 \angle 140^\circ}{39.3 \angle 83^\circ} = 0.151 \angle 57^\circ \text{ A}$$

Observe que el voltaje,  $\mathbf{V}_o(\omega)$ , a través de la bobina de la derecha y el de la corriente de enlaces,  $\mathbf{I}(\omega)$ , se apegan a la convención pasiva. El voltaje a través de la bobina de la derecha lo da

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_o(\omega) &= j15 \mathbf{I}(\omega) + j6 \mathbf{I}(\omega) = j21 \mathbf{I}(\omega) = j21(0.151 \angle 57^\circ) \\ &= (21 \angle 90^\circ)(0.151 \angle 57^\circ) \\ &= 3.17 \angle 147^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

En el dominio de tiempo, el voltaje de salida lo da

$$v_o(t) = 3.17 \cos(3t + 147^\circ) \text{ V}$$

## EJEMPLO 11.9-3 Inductores acoplados

## EJEMPLO INTERACTIVO

La entrada al circuito que se muestra en la figura 11.9-7a es el voltaje de la fuente voltaje,

$$v_s(t) = 5.94 \cos(3t + 140^\circ) \text{ V}$$

La salida es el voltaje a través de la bobina de la derecha,  $v_o(t)$ . Determine el voltaje de salida  $v_o(t)$ .

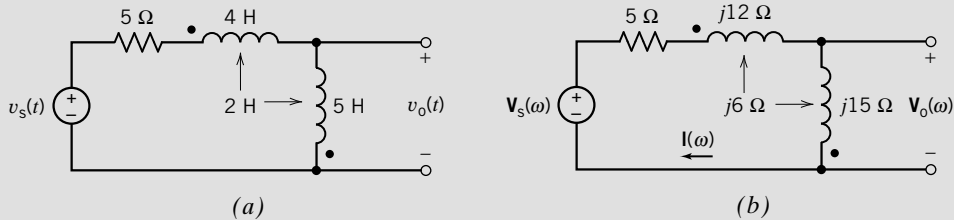


FIGURA 11.9-7 El circuito considerado en el ejemplo 11.9-3, representado (a) en el dominio de tiempo y (b) en el dominio de frecuencia.

## Solución

El circuito que se presenta en la figura 11.9-7b es muy semejante al circuito de la figura 11.9-6a. Sólo hay una diferencia: en la figura 11.9-6a el punto de la bobina izquierda está colocado a la derecha de la bobina, y a la izquierda en la figura 11.9-7a. Como en el ejemplo 11.9-2, nuestro primer paso es representar el circuito en el dominio de frecuencia, utilizando fasores e impedancias. La figura 11.9-7b muestra la representación en el dominio de frecuencia del circuito de la figura 11.9-7a.

El fasor que corresponde a la sinusoide de entrada es

$$\mathbf{V}_s(\omega) = 5.94 \angle 140^\circ \text{ V}$$

El circuito en la figura 11.9-7 consta de un enlace único. Observe que la corriente de enlaces,  $\mathbf{I}(\omega)$ , llega al extremo con punto de la bobina izquierda y al extremo sin punto de la bobina derecha. Aplique la KVL al enlace para obtener

$$\begin{aligned} 5 \mathbf{I}(\omega) + (j12 \mathbf{I}(\omega) - j6 \mathbf{I}(\omega)) + (-j6 \mathbf{I}(\omega) + j15 \mathbf{I}(\omega)) - 5.94 \angle 140^\circ &= 0 \\ 5 \mathbf{I}(\omega) + (j12 - j6 - j6 + j15) \mathbf{I}(\omega) - 5.94 \angle 140^\circ &= 0 \end{aligned}$$

Despejamos  $\mathbf{I}(\omega)$  y nos da

$$\mathbf{I}(\omega) = \frac{5.94 \angle 140^\circ}{5 + j(12 - 6 - 6 + 15)} = \frac{5.94 \angle 140^\circ}{5 + j15} = \frac{5.94 \angle 140^\circ}{15.8 \angle 71.6^\circ} = 0.376 \angle 68.4^\circ \text{ A}$$

Observe que el voltaje,  $\mathbf{V}_o(\omega)$ , a través de la bobina derecha y de la corriente de enlaces,  $\mathbf{I}(\omega)$ , se apega a la convención pasiva. El voltaje a través de la bobina derecha lo da

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_o(\omega) &= j15 \mathbf{I}(\omega) - j6 \mathbf{I}(\omega) = j9 \mathbf{I}(\omega) = j9(0.376 \angle 68.4^\circ) \\ &= (9 \angle 90^\circ)(0.376 \angle 68.4^\circ) \\ &= 3.38 \angle 158.4^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

En el dominio de tiempo, el voltaje de salida está dado por

$$v_o(t) = 3.38 \cos(3t + 158.4^\circ) \text{ V}$$

**EJERCICIO 11.9-1** Determine el voltaje  $v_o$  para el circuito de la figura E 11.9-1.

*Sugerencia:* Escriba una ecuación de enlace único. Las corrientes en las dos bobinas son iguales entre sí e iguales a la corriente de enlaces.

*Respuesta:*  $v_o = 14 \cos 4t \text{ V}$

**EJERCICIO 11.9-2** Determine el voltaje  $v_o$  para el circuito de la figura E 11.9-2.

*Sugerencia:* Este ejercicio es el mismo que el ejercicio 11.9-1, excepto por la posición del punto en la bobina vertical.

*Respuesta:*  $v_o = 18 \cos 4t \text{ V}$

**EJERCICIO 11.9-3** Determine la corriente  $i_o$  para el circuito de la figura E 11.9-3.

*Sugerencia:* El voltaje a través de la bobina vertical izquierda es cero porque está en cortocircuito. El voltaje a través de la bobina horizontal induce una corriente en la bobina vertical. En consecuencia, la corriente en la bobina vertical es cero.

*Respuesta:*  $i_o = 1.909 \cos(4t - 90^\circ) \text{ A}$

**EJERCICIO 11.9-4** Determine la corriente  $i_o$  para el circuito de la figura E 11.9-4.

*Sugerencia:* Este ejercicio es el mismo que el ejercicio 11.9-3, excepto por la posición del punto en la bobina vertical.

*Respuesta:*  $i_o = 0.818 \cos(4t - 90^\circ) \text{ A}$

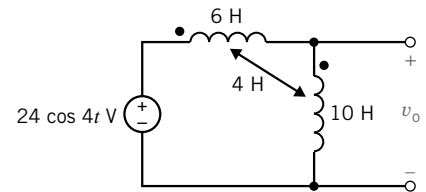


FIGURA E 11.9-1

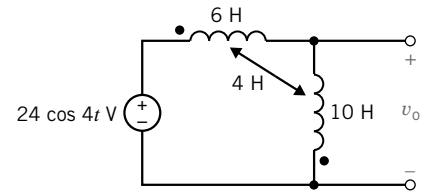


FIGURA E 11.9-2

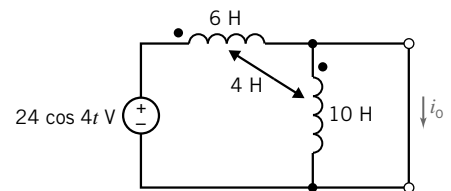


FIGURA E 11.9-3

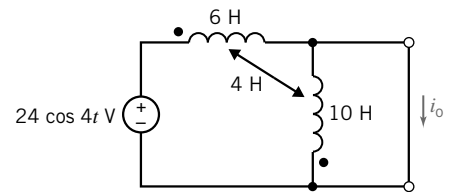


FIGURA E 11.9-4

## 11.10 EL TRANSFORMADOR IDEAL

Un uso de importancia de transformadores es en la distribución de potencia de ca. Una habilidad de los transformadores es establecer hacia arriba o hacia abajo los voltajes o las corrientes de ca. Se utilizan también en instalaciones de energía para elevar (establecer hacia arriba) el voltaje, de 10 kV en una planta generadora, a 200 kV o más para la transmisión a largas distancias. Luego, en la planta receptora, los transformadores se utilizan para reducir (establecer hacia abajo) el voltaje a 220 o 110 V para uso del consumidor (Coltman, 1988).

Además de los sistemas de potencia, los transformadores se suelen usar en circuitos electrónicos y de comunicación. Proporcionan la cualidad de elevar o reducir voltajes y aislar un circuito de otro.

Una de las bobinas, por lo común dibujada en la izquierda del diagrama de un transformador, se designa como la *bobina primaria* y la otra se denomina *bobina secundaria* o bobina. La bobina primaria está conectada a la fuente de energía y la secundaria a la carga.

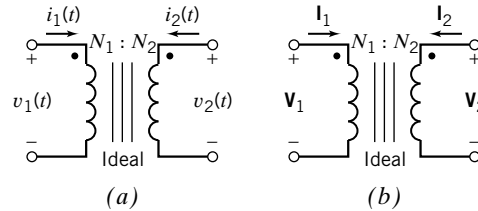


FIGURA 11.10-1 Símbolo de circuito para un transformador ideal. El transformador ideal tiene la misma representación en (a) el dominio de tiempo y (b) en el dominio de frecuencia.

Un **transformador ideal** es un modelo de un transformador con un coeficiente de acoplamiento igual a la unidad.

El símbolo para el transformador ideal se muestra en la figura 11.10-1, donde  $N_1$  y  $N_2$  son el número de vueltas en las bobinas primaria y secundaria. La representación de dominio de tiempo del transformador se muestra en la figura 11.10-1a. En el dominio de tiempo, las dos ecuaciones que definen un transformador ideal son

$$v_2(t) = \frac{N_2}{N_1} v_1(t) \quad (11.10-1)$$

y

$$i_2(t) = \frac{N_2}{N_1} i_1(t) \quad (11.10-2)$$

donde  $N_2/N_1 = n$  se denomina *proporción de vueltas* del transformador. El uso de transformadores se suele limitar a aplicaciones en que no se usa corriente directa (cd) porque las bobinas primaria y secundaria se comportan como cortocircuitos para una corriente estable.

La representación de dominio de frecuencia del transformador se muestra en la figura 11.10-1b. El funcionamiento del transformador ideal es el mismo en el dominio de tiempo que en el dominio de frecuencia. En el dominio de frecuencia, las dos ecuaciones que definen un transformador ideal son

$$\mathbf{V}_2 = \frac{N_2}{N_1} \mathbf{V}_1 \quad (11.10-3)$$

y

$$\mathbf{I}_1 = \frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2 \quad (11.10-4)$$

Las barras verticales en la figura 11.10-1 indica el centro de hierro, y escribimos *ideal* con el transformador para asegurar que se reconoce que es un caso ideal. Un transformador ideal se puede modelar utilizando fuentes dependientes, como se muestra en la figura 11.10-2.

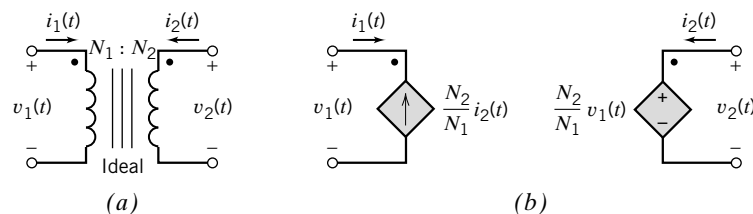


FIGURA 11.10-2 (a) Un transformador ideal y (b) un circuito equivalente.

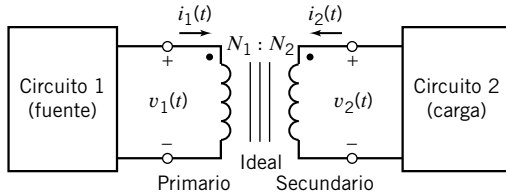


FIGURA 11.10-3 Un transformador ideal utilizado para acoplar magnéticamente dos circuitos.

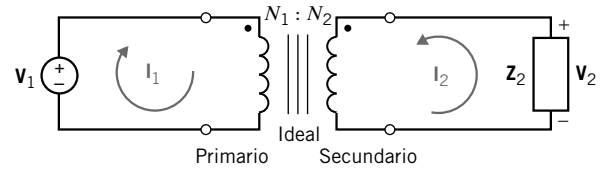


FIGURA 11.10-4 Un transformador ideal utilizado para acoplar magnéticamente una impedancia a una fuente de voltaje senoidal. Este circuito se representa en el dominio de frecuencia utilizando impedancias y fasores.

Observe que el voltaje y la corriente de ambas bobinas del transformador en la figura 11.10-1 se apegan a la convención pasiva. La potencia instantánea absorbida por el transformador ideal es

$$p(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = v_1(t)(-ni_2(t)) + (nv_1(t))i_2(t) = 0 \quad (11.10-5)$$

Se dice que el transformador ideal debe ser *sin pérdida* porque la potencia instantánea que absorbe es cero. Un argumento similar muestra que el transformador ideal absorbe cero potencia compleja, cero potencia promedio y cero potencia reactiva.

La figura 11.10-3 muestra un transformador ideal que se utiliza para conectar una fuente a una carga. La bobina conectada a la fuente se denomina bobina primaria, y la bobina conectada a la carga se llama bobina secundaria. El circuito 2 se conecta al circuito 1 a través del acoplamiento magnético del transformador, pero no hay una conexión eléctrica entre estos dos circuitos. Como el transformador ideal no tiene pérdida, toda la potencia transmitida al transformador ideal por el circuito 1, el transformador ideal la turna a su vez al circuito 2.

Consideremos el circuito de la figura 11.10-4, el cual tiene una impedancia  $Z_2$  acoplada magnéticamente a una fuente de voltaje utilizando un transformador ideal.

La impedancia de entrada del circuito conectado a la fuente de voltaje es

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1}$$

A  $\mathbf{Z}_1$  se le llama impedancia, vista en la primaria del transformador, o la impedancia, vista por la fuente del voltaje.

El transformador está representado por las ecuaciones

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2/n$$

y

$$\mathbf{I}_1 = -n\mathbf{I}_2$$

donde  $n = N_2/N_1$  es la proporción de vueltas del transformador.

La corriente y el voltaje de la impedancia,  $\mathbf{I}_2$  y  $\mathbf{V}_2$ , no se apegan a la convención pasiva, por lo tanto

$$\mathbf{V}_2 = -\mathbf{Z}_2\mathbf{I}_2$$

Por consiguiente, para  $\mathbf{Z}_1$ , tenemos

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{V}_2/n}{-n\mathbf{I}_2} = \frac{1}{n^2} \left( -\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} \right) = \frac{1}{n^2} \mathbf{Z}_2$$

La fuente experimenta la impedancia  $\mathbf{Z}_1$ , la cual es igual a  $\mathbf{Z}_2$  escalada por el factor  $1/n^2$ . En ocasiones decimos que  $\mathbf{Z}_1$  es la impedancia  $\mathbf{Z}_2$  reflejada en la primaria del transformador.



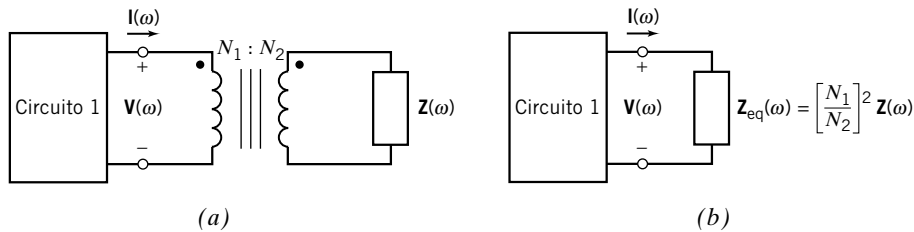


FIGURA 11.10-5 El circuito que se muestra en (b) es equivalente al circuito que se muestra en (a).

Suponga que vamos a conectar una impedancia de carga a una fuente. Si conectamos la impedancia de carga directamente a la fuente, entonces la fuente ve la impedancia de carga  $Z_2$ . Por el contrario, si conectamos la impedancia de carga a la fuente, utilizando un transformador ideal, la fuente ve la impedancia  $Z_1$ . En este contexto, decimos que el transformador ha cambiado la impedancia vista por la fuente de  $Z_2$  a  $Z_1$ .

Podemos formalizar este resultado como la equivalencia del circuito ilustrada en la figura 11.10-5. La figura 11.10-5a muestra el circuito 1 conectado a la bobina de la izquierda de un transformador ideal. Una impedancia,  $Z(\omega)$ , está conectada en paralelo con la bobina de la derecha del transformador ideal. En la figura 11.10-5b, el transformador ideal y la impedancia han sido reemplazados por una impedancia equivalente única,  $Z_{eq}(\omega)$ . La impedancia equivalente se relaciona con la impedancia original por

$$Z_{eq}(\omega) = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z(\omega) = \frac{1}{n^2} Z(\omega)$$

Los dos circuitos en la figura 11.10-5 son equivalentes. Todas las corrientes y los voltajes del circuito 1, entre ellos  $I(\omega)$  y  $V(\omega)$ , son los mismos en la figura 11.10-5b que los de la figura 11.10-5a. Podemos determinar los valores de  $I(\omega)$  y  $V(\omega)$  en la figura 11.10-5a al calcular los valores de  $I(\omega)$  y  $V(\omega)$  en la figura 11.10-5b.

### EJEMPLO 11.10-1 Transferencia de potencia máxima

En ocasiones, podemos usar un transformador ideal para representar un transformador que conecte la salida de un amplificador estereofónico,  $V_1$ , a un altavoz estereofónico, como se muestra en la figura 11.10-6. Encuentre el valor de la proporción de vueltas  $n$  que se requiere para ocasionar la potencia máxima que se ha de transferir a la carga cuando  $R_L = 8 \Omega$  y  $R_f = 48 \Omega$ .

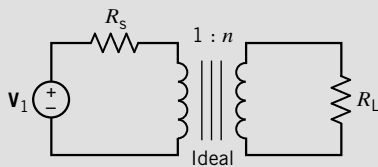


FIGURA 11.10-6 Salida de un amplificador conectado a un altavoz estereofónico con resistencia  $R_L$ .

### Solución

La impedancia vista en la primaria debido a  $R_L$  es

$$Z_1 = \frac{R_L}{n^2} = \frac{8}{n^2}$$

Para lograr la transferencia de potencia máxima, requerimos que

$$\mathbf{Z}_1 = R_f$$

Dado que  $R_s = 48 \Omega$ , requerimos que  $\mathbf{Z}_1 = 48 \Omega$ , por lo tanto

$$n^2 = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$$

y, por consiguiente,

$$\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 = \frac{1}{6}$$

o bien

$$N_1 = \sqrt{6}N_2$$

### EJEMPLO 11.10-2 Circuito de transformador

### EJEMPLO INTERACTIVO

La entrada al circuito que se muestra en la figura 11.10-7 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s(t)$ . La salida es el voltaje a través del inductor de 9 H,  $v_o(t)$ . Determine el voltaje de salida,  $v_o(t)$ .

#### Solución

El voltaje de entrada es una senoide. El voltaje de salida también es una senoide y tiene la misma frecuencia que el voltaje de entrada. Al parecer, el circuito se encuentra en estado estable. En consecuencia, el circuito en la figura 11.10-7 se puede representar en el dominio de frecuencia utilizando fasores e impedancia. La figura 11.10-8 muestra la representación del dominio de frecuencia a partir de la figura 11.10-7.

En la figura 11.10-8, la impedancia del inductor está conectada en serie con la impedancia del resistor de  $30\text{-}\Omega$ . Esta impedancia en serie está conectada en paralelo con la bobina de la derecha del transformador. Reemplace el transformador y la impedancia en serie con la impedancia equivalente, como se muestra en la figura 11.10-9. La impedancia equivalente está dada por

$$\mathbf{Z}_{\text{eq}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 (30 + j36) = 67.5 + j81 \Omega$$

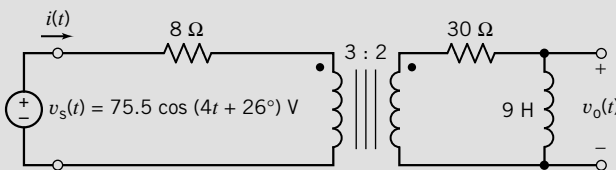


FIGURA 11.10-7 El circuito considerado en el ejemplo 11.10-2.

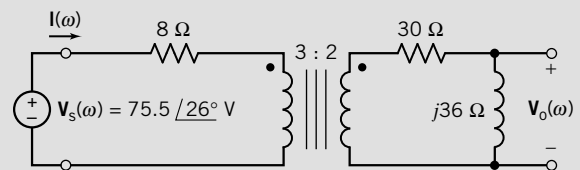


FIGURA 11.10-8 El circuito de la figura 11.10-7, representado en el dominio de frecuencia, utilizando impedancias y fasores.

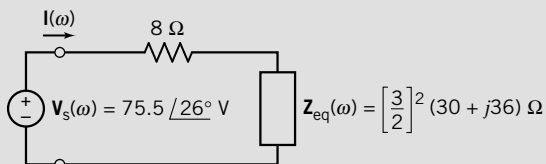


FIGURA 11.10-9 El circuito de la figura 11.10-8, luego de haber reemplazado el transformador y la impedancia del resistor y el inductor en serie con la impedancia equivalente.

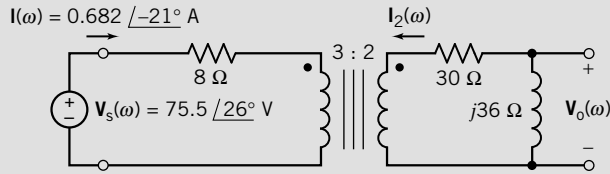


FIGURA 11.10-10 El circuito de la figura 11.10-9 luego de determinar la corriente  $\mathbf{I}(\omega)$ .

En la figura 11.10-9, la impedancia del resistor de  $8\text{-}\Omega$  está conectada en serie con la impedancia equivalente,  $\mathbf{Z}_{\text{eq}}(\omega)$ . La corriente  $\mathbf{I}(\omega)$ , es la corriente en esta impedancia en serie, y  $\mathbf{V}_s(\omega)$  es el voltaje a través de la impedancia en serie. Aplicando la ley de Ohm nos da

$$\mathbf{I}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_s(\omega)}{8 + \mathbf{Z}_{\text{eq}}(\omega)} = \frac{75.5 / 26^\circ}{8 + 67.5 + j81} = \frac{75.5 / 26^\circ}{110.73 / 47^\circ} = 0.682 / -21^\circ \text{ A} \quad (11.10-6)$$

Como los circuitos en las figuras 11.10-8 y 11.10-9 son equivalentes, la corriente  $\mathbf{I}(\omega)$  en la figura 11.10-10 también está dada por la ecuación 11.10-6. La figura 11.10-10 muestra el circuito de la figura 11.10-8 dibujado de nuevo con la corriente etiquetada  $\mathbf{I}(\omega)$ .

Incluso, la corriente en la bobina de la derecha del transformador ha sido etiquetada como  $\mathbf{I}_2(\omega)$ . Como  $\mathbf{I}(\omega)$  e  $\mathbf{I}_2(\omega)$  son las corrientes en las bobinas del transformador ideal, están relacionadas por las ecuaciones que describen el transformador:

$$\mathbf{I}_2(\omega) = -\left(\frac{3}{2}\right)\mathbf{I}(\omega) = -1.023 / -21^\circ \text{ A}$$

Observe que  $\mathbf{I}_2(\omega)$  y  $\mathbf{V}_o(\omega)$ , la corriente y el voltaje de la impedancia de  $j36\text{-}\Omega$  en la figura 11.10-10 no se apegan a la convención pasiva. En consecuencia,

$$\mathbf{V}_o(\omega) = -j36 \mathbf{I}_2(\omega) = (j36)(1.023 / -21^\circ) = (36 / 90^\circ)(1.023 / -21^\circ) = 36.82 / 69^\circ \text{ V}$$

En el dominio de tiempo, el voltaje de salida está dado por

$$v_o(t) = 36.82 \cos(4t + 69^\circ) \text{ V}$$

**EJERCICIO 11.10-1** Determine la impedancia  $\mathbf{Z}_{\text{ab}}$  para el circuito de la figura E 11.10-1. Todos los transformadores son ideales.

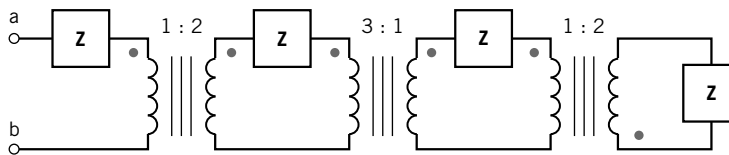


Figura E 11.10-1

**Respuesta:**  $\mathbf{Z}_{\text{ab}} = 4.063\mathbf{Z}$

## 11.11 ¿CÓMO LO PODEMOS COMPROBAR . . . ?

A los ingenieros se les suele solicitar comprobar que la solución de un problema sea la correcta. Por ejemplo, las soluciones propuestas para problemas de diseño se deben comprobar para confirmar que se ha cumplido con todas las especificaciones. Además, se deben revisar los resultados de la computadora para protegerse contra errores de captura de datos, así como las exigencias de los comerciantes, las cuales se deben analizar a fondo.

También a los estudiantes de ingeniería se les pide que verifiquen la exactitud de sus trabajos. Por ejemplo, tomarse un breve lapso antes de terminar un examen permitiría dar una vista rápida e identificar esas soluciones que podrían requerir un poco más de aplicación.

El ejemplo siguiente ilustra técnicas útiles para comprobar las soluciones a los diversos problemas analizados en este capítulo.

**EJEMPLO 11.11-1** ¿Cómo podemos comprobar la potencia en circuitos de CA?

El circuito que se muestra en la figura 11.11-1a ha sido analizado utilizando una computadora, y los resultados están tabulados en la figura 11.11-1b. Las etiquetas  $X_p$  y  $X_s$  se refieren a las bobinas primaria y secundaria del transformador. La convención pasiva se utilizó para todos los elementos, incluyendo las fuentes de voltaje, lo cual significa que

$$\frac{(30)(1.76)}{2} \cos(133^\circ - 0) = -18.00$$

es la potencia promedio *absorbida* por la fuente de voltaje. La potencia promedio *transferida* por la fuente de voltaje es +18.00 W.

¿Cómo podemos comprobar que el análisis por computadora de este circuito es en verdad correcto?

**Solución**

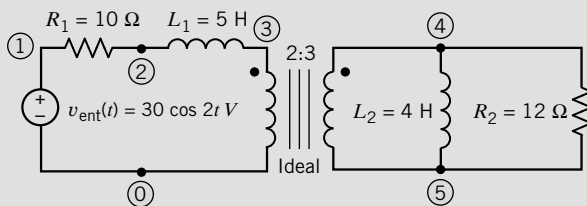
Hay que comprobar varias cosas de manera muy sencilla.

- (1) El voltaje y la corriente del elemento de cada inductor deben estar desfasados  $90^\circ$  entre sí de modo que la potencia promedio transmitida a cada inductor sea cero. La corriente del elemento y el voltaje de  $L_1$  y  $L_2$  satisface esta condición.
- (2) Un transformador ideal absorbe cero potencia promedio. La suma de la potencia promedio absorbida por el transformador primario y el secundario es

$$\frac{(5.2)(1.76)}{2} (\cos(9^\circ - (-47^\circ))) + \frac{(7.8)(1.17)}{2} \cos(133^\circ - 9^\circ) = 2.56 + (-2.55) \approx 0 \text{ W}$$

de modo que esta condición se satisface.

- (3) Toda la potencia transmitida al primario del transformador se transmite a su vez a la carga. En este ejemplo, la carga consiste en el inductor  $L_2$  y el resistor  $R_2$ . Dado que la potencia promedio transmitida al inductor es cero,



(a)

Elemento	Voltaje	Corriente
Vin 1 0 30 ∠ 0	30 ∠ 0°	1.76 ∠ 133°
R1 1 2 10	17.6 ∠ -47°	1.76 ∠ -47°
L1 2 3 5	17.6 ∠ 43°	1.76 ∠ -47°
Xp 3 0 2	5.2 ∠ 9°	1.76 ∠ -47°
Xs 4 5 3	7.8 ∠ 9°	1.17 ∠ 133°
R2 4 5 12	7.8 ∠ 9°	0.65 ∠ 9°
L2 4 5 4	7.8 ∠ 9°	0.98 ∠ -81°

Respuesta de estado estable:  $\omega = 2 \text{ rad/s}$

(b)

FIGURA 11.11-1 (a) Circuito y (b) los resultados del análisis por computadora para el circuito.

toda la potencia transmitida al primario del transformador se debería transmitir al secundario por el resistor  $R_2$ . La potencia transmitida al primario del transformador es

$$\frac{(5.2)(1.76)}{2} \cos(9^\circ - (-47^\circ)) = 2.56 \text{ W}$$

La potencia transmitida a  $R_2$  es

$$\frac{(7.8)(0.65)}{2} \cos(0) = 2.53 \text{ W}$$

Parece que hay algún error al terminar en los voltajes y corrientes proporcionados por la computadora. Sin embargo, parece razonable concluir que toda la potencia transmitida al primario del transformador la transmite el secundario al resistor  $R_2$ .

- (4) La potencia promedio transmitida por la fuente de voltaje debe ser igual a la potencia promedio absorbida por los resistores. Ya hemos calculado que la potencia promedio transmitida por la fuente de voltaje es de 18 W. La potencia promedio absorbida por los resistores es

$$\frac{(17.6)(1.76)}{2} \cos(0) + \frac{(7.8)(0.65)}{2} \cos(0) = 15.49 + (2.53) = 18.02 \text{ W}$$

por lo que se satisface esta condición.

Puesto que se satisfacen estas condiciones, podemos confiar en que el análisis por computadora de este circuito es correcto.

## 11.12 EJEMPLO DE DISEÑO

### TRANSFERENCIA DE POTENCIA MÁXIMA

La red de correspondencia en la figura 11.12-1 se utiliza para enlazar la fuente con la carga, lo cual significa que la red de correspondencia se utiliza para conectar la fuente con la carga de una manera conveniente. En este caso, el propósito de la red de correspondencia es transferir la mayor cantidad posible de potencia a la carga. Este problema se presenta con tal frecuencia que se le ha dado nombre, el problema de la transferencia de potencia máxima.

Un ejemplo importante de la aplicación de la transferencia de potencia máxima es la conexión de un teléfono celular o radio transmisor inalámbrico a la antena del celular. Por ejemplo, la impedancia de entrada de una antena de teléfono celular práctica es  $\mathbf{Z} = (10 + j6.28) \Omega$  (Dorf, 1998).

#### Describa la situación y los supuestos

El voltaje de entrada es una función de tiempo senoidal. El circuito se encuentra en estado estable. Se debe diseñar la red de correspondencia para que transmita la mayor cantidad de potencia posible a la carga.

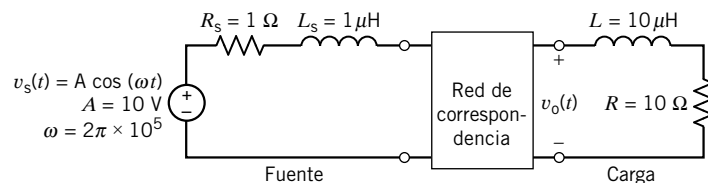


FIGURA 11.12-1 Diseñe la red de correspondencia para transmitir la potencia máxima a la carga donde la carga es el modelo de la antena de un sistema de comunicación inalámbrico.

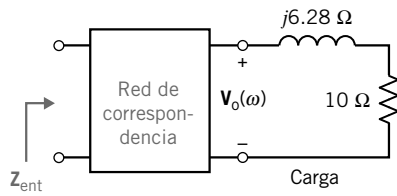


FIGURA 11.12-2  $Z_{ent}$  es la impedancia vista al interior de la red de correspondencia.

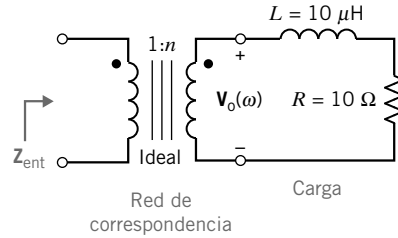


FIGURA 11.12-3 Uso de un transformador ideal como red de correspondencia.

### Establezca el objetivo

Para alcanzar la transferencia de potencia máxima, la red de correspondencia debe ajustar las impedancias de la carga y la fuente. La impedancia de fuente es

$$\mathbf{Z}_s = R_s + j\omega L_s = 1 + j(2 \cdot \pi \cdot 10^5)(10^{-6}) = 1 + j0.628 \Omega$$

Para la transferencia de potencia máxima, la impedancia  $\mathbf{Z}_{ent}$ , que se muestra en la figura 11.12-2, debe ser la conjugada compleja de  $\mathbf{Z}_s$ . Es decir,

$$\mathbf{Z}_{ent} = \mathbf{Z}_s^* = 1 - j0.628 \Omega$$

### Genere un plan

Utilicemos un transformador para la red de correspondencia como se muestra en la figura 11.12-3. La impedancia  $\mathbf{Z}_{ent}$  será una función de  $n$ , la proporción de vueltas del transformador. Estableceremos  $\mathbf{Z}_{ent}$  igual a la conjugada compleja de  $\mathbf{Z}_s$  y despejamos la ecuación resultante para determinar la proporción de vueltas,  $n$ .

### Actúe sobre el plan

$$\mathbf{Z}_{ent} = \frac{1}{n^2}(R + j\omega L) = \frac{1}{n^2}(10 + j6.28)$$

Requerimos que

$$\frac{1}{n^2}(10 + j6.28) = 1 - j0.628$$

Esto requiere que

$$\frac{1}{n^2}10 = 1 \quad (11.12-1)$$

y

$$\frac{1}{n^2}6.28 = -0.628 \quad (11.12-2)$$

Seleccionamos

$$n = 3.16$$

(por ejemplo,  $N_2 = 158$  y  $N_1 = 50$ ) satisface la ecuación 11.12-1 pero no a la ecuación 11.12-2. En realidad, el valor no positivo de  $n$  satisfará la ecuación 11.12-2.

Necesitamos modificar la red de correspondencia para hacer que la parte imaginaria de  $\mathbf{Z}_{ent}$  sea negativa. Esto se puede completar agregando un condensador, como se muestra en la figura 11.12-4. Entonces

$$\mathbf{Z}_{ent} = \frac{1}{n^2} \left( R + j\omega L - j \frac{1}{\omega C} \right) = \frac{1}{n^2} \left( 10 + j6.28 - j \frac{1}{2\pi \cdot 10^5 \cdot C} \right)$$

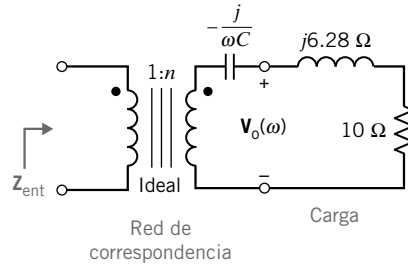


FIGURA 11.12-4 La red de correspondencia se modifica al agregar un condensador.

Requerimos que

$$\frac{1}{n^2} \left( 10 + j6.28 - j \frac{1}{2\pi \cdot 10^5 \cdot C} \right) = 1 - j0.628$$

Esto requiere que

$$\frac{1}{n^2} 10 = 1 \quad (11.12-3)$$

y

$$\frac{1}{n^2} \left( 6.28 - \frac{1}{2\pi \cdot 10^5 \cdot C} \right) = -0.628 \quad (11.12-4)$$

Primero, al despejar la ecuación 11.12-3 nos da

$$n = 3.16$$

Luego, despejar la ecuación 11.12-4 resulta en

$$C = 0.1267 \mu\text{F}$$

y el diseño está completo.

### Verifique la solución propuesta

Cuando  $n = 3.16$  y  $C = 0.1267 \mu\text{F}$ , la impedancia de entrada de la red de correspondencia es

$$\begin{aligned} Z_{\text{ent}} &= \frac{1}{n^2} \left( R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \\ &= \frac{1}{3.16^2} \left( 10 + j(2\pi \times 10^5)(10^{-5}) + \frac{1}{j(2\pi \times 10^5)(0.1267 \times 10^{-6})} \right) \\ &= 1 - j0.629 \end{aligned}$$

como se requería.

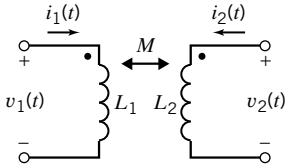
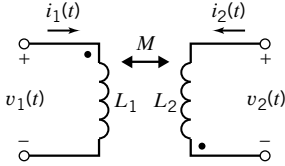
## 11.13 RESUMEN

- Con la adopción de la potencia de ca como potencia convencional de uso generalizado para la industria y el hogar, los ingenieros se han visto involucrados en el análisis de las relaciones de la potencia de ca.
- La potencia instantánea transmitida a este elemento del circuito es el producto del voltaje y la corriente de los elementos. Sean  $v(t)$  e  $i(t)$  el voltaje y la corriente del elemento, escogidos para apearse a la convención pasiva. Entonces  $p(t) = v(t) i(t)$  es la potencia instantánea transmitida a este elemento del circuito. La potencia instantánea se calcula en el dominio de tiempo.
- La potencia instantánea puede ser una función algo complicada de  $t$ . Cuando el voltaje y la corriente del elemento son funciones periódicas que tienen el mismo periodo,  $T$ , es conveniente calcular la potencia promedio

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i(t)v(t) dt.$$

- El valor efectivo de una corriente es la corriente constante (cd) que transmite la misma potencia promedio a un resistor de  $1-\Omega$  como la corriente variable dada. El valor

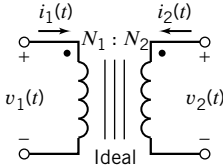
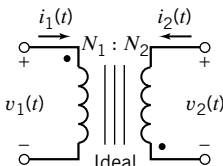
Tabla 11.13-1 Inductores acoplados

SÍMBOLO DE DISPOSITIVO (CON DIRECCIONES DE REFERENCIA DE VOLTAJES Y CORRIENTES DE ELEMENTOS)	ECUACIONES DE DISPOSITIVOS EN EL DOMINIO DE TIEMPO	ECUACIONES DE DISPOSITIVOS EN EL DOMINIO DE FRECUENCIA
	$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$ $v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$	$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 + j\omega M \mathbf{I}_2$ $\mathbf{V}_2 = j\omega L_2 \mathbf{I}_2 + j\omega M \mathbf{I}_1$
	$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$ $v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$	$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 - j\omega M \mathbf{I}_2$ $\mathbf{V}_2 = j\omega L_2 \mathbf{I}_2 - j\omega M \mathbf{I}_1$

efectivo de un voltaje es el voltaje constante (cd) que transmite la misma potencia promedio como el voltaje variable dado.

- Considere un circuito lineal con una entrada senoidal que ha alcanzado el estado estable. Todos los voltajes y corrientes del elemento serán senoidales, con la misma frecuencia que la entrada. Un circuito con estas características se puede analizar en el dominio de frecuencia, utilizando fasores e impedancias. En realidad, podemos calcular la potencia generada o absorbida en un circuito o en cualquier elemento de un circuito, en el dominio de frecuencia, utilizando fasores. La tabla 11.5-1 resume las ecuaciones utilizadas para calcular la potencia promedio, la potencia compleja, la potencia reactiva en el dominio de frecuencia.
- Dado que es importante mantener la corriente  $I$  lo más pequeña posible en las líneas de transmisión, los ingenieros se esfuerzan por lograr un factor de potencia cercano a 1. El factor de potencia es igual a  $\cos \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo de fase que hace la diferencia entre el voltaje y la corriente senoidal de la carga en estado estable. Se utiliza una impedancia puramente reactiva en paralelo con la carga para corregir el factor de potencia.
- Por último, consideramos las bobinas y transformadores acoplados. Los inductores y transformadores acoplados presentan una inductancia mutua, la cual relaciona el voltaje en una bobina con el cambio en la corriente en otra bobina. Las ecuaciones que describen las bobinas y los transformadores acoplados se conjuntan en las tablas 11.13-1 y 11.13-2.

Tabla 11.13-2 Transformadores ideales

SÍMBOLO DE DISPOSITIVO CON DIRECCIONES DE REFERENCIA DE VOLTAJES Y CORRIENTES DE ELEMENTOS	ECUACIONES DE DISPOSITIVOS EN EL DOMINIO DE FRECUENCIA
	$\mathbf{V}_1 = \frac{N_1}{N_2} \mathbf{V}_2$ $\mathbf{I}_1 = -\frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2$
	$\mathbf{V}_1 = -\frac{N_1}{N_2} \mathbf{V}_2$ $\mathbf{I}_1 = \frac{N_2}{N_1} \mathbf{I}_2$



## PROBLEMAS

**Sección 11.3 Potencia instantánea y potencia promedio**

**P 11.3-1** En la figura P 11.3-1 se muestra un circuito *RLC*. Encuentre la potencia instantánea transmitida al inductor cuando  $i_s = 1 \cos \omega t$  A y  $\omega = 6283$  rad/s.

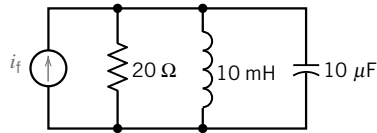


Figura P 11.3-1

**P 11.3-2** Encuentre la potencia promedio absorbida por el resistor de  $0.6\text{-k}\Omega$  y la potencia promedio alimentada por la fuente de corriente para el circuito de la figura P 11.3-2.

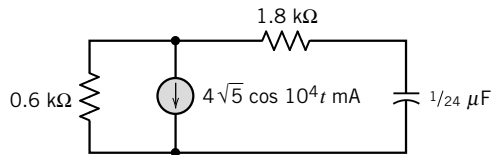


Figura P 11.3-2

**P 11.3-3** Emplee el análisis de nodos para encontrar la potencia promedio absorbida por el resistor de  $20\text{-}\Omega$  en el circuito de la figura P 11.3-3.

*Respuesta:*  $P = 200$  W

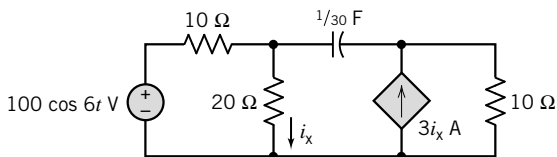


Figura P 11.3-3

**P 11.3-4** Las estaciones de energía nuclear se han vuelto muy complejas de operar, como se ilustra por el simulador de capacitación de la sala de operaciones de la Pilgrim Power Station en la figura P 11.3-4a. Un circuito de control tiene el modelo que se muestra en la figura P 11.3-4b. Encuentre la potencia promedio transmitida a cada elemento.

*Respuesta:*  $P_{\text{corriente de fuente}} = -12.8$  W

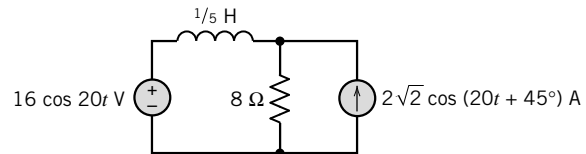
$$P_{8\Omega} = 6.4$$
 W

$$P_L = 0$$
 W

$$P_{\text{fuente de voltaje}} = 6.4$$
 W



(a)



(b)

**Figura P 11.3-4** (a) Sala de capacitación de simulación de la Pilgrim Power Station. La estación de energía se localiza en Plymouth, Massachusetts, y genera 700 MW. Inició operaciones en 1972. Cortesía de Boston Edison. (b) Un circuito de control del reactor.

**P 11.3-5** Encuentre la potencia promedio transmitida a cada elemento por el circuito de la figura P 11.3-5.

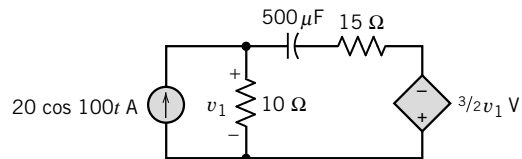


Figura P 11.3-5

**P 11.3-6** Un estudiante experimentador en el laboratorio se encuentra con todo tipo de equipo eléctrico. Algunas piezas de equipo de prueba son operadas por baterías o funcionan a bajo voltaje de manera que cualquier riesgo es mínimo. Otro tipo de equipos están aislados de la tierra eléctrica de manera que no hay problema si algún objeto entra en contacto con el circuito. Algunos tipos de equipos de pruebas, sin embargo, tienen alimentación de voltajes que pueden ser riesgosos o que tienen salidas de voltaje peligrosas. La potencia normal suministrada que se utiliza en Estados Unidos para energía y alumbrado en los laboratorios es de 120, aterrizada, 60-Hz de alimentación

senoidal. Esta alimentación proporciona potencia para gran parte del equipo en laboratorio, de modo que es esencial entender su funcionamiento para su uso seguro (Bernstein, 1991).

Considere el caso en que el experimentador tiene una mano sobre una pieza de equipo eléctrico y la otra en una conexión aterrizada como se muestra en el diagrama de la figura P 11.3-6a.

La resistencia al toque manual es de  $200 \Omega$ . Los choques con una energía de  $30 \text{ J}$  son peligrosos para el hombre. Considere el modelo que se muestra en la figura P 11.3-6b, el cual representa a una persona con  $R$ . Determine la energía transmitida a la persona en  $1 \text{ s}$ .

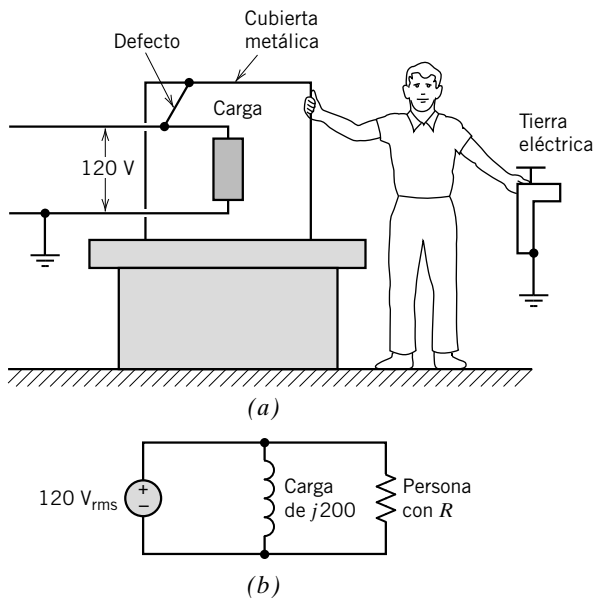


Figura P 11.3-6 Estudiante experimentador tocando un dispositivo eléctrico.

**P 11.3-7** En la figura P 11.3-7 se presenta un circuito  $RLC$  con una fuente de voltaje  $v_s = 7 \cos 10t \text{ V}$ .

- (a) Determine la potencia instantánea transmitida al circuito por la fuente de voltaje.
- (b) Encuentre la potencia instantánea transmitida al inductor.

**Respuestas:**

- (a)  $p = 7.54 + 15.2 \cos (20t - 60.3^\circ) \text{ W}$
- (b)  $p = 28.3 \cos (20t - 30.6^\circ) \text{ W}$

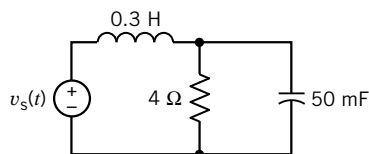


Figura P 11.3-7

**P 11.3-8**

- (a) Encuentre la potencia promedio transmitida por la fuente al circuito que se muestra en la figura P 11.3-8.

- (b) Encuentre la potencia absorbida por el resistor  $R_1$ .

**Respuestas:** (a)  $30 \text{ W}$ ; (b)  $20 \text{ W}$

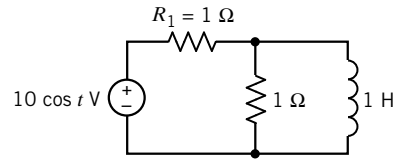


Figura P 11.3-8

**Sección 11.4 Valor efectivo de una forma de onda periódica**

**P 11.4-1** Encuentre el valor de la rms de la corriente  $i$  para (a)  $i = 2 - 4 \cos 2t \text{ A}$ ; (b)  $i = 3 \sin \pi t + \sqrt{2} \cos \pi t \text{ A}$  y (c)  $i = 2 \cos 2t + 4\sqrt{2} \cos (2t + 45^\circ) + 12 \sin 2t \text{ A}$ .

**Respuestas:** (a)  $2\sqrt{3}$ ; (b)  $2.35 \text{ A}$  y (c)  $5\sqrt{2} \text{ A}$

**P 11.4-2** Determine el valor de la rcm para cada una de las formas de onda que se muestran en la figura P 11.4-2.

**Respuestas:** (a)  $4.10 \text{ V}$ , (b)  $4.81 \text{ V}$  y, (c)  $4.10$

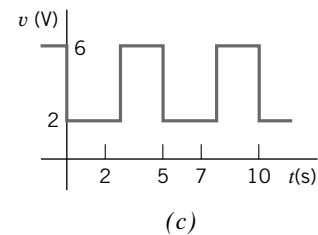
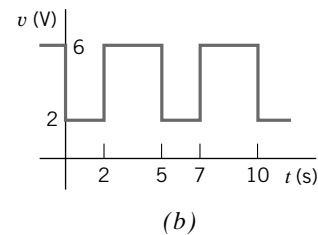
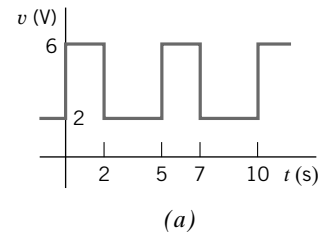


Figura P 11.4-2

**P 11.4-3** Determine el valor de la rcm para cada una de las formas de onda que se muestran en la figura P 11.4-3.

**Respuestas:** (a)  $4.16 \text{ V}$ , (b)  $4.16 \text{ V}$  y, (c)  $4.16$

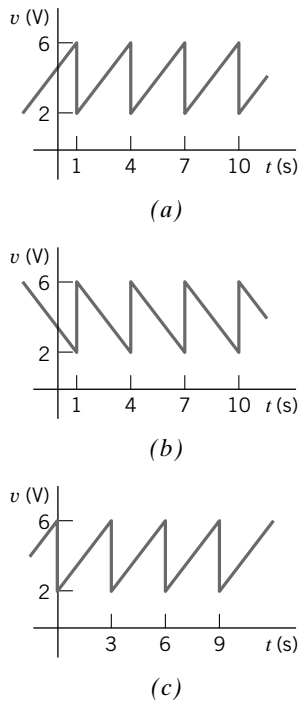


Figura P 11.4-3

**P 11.4-4** Encuentre el valor de la rms para cada una de las formas de onda de la figura P 11.4-4.

*Respuestas:*  $V_{\text{rms}} = 1.225 \text{ V}$

$I_{\text{rms}} = 5 \text{ mA}$

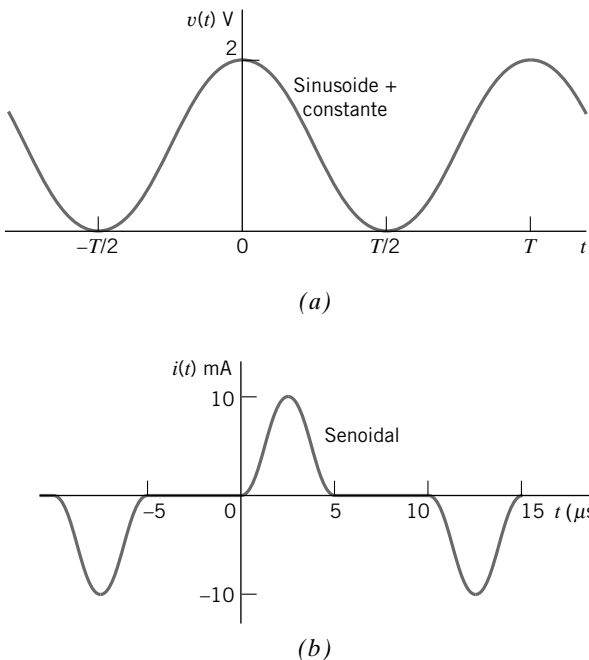


Figura P 11.4-4

**P 11.4-5** Encuentre el valor de la rms del voltaje  $v(t)$  que se muestra en la figura P 11.4-5.

*Respuesta:*  $V_{\text{rms}} = 4.24 \text{ V}$

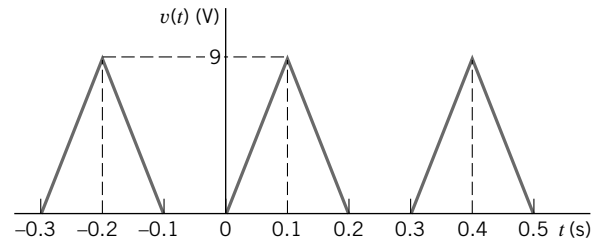


Figura P 11.4-5

**P 11.4-6** Encuentre el valor efectivo de la forma de onda de la corriente que se muestra en la figura P 11.4-6.

*Respuesta:*  $I_{\text{eff}} = 8.66$

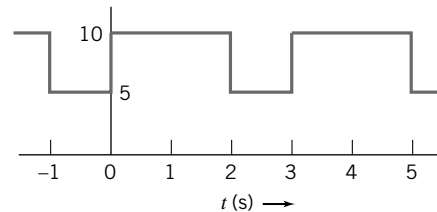


Figura P 11.4-6

**P 11.4-7** Calcule el valor efectivo del voltaje a través de la resistencia  $R$  del circuito que se muestra en la figura P 11.4-7 cuando  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ .

*Sugerencia:* Utilice la superposición.

*Respuesta:*  $V_{\text{eff}} = 4.82 \text{ V}$

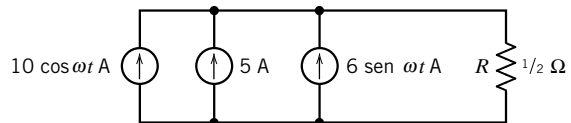


Figura P 11.4-7

### Sección 11.5 Potencia compleja

**P 11.5-1** La potencia compleja transmitida por la fuente de voltaje en la figura P 11.5-1 es  $\mathbf{S} = 3.6 + j7.2 \text{ VA}$ . Determine los valores de la resistencia,  $R$ , y la inductancia,  $L$ .

*Respuestas:*  $R = 4 \Omega$  y  $L = 2 \text{ H}$

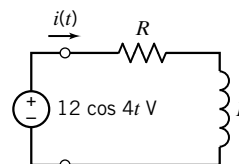


Figura P 11.5-1

**P 11.5-2** La potencia compleja transmitida por la fuente de voltaje en la figura P 11.5-2 es  $S = 18 + j9$  VA. Determine los valores de la resistencia,  $R$ , y la inductancia,  $L$ .

**Respuestas:**  $R = 4 \Omega$  y  $L = 2$  H

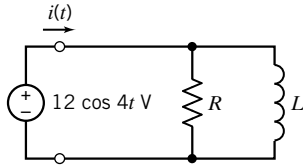


Figura P 11.5-2

**P 11.5-3** Determine la potencia compleja transmitida por la fuente de voltaje en el circuito que se muestra en la figura P 11.5-3.

**Respuesta:**  $S = 7.2 + j3.6$  VA

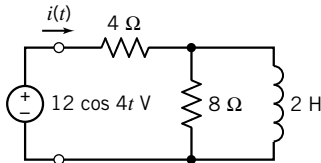
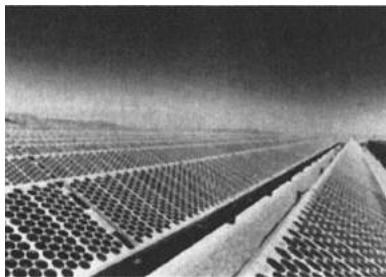


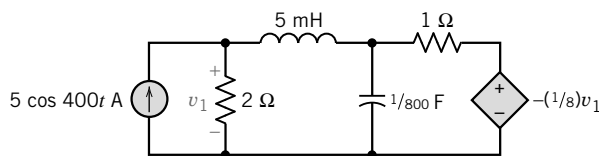
Figura P 11.5-3

**P 11.5-4** Muchos ingenieros están trabajando en el desarrollo de plantas de potencia fotovoltaica que proporcionan potencia de ca. En la figura P 11.5-4a se muestra un ejemplo de un sistema fotovoltaico experimental. Un modelo de una parte del circuito de conversión de energía se muestra en la figura P 11.5-4b. Encuentre la potencia promedio, reactiva y compleja transmitida por la fuente independiente.

**Respuesta:**  $S = +j8/9$  VA



(a)



(b)

Figura P 11.5-4 (a) Planta de potencia fotovoltaica experimental. (b) Modelo de parte del circuito de conversión de energía. Cortesía de EPRI Journal.

**P 11.5-5** Para el circuito que se muestra en la figura P 11.5-5, determine  $I$  y la potencia compleja  $S$  transmitida por la fuente cuando  $V = 50 \angle 120^\circ$  V rcm.

**Respuesta:**  $S = 100 + j75$  VA

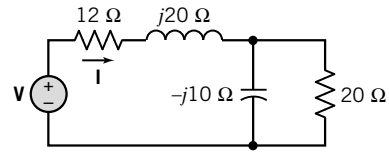


Figura P 11.5-5

**P 11.5-6** Para el circuito de la figura P 11.5-6, determine la potencia compleja de los elementos  $R$ ,  $L$  y  $C$  y muestre que la potencia compleja transmitida por las fuentes es igual a la potencia compleja absorbida por los elementos  $R$ ,  $L$  y  $C$ .

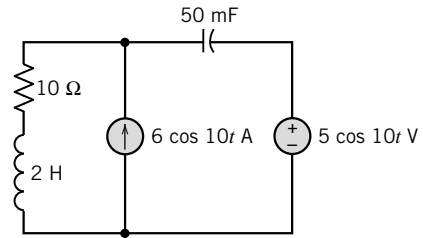


Figura P 11.5-6

**P 11.5-7** En la figura P 11.5-7 se muestra un circuito con una impedancia desconocida,  $Z$ . Sin embargo, se sabe que  $v(t) = 100 \cos(100t + 20^\circ)$  V e  $i(t) = 25 \cos(100t - 10^\circ)$  A. (a) Encuentre  $Z$ . (b) Encuentre la potencia absorbida por la impedancia. (c) Determine el tipo de elemento y su magnitud que debe colocarse a través de la impedancia  $Z$  (conectada a las terminales a-b) de modo que el voltaje  $v(t)$  y la corriente que llegan a los elementos en paralelo estén en fase.

**Respuestas:** (a)  $4 \angle 30^\circ \Omega$ ; (b) 1082.5 W; (c) 1.25 mF

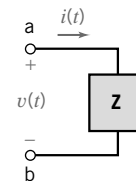


Figura P 11.5-7

**P 11.5-8** Encuentre la potencia compleja transmitida por la fuente de voltaje y el factor de potencia vistos por la fuente de voltaje para el circuito de la figura P 11.5-8.

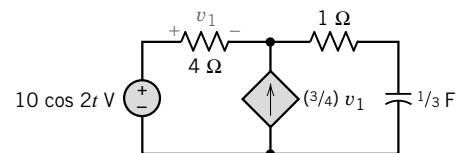


Figura P 11.5-8

**P 11.5-9** El circuito en la figura P 11.5-9 consta de una fuente conectada a una carga.

- Suponga  $R = 9 \Omega$  y  $L = 5 \text{ H}$ . Determine las potencias promedio, compleja y reactiva transmitidas por la fuente a la carga.
- Suponga  $R = 15 \Omega$  y  $L = 3 \text{ H}$ . Determine las potencias promedio, compleja y reactiva transmitidas por la fuente a la carga.
- Suponga que la fuente transmite  $8.47 + j14.12 \text{ VA}$  a la carga. Determine los valores de la resistencia,  $R$ , y de la inductancia,  $L$ .
- Suponga que la fuente transmite  $14.22 + j14.12 \text{ VA}$  a la carga. Determine los valores de la resistencia,  $R$ , y de la inductancia,  $L$ .

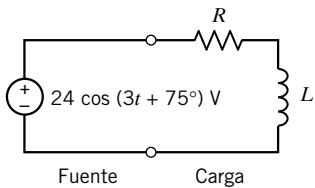


Figura P 11.5-9

**P 11.5-10** El circuito en la figura P 11.5-10 consta de una fuente conectada a una carga. Suponga que la amplitud del voltaje de la fuente se ha duplicado de modo que  $v_1(t) = 48 \cos(3t + 75^\circ) \text{ V}$ . ¿Cómo cambiarán cada uno de los siguientes?

- La impedancia de la carga.
- La potencia compleja transmitida a la carga.
- La corriente de la carga.

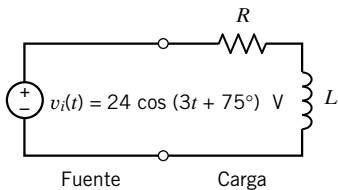


Figura P 11.5-10

**P 11.5-11** El circuito en la figura P 11.5-11 consta de una fuente conectada a una carga. Suponga que el ángulo de fase de la fuente del voltaje se ha duplicado de modo que  $v_1(t) = 24 \cos(3t + 150^\circ) \text{ V}$ . ¿Cómo cambiará lo siguiente?

- La impedancia de la carga.
- La potencia compleja transmitida a la carga.
- La corriente de la carga.

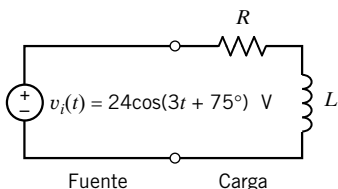


Figura P 11.5-11

**P 11.5-12** El circuito en la figura P 11.5-12 consta de una fuente conectada a una carga. La potencia compleja transmitida por la fuente a la carga es  $\mathbf{S} = 6.61 + j1.98 \text{ VA}$ . Determine los valores de  $R$  y  $C$ .

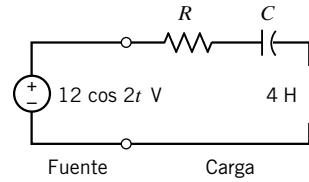


Figura P 11.5-12

**P 11.5-13** Diseñe el circuito que se muestra en la figura P 11.5-13, es decir, especifique los valores de  $R$  y  $L$  de modo que la potencia compleja transmitida al circuito  $RL$  sea  $8 + j6 \text{ VA}$ .

*Respuesta:*  $R = 5.76 \Omega$  y  $L = 2.16 \text{ H}$

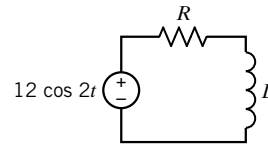


Figura P 11.5-13

**P 11.5-14** El voltaje de la fuente en el circuito que se muestra en la figura P 11.5-14 es  $\mathbf{V}_s = 24 \angle 30^\circ \text{ V}$ . En consecuencia,

$$\mathbf{I}_1 = 3.13 \angle 25.4^\circ \text{ A}, \quad \mathbf{I}_2 = 1.99 \angle 52.9^\circ \text{ A} \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_4 = 8.88 \angle -10.6^\circ \text{ V}$$

Determine (a) la potencia promedio absorbida por  $\mathbf{Z}_4$ ; (b) la potencia promedio absorbida por  $\mathbf{Z}_1$ , y (c) la potencia promedio transmitida por la fuente de voltaje (todos los fasores están dados utilizando valores pico, no rms).

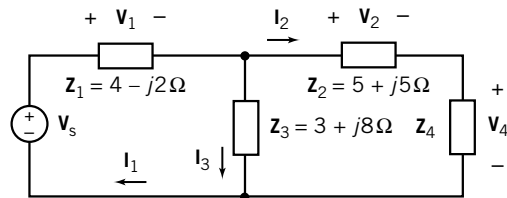


Figura P 11.5-14

## Sección 11.6 Factor de potencia

**P 11.6-1** Una empresa industrial tiene dos cargas eléctricas conectadas en paralelo a través de la fuente de potencia. La potencia se alimenta a la empresa a  $4000 \text{ V rms}$ . Una carga es de  $30 \text{ kW}$  de uso de calefacción, y la otra es para un grupo de motores que funcionan en conjunto como una carga de factor de potencia a  $0.6$  de retardo y a  $150 \text{ kVA}$ . Determine la corriente total y el factor de potencia de la planta.

*Respuesta:*  $I = 42.5 \text{ A rms}$  y  $pf = 1/\sqrt{2}$

**P 11.6-2** Dos cargas eléctricas están conectadas en paralelo a una alimentación de  $400 \text{ V rms}$ ,  $60 \text{ Hz}$ . La primera carga es de

12 kVA a un factor de potencia de 0.7 de retardo. Encuentre la potencia promedio, la potencia aparente y el factor de potencia de las dos cargas combinadas.

**Respuesta:** Factor de potencia total = 0.75 de retardo

**P 11.6-3** La fuente de la figura P 11.6-3 transmite 50 VA con un factor de potencia de a 0.8 de retardo. Encuentre la impedancia desconocida  $Z$ .

**Respuesta:**  $Z = 6.39 \angle 26.6^\circ \Omega$

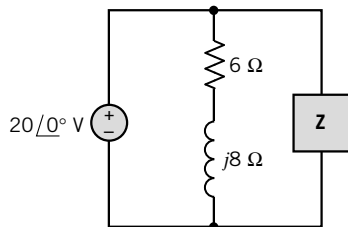


Figura P 11.6-3

**P 11.6-4** Las estaciones espaciales tripuladas requieren constantemente varias fuentes de potencias disponibles. Además, se desea mantener el factor potencia cercano a 1. Considere el modelo de un circuito de comunicación que se muestra en la figura P 11.6-4. Si una potencia promedio de 500 W se disipa en el resistor de 20 Ω, encuentre (a)  $V_{rms}$ , (b)  $I_{s rms}$ , (c) el factor potencia visto por la fuente y (d)  $|V_s|$ .

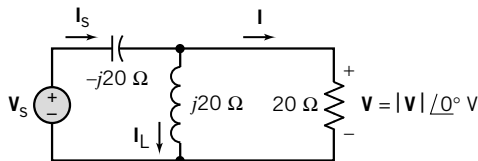


Figura P 11.6-4

**P 11.6-5** Se alimenta a dos impedancias por  $V = 100 \angle 160^\circ V_{rms}$ , como se muestra en la figura P 11.6-5, donde  $I = 2 \angle 190^\circ A$  rcm. La primera carga traza  $P_1 = 23.2 W$  y  $Q_1 = 50 VAR$ . Calcule  $I_1$ ,  $I_2$ , el factor de potencia de cada impedancia y el factor de potencia total del circuito.

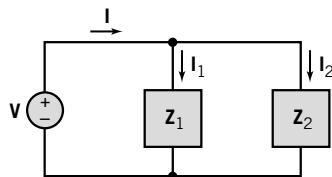


Figura P 11.6-5

**P 11.6-6** En la figura P 11.6.-6a se muestra un circuito de tres cables de una alimentación eléctrica residencial a partir de un transformador. El modelo del circuito se muestra en la figura P 11.6-6b. A partir de su letrero, se sabe que el motor del refrigerador tiene una corriente nominal de 8.5 A rcm. Es lógico suponer un ángulo de impedancia inductivo de 45° para un motor pequeño a una carga nominal. Las cargas de lámpara y hornillo son de 100 W y 12 kW, respectivamente.

- (a) Calcule las corriente en la línea 1, línea 2 y cable neutral.
- (b) Calcule: (i)  $P_{refrig}$ ,  $Q_{refrig}$ ; (ii)  $P_{lámp}$ ,  $Q_{lámp}$ ; y (iii)  $P_{total}$ ,  $Q_{total}$ ,  $S_{total}$ , y el factor de potencia en conjunto.
- (c) La resistencia de la conexión neutral aumenta, debido a corrosión y pérdidas, a 20 Ω (esto se debe incluir como parte del cableado neutral). Utilice el análisis de enlaces y calcule el voltaje a través de la lámpara.

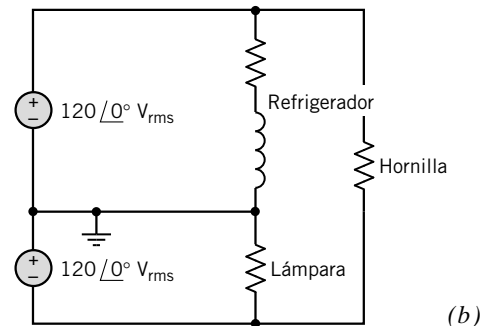
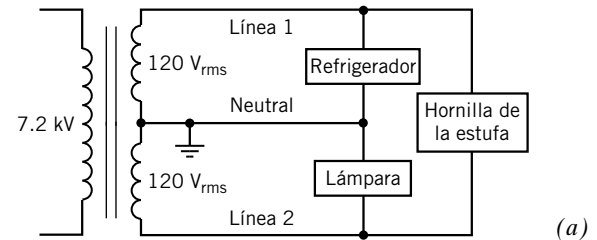


Figura P 11.6-6 Circuito residencial con cargas seleccionadas.

**P 11.6-7** Un motor conectado a una línea de alimentación de 220-V desde la compañía de energía, tiene una corriente de 7.6 A. La corriente y el voltaje son valores rms. La potencia promedio transmitida al motor es de 1 317 W.

- (a) Encuentre la potencia aparente, la potencia reactiva y el factor de potencia cuando  $\omega = 377 \text{ rad/s}$ .
- (b) Encuentre la capacitancia de un condensador en paralelo que dará por resultado una unidad del factor de potencia de la combinación.
- (c) Encuentre la corriente en las líneas de la instalación luego de que el condensador esté instalado.

**Respuestas:** (a)  $pf = 0.788$ ; (b)  $C = 56.5 \mu F$ ; (c)  $I = 6.0 A$  rcm

**P 11.6-8** Hay dos cargas conectadas en paralelo a través de una fuente de 1 000-V rms, de 60 Hz. Una carga absorbe 500 kW a 0.6 de retardo del factor de potencia, y la segunda absorbe 400 kW y 600 kVAR. Determine el valor del condensador que se debe agregar en paralelo con las dos cargas para mejorar el factor de potencia en conjunto a 0.9 de retardo.

**Respuesta:**  $C = 2.2 \mu F$ .

**P 11.6-9** Una fuente de voltaje con una impedancia interna compleja está conectada a una carga, como se muestra en la figura P 11. 6.9. La carga absorbe 1 kW de potencia promedio

a 100 V rms con un factor de potencia de 0.8 de retardo. La frecuencia de la fuente es de 200 rad/s.

- Determine el voltaje de la fuente  $V_1$ .
- Encuentre el tipo y valor del elemento que se ha de colocar en paralelo con la carga, de modo que se transfiera la potencia máxima a la carga.

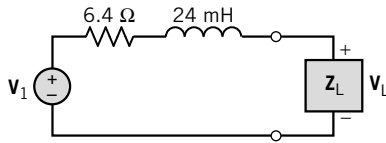
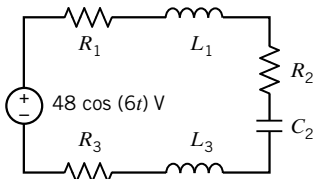


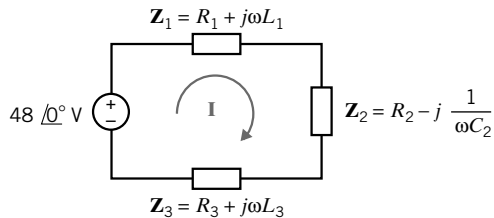
Figura P 11.6-9

**P 11.6-10** El circuito que se muestra en la figura P 11.6-10a se puede representar en el dominio de frecuencia como se muestra en la figura P 11.6-10b. En el dominio de frecuencia, el valor de cada corriente de enlaces es  $I = 1.076 \angle -8.3^\circ$  A.

- Determine la potencia compleja alimentada por la fuente de voltaje.
- Dado que la potencia compleja recibida por  $Z_1$  es  $6.945 + j13.89$  VA, determine los valores de  $R_1$  y  $L_1$ .
- Dado que la potencia real recibida por  $Z_3$  es de 4.63 W a un factor de potencia de 0.56 de retardo, determine los valores de  $R_3$  y  $L_3$ .



(a)



(b)

Figura P 11.6-10

**P 11.6-11** El circuito en la figura P 11.6-11 consta de una fuente conectada a una carga. La fuente transmite 14.12 W a la carga en un factor de potencia de 0.857 de retardo. ¿Cuáles son los valores de la resistencia,  $R$ , y de la inductancia,  $L$ ?

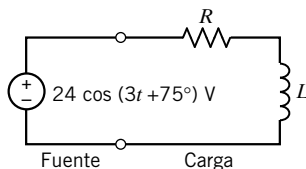


Figura P 11.6-11

**P 11.6-12** El circuito en la figura P 11.6-12 consta de una fuente conectada a una carga. Determine la impedancia de la carga y la potencia compleja transmitida por la fuente a la carga según cada una de las condiciones siguientes:

- La fuente transmite  $14.12 + j8.47$  VA a la carga  $A$  y  $8.47 + j14.12$  VA a la carga  $B$ .
- La fuente transmite  $8.47 + j14.12$  VA a la carga  $A$  y la impedancia de la carga  $B$  es  $15 + j9 \Omega$ .
- La fuente transmite 14.12 W a la carga  $A$  a un factor de potencia de 0.857 de retardo, y la impedancia de la carga  $B$  es  $9 + j15 \Omega$ .
- La impedancia de la carga  $A$  es  $15 + j9 \Omega$ , y la impedancia de la carga  $B$  es  $9 + j15 \Omega$ .

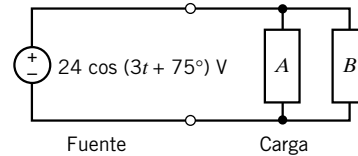


Figura P 11.6-12

**P 11.6-13** La figura P 11.6-13 muestra dos representaciones posibles de una carga eléctrica. Una de estas representaciones se utiliza cuando el factor de potencia de la carga es de retardo, y el otro se utiliza cuando el factor de potencia es de conducción. Considere dos casos:

- En la frecuencia  $\omega = 4$  rad/s, la carga tiene el factor de potencia  $pf = 0.8$  de retardo.
- En la frecuencia  $\omega = 4$  rad/s, la carga tiene el factor de potencia  $pf = 0.8$  de retardo.

En cada caso, elija una de las dos representaciones de la carga. Sea  $R = 6 \Omega$  y determine el valor de la capacitancia,  $C$ , o de la inductancia,  $L$ .

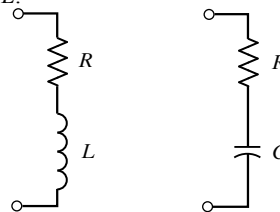


Figura P 11.6-13

**P 11.6-14** La figura P 11.6-14 muestra dos representaciones posibles de una carga eléctrica. Una de estas representaciones se utiliza cuando el factor de potencia de la carga es de retardo, y el otro se utiliza cuando el factor de potencia es de conducción. Considere dos casos:

- En la frecuencia  $\omega = 4$  rad/s, la carga tiene el factor de potencia  $pf = 0.8$  de retardo.
- En la frecuencia  $\omega = 4$  rad/s, la carga tiene el factor de potencia  $pf = 0.8$  de retardo.

En cada caso, elija una de las dos representaciones de la carga. Sea  $R = 6 \Omega$  y determine el valor de la capacitancia,  $C$ , o de la inductancia,  $L$ .

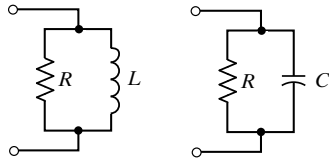


Figura P 11.6-14

**P 11.6-15** La figura P 11.6-15 muestra dos cargas eléctricas. Exprese el factor de potencia de cada carga en términos de  $\omega$ ,  $R$  y  $L$ .

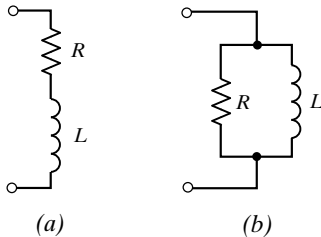


Figura P 11.6-15

**P 11.6-16** La figura P 11.6-16 muestra dos cargas eléctricas. Exprese el factor de potencia de cada carga en términos de  $\omega$ ,  $R$  y  $C$ .

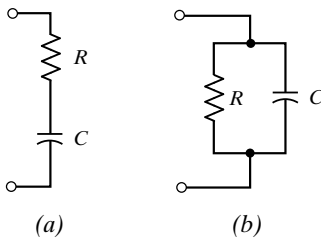


Figura P 11.6-16

**P 11.6-17** El voltaje de la fuente en el circuito que se muestra en la figura P 11.6-17 es  $V_s = 24 \angle 30^\circ$  V. En consecuencia,

$$I_1 = 3.13 \angle 25.4^\circ \text{ A}, I_2 = 1.99 \angle 52.9^\circ \text{ A} \text{ y } V_4 = 8.88 \angle -10.6^\circ \text{ V}$$

Determine (a) el factor de potencia de  $Z_1$ ; (b) el factor de potencia de  $Z_3$  y (c) el factor de potencia de  $Z_4$ . Incluya la indicación de conducción o retardo.

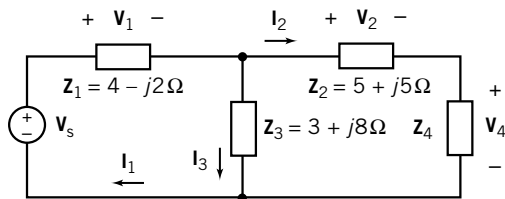


Figura P 11.6-17

**Sección 11.7 Principio de superposición de potencia**

**P 11.7-1** Encuentre la potencia promedio absorbida por el resistor de  $2\text{-}\Omega$  en el circuito de la figura P 11.7-1.

Respuesta:  $P = 413 \text{ W}$

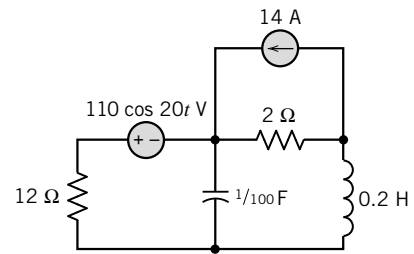


Figura P 11.7-1

**P 11.7-2** Encuentre la potencia promedio absorbida por el resistor de  $8\text{-}\Omega$  en el circuito de la figura P 11.7-2.

Respuesta:  $P = 22 \text{ W}$

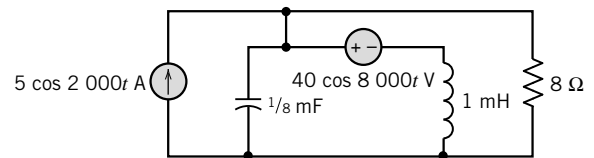


Figura P 11.7-2

**P 11.7-3** Para el circuito que se muestra en la figura P 11.7-3, determine la potencia promedio absorbida por cada resistor,  $R_1$  y  $R_2$ . La fuente de voltaje es  $v_s = 10 + 10 \cos(5t + 40^\circ)$  V, y la fuente de corriente es  $i_s = 4 \cos(5t - 30^\circ)$  A.

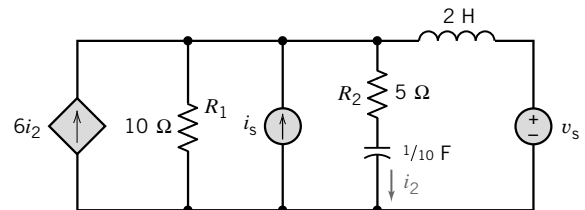


Figura P 11.7-3

**P 11.7-4** Para el circuito que se muestra en la figura P 11.7-4, determine el valor efectivo del voltaje del resistor  $v_R$  y el voltaje del condensador  $v_C$ .

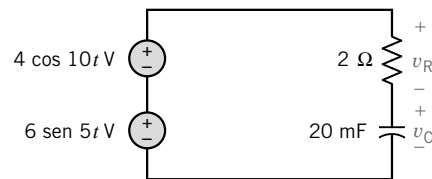


Figura P 11.7-4

**Sección 11.8 Teorema de la transferencia de potencia máxima**

**P 11.8-1** Determine los valores de  $R$  y  $L$  para el circuito que se muestra en la figura P 11.8-1 que ocasiona la transferencia de potencia máxima a la carga.



**Respuesta:**  $R = 800 \Omega$  y  $L = 1.6 \text{ H}$

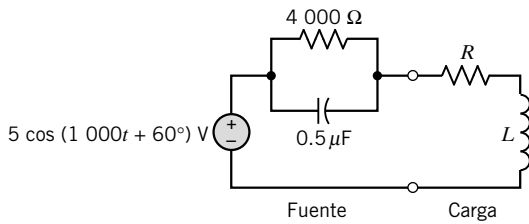


Figura P 11.8-1

**P 11.8-2** ¿Es posible elegir  $R$  y  $L$  para el circuito que se muestra en la figura P 11.8-2 de modo que la potencia promedio transmitida a la carga sea de  $12 \text{ mW}$ ?

**Respuesta:** Sí

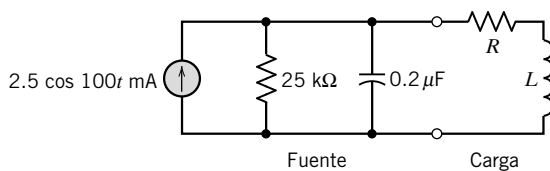


Figura P 11.8-2

**P 11.8-3** En la figura P 11.8-3 se ha agregado el condensador a la carga para maximizar la potencia absorbida por el resistor de  $4000 \Omega$ . ¿Qué valor de capacitancia se debe utilizar para cumplir con el objetivo?

**Respuesta:**  $0.1 \mu\text{F}$

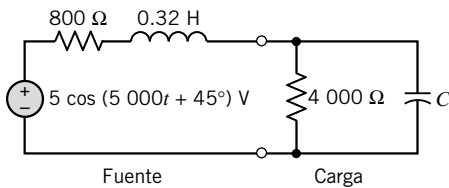


Figura P 11.8-3

**P 11.8-4** ¿Cuál es el valor de la potencia promedio transmitida al resistor de  $2000\text{-}\Omega$  en el circuito que se muestra en la figura P 11.8-4? ¿Se puede aumentar la potencia promedio transmitida al resistor de  $2000\text{-}\Omega$  al ajustar el valor de la capacitancia?

**Respuesta:**  $8 \text{ mW}$ . No

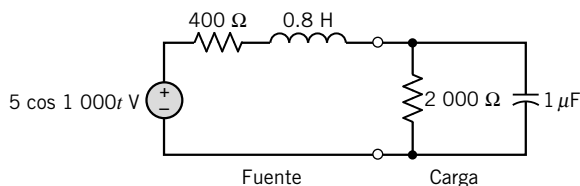


Figura P 11.8-4

**P 11.8-5** ¿Cuál es el valor de la resistencia  $R$  en la figura P 11.8-5 que maximiza la potencia promedio transmitida a la carga?

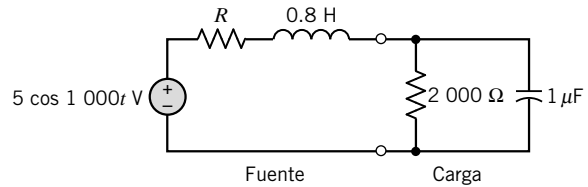


Figura P 11.8-5

### Sección 11.9 Inductores acoplados

**P 11.9-1** Dos bobinas acopladas magnéticamente están conectadas como se muestra en la figura P 11.9-1. Muestre que una inductancia equivalente en las terminales a-b es  $L_{ab} = L_1 + L_2 - 2M$ .

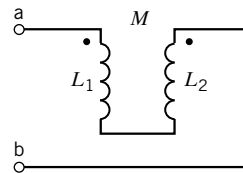


Figura P 11.9-1

**P 11.9-2** Dos bobinas acopladas magnéticamente están conectadas como se muestra en la figura P 11.9-2. Encuentre la inductancia equivalente  $L_{ab}$ .

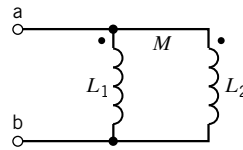


Figura P 11.9-2

**P 11.9-3** El voltaje de fuente del circuito que se muestra en la figura P 11.9-3 es  $v_s = 141.4 \cos(100t) \text{ V}$ . Determine  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$ .

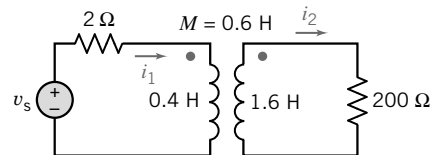


Figura P 11.9-3

**P 11.9-4** En la figura P 11.9-4 se muestra un circuito con una inductancia mutua. Encuentre el voltaje  $V_2$  cuando  $\omega = 5000$ .

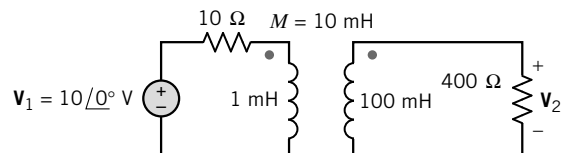


Figura P 11.9-4

**P 11.9-5** Determine  $v(t)$  para el circuito de la figura P 11.9-5 cuando  $v_s = 10 \cos(30t) \text{ V}$ .

Respuesta:  $v(t) = 23 \cos(30t + 9^\circ) \text{ V}$

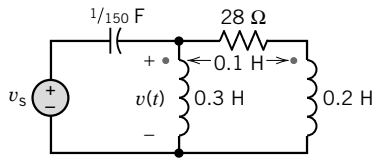


Figura P 11.9-5

**P 11.9-6** Encuentre la energía total almacenada en el circuito que se muestra en la figura P 11.9-6 en  $t = 0$  si la bobina secundaria está (a) en circuito abierto; (b) en cortocircuito; (c) conectada a las terminales de un resistor de  $7\text{-}\Omega$ .

Respuestas: (a) 15 J; (b) 0 J; (c) 5 J

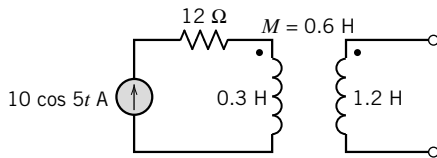


Figura P 11.9-6

**P 11.9-7** Encuentre la impedancia de entrada,  $Z$ , del circuito de la figura P 11.9-7 cuando  $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ .

Respuesta:  $Z = 8.4 \angle 14^\circ \Omega$

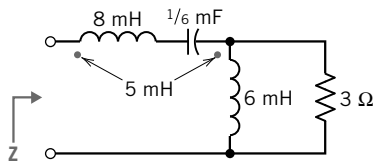


Figura P 11.9-7

**P 11.9-8** En la figura 11.9-8 se muestra un circuito con tres inductancias mutuas. Cuando  $v_s = 10 \cos 2t \text{ V}$ ,  $M_1 = 2 \text{ H}$ , y  $M_2 = M_3 = 1 \text{ H}$ , determine el voltaje del condensador  $v(t)$ .

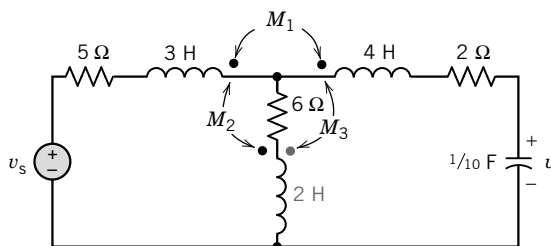


Figura P 11.9-8

**P 11.9-9** Las corrientes  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  en la figura P 11.9-9 son corrientes de enlaces. Represente el circuito en el dominio de frecuencia y escriba las ecuaciones de enlaces.

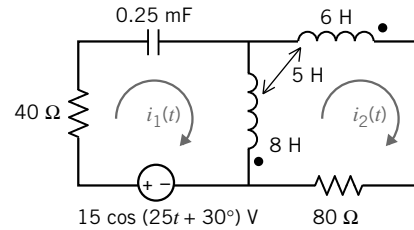


Figura P 11.9-9

**P 11.9-10** Determine las corrientes de enlaces para el circuito que se muestra en la figura P 11.9-10.

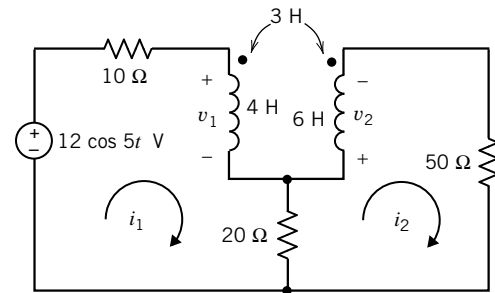


Figura P 11.9-10

**P 11.9-11** Determine los voltajes de las bobinas,  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ , para el circuito que se muestra en la figura P 11.9-11.

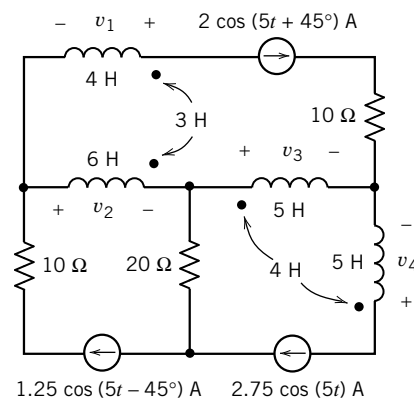


Figura P 11.9-11

**P 11.9-12** La figura P 11.9-12 muestra tres circuitos semejantes. En cada uno la entrada al circuito es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s(t)$ . La salida es el voltaje a través de la bobina de la derecha,  $v_o(t)$ . Determine el voltaje de salida en estado estable,  $v_o(t)$ , para cada uno de los tres circuitos.

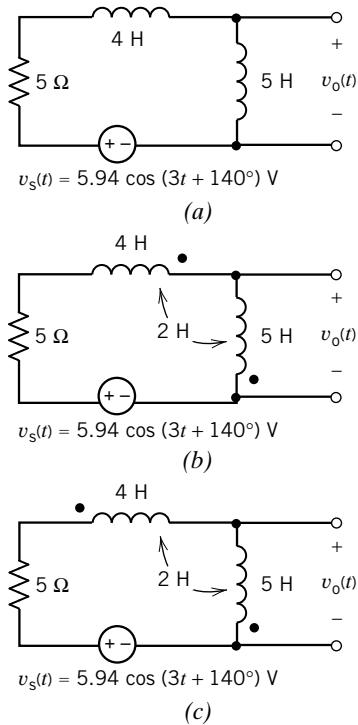


Figura P 11.9-12

**P 11.9-13** La figura P 11.9-13 muestra tres circuitos semejantes. En cada uno la entrada al circuito es el voltaje de la fuente de voltaje,

$$v_s(t) = 5.7 \cos(4t + 158^\circ) \text{ V}$$

La salida en cada circuito es el voltaje a través de la bobina de la derecha,  $v_o(t)$ . Determine el voltaje de salida en estado estable,  $v_o(t)$ , para cada uno de los tres circuitos.

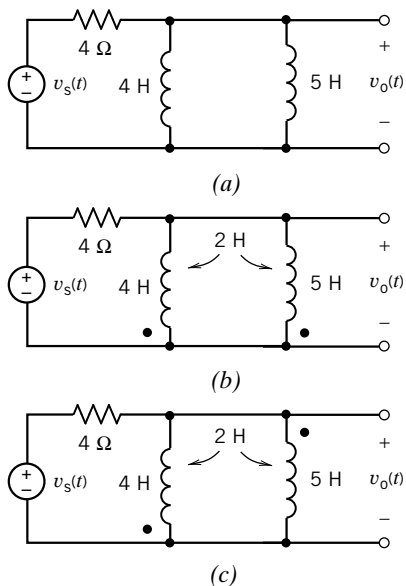


Figura P 11.9-13

**P 11.9-14** El circuito que se muestra en la figura P 11.9-14 está representado en el dominio de tiempo. Determine los voltajes  $v_1$  y  $v_2$  de las bobinas.

**Respuestas:**  $v_1 = 104.0 \cos(6t + 46.17^\circ) \text{ V}$ , y  $v_2 = 100.6 \cos(6t + 63.43^\circ) \text{ V}$

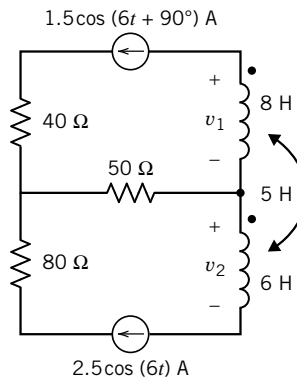


Figura P 11.9-14

**P 11.9-15** El circuito que se muestra en la figura P 11.9-14 está representado en el dominio de frecuencia. (Por ejemplo,  $-j30 \Omega$  es la impedancia debido a la inductancia mutua de las bobinas acopladas.) Suponga que  $\mathbf{V}(\omega) = 70 \angle 0^\circ \text{ V}$ . Entonces  $\mathbf{I}_1(\omega) = B \angle \theta \text{ A}$  e  $\mathbf{I}_2(\omega) = 0.875 \angle -90^\circ \text{ A}$ . Determine los valores de  $B$  y  $\theta$ .

**Respuestas:**  $B = 1.75 \text{ A}$  y  $\theta = -90^\circ$

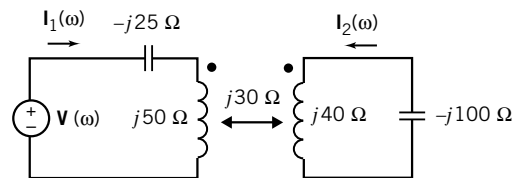


Figura P 11.9-15

**P 11.9-16** Determine los valores de las inductancias  $L_1$  y  $L_2$  en el circuito que se muestra en la figura P 11.9-16, dado que

$$i(t) = 0.319 \cos(4t - 82.23^\circ) \text{ A}$$

y

$$v(t) = 0.9285 \cos(4t - 62.20^\circ) \text{ V}.$$

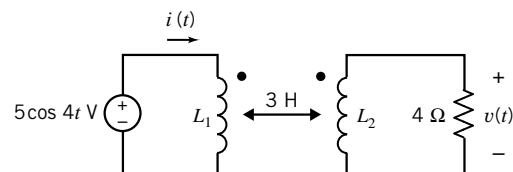


Figura P 11.9-16

**P 11.9-17** Determine la potencia compleja alimentada por la fuente en el circuito que se muestra en la figura P 11.9-17.

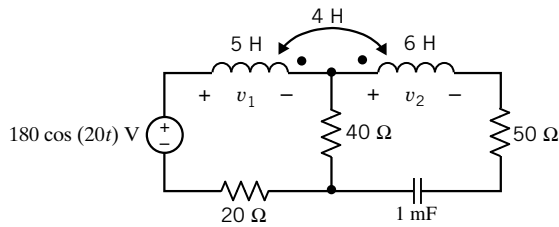


Figura P 11.9-17

**Sección 11.10 El transformador ideal**

**P 11.10-1** Encuentre  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $I_1$  e  $I_2$  para el circuito de la figura P 11.10-1 cuando  $n = 5$ .

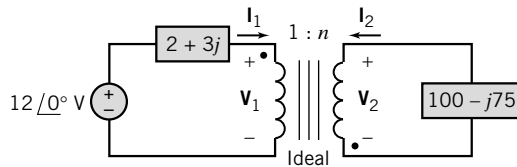


Figura P 11.10-1

**P 11.10-2** En la figura P 11.10-1 se muestra un circuito con un transformador.

- (a) Determine la relación de vueltas,  $n$ .
- (b) Determine el valor de  $R_{ab}$ .
- (c) Determine la corriente,  $i$ , alimentada por la fuente de voltaje.

**Respuestas:** (a)  $n = 5$ ; (b)  $R_{ab} = 400 \Omega$

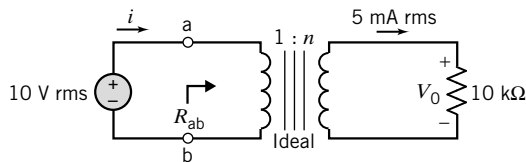


Figura P 11.10-2

**P 11.10-3** Encuentre el voltaje  $V_c$  en el circuito que se muestra en la figura P 11.10-3. Suponga que es un transformador. La proporción de vueltas es  $n = 1/3$ .

**Respuesta:**  $V_c = 21.0 \angle -105.3^\circ$

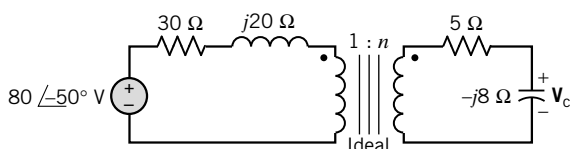


Figura P 11.10-3

**P 11.10-4** Un transformador ideal está conectado en el circuito que se muestra en la figura P 11.10-4, donde  $v_s = 50 \cos 1000t$  V y  $n = N_2/N_1 = 5$ . Calcule  $V_1$  y  $V_2$ .

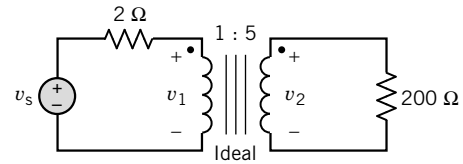


Figura P 11.10-4

**P 11.10-5** El circuito de la figura P 11.10-5 está operando a  $10^5$  rad/s. Determine la inductancia  $L$  y la proporción de vueltas  $n$  para llegar a la transferencia de potencia máxima a la carga.

**Respuesta:**  $n = 2$

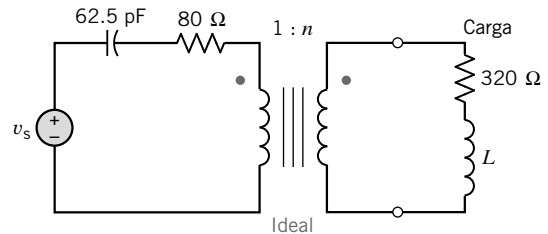


Figura P 11.10-5

**P 11.10-6** Encuentre el equivalente de Thévenin en las terminales a-b para el circuito de la figura P 11.10-6 cuando  $v = 16 \cos 3t$  V.

**Respuesta:**  $V_{oc} = 12$  y  $Z_t = 3.75 \Omega$

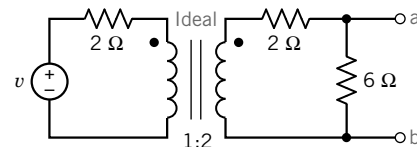


Figura P 11.10-6

**P 11.10-7** Encuentre la impedancia  $Z$  de entrada para el circuito de la figura P 11.10-7.

**Respuesta:**  $Z = 6 \Omega$

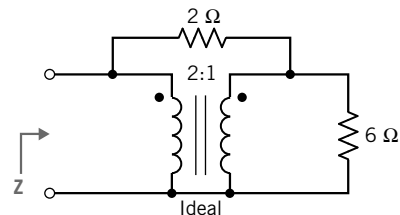


Figura P 11.10-7

**P 11.10-8** En regiones menos desarrolladas de áreas montañosas se utilizan pequeños generadores hidroeléctricos para dar servicio a varias residencias (Mackay, 1990). Suponga que cada hogar utiliza una línea eléctrica y un refrigerador, como se muestra en la figura P 11.10-8. El generador está representado como  $V_s$  operando a 60 Hz y  $V_2 = 230 \angle 0^\circ$  V. Calcule la potencia consumida por cada hogar conectado al generador hidroeléctrico cuando  $n = 5$ .

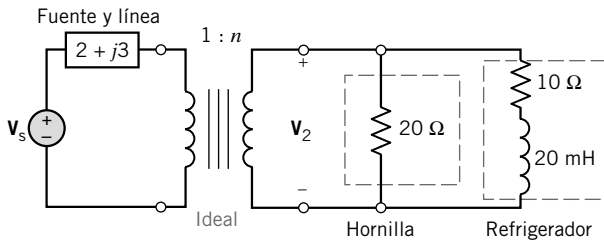


Figura P 11.10-8

**P 11.10-9** En la figura P 11.9-12 se muestran tres circuitos semejantes. En cada uno de estos circuitos,  $v_s(t) = 5 \cos(4t + 45^\circ)$  V. Determine  $v_2(t)$ , para cada uno de los tres circuitos.

**Respuestas:** (a)  $v_2(t) = 0$  V

(b)  $v_2(t) = 1.656 \cos(4t + 39^\circ)$  V

(c)  $v_2(t) = 2.88 \cos(4t + 45^\circ)$  V

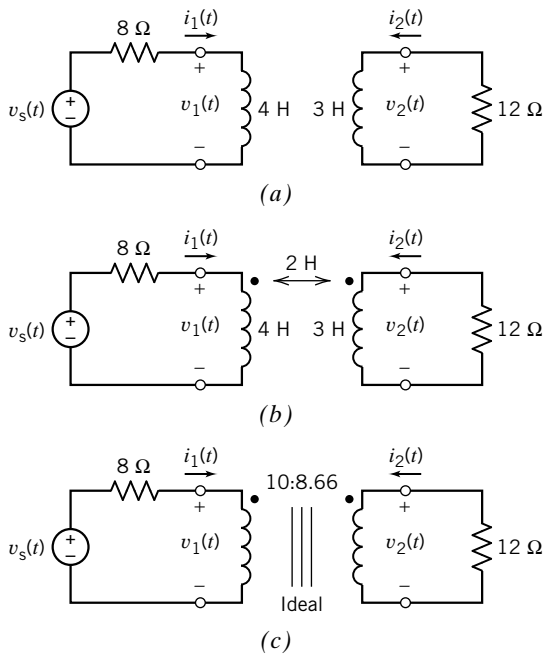


Figura P 11.10-9

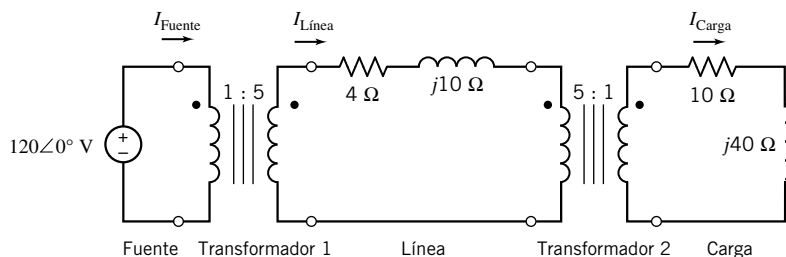


Figura P 11.10-12

**P 11.10-10** Encuentre  $V_1$  e  $I_1$  para el circuito de la figura P 11.10-10 cuando  $n = 5$ .

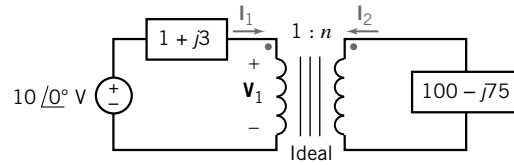


Figura P 11.10-10

**P 11.10-11** Determine  $v_2$  e  $i_2$  para el circuito de la figura P 11.10-11 cuando  $n = 2$ . Observe que  $i_2$  no llega a la terminal con punto.

**Respuestas:**  $v_2 = 6.08 \cos(10t + 47.7^\circ)$  V

$i_2 = 3.34 \cos(10t + 42^\circ)$  V

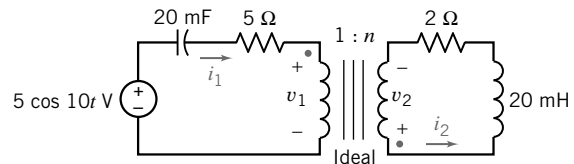


Figura P 11.10-11

**P 11.10-12** El circuito que se muestra en la figura P 11.10-12 está representado en el dominio de frecuencia. Dada la corriente de la línea  $I_{\text{línea}} = 0.5761 \angle -75.88^\circ$  A, determine  $P_{\text{fuente}}$ , la potencia promedio alimentada por la fuente;  $P_{\text{línea}}$ , la potencia promedio transmitida a la línea, y  $P_{\text{carga}}$ , la potencia promedio transmitida a la carga.

**Sugerencia:** Utilice la conservación de potencia (promedio) para verificar sus respuestas.

**Respuesta:**  $P_{\text{fuente}} = 42.15$  W,  $P_{\text{línea}} = 0.6638$  W y  $P_{\text{carga}} = 41.49$  W

**P 11.10-13** El circuito que se muestra en la figura P 11.10-13 está representado en el dominio de frecuencia. Determine  $R$  y  $X$ , las partes real e imaginaria de la impedancia equivalente  $Z_{eq}$ .

*Respuesta:*  $R = 180 \Omega$  y  $X = 110 \Omega$

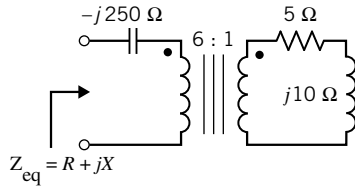


Figura P 11.10-13

**Sección 11.11 ¿Cómo lo podemos comprobar...?**

**P 11.11-1** El análisis por computadora del circuito que se muestra en la figura P 11.11-1 indica que cuando

$$v_s(t) = 12 \cos(4t + 30^\circ) \text{ V}$$

las corrientes de enlaces están dadas por

$$i_1(t) = 2.327 \cos(4t - 25.22^\circ) \text{ A}$$

y

$$i_2(t) = 1.229 \cos(4t - 11.19^\circ) \text{ A}$$

Compruebe los resultados de este análisis verificando que la potencia promedio alimentada por la fuente de voltaje es igual a la suma de las potencias promedio recibidas por los demás elementos de circuito

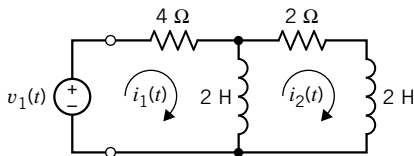


Figura P 11.11-1

**P 11.11-2** El análisis por computadora del circuito que se muestra en la figura P 11.11-2 indica que cuando

$$v_s(t) = 12 \cos(4t + 30^\circ) \text{ V}$$

las corrientes de enlaces están dadas por

$$i_1(t) = 1.647 \cos(4t - 17.92^\circ) \text{ A}$$

y

$$i_2(t) = 1.094 \cos(4t - 13.15^\circ) \text{ A}$$

Compruebe los resultados de este análisis verificando que la potencia promedio alimentada por la fuente de voltaje es igual a la suma de las potencias promedio recibidas por los demás elementos de circuito

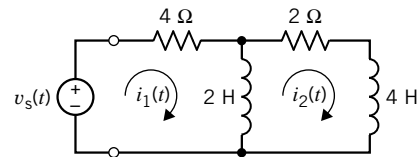


Figura P 11.11-2

**P 11.11-3** El análisis por computadora del circuito que se muestra en la figura P 11.11-1 indica que cuando

$$v_s(t) = 12 \cos(4t + 30^\circ) \text{ V}$$

las corrientes de enlaces están dadas por

$$i_1(t) = 1.001 \cos(4t - 47.01^\circ) \text{ A}$$

y

$$i_2(t) = 0.4243 \cos(4t - 15.00^\circ) \text{ A}$$

Compruebe los resultados de este análisis verificando que las ecuaciones que describen corrientes y voltajes de bobinas acopladas se satisfagan.

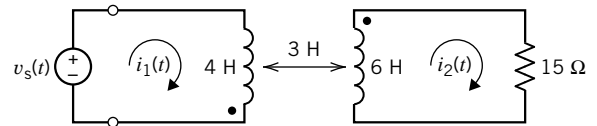


Figura P 11.11-3

**P 11.11-4** El análisis por computadora del circuito que se muestra en la figura P 11.11-4 indica que cuando

$$v_s(t) = 12 \cos(4t + 30^\circ) \text{ V}$$

las corrientes de enlaces están dadas por

$$i_1(t) = 25.6 \cos(4t + 30^\circ) \text{ mA}$$

y

$$i_2(t) = 64 \cos(4t + 30^\circ) \text{ mA}$$

Compruebe los resultados de este análisis verificando que las ecuaciones que describen corrientes y voltajes de transformadores ideales se satisfagan.

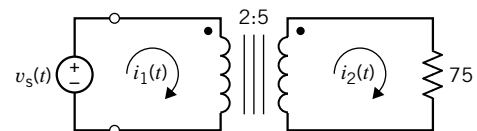


Figura P 11.11-4

## Problemas de PSpice

**PS 11-1** La entrada al circuito que se muestra en la figura PS 11-1 es el voltaje de la fuente de voltaje

$$v_s(t) = 7.5 \sin(5t + 15^\circ) \text{ V}$$

La salida es el voltaje a través del resistor de  $4\text{-}\Omega$ ,  $v_o(t)$ . Utilice PSpice para trazar los voltajes de entrada y salida.

*Sugerencia:* Represente la fuente de voltaje, utilizando la parte VSIN de PSpice.

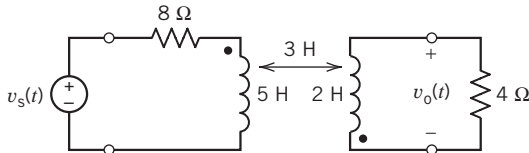


Figura PS 11.1

**PS 11-2** La entrada al circuito que se muestra en la figura PS 11-1 es el voltaje de la fuente de voltaje

$$v_s(t) = 7.5 \sin(5t + 15^\circ) = 7.5 \cos(5t - 75^\circ) \text{ V}$$

La salida es el voltaje a través del resistor de  $4\text{-}\Omega$ ,  $v_o(t)$ . Utilice PSpice para determinar la potencia promedio transmitida a los inductores acoplados.

*Sugerencia:* Represente la fuente de voltaje, utilizando la parte VAC de PSpice. Utilice impresores (las partes IPRINT y VPRINT de PSpice) para medir la corriente ca y el voltaje de cada bobina.

**PS 11-3** La entrada al circuito que se muestra en la figura PS 11-3 es el voltaje de la fuente de voltaje

$$v_s(t) = 48 \cos(4t - 114^\circ) \text{ V}$$

La salida es el voltaje a través del resistor de  $9\text{-}\Omega$ ,  $v_o(t)$ . Utilice PSpice para determinar la potencia promedio transmitida al transformador.

*Sugerencia:* Represente la fuente de voltaje, utilizando la parte VAC de PSpice.

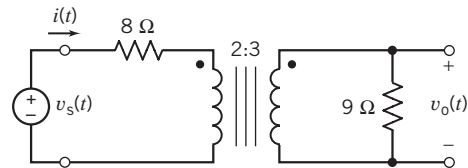


Figura PS 11.3

**PS 11-4** Determine el valor de impedancia,  $Z_t$ , de entrada del circuito que se muestra en la figura PS 11-4 en la frecuencia  $\omega = 4 \text{ rad/s}$ .

*Sugerencia:* Conecte una fuente de corriente a través de las terminales del circuito. Mida el voltaje a través de la fuente de corriente. El valor de impedancia será igual a la razón del voltaje con la corriente.

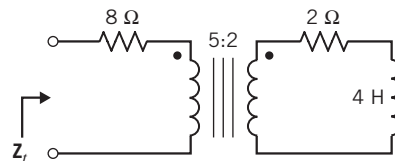


Figura PS 11.4

## Problemas de diseño

**PD 11-1** Un motor de inducción de  $100 \text{ kW}$ , que se muestra en la figura PD 11-1, recibe  $100 \text{ kW}$  a un factor de potencia de  $0.8$  de retardo. Determine la potencia aparente adicional en  $\text{kVA}$  que quedó disponible al mejorar el factor de potencia a (a)  $0.95$  de retardo y (b) a  $1.0$ . (c) Encuentre la potencia reactiva requerida en  $\text{kVAR}$  proporcionados por un grupo de condensadores en paralelo para las partes (a) y (b). (d) Determine la razón de  $\text{kVA}$  liberados a los  $\text{kVA}$  de condensadores requeridos para las partes (a) y (b) solas. Conforme una tabla, registrando los resultados de este problema para los dos valores del factor de potencia alcanzado.

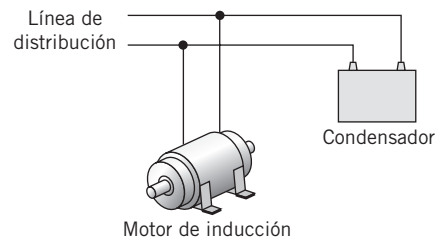


Figura PD 11-1 Motor de inducción con un condensador en paralelo.

**PD 11-2** Hay dos cargas conectadas en paralelo y alimentadas desde una fuente de 7.2-kV rms, 60-Hz. La primera carga es de 50-kVA a un factor de potencia de 0.9 de retardo, y la segunda carga es de 45 kW a un factor de potencia de 0.91 de retardo. Determine la clase de kVAR y capacitancia requeridos para corregir el factor de potencia en conjunto a 0.97 de retardo.

*Respuesta:*  $C = 1.01 \mu\text{F}$

**PD 11-3**

- (a) Determine la impedancia de carga  $Z_{ab}$  que absorberá la potencia máxima si está conectada a las terminales a-b del circuito que se muestra en la figura PD 11.3.
- (b) Determine la potencia máxima absorbida por esta carga.
- (c) Determine un modelo de carga e indique los valores del elemento.

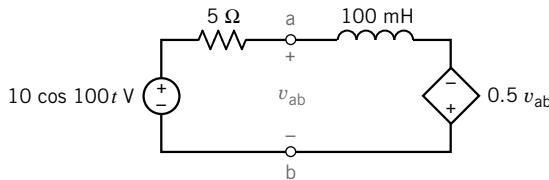


Figura PD 11.3

**PD 11-4** Seleccione la proporción de vueltas  $n$  necesarias para proporcionar la potencia máxima al resistor  $R$  del circuito que se muestra en la figura PD 11.4. Suponga un transformador ideal. Seleccione  $n$  cuando  $R = 4$  y  $8 \Omega$ .

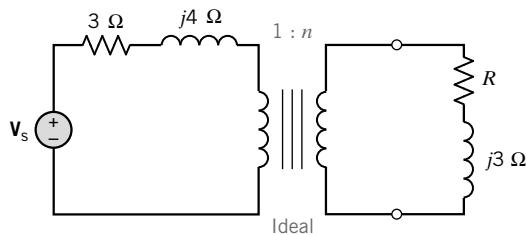


Figura PD 11-4

**PD 11-5** Un amplificador en un radio de onda corta opera a 100 kHz. La carga  $Z_2$  está conectada a una fuente a través de un transformador ideal, como se muestra en la figura PD 11-5.

La carga es una conexión en serie de una resistencia de  $10\text{-}\Omega$  y una inductancia de  $10\text{-}\mu\text{H}$ . La impedancia  $Z_f$  consta de una resistencia de  $1\text{-}\Omega$  y una inductancia de  $1\text{-}\mu\text{H}$ .

- (a) Seleccione una integral  $n$  para maximizar la energía transmitida a la carga. Calcule  $I_2$  y la energía a la carga.
- (b) Agregue una capacitancia  $C$  en serie con  $Z_2$  para mejorar la energía transmitida a la carga.

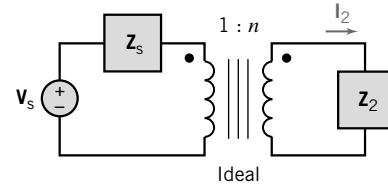


Figura PD 11.5

**PD 11-6** Se ha desarrollado una nueva lámpara electrónica (e-lamp) que utiliza un oscilador senoidal de frecuencia de radio y una bobina para transmitir energía a un anillo de nubes de gas de mercurio como se muestra en la figura PD 11.6a. El gas de mercurio emite una luz ultravioleta que se transmite a la cubierta de fósforo, la cual, a su vez, emite una luz visible. Un modelo del circuito de la e-lamp se muestra en la figura PD 11-6b. La capacitancia  $C$  y la resistencia  $R$  dependen del diseño de espacio de la lámpara y el tipo de fósforo. Seleccione  $R$  y  $C$  de modo que se transmita la potencia máxima a  $R$ , que se relaciona con la cubierta de fósforo (Adler, 1992). El circuito opera a  $\omega_0 = 10^7$  rad/s.

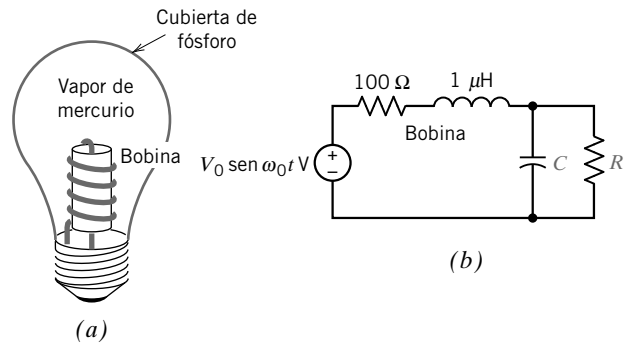


Figura PD 11.6 Lámpara electrónica.



# CAPÍTULO 12

## Circuitos trifásicos

### EN ESTE CAPÍTULO

- |      |  |       |  |
|------|--|-------|--|
| 12.1 | Introducción   | 12.8  | Medición de potencia con dos vatímetros                      |
| 12.2 | Voltajes trifásicos  | 12.9  | ¿Cómo lo podemos comprobar...?                               |
| 12.3 | Circuito Y a Y   | 12.10 | <b>EJEMPLO DE DISEÑO</b> — Corrección del factor de potencia |
| 12.4 | Fuente y carga conectadas a $\Delta$                               | 12.11 | Resumen  |
| 12.5 | Circuito Y a $\Delta$  |       | Problemas  |
| 12.6 | Circuitos trifásicos balanceados                                   |       | Problemas de PSpice  |
| 12.7 | Potencias promedio e instantánea en una carga trifásica balanceada |       | Problemas de diseño  |

### 12.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo empezaremos a analizar los *circuitos trifásicos*. Estos circuitos constan de tres partes: una fuente trifásica, una carga trifásica y una línea de transmisión. La fuente trifásica consta de, o bien tres fuentes de voltaje senoidal conectadas a Y (*estrella*)\*, o de tres fuentes de voltaje senoidal conectadas a  $\Delta$  (*delta*)\*. Del mismo modo, los elementos del circuito que comprenden la carga están conectados para formar una Y (estrella), o bien una  $\Delta$  (delta). La línea de transmisión se utiliza para conectar la fuente y consta de tres o de cuatro hilos. Estos circuitos se describen por nombres que identifican la forma en que se conectan la fuente y la carga. Por ejemplo, el circuito que se muestra en la figura 12.3-1 tiene una carga conectada a Y, fuente trifásica y conexión a Y. El circuito en la figura 12.3-1 se denomina circuito Y a Y. El circuito en la figura 12.5-1 tiene una fuente trifásica conectada a una carga conectada a  $\Delta$ . El circuito en la figura 12.5-1 se denomina circuito Y a  $\Delta$ .

Observe que el circuito Y a Y en la figura 12.3-1 se ha representado en el dominio de frecuencia, utilizando impedancias y fasores. Esto es adecuado porque las tres fuentes de voltaje que comprenden una fuente trifásica son fuentes senoidales que tienen la *misma frecuencia*. El análisis de circuitos trifásicos utilizando fasores e impedancias determinará la *respuesta de estado estable* del circuito trifásico.

Antes de empezar nuestro análisis de los circuitos trifásicos es útil recordar por qué es provechoso el uso de fasores para encontrar la respuesta de estado estable de circuitos lineales para entradas senoidales. Los circuitos que contienen condensadores o inductores están representados por ecuaciones diferenciales en el dominio de tiempo. Podemos despejar estas *ecuaciones diferenciales*, pero es muy laborioso. Impedancias y fasores representan el circuito en el dominio de frecuencia. Los circuitos lineales están representados por *ecuaciones algebraicas* en el dominio de frecuencia. Estas ecuaciones algebraicas implican números compuestos, pero incluso éstos son más fáciles de resolver que las ecuaciones diferenciales. Despejar estas ecuaciones algebraicas proporciona el fasor que corresponde al voltaje o a la corriente de salida. Sabemos que el voltaje o la corriente de salida en estado estable será senoidal y tendrá la misma frecuencia que la senoide de entrada. La magnitud y el ángulo fasorial del fasor que corresponde al voltaje o corriente de salida proporciona la magnitud y el ángulo fasorial de la senoide de salida.

**Tabla 12.1-1 Relaciones de potencia del dominio de frecuencia**

CANTIDAD	RELACIÓN UTILIZANDO VALORES PICO	RELACIÓN UTILIZANDO VALORES $RMS$	UNIDADES
Voltaje del elemento, $v(t)$	$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$	$v(t) = V_{rms} \sqrt{2} \cos(\omega t + \theta_v)$	V
Corriente del elemento, $i(t)$	$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$	$i(t) = I_{rms} \sqrt{2} \cos(\omega t + \theta_i)$	A
Potencia compleja, $S$	$S = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) + j \frac{V_m I_m}{2} \text{sen}(\theta_v - \theta_i)$	$S = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i) + j V_{rms} I_{rms} \text{sen}(\theta_v - \theta_i)$	VA
Potencia aparente, $ S $	$ S  = \frac{V_m I_m}{2}$	$ S  = V_{rms} I_{rms}$	VA
Potencia promedio, $P$	$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i)$	$P = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i)$	W
Potencia reactiva, $Q$	$Q = \frac{V_m I_m}{2} \text{sen}(\theta_v - \theta_i)$	$Q = V_{rms} I_{rms} \text{sen}(\theta_v - \theta_i)$	VAR

Nos interesa en particular la potencia que la fuente trifásica transmite a la carga trifásica. La tabla 12.1-1 resume las fórmulas que se pueden utilizar para calcular la potencia transmitida a un elemento cuando el voltaje y la corriente del elemento se apegan a la convención pasiva. La tabla 12.1-1 también ofrece las ecuaciones para la corriente y el voltaje del elemento senoidal. En la tabla,  $I_m$  y  $V_m$  son magnitudes de la corriente y el voltaje senoidales, en tanto que  $I_{rms}$  y  $V_{rms}$  son los valores efectivos correspondientes del voltaje y de la corriente. Observe que las fórmulas para potencias en términos de  $I_{rms}$  y  $V_{rms}$  son más simples que las fórmulas correspondientes en términos de  $I_m$  y  $V_m$ . Por el contrario, las ecuaciones que dan el voltaje y la corriente senoidales son más simples cuando se usan  $I_m$  y  $V_m$ . Cuando a los ingenieros les interesa sobre todo la potencia, prefieren utilizar  $k_{rms}$  y  $V_{rms}$ . Por otra parte, si su prioridad son los voltajes y las corrientes senoidales, se inclinan a utilizar  $I_m$  y  $V_m$ . En este capítulo, nuestro principal interés es la potencia y emplearemos los valores efectivos.

## 12.2 VOLTAJES TRIFÁSICOS

La generación y la transmisión de energía eléctrica son más eficientes en sistemas polifásicos que emplean combinaciones de dos, tres o más voltajes senoidales. Además, los circuitos polifásicos y las máquinas poseen algunas ventajas únicas. Por ejemplo, la potencia transmitida en un circuito trifásico es constante o independiente del tiempo más que de los pulsos, como sucede en un circuito monofásico. Incluso, los motores trifásicos arrancan y corren mucho mejor que los monofásicos. La forma más común de un sistema polifásico emplea tres voltajes balanceados. De igual magnitud pero con una diferencia fasorial de  $360^\circ/3 = 120^\circ$ .

Un generador de ca elemental consta de un imán rotativo y un embobinado estacionario. Las vueltas del embobinado se extienden por la periferia de la máquina. El voltaje generado en cada vuelta del embobinado está ligeramente desfasado respecto del voltaje generado en su vecino porque lo corta la densidad del flujo magnético máximo un instante antes o después. El voltaje producido en la primera bobina es  $v_{aa'}$ .

Si el primer embobinado continuara alrededor de la máquina, el voltaje generado en la última vuelta sería de  $180^\circ$  de desfase con respecto de la primera, y se tendría que cancelar, produciendo un efecto inútil. A ello se debe que un embobinado se extienda por lo común a no más de un tercio de la periferia, los otros dos tercios de la periferia pueden contener dos embobinados más que se utilizan para generar otros dos voltajes semejantes. En la figura 12.2-1a se muestra una versión simplificada

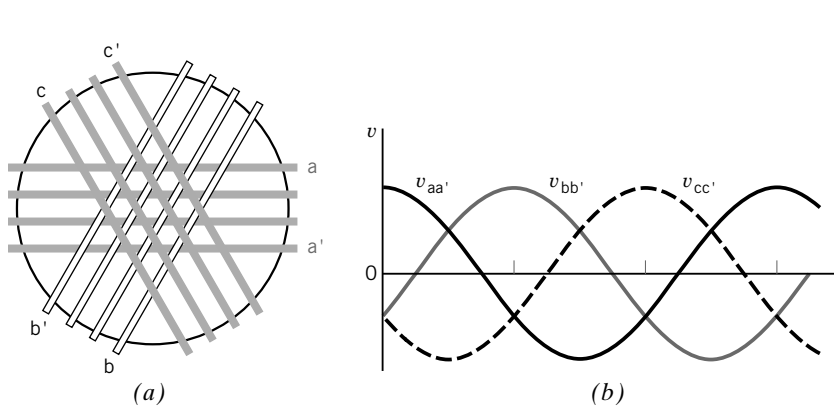


FIGURA 12.2-1 (a) Los tres embobinados de un tambor cilíndrico se usan para obtener voltajes trifásicos (vista final). (b) Voltajes trifásicos balanceados.

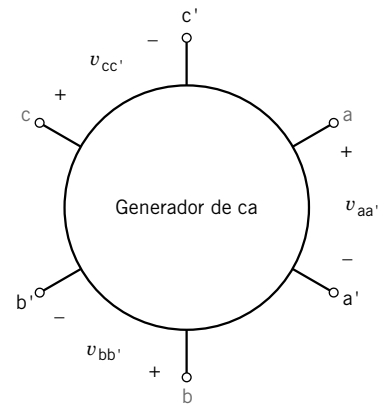


FIGURA 12.2-2 Generador con seis terminales.

de los tres embobinados en torno a la periferia de un tambor cilíndrico. Las tres sinusoides (las sinusoides se obtienen con una distribución de embobinado y forma de magneto adecuadas) generadas por los tres embobinados semejantes se muestran en la figura 12.2-1b. Al definir  $v_{aa'}$  como el potencial de la terminal a respecto de la terminal a', describimos los voltajes como

$$\begin{aligned} v_{aa'} &= V_m \cos \omega t \\ v_{bb'} &= V_m \cos (\omega t - 120^\circ) \\ v_{cc'} &= V_m \cos (\omega t - 240^\circ) \end{aligned} \quad (12.2-1)$$

donde  $V_m$  es el valor pico.

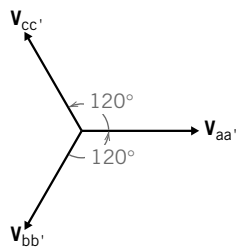


FIGURA 12.2-3 Representación fasorial de la secuencia de fasores positiva de los tres voltajes trifásicos balanceados.

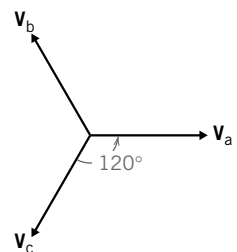


FIGURA 12.2-4 La secuencia abc de fase negativa en la conexión Y.

Un circuito trifásico genera, distribuye, y utiliza energía en forma de tres voltajes iguales en magnitud y simétricos en fase.

Las tres porciones semejantes de un sistema trifásico se denominan *fases*. Como el voltaje en la fase aa' alcanza primero su máximo, seguido por el de la fase bb' y luego por el de la fase cc', se dice que la rotación de faser es *abc*. Ésta es una convención arbitraria para cualquier generador; la rotación de faser se puede invertir al revertir la dirección de la rotación. En la figura 12.2-2 se muestra el generador de seis terminales.

Con la notación fasorial podemos escribir la ecuación 12.2-1 como

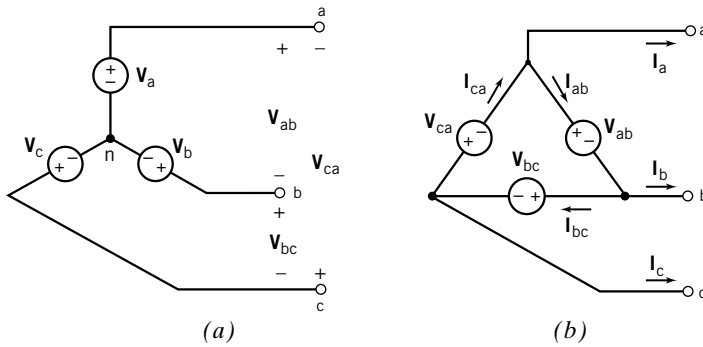
$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{aa'} &= V_m \angle 0^\circ \\ \mathbf{V}_{bb'} &= V_m \angle -120^\circ \\ \mathbf{V}_{cc'} &= V_m \angle -240^\circ = V_m \angle 120^\circ \end{aligned} \quad (12.2-2)$$

Se dice que los tres voltajes deben ser *voltajes balanceados* porque tienen amplitud idéntica,  $V_m$ , y frecuencia,  $\omega$ , y están desfasados con los demás exactamente  $120^\circ$ . En la figura 12.2-3 se muestra el diagrama de fasores de los voltajes trifásicos balanceados. Al examinar la figura 12.2-3 encontramos que

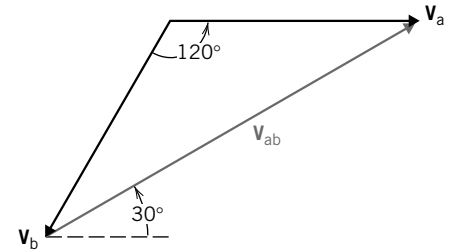
$$\mathbf{V}_{aa'} + \mathbf{V}_{bb'} + \mathbf{V}_{cc'} = 0 \quad (12.2-3)$$

Para el caso de notaciones, en adelante utilizaremos  $\mathbf{V}_{aa'} = \mathbf{V}_a$ ;  $\mathbf{V}_{bb'} = \mathbf{V}_b$ , y  $\mathbf{V}_{cc'} = \mathbf{V}_c$  como los tres voltajes.

La **secuencia de fase positiva** es *abc*, como se muestra en la figura 12.2-3. La secuencia *acb* se denomina secuencia de fase negativa, como se ve en la figura 12.2-4.



**FIGURA 12.2-5** (a) Fuentes conectadas en Y. Los voltajes  $V_a$ ,  $V_b$  y  $V_c$  se denominan voltajes de fasor, y los voltajes  $V_{ab}$ ,  $V_{bc}$  y  $V_{ca}$  se denominan voltajes de línea a línea; (b) fuentes conectadas a  $\Delta$ . Las corrientes  $I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$  se denominan corrientes de línea, y las corrientes  $I_{ab}$ ,  $I_{bc}$ , e  $I_{ca}$  se denominan corrientes de fasor.



**FIGURA 12.2-6** El voltaje línea a línea  $V_{ab}$  de la fuente conectada a Y.

En ocasiones, el voltaje de fasor en la conexión Y se escribe

$$\mathbf{V}_a = V_m \angle 0^\circ$$

donde  $V_m$  es la magnitud del voltaje de fasor.

Refiriéndose al generador de la figura 12.2-2, hay seis terminales y tres voltajes,  $v_a$ ,  $v_b$ , y  $v_c$ . Utilizamos la notación fasorial y suponemos que cada embobinado de fasor proporciona un voltaje de fuente en serie con una impedancia insignificante. Con estos supuestos, hay dos formas de interconectar las tres fases, como se muestra en la figura 12.2-5. La terminal común de la conexión Y se denomina *terminal neutral* y se etiqueta  $n$ . La terminal neutral puede estar o no disponible para conexión. Las cargas balanceadas no tienen corriente en un cable neutral, y por lo tanto a veces no se necesitan.

La conexión que se muestra en la figura 12.2-5a se denomina conexión Y, y en la figura 12.2-5b se muestra la conexión  $\Delta$ . La conexión Y selecciona las terminales  $a'$ ,  $b'$  y  $c'$  y las conecta entre sí como neutrales. Entonces el voltaje de línea a línea,  $V_{ab}$ , de las fuentes conectadas en Y es

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b \quad (12.12-4)$$

como es evidente por el examen de la figura 12.2-5a. Dado que  $\mathbf{V}_a = V_m \angle 0^\circ$  y  $\mathbf{V}_b = V_m \angle -120^\circ$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ab} &= V_m - V_m(-0.5 - j0.866) \\ &= V_m(1.5 + j0.866) \\ &= \sqrt{3} V_m \angle 30^\circ \end{aligned} \quad (12.2-5)$$

Esta relación también se demuestra por el diagrama de fasores de la figura 12.2-6. Del mismo modo,

$$\mathbf{V}_{bc} = \sqrt{3} V_m \angle -90^\circ \quad (12.2-6)$$

y

$$\mathbf{V}_{ca} = \sqrt{3} V_m \angle -210^\circ \quad (12.2-7)$$

Por consiguiente, en una conexión Y el voltaje de línea a línea es  $\sqrt{3}$  veces el voltaje de fasor y se desplaza  $10^\circ$  en fase. La corriente de línea es igual a la corriente de fasor.

**EJERCICIO 12.2-1** La fuente de voltaje trifásico conectada a Y tiene  $V_c = 120 \angle -240^\circ$  V rms. Encuentre el voltaje de línea a línea  $V_{bc}$ .

**Respuesta:**  $207.8 \angle -90^\circ$  V rms

## 12.3 CIRCUITO Y A Y

Considere el circuito Y a Y que se muestra en la figura 12.3-1. Este circuito trifásico consta de tres partes: una fuente trifásica, una carga trifásica y una línea de transmisión. La fuente trifásica consta de tres fuentes de voltaje senoidal conectadas a Y. Las impedancias que comprenden la carga están conectadas para formar una Y (estrella). La línea de transmisión que se utiliza para conectar la fuente con la carga consta de cuatro hilos, incluyendo un hilo que conecta el nodo neutral de la fuente al nodo neutral de la carga. La figura 12.3-2 muestra otro circuito Y a Y. En la figura 12.3-2, la fuente trifásica está conectada a la carga mediante tres hilos, sin ningún hilo que conecte el nodo neutral de la fuente al nodo neutral de la carga. Para distinguir estos circuitos, el circuito de la figura 12.3-1 se denomina circuito Y a Y de cuatro hilos, en tanto que el circuito en la figura 12.3-2 se denomina circuito Y a Y de tres hilos.

El análisis del circuito de cuatro hilos de la figura 12.3-1 es relativamente sencillo. Cada impedancia de la carga trifásica está conectada directamente a través de una fuente de voltaje de la fuente trifásica. Por consiguiente, se conoce el voltaje a través de la impedancia, y las corrientes de la línea se calculan fácilmente como

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_A}, \quad \mathbf{I}_{bB} = \frac{\mathbf{V}_b}{\mathbf{Z}_B} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_{cC} = \frac{\mathbf{V}_c}{\mathbf{Z}_C} \quad (12.3-1)$$

La corriente en el cable que conecta el nodo neutral de la fuente con el nodo neutral de la carga es

$$\mathbf{I}_{Nn} = \mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{cC} = \frac{\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_A} + \frac{\mathbf{V}_b}{\mathbf{Z}_B} + \frac{\mathbf{V}_c}{\mathbf{Z}_C} \quad (12.3-2)$$

La potencia promedio transmitida por la fuente trifásica a la carga trifásica se calcula sumando la potencia promedio transmitida a cada impedancia de la carga.

$$P = P_A + P_B + P_C \quad (12.3-3)$$

donde, por ejemplo,  $P_A$  es la carga promedio absorbida por  $\mathbf{Z}_A$ . Una vez conocida  $\mathbf{I}_{aA}$ , es fácil calcular  $P_A$ .

Por conveniencia, sean los voltajes de fasor de la fuente conectada a Y

$$\mathbf{V}_a = V_p \angle 0^\circ \text{ V rms}, \quad \mathbf{V}_b = V_p \angle -120^\circ \text{ V rms} \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_c = V_p \angle 120^\circ \text{ V rms}$$

Observe que estamos utilizando valores efectivos porque las unidades de  $V_p$  son V rms.

Cuando  $\mathbf{Z}_A = \mathbf{Z}_B = \mathbf{Z}_C = \mathbf{Z} = Z \angle \theta$ , se dice que la carga debe ser una *carga balanceada*. En general, el análisis de circuitos trifásicos balanceados es más fácil que el análisis de circuitos trifásicos no balanceados. Las corrientes de línea en el circuito Y a Y de cuatro hilos balanceado están dadas por

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}} = \frac{V_p \angle 0^\circ}{Z \angle \theta}, \quad \mathbf{I}_{bB} = \frac{\mathbf{V}_b}{\mathbf{Z}} = \frac{V_p \angle -120^\circ}{Z \angle \theta} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_{cC} = \frac{\mathbf{V}_c}{\mathbf{Z}} = \frac{V_p \angle 120^\circ}{Z \angle \theta}$$

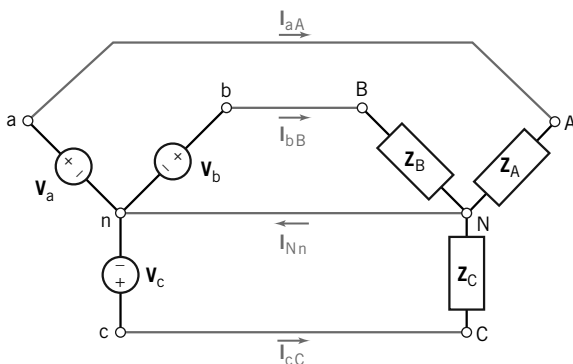


FIGURA 12.3-1 Circuito Y a Y de cuatro hilos.

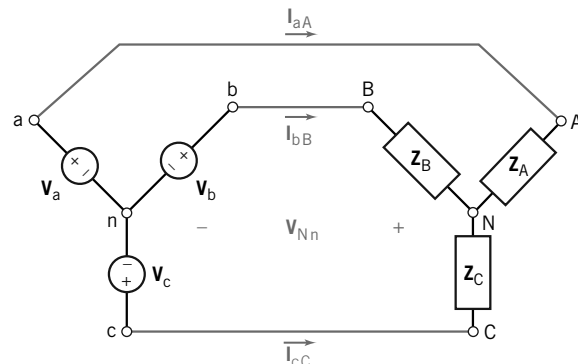


FIGURA 12.3-2 Circuito Y a Y de tres hilos.

Entonces

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{V_p}{Z} \angle -\theta, \quad \mathbf{I}_{bB} = \frac{V_p}{Z} \angle -\theta - 120^\circ \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_{cC} = \frac{V_p}{Z} \angle -\theta + 120^\circ \quad (12.3-4)$$

Las corrientes de línea tienen magnitudes iguales pero difieren por  $120^\circ$  en la fase.  $\mathbf{I}_{bB}$  e  $\mathbf{I}_{cC}$  se pueden calcular desde  $\mathbf{I}_{aA}$  restando y sumando  $120^\circ$  al ángulo fasorial de  $\mathbf{I}_{aA}$ .

La corriente en el cable que conecta el nodo neutral de la fuente con el nodo neutral de la carga es

$$\mathbf{I}_{Nn} = \mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{cC} = \frac{V_p}{Z} (\angle 10^\circ + 1 \angle -120^\circ + 1 \angle 120^\circ)$$

$$\mathbf{I}_{Nn} = 0 \quad (12.3-5)$$

No hay corriente en el cable que conecta el nodo neutral de la fuente con el nodo neutral de la carga.

Como se han utilizado valores efectivos, o rms, de voltajes y corrientes senoidales en vez de valores pico, las fórmulas apropiadas para la potencia son las dadas en la columna “valores rms” de la tabla 12.1-1. La potencia promedio transmitida a la carga es

$$P = P_A + P_B + P_C = V_p \frac{V_p}{Z} \cos(-\theta) + V_p \frac{V_p}{Z} \cos(-\theta) + V_p \frac{V_p}{Z} \cos(-\theta)$$

$$P = 3 \frac{V_p^2}{Z} \cos(\theta) \quad (12.3-6)$$

donde, por ejemplo,  $P_A$  es la potencia promedio absorbida por  $\mathbf{Z}_A$ . Cada impedancia de la carga trifásica,  $\mathbf{Z}_A$ ,  $\mathbf{Z}_B$  y  $\mathbf{Z}_C$ , absorbe igual cantidad de potencia. No es necesario calcular  $P_A$ ,  $P_B$  y  $P_C$  por separado. La potencia promedio transmitida a la carga se puede determinar al calcular  $P_A$  y multiplicarla por 3.

A continuación, considere el circuito Y a Y de tres hilos que se muestra en la figura 12.3-2. Los voltajes de fasor de la fuente conectada a Y son  $\mathbf{V}_a = V_p \angle 0^\circ$  V rms,  $\mathbf{V}_b = V_p \angle -120^\circ$  V rms y  $\mathbf{V}_c = V_p \angle 120^\circ$  V rms. El primer paso en el análisis de este circuito es calcular  $\mathbf{V}_{Nn}$ , el voltaje en el nodo neutral de la carga trifásica respecto del voltaje en el nodo neutral de la fuente trifásica. (Este paso no se necesitó cuando se analizó el circuito Y a Y de cuatro hilos porque el cable de cuatro hilos obligó a  $\mathbf{V}_{Nn} = 0$ .) Conviene seleccionar el nodo  $n$ , el nodo neutral de la fuente trifásica, para que sea el nodo de referencia. Entonces  $\mathbf{V}_a$ ,  $\mathbf{V}_b$ ,  $\mathbf{V}_c$  y  $\mathbf{V}_{Nn}$  son los voltajes del circuito. Escriba una ecuación nodal en el nodo N para obtener

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_A} + \frac{\mathbf{V}_b - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_B} + \frac{\mathbf{V}_c - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_C} \\ &= \frac{(V_p \angle 0^\circ) - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_A} + \frac{(V_p \angle -120^\circ) - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_B} + \frac{(V_p \angle 120^\circ) - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_C} \end{aligned} \quad (12.3-7)$$

Despejando  $\mathbf{V}_{Nn}$  nos da

$$\mathbf{V}_{Nn} = \frac{(V_p \angle -120^\circ) \mathbf{Z}_A \mathbf{Z}_C + (V_p \angle 120^\circ) \mathbf{Z}_A \mathbf{Z}_B + (V_p \angle 0^\circ) \mathbf{Z}_B \mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A \mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_A \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_B \mathbf{Z}_C} \quad (12.3-8)$$

Una vez que se haya determinado  $\mathbf{V}_{Nn}$ , las líneas de corriente se pueden calcular utilizando

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_A}, \quad \mathbf{I}_{bB} = \frac{\mathbf{V}_b - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_B}, \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_{cC} = \frac{\mathbf{V}_c - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_C} \quad (12.3-9)$$

El análisis del circuito Y a Y de tres hilos es mucho más sencillo cuando el circuito está balanceado, es decir, cuando  $\mathbf{Z}_A = \mathbf{Z}_B = \mathbf{Z}_C = \mathbf{Z} = \mathbf{Z} \angle \theta$ . Cuando el circuito está balanceado, la ecuación 12.3-8 se vuelve

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{Nn} &= \frac{(V_P \angle -120^\circ)\mathbf{Z}\mathbf{Z} + (V_P \angle 120^\circ)\mathbf{Z}\mathbf{Z} + (V_P \angle 0^\circ)\mathbf{Z}\mathbf{Z}}{\mathbf{Z}\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\mathbf{Z}} \\ &= [(V_P \angle -120^\circ) + (V_P \angle 120^\circ) + (V_P \angle 0^\circ)]/3 \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_{Nn} = 0 \quad (12.3-10)$$

Cuando un circuito Y a Y de tres hilos está balanceado, no es necesario escribir y despejar una ecuación nodal para encontrar  $\mathbf{V}_{Nn}$  porque se sabe que  $\mathbf{V}_{Nn}$  debe ser cero. Recuerde que  $\mathbf{V}_{Nn} = 0$  en el circuito Y a Y de cuatro hilos. El circuito Y a Y de tres hilos balanceado actúa como el circuito Y a Y de cuatro hilos balanceado. En particular, las corrientes de línea las da la ecuación 12.3-4, y la potencia promedio transmitida a la carga la da la ecuación 12.3-6.

Idealmente, la línea de transmisión que conecta la carga a la fuente se puede modelar utilizando cortocircuitos. Eso es lo que se hizo en las figuras 12.3-1 y 12.3-2. En ocasiones es adecuado modelar como impedancias las líneas que conectan la carga a la fuente. Por ejemplo, eso se hace cuando se compara la potencia que se transmite a la carga con la potencia que absorbe la línea de transmisión. La figura 12.3-3 muestra un circuito Y a Y de tres hilos en el cual la línea de transmisión está modelada por las impedancias  $\mathbf{Z}_{aA}$ ,  $\mathbf{Z}_{bB}$  y  $\mathbf{Z}_{cC}$  de línea. Las impedancias de línea no complican significativamente el análisis del circuito porque cada impedancia de línea está conectada en serie con una impedancia de carga. Después de reemplazar impedancias en serie por impedancias equivalentes, el análisis procede como antes. Si el circuito no está balanceado, se escribe una ecuación nodal y se despeja para determinar  $\mathbf{V}_{Nn}$ ; una vez determinada, se pueden calcular las corrientes de línea. La potencia transmitida a la carga y la potencia absorbida por la línea se pueden calcular a partir de las corrientes de línea y las impedancias de línea y de carga.

El análisis de los circuitos Y a Y balanceados es más sencillo que el de los circuitos Y a Y no balanceados de varias formas:

1.  $\mathbf{V}_{Nn} = 0$ . No es necesario escribir y despejar una ecuación para determinar  $\mathbf{V}_{Nn}$ .
2. Las corrientes de línea tienen magnitudes iguales y difieren por  $120^\circ$  en fase.  $\mathbf{I}_{bB}$  e  $\mathbf{I}_{cC}$  se pueden calcular a partir de  $\mathbf{I}_{aA}$  restando y sumando  $120^\circ$  al ángulo fasorial de  $\mathbf{I}_{aA}$ .
3. Cada impedancia de la carga trifásica,  $\mathbf{Z}_A$ ,  $\mathbf{Z}_B$  y  $\mathbf{Z}_C$  absorbe la misma cantidad de potencia. No es necesario calcular  $P_A$ ,  $P_B$  y  $P_C$  por separado. La potencia promedio transmitida a la carga se puede determinar al calcular  $P_A$  y multiplicarla por 3.

La clave para el análisis del circuito Y a Y balanceado es el cálculo de la corriente de línea,  $\mathbf{I}_{aA}$ . El *circuito equivalente por fase* proporciona la información necesaria para la corriente de línea  $\mathbf{I}_{aA}$ . Este circuito equivalente consta de la fuente de voltaje e impedancias en una fase de las tres fases del circuito trifásico. La figura 12.3-4 muestra el circuito equivalente por fase que corresponde al circuito trifásico

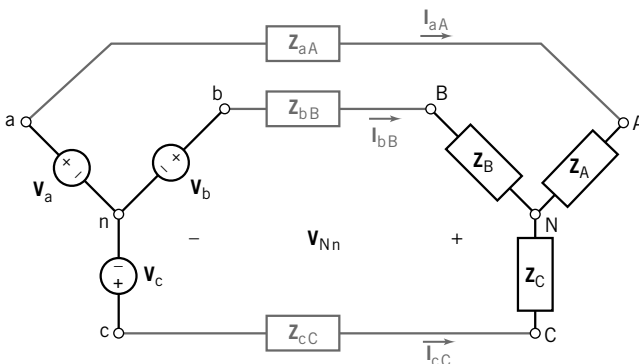


FIGURA 12.3-3 Un circuito Y a Y trifásico con impedancias de línea.

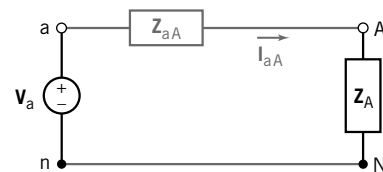


FIGURA 12.3-4 Circuito equivalente por fase para el circuito Y a Y trifásico con impedancias de línea.

Tabla 12.3-1 El circuito Y a Y balanceado

<b>Voltajes de fasor</b>	$V_a = V_p \angle 0^\circ$ $V_b = V_p \angle -120^\circ$ $V_c = V_p \angle -240^\circ$
<b>Voltajes de línea a línea</b>	$V_{ab} = \sqrt{3} V_p \angle 30^\circ$ $V_{bc} = \sqrt{3} V_p \angle -90^\circ$ $V_{ca} = \sqrt{3} V_p \angle -210^\circ$ $V_L = \sqrt{3} V_p$
<b>Corrientes</b>	$I_L = I_p$ (corriente de línea = corriente de fasor) $I_A = \frac{V_a}{Z_Y} = I_p \angle -\theta$ con $Z_p = Z \angle \theta$ $I_B = I_A \angle -120^\circ$ $I_C = I_A \angle -240^\circ$

Nota: p = fase; L = línea.

que se muestra en la figura 12.3-3. Los nodos neutrales n y N están conectados por un cortocircuito en el circuito equivalente por fase para indicar que  $V_{Nn} = 0$  en un circuito balanceado Y a Y. El circuito equivalente por fase se puede utilizar para analizar circuitos Y a Y balanceados de tres o de cuatro hilos, pero solamente se pueden utilizar para circuitos *balanceados*.

En la tabla 12.3-1 se resume el comportamiento de un circuito Y a Y balanceado.

### EJEMPLO 12.3-1 Circuito Y a Y no balanceado de cuatro hilos

Determine la potencia compleja transmitida a la carga trifásica de un circuito Y a Y de cuatro hilos como el que se muestra en la figura 12.3-1. Los voltajes de fasor de la fuente conectada a Y son  $V_a = 110 \angle 0^\circ$  V rms,  $V_b = 110 \angle -120^\circ$  V rms y  $V_c = 110 \angle 120^\circ$  V rms. Las impedancias de carga son  $Z_A = 50 + j80 \Omega$ ,  $Z_B = j50 \Omega$  y  $Z_C = 100 + j25 \Omega$ .

#### Solución

Las corrientes de línea de un circuito Y a Y de cuatro hilos *no balanceado* se calculan con la ecuación 12.3-1. En este ejemplo,

$$I_{aA} = \frac{V_a}{Z_A} = \frac{110 \angle 0^\circ}{50 + j80}, \quad I_{bB} = \frac{V_b}{Z_B} = \frac{110 \angle -120^\circ}{j50} \quad \text{e} \quad I_{cC} = \frac{V_c}{Z_C} = \frac{110 \angle 120^\circ}{100 + j25}$$

por lo que

$$I_{aA} = 1.16 \angle -58^\circ \text{ A rms}, \quad I_{bB} = 2.2 \angle 150^\circ \text{ A rms} \quad \text{y} \quad I_{cC} = 1.07 \angle 106^\circ \text{ A rms}$$

La potencia compleja transmitida a  $Z_A$  es

$$S_A = I_{aA}^* V_a = (1.16 \angle -58^\circ)^* (110 \angle 0^\circ) = (1.16 \angle 58^\circ)(110 \angle 0^\circ) = 68 + j109 \text{ VA}$$

Del mismo modo, calculamos la potencia compleja transmitida a  $Z_B$  y  $Z_C$  como

$$S_B = (2.2 \angle 150^\circ)^* (110 \angle -120^\circ) = j242 \text{ VA}$$

y

$$S_C = (1.07 \angle 106^\circ)^* (110 \angle 120^\circ) = 114 + j28 \text{ VA}$$

La potencia compleja total transmitida a la carga trifásica es

$$S_A + S_B + S_C = 182 + j379 \text{ VA}$$



**EJEMPLO 12.3-2** Circuito Y a Y balanceado de cuatro hilos

Determine la potencia compleja transmitida a la carga trifásica de un circuito Y a Y de cuatro hilos como el que se muestra en la figura 12.3-1. Los voltajes de fasor de la fuente conectada a Y son  $\mathbf{V}_a = 110 \angle 0^\circ$  V rms,  $\mathbf{V}_b = 110 \angle -120^\circ$  V rms y  $\mathbf{V}_c = 110 \angle 120^\circ$  V rms. Las impedancias de carga son  $\mathbf{Z}_A = \mathbf{Z}_B = \mathbf{Z}_C = 50 + j80 \Omega$ .

**Solución**

Este ejemplo es semejante al anterior. La diferencia importante es que este circuito trifásico está balanceado. Necesitamos calcular solamente una corriente de línea,  $\mathbf{I}_{aA}$ , y la potencia compleja,  $\mathbf{S}_A$ , transmitida a sólo una de las impedancias de carga,  $\mathbf{Z}_A$ . La potencia transmitida a la carga trifásica es  $3\mathbf{S}_A$ . Empezaremos por calcular  $\mathbf{I}_{aA}$  como

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_A} = \frac{110 \angle 0^\circ}{50 + j80} = 1.16 \angle -58^\circ \text{ A rms}$$

La potencia compleja transmitida a  $\mathbf{Z}_A$  es

$$\mathbf{S}_A = \mathbf{I}_{aA}^* \mathbf{V}_a = (1.16 \angle -58^\circ)^* (110 \angle 0^\circ) = (1.16 \angle 58^\circ)(110 \angle 0^\circ) = 68 + j109 \text{ VA}$$

La potencia total transmitida a la carga trifásica es

$$3\mathbf{S}_A = 204 + j326 \text{ VA}$$

(Las corrientes  $\mathbf{I}_{bB}$  e  $\mathbf{I}_{cC}$  también se pueden calcular mediante la ecuación 12.3-1. Compruebe que  $\mathbf{I}_{bB} = 1.16 \angle -177^\circ$  A rms e  $\mathbf{I}_{cC} = 1.16 \angle 62^\circ$  A rms. Observe que  $\mathbf{I}_{bB}$  e  $\mathbf{I}_{cC}$  se pueden calcular desde  $\mathbf{I}_{aA}$  restando y sumando  $120^\circ$  al ángulo fasorial de  $\mathbf{I}_{aA}$ . Además, compruebe que la potencia compleja transmitida a  $\mathbf{Z}_{bB}$  y  $\mathbf{Z}_{cC}$  sea igual a la potencia compleja transmitida a  $\mathbf{Z}_A$ . Es decir,  $\mathbf{S}_B = 68 + j109$  VA y  $\mathbf{S}_C = 68 + j109$  VA.)

**EJEMPLO 12.3-3** Circuito Y a Y no balanceado de tres hilos

Determine la potencia compleja transmitida a la carga trifásica de un circuito Y a Y de tres hilos como el que se muestra en la figura 12.3-2. Los voltajes de fasor de la fuente conectada a Y son  $\mathbf{V}_a = 110 \angle 0^\circ$  V rms,  $\mathbf{V}_b = 110 \angle -120^\circ$  V rms y  $\mathbf{V}_c = 110 \angle 120^\circ$  V rms. Las impedancias de carga son  $\mathbf{Z}_A = 50 + j80 \Omega$ ,  $\mathbf{Z}_B = j50 \Omega$  y  $\mathbf{Z}_C = 100 + j25 \Omega$ .

**Solución**

Este ejemplo es semejante al ejemplo 12.3-1 pero considera el circuito Y a Y de tres hilos en vez del circuito de cuatro hilos considerado en el ejemplo 12.3-1. Dado que el circuito no está balanceado, se desconoce  $\mathbf{V}_{Nn}$ . Empezaremos por escribir y despejar una ecuación nodal para determinar  $\mathbf{V}_{Nn}$ . La solución a esa ecuación nodal está dada en la ecuación 12.3-8 por

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{Nn} &= \frac{(110 \angle -120^\circ)(50 + j80)(100 + j25) + (110 \angle 120^\circ)(50 + j80)(j50) + (110 \angle 0^\circ)(j50)(100 + j25)}{(50 + j80)(100 + j25) + (50 + j80)(j50) + (j50)(100 + j25)} \\ &= 56 \angle -151^\circ \text{ V rms} \end{aligned}$$

Ahora que ya se conoce  $\mathbf{V}_{Nn}$ , las corrientes de línea se calculan como

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{aA} &= \frac{\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_A} = \frac{110 \angle 0^\circ - 56 \angle -151^\circ}{50 + j80} = 1.71 \angle -48^\circ \text{ A rms} \\ \mathbf{I}_{bB} &= \frac{\mathbf{V}_b - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_B} = 2.45 \angle 3^\circ \text{ A rms} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_{cC} = \frac{\mathbf{V}_c - \mathbf{V}_{Nn}}{\mathbf{Z}_C} = 1.19 \angle 79^\circ \text{ A rms} \end{aligned}$$

La potencia compleja transmitida a  $\mathbf{Z}_A$  es

$$\mathbf{S}_A = \mathbf{I}_{aA}^* \mathbf{V}_a = \mathbf{I}_{aA}^* (\mathbf{I}_{aA} \mathbf{Z}_A) = (1.71 \angle -48^\circ)^* (1.71 \angle -48^\circ) (50 + j80) = 146 + j234 \text{ VA}$$

Del mismo modo, calculamos la potencia compleja transmitida a  $\mathbf{Z}_B$  y  $\mathbf{Z}_C$  como

$$\mathbf{S}_B = \mathbf{I}_{bB}^* (\mathbf{I}_{bB} \mathbf{Z}_B) = j94 \text{ VA} \quad \text{y} \quad \mathbf{S}_C = \mathbf{I}_{cC}^* (\mathbf{I}_{cC} \mathbf{Z}_C) = 141 + j35 \text{ VA}$$

La potencia compleja total transmitida a la carga trifásica es

$$\mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B + \mathbf{S}_C = 287 + j364 \text{ VA}$$

#### EJEMPLO 12.3-4 El circuito Y a Y balanceado de tres hilos

Determine la potencia compleja transmitida a la carga trifásica de un circuito Y a Y de tres hilos como el que se muestra en la figura 12.3-2. Los voltajes de fasor de la fuente conectada a Y son  $\mathbf{V}_a = 110 \angle 0^\circ \text{ V rms}$ ,  $\mathbf{V}_b = 110 \angle -120^\circ \text{ V rms}$  y  $\mathbf{V}_c = 110 \angle 120^\circ \text{ V rms}$ . Las impedancias de carga son  $\mathbf{Z}_A = \mathbf{Z}_B = \mathbf{Z}_C = 50 + j80 \Omega$ .

#### Solución

Este ejemplo es semejante al ejemplo 12.3-3. La diferencia importante es que este circuito trifásico está balanceado, de modo que  $\mathbf{V}_{nN}$ . No es necesario escribir y despejar una ecuación lineal para determinar  $\mathbf{V}_{nN}$ .

Los circuitos Y a Y balanceados de tres hilos, y los circuitos Y a Y balanceados de cuatro hilos, se analizan de la misma manera. Para calcular solamente necesitamos una corriente de línea  $\mathbf{I}_{aA}$ , y la potencia compleja,  $\mathbf{S}_a$ , transmitida a sólo una de las impedancias de carga trifásica,  $\mathbf{Z}_A$ . La potencia transmitida a la carga trifásica es  $3\mathbf{S}_a$ .

La corriente de línea se calcula como

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_A} = \frac{110 \angle 0^\circ}{50 + j80} = 1.16 \angle -58^\circ \text{ A rms}$$

La potencia total transmitida a la carga trifásica es

$$3\mathbf{S}_A = 3\mathbf{I}_{aA}^* \mathbf{V}_a = 204 + j326 \text{ VA}$$

#### EJEMPLO 12.3-5 Pérdidas en línea

La figura 12.3-5a muestra un circuito Y a Y balanceado de tres hilos. Determine la potencia promedio transmitida por la fuente trifásica, transmitida a la carga trifásica y absorbida por la línea trifásica.

#### Solución

El circuito Y a Y de tres hilos de la figura 12.3-5a se ve diferente del circuito Y a Y trifásico en la figura 12.3-2. La diferencia es sólo de apariencia. Los circuitos están dibujados de manera diferente, con todos los elementos de circuito dibujados en forma vertical u horizontal en la figura 12.3-5a. Una diferencia más importante es que el circuito en la figura 12.3-2 está representado en el dominio de frecuencia, utilizando fasores e impedancias, en tanto que el circuito de la figura 12.3-5a lo está en el dominio de tiempo. Dado que el circuito está representado en el dominio de tiempo, está dada la magnitud, más que el valor efectivo, del voltaje de la fuente.

Como este circuito trifásico está balanceado, se puede analizar utilizando un circuito equivalente por fase. La figura 12.3-5b muestra el circuito equivalente por fase adecuado.

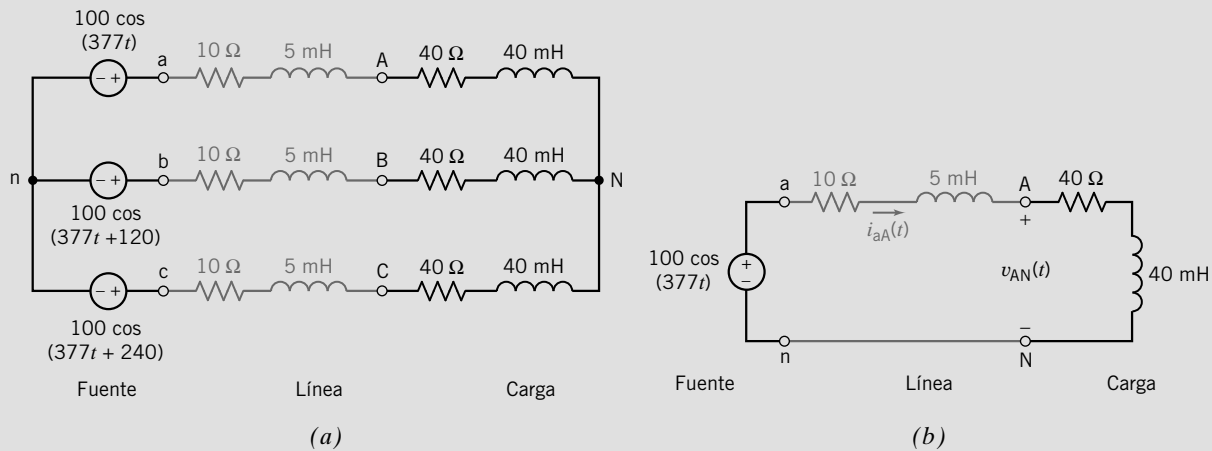


FIGURA 12.3-5 (a) Un circuito Y a Y balanceado de tres hilos y (b) el circuito equivalente por fase.

La corriente de línea está calculada como

$$\mathbf{I}_{aA}(\omega) = \frac{100}{50 + j(377)(0.045)} = 1.894 \angle -18.7^\circ \text{ A}$$

El voltaje de fasor en la carga es

$$\mathbf{V}_{AN}(\omega) = (40 + j(377)(0.04))\mathbf{I}_{aA}(\omega) = 81 \angle 2^\circ \text{ V}$$

Dado que se han usado valores de pico de voltajes y corrientes senoidales en vez de valores efectivos, las fórmulas apropiadas de potencia son las que da la columna de “valores pico” de la tabla 12.1-1. La potencia transmitida por la fuente se calcula como

$$\mathbf{I}_{aA}(\omega) = 1.894 \angle -18.7^\circ \text{ A} \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_{an}(\omega) = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\text{o bien} \quad P_a = \frac{(100)(1.894)}{2} \cos(18.7^\circ) = 89.7 \text{ W}$$

la potencia transmitida a la carga se calcula como

$$\mathbf{I}_{aA}(\omega) = 1.894 \angle -18.7^\circ \text{ A} \quad \text{y} \quad R_A = 40 \, \Omega, \quad \text{por lo tanto} \quad P_A = \frac{1.894^2}{2} 40 = 71.7 \text{ W}$$

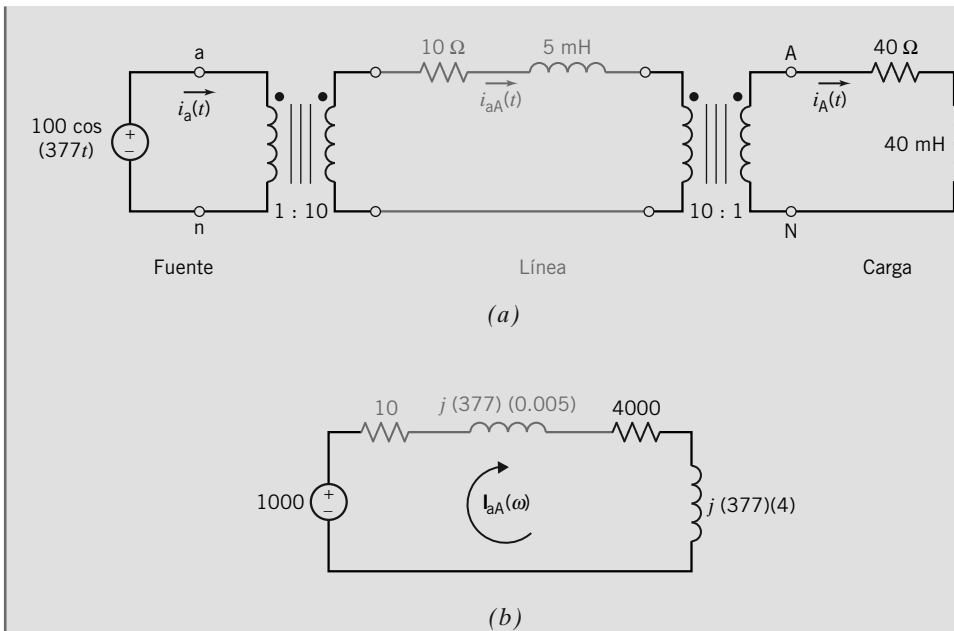
La potencia perdida en la línea se calcula como

$$\mathbf{I}_{aA}(\omega) = 1.894 \angle -18.7^\circ \text{ A} \quad \text{y} \quad R_{aA} = 10 \, \Omega, \quad \text{por lo tanto} \quad P_{aA} = \frac{1.894^2}{2} 10 = 17.9 \text{ W}$$

La carga trifásica recibe  $3P_A = 215.1 \text{ W}$  y  $3P_{aA} = 53.7 \text{ W}$  se pierde en la línea. A la carga se transmite un total de 80% de la potencia transmitida a la carga. El 20% restante se pierde en la línea. La fuente trifásica transmite  $3P_a = 269.1 \text{ W}$ .

### EJEMPLO 12.3-6 Reducción de pérdidas en la línea

Como se observó en la figura 12.3-5, a la carga se transmite 80% de la potencia alimentada por la fuente, y el 20% restante se pierde en la línea. La pérdida en la línea se puede reducir disminuyendo la corriente en la línea. Al disminuir la corriente en la línea se reduciría la potencia transmitida a la carga. Los transformadores proporcionan una manera de reducir la corriente de línea sin reducir la corriente de carga.



**FIGURA 12.3-6** (a) Un circuito equivalente por fase para un circuito Y a Y balanceado con transformadores de elevación y descenso y (b) el circuito de dominio de frecuencia correspondiente que se utilizó para calcular la corriente de línea.

En este ejemplo se han agregado dos transformadores trifásicos al circuito trifásico considerado en el ejemplo 12.3-5. Un transformador en la fuente eleva el voltaje y baja la corriente. Por el contrario, un transformador en la carga baja el voltaje y eleva la corriente. Como las proporciones de vueltas de estos transformadores son recíprocas, el voltaje y la corriente en la carga no sufren cambio. La corriente en la línea se disminuirá para reducir la potencia perdida en la línea. El voltaje de línea se aumentará. El voltaje de línea más alto requerirá para seguridad un aumento en el aislamiento y la atención.

La figura 12.3-6a muestra el circuito equivalente por fase del circuito Y a Y balanceado de tres hilos que incluye los dos transformadores. Determine la potencia promedio transmitida por la fuente trifásica, transmitida a la carga trifásica y absorbida por la línea trifásica.

### Solución

Para analizar el circuito equivalente por fase en la figura 12.3-6a, observe que

1. El voltaje secundario del transformador de la izquierda es 10 veces el voltaje primario, es decir,  $1\,000 \cos(377t)$ .
2. La impedancia conectada al secundario del transformador de la derecha se puede reflejar al primario de este transformador al multiplicarla por 100. El resultado es un resistor de  $4\,000\text{-}\Omega$  en serie con un inductor de  $4\text{-H}$ .

Estas observaciones conducen al circuito de un enlace que se muestra en la figura 12.3-6b. La corriente de enlaces en este circuito es la corriente de línea del circuito trifásico. Esta corriente de línea se calcula como

$$\mathbf{I}_{aA}(\omega) = \frac{1\,000}{4010 + j(377)(4.005)} = 0.2334 \angle -20.6^\circ \text{ A}$$

La corriente en el extremo con punto del secundario del transformador de la izquierda en la figura 12.3-6a es  $-\mathbf{I}_{aA}(\omega)$ , de modo que la corriente en el extremo con punto del primario de este transformador es

$$\mathbf{I}_a(\omega) = -10(-\mathbf{I}_{aA}(\omega)) = 2.334 \angle -20.6^\circ \text{ A}$$

La corriente en el extremo con punto del primario del transformador de la derecha es  $\mathbf{I}_{aA}(\omega)$  de modo que la corriente en el extremo con punto del secundario es

$$\mathbf{I}_A(\omega) = -(-10 \mathbf{I}_{aA}(\omega)) = 2.334 \angle -20.6^\circ \text{ A}$$

El voltaje de fasor en la carga es

$$\mathbf{V}_{AN}(\omega) = (40 + j(377)(0.04))\mathbf{I}_A(\omega) = 99.77 \angle 0^\circ \text{ V}$$

La potencia transmitida por la fuente se calcula como

$$\mathbf{I}_a(\omega) = 2.334 \angle -20.6^\circ \text{ A} \quad \text{y}$$

$$\mathbf{V}_{an}(\omega) = 100 \angle 0^\circ \text{ V} \quad \text{entonces} \quad P_a = \frac{(100)(2.334)}{2} \cos(20.6^\circ) = 109.2 \text{ W}$$

La potencia transmitida a la carga se calcula como

$$\mathbf{I}_A(\omega) = 2.334 \angle -20.6^\circ \text{ A} \quad \text{y} \quad R_A = 40 \Omega, \quad \text{entonces} \quad P_A = \frac{2.334^2}{2} 40 = 108.95 \text{ W}$$

La potencia perdida en la línea se calcula como

$$\mathbf{I}_{aA}(\omega) = 0.2334 \angle -20.6^\circ \text{ A} \quad \text{y} \quad R_{aA} = 10 \Omega, \quad \text{entonces} \quad P_A = \frac{0.2334^2}{2} 10 = 0.27 \text{ W}$$

Ahora la fuente alimenta 98% de potencia y la transmite a la carga, perdiéndose solamente 2% en la línea.

**EJERCICIO 12.3-1** Determine la potencia compleja transmitida a la carga trifásica de un circuito Y a Y de cuatro hilos como el que se muestra en la figura 12.3-1. Los voltajes de fasor de la fuente conectada a Y son  $\mathbf{V}_a = 120 \angle 0^\circ \text{ V rms}$ ,  $\mathbf{V}_b = 120 \angle -120^\circ \text{ V rms}$  y  $\mathbf{V}_c = 120 \angle 120^\circ \text{ V rms}$ . Las impedancias de carga son  $\mathbf{Z}_A = 80 + j50 \Omega$ ,  $\mathbf{Z}_B = 80 + j80 \Omega$  y  $\mathbf{Z}_C = 100 - j25 \Omega$ .

**Respuesta:**  $\mathbf{S}_A = 129 + j81 \text{ VA}$ ,  $\mathbf{S}_B = 90 + j90 \text{ VA}$ ,  $\mathbf{S}_C = 136 - j34$  y  $\mathbf{S} = 355 + j137 \text{ VA}$

**EJERCICIO 12.3-2** Determine la potencia compleja transmitida a la carga trifásica de un circuito Y a Y de cuatro hilos como el que se muestra en la figura 12.3-1. Los voltajes de fasor de la fuente conectada a Y son  $\mathbf{V}_a = 120 \angle 0^\circ \text{ V rms}$ ,  $\mathbf{V}_b = 120 \angle -120^\circ \text{ V rms}$  y  $\mathbf{V}_c = 120 \angle 120^\circ \text{ V rms}$ . Las impedancias de carga son  $\mathbf{Z}_A = \mathbf{Z}_B = \mathbf{Z}_C = 40 + j30 \Omega$ .

**Respuesta:**  $\mathbf{S}_A = \mathbf{S}_B = \mathbf{S}_C = 230 + j173$  y  $\mathbf{S} = 691 + j518 \text{ VA}$

**EJERCICIO 12.3-3** Determine la potencia compleja transmitida a la carga trifásica de un circuito Y a Y de tres hilos como el que se muestra en la figura 12.3-2. Los voltajes de fasor de la fuente conectada a Y son  $\mathbf{V}_a = 120 \angle 0^\circ \text{ V rms}$ ,  $\mathbf{V}_b = 120 \angle -120^\circ \text{ rms}$  y  $\mathbf{V}_c = 120 \angle 120^\circ \text{ V rms}$ . Las impedancias de carga son  $\mathbf{Z}_A = 80 + j50 \Omega$ ,  $\mathbf{Z}_B = 80 + j80 \Omega$  y  $\mathbf{Z}_C = 100 - j25 \Omega$ .

**Respuesta intermedia:**  $\mathbf{V}_{nN} = 28.89 \angle -150.5^\circ \text{ V rms}$

**Respuesta:**  $\mathbf{S} = 392 + j142 \text{ VA}$

**EJERCICIO 12.3-4** Determine la potencia compleja transmitida a la carga trifásica de un circuito Y a Y de tres hilos como el que se muestra en la figura 12.3-2. Los voltajes de fasor de la fuente conectada a Y son  $\mathbf{V}_a = 120 \angle 0^\circ \text{ V rms}$ ,  $\mathbf{V}_b = 120 \angle -120^\circ \text{ V rms}$  y  $\mathbf{V}_c = 120 \angle 120^\circ \text{ V rms}$ . Las impedancias son  $\mathbf{Z}_A = \mathbf{Z}_B = \mathbf{Z}_C = 40 + j30 \Omega$ .

**Respuesta:**  $\mathbf{S}_A = \mathbf{S}_B = \mathbf{S}_C = 230 + j173 \text{ VA}$  y  $\mathbf{S} = 691 + j518 \text{ VA}$

## 12.4 FUENTE Y CARGA CONECTADAS A $\Delta$

En la figura 12.2-5b se muestra la fuente conectada a  $\Delta$ . Sin embargo, esta conexión generadora se usa poco en la práctica porque cualquier pequeño desbalance en la magnitud o en la fase no dará por resultado una suma cero. El resultado será una gran corriente circulando por las bobinas del generador, que calentará el generador y disminuirá su eficiencia. Por ejemplo, considere la condición

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ab} &= 120 \angle 0^\circ \\ \mathbf{V}_{bc} &= 120.1 \angle -121^\circ \\ \mathbf{V}_{ca} &= 120.2 \angle 121^\circ \end{aligned} \quad (12.4-1)$$

Si la resistencia total en torno al circuito cerrado es  $1 \Omega$ , podemos calcular la corriente circulante como

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= (\mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bc} + \mathbf{V}_{ca})/1 \\ &= 120 + 120.1(-0.515 - j0.857) + 120.2(-0.515 + j0.857) \\ &\cong 120 - 1.03(120.15) \\ &\cong -3.75 \text{ A} \end{aligned} \quad (12.4-2)$$

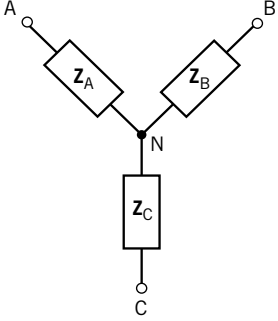
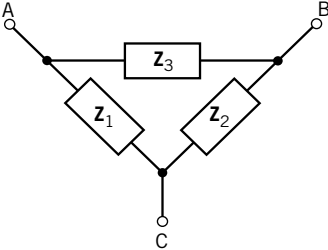
lo cual sería inaceptable.

Por consiguiente, solamente consideraremos práctica una fuente conectada a Y por el lado de la fuente, y la carga conectada a  $\Delta$  y a Y por el lado de la carga.

Las transformaciones  $\Delta$  a Y y Y a  $\Delta$  convierten las cargas conectadas a  $\Delta$  en cargas equivalentes conectadas a Y y viceversa. Dichas transformaciones se resumen en la tabla 12.4-1. Dadas las impedancias  $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3$  de una carga conectada a  $\Delta$ , la tabla 12.4-1 proporciona las fórmulas requeridas para determinar las impedancias  $\mathbf{Z}_A, \mathbf{Z}_B, \mathbf{Z}_C$  de la carga equivalente conectada a Y. Se dice que estas cargas trifásicas deben ser equivalentes porque al reemplazar la carga conectada a  $\Delta$  por la carga conectada a Y no habrá cambio alguno en los voltajes ni en las corrientes de la fuente trifásica o de la línea trifásica.

Las transformaciones  $\Delta$  a Y y Y a  $\Delta$  son significativamente más sencillas cuando las cargas están balanceadas. Suponga que la carga  $\Delta$  está balanceada, es decir,  $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_\Delta$ . La carga equivalente

Tabla 12.4-1 Conversiones Y a  $\Delta$  y  $\Delta$  a Y

DESCRIPCIÓN	CIRCUITO	FÓRMULAS DE CONVERSIÓN (NO BALANCEADAS)	FÓRMULAS DE CONVERSIÓN (BALANCEADAS)
Carga conectada a Y		$\mathbf{Z}_A = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}$ $\mathbf{Z}_B = \frac{\mathbf{Z}_2 \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}$ $\mathbf{Z}_C = \frac{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}$	<p>Cuando <math>\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_\Delta</math></p> <p>entonces <math>\mathbf{Z}_A = \mathbf{Z}_B = \mathbf{Z}_C = \frac{\mathbf{Z}_\Delta}{3}</math></p>
Carga conectada a $\Delta$		$\mathbf{z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_A \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_B \mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_A \mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_B}$ $\mathbf{z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_A \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_B \mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_A \mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_A}$ $\mathbf{z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_A \mathbf{Z}_B + \mathbf{Z}_B \mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_A \mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_C}$	<p>Cuando <math>\mathbf{Z}_A = \mathbf{Z}_B = \mathbf{Z}_C = \mathbf{Z}_Y</math></p> <p>entonces <math>\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_3 = 3\mathbf{Z}_Y</math></p>

conectada a Y también estará balanceada, por lo tanto,  $Z_A = Z_B = Z_C = Z_Y$ . Entonces tenemos

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3} \quad (12.4-3)$$

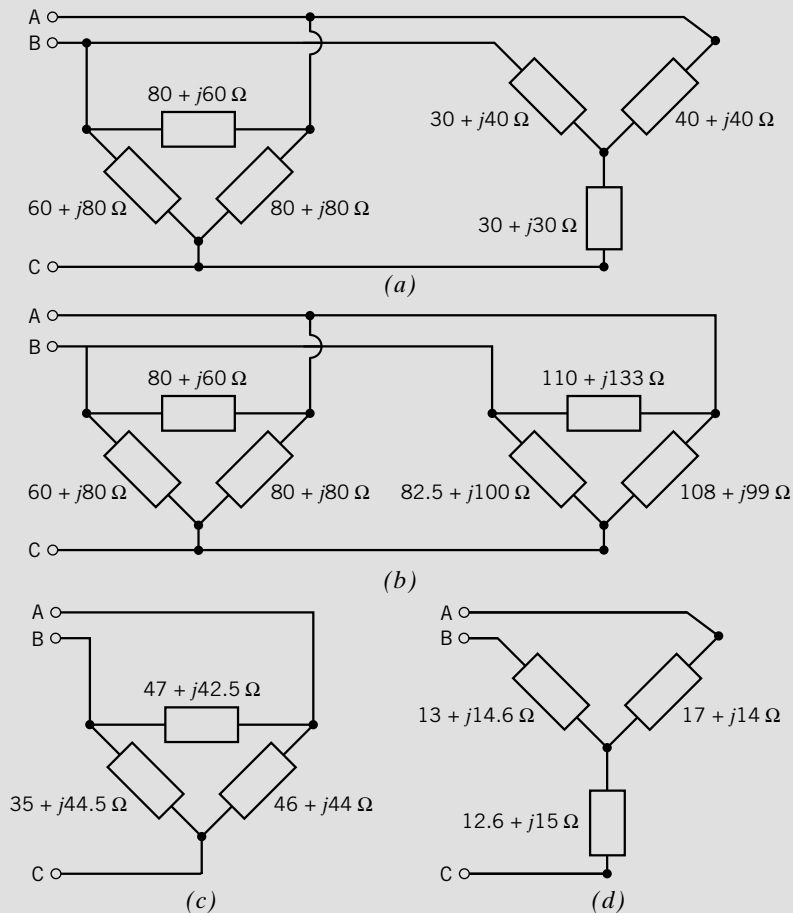
Por consiguiente, si tenemos una fuente conectada a Y y una carga balanceada conectada a  $\Delta$  con  $Z_\Delta$ , convertimos la carga  $\Delta$  en una carga Y con  $Z_Y = Z_\Delta/3$ . Entonces la corriente es

$$I_A = \frac{V_a}{Z_Y} = \frac{3V_a}{Z_\Delta} \quad (12.4-4)$$

De esta forma consideraremos solamente la configuración Y a Y. Si nos encontráramos con la configuración Y a  $\Delta$ , la carga conectada a  $\Delta$  se convierte en carga equivalente conectada a Y, y se calculan las corrientes y los voltajes que resulten.

### EJEMPLO 12.4-1 Cargas conectadas a Y y $\Delta$

La figura 12.4-1a muestra una carga trifásica que consta de una conexión en paralelo de una carga conectada a Y y conectada a  $\Delta$ . Convierta esta carga en una carga equivalente conectada a Y.



**FIGURA 12.4-1** Ejemplo de conversiones Y- $\Delta$ . (a) Cargas en paralelo conectadas a Y y a  $\Delta$ . (b) La carga conectada a Y se convierte en carga conectada a  $\Delta$ . (c) Las cargas en paralelo conectadas a  $\Delta$  son reemplazadas por una única carga equivalente conectada a  $\Delta$ . (d) La carga conectada a  $\Delta$  se convierte en una carga conectada a Y.

### Solución

Primero, convierta la carga conectada a Y en una carga conectada a  $\Delta$  como se muestra en la figura 12.4-1b. Observe, por ejemplo, en la figura 12.4-1b, que ambas cargas conectadas a  $\Delta$  tienen una impedancia conectada entre las terminales A y B. Estas impedancias están en paralelo y se pueden reemplazar por una impedancia equivalente única. Reemplace las cargas en paralelo conectadas a  $\Delta$  por una carga equivalente conectada a  $\Delta$ , como se muestra en la figura 12.4-1c. Por último, convierta la carga conectada a  $\Delta$  en una carga conecta a Y, como se muestra en la figura 12.4-1d.

## 12.5 CIRCUITO Y A $\Delta$

Ahora consideremos el circuito Y a  $\Delta$  que se muestra en la figura 12.5-1. Aplicar la KCL en los nodos de la carga conectada a  $\Delta$  muestra que la relación entre las corrientes de línea y las corrientes de fasor es

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{aA} &= \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA} \\ \mathbf{I}_{bB} &= \mathbf{I}_{BC} - \mathbf{I}_{AB} \\ \mathbf{I}_{cC} &= \mathbf{I}_{CA} - \mathbf{I}_{BC} \end{aligned} \quad (12.5-1)$$

El objetivo es calcular las corrientes de línea y de fasor para la carga.

Las corrientes de fasor en la carga conectada a  $\Delta$  se pueden calcular a partir de los voltajes de línea a línea. Estos voltajes de línea a línea aparecen directamente a través de las impedancias de la carga conectada a  $\Delta$ . Por ejemplo,  $\mathbf{V}_{AB}$  aparece a través de  $\mathbf{Z}_3$ , por lo tanto,

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_3} \quad (12.5-2)$$

Del mismo modo, 
$$\mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_2} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_1} \quad (12.5-3)$$

Cuando la carga está balanceada, las corrientes de fasor en la carga tienen la misma magnitud y ángulos fasoriales que difieren por  $120^\circ$ . Por ejemplo, si la fuente trifásica tiene la secuencia  $abc$ , e

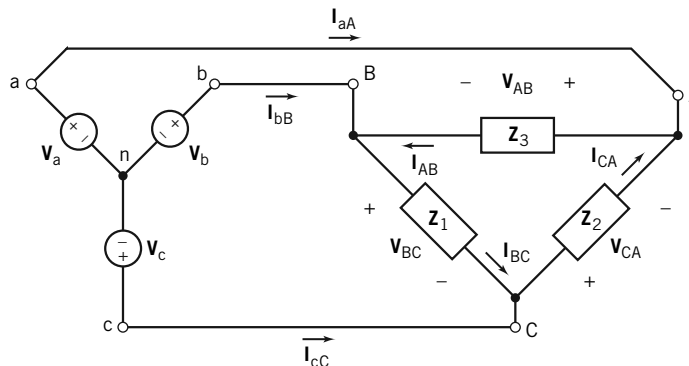


FIGURA 12.5-1 Un circuito trifásico Y a  $\Delta$ .



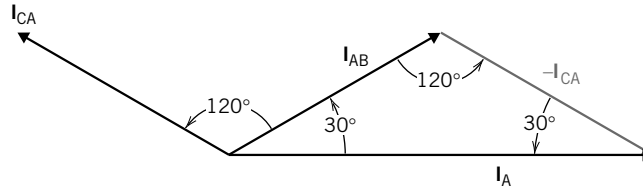


FIGURA 12.5-2 Diagrama de fasores para corrientes de una carga  $\Delta$ .

$\mathbf{I}_{AB} = I \angle \phi$ , entonces  $\mathbf{I}_{CA} = I \angle \phi + 120^\circ$ . La corriente de línea  $\mathbf{I}_{aA}$  se calcula como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_{aA} &= \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA} \\
 &= I \cos \phi + jI \sin \phi - I \cos (\phi + 120^\circ) - jI \sin (\phi + 120^\circ) \\
 &= -2I \sin (\phi + 60^\circ) \sin (-60^\circ) + j2I \cos (\phi + 60^\circ) \sin (-60^\circ) \\
 &= \sqrt{3} I [\sin (\phi + 60^\circ) - j \cos (\phi + 60^\circ)] \\
 &= \sqrt{3} I [\cos (\phi - 30^\circ) - j \sin (\phi - 30^\circ)] \\
 &= \sqrt{3} I \angle \phi - 30^\circ \text{ A}
 \end{aligned} \tag{12.5-4}$$

Por consiguiente,  $|\mathbf{I}_{aA}| = \sqrt{3}|\mathbf{I}|$  (12.5-5)

o bien

$$I_L = \sqrt{3}I_p$$

y la magnitud de la corriente de línea es  $\sqrt{3}$  veces la magnitud de la corriente de fasor. Este resultado también se puede obtener del diagrama de fasores que se muestra en la figura 12.5-2. En una conexión  $\Delta$ , la corriente de línea es  $\sqrt{3}$  veces la corriente de fasor y está desfasada  $-30^\circ$ . El voltaje de línea a línea es igual al voltaje de fasor.

### EJEMPLO 12.5-1 Circuito Y a $\Delta$ balanceado

Considere el circuito trifásico que se muestra en la figura 12.5-1. Los voltajes de la fuente conectada a Y son

$$\mathbf{V}_a = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ \text{ V rms}, \quad \mathbf{V}_b = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle -150^\circ \text{ V rms} \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_c = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 90^\circ \text{ V rms}$$

La carga conectada a  $\Delta$  está balanceada. La impedancia de cada fase es  $\mathbf{Z}_\Delta = 10 \angle -50^\circ \Omega$ . Determine las corrientes de fasor y de línea.

#### Solución

Los voltajes de línea a línea se calculan a partir de los voltajes de línea de la fuente como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_{AB} &= \mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ - \frac{220}{\sqrt{3}} \angle -150^\circ = 220 \angle 0^\circ \text{ V rms} \\
 \mathbf{V}_{BC} &= \mathbf{V}_b - \mathbf{V}_c = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle -150^\circ - \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 90^\circ = 220 \angle -120^\circ \text{ V rms} \\
 \mathbf{V}_{CA} &= \mathbf{V}_c - \mathbf{V}_a = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 90^\circ - \frac{220}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ = 220 \angle -240^\circ \text{ V rms}
 \end{aligned}$$

Los voltajes de una carga conectada a  $\Delta$  son iguales a los voltajes de línea a línea. Las corrientes de fasor son

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}} = \frac{220 \angle 0^\circ}{10 \angle -50^\circ} = 22 \angle 50^\circ \text{ A rms}$$

$$\mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}} = \frac{220 \angle -120^\circ}{10 \angle -50^\circ} = 22 \angle -70^\circ \text{ A rms}$$

$$\mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}} = \frac{220 \angle -240^\circ}{10 \angle -50^\circ} = 22 \angle -190^\circ \text{ A rms}$$

Las corrientes de línea son

$$\mathbf{I}_{aA} = \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA} = 22 \angle 50^\circ - 22 \angle -190^\circ = 22\sqrt{3} \angle 20^\circ \text{ A rms}$$

Entonces

$$\mathbf{I}_{bB} = 22\sqrt{3} \angle -100^\circ \text{ A rms} \quad \text{y} \quad \mathbf{I}_{cC} = 22\sqrt{3} \angle -220^\circ \text{ A rms}$$

Las relaciones entre corrientes y voltaje para una carga  $\Delta$  se resumen en la tabla 12.5-1.

**Tabla 12.5-1 La corriente y voltaje para una carga  $\Delta$**

<b>Voltajes de fasor</b>	$\mathbf{V}_{AB} = V_{AB} \angle 0^\circ$
<b>Voltajes de línea a línea</b>	$V_{AB} = V_L$ (voltaje lineal = voltaje de fasor)
<b>Corrientes de fasor</b>	$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_P} = \frac{\mathbf{V}_L}{\mathbf{Z}_\Delta} = I_p \angle -\theta$ con $\mathbf{Z}_P = \mathbf{Z} / \theta$
	$\mathbf{I}_{BC} = \mathbf{I}_{AB} \angle -120^\circ$
	$\mathbf{I}_{CA} = \mathbf{I}_{AB} \angle -240^\circ$
<b>Corrientes de línea</b>	$\mathbf{I}_A = \sqrt{3} I_p \angle -\theta - 30^\circ$ $\mathbf{I}_B = \sqrt{3} I_p \angle -\theta - 150^\circ$ $\mathbf{I}_C = \sqrt{3} I_p \angle -\theta + 90^\circ$ $I_L = \sqrt{3} I_p$

Nota: L = línea; p = fase.

**EJERCICIO 12.5-1** Considere el circuito trifásico que se muestra en la figura 12.5-1. Los voltajes de la fuente conectada a Y son

$$\mathbf{V}_a = \frac{360}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ \text{ V rms}, \quad \mathbf{V}_b = \frac{360}{\sqrt{3}} \angle -150^\circ \text{ V rms} \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_c = \frac{360}{\sqrt{3}} \angle 90^\circ \text{ V rms}$$

La carga conectada a  $\Delta$  está balanceada. La impedancia de cada fase es  $\mathbf{Z}_\Delta = 180 \angle 45^\circ \Omega$ . Determine las corrientes de fasor y línea cuando el voltaje de línea a línea es de 360 V rms.

**Respuesta parcial:**  $\mathbf{I}_{AB} = 2 \angle 45^\circ \text{ A rms}$  e  $\mathbf{I}_{aA} = 3.46 \angle 15^\circ \text{ A rms}$

## 12.6 CIRCUITOS TRIFÁSICOS BALANCEADOS

Sólo tenemos dos posibles configuraciones prácticas para circuitos trifásicos, Y a Y y Y a  $\Delta$ , y posteriormente podemos convertir ésta a la forma Y a Y. Por lo tanto, un circuito trifásico práctico siempre se puede convertir al circuito Y a Y.

Los circuitos balanceados son más fáciles de analizar que los no balanceados. Ya antes vimos que los circuitos trifásicos Y a Y se pueden analizar utilizando el circuito equivalente por fase.

El circuito que se muestra en la figura 12.6-1a es un circuito Y a  $\Delta$  balanceado. La figura 12.6-1b muestra el circuito Y a Y equivalente, en el cual

$$Z_Y = \frac{Z_{\Delta}}{3}$$

Este circuito Y a Y se puede analizar utilizando el circuito equivalente por fase que se muestra en la figura 12.6-1c.

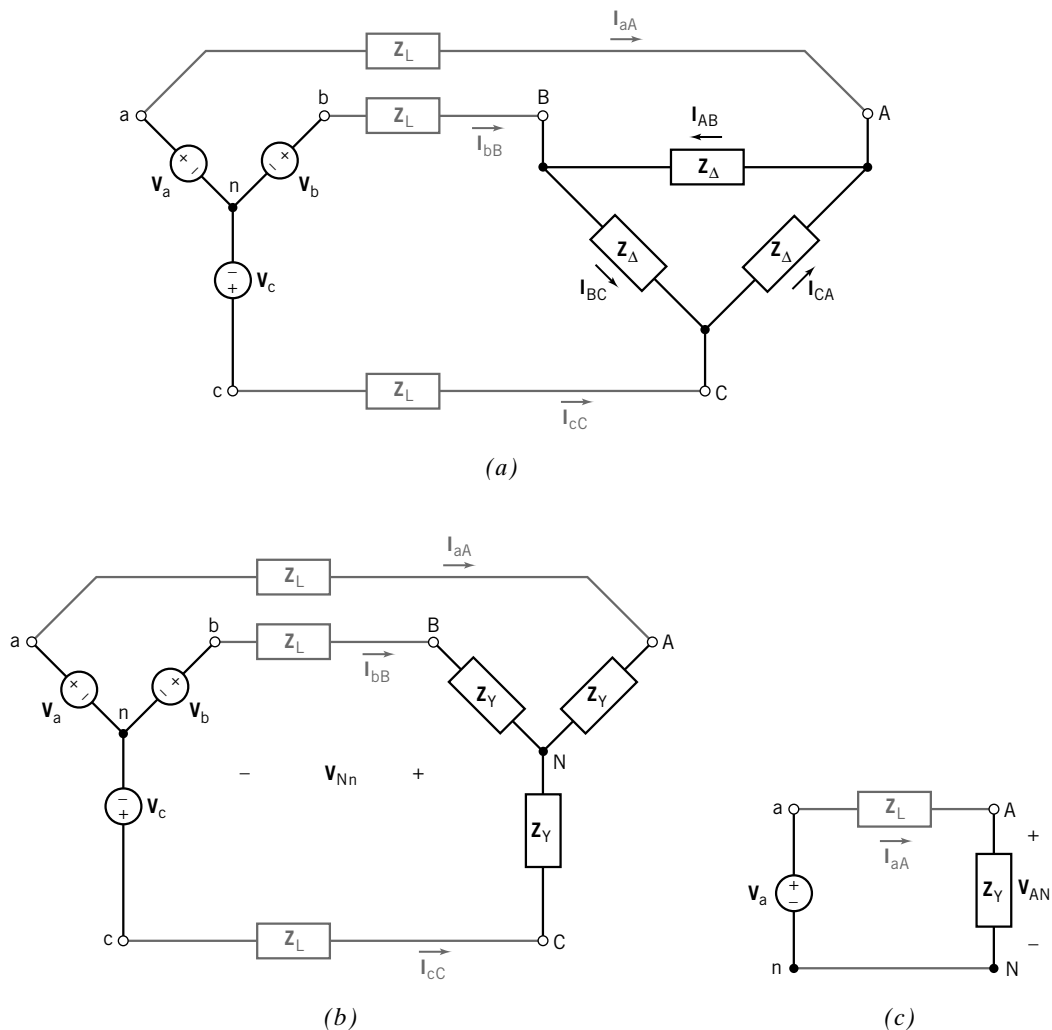


FIGURA 12.6-1 (a) Circuito Y a  $\Delta$ , (b) el circuito Y a Y equivalente y, (c) el circuito equivalente por fase.

**EJEMPLO 12.6-1** Circuito equivalente por fase

La figura 12.6-1a muestra un circuito trifásico Y a  $\Delta$  balanceado. Los voltajes de fasor de la fuente conectada a Y son  $\mathbf{V}_a = 110 \angle 0^\circ$  V rms,  $\mathbf{V}_b = 110 \angle -120^\circ$  V rms y  $\mathbf{V}_c = 110 \angle 120^\circ$  V rms. Las impedancias de línea son  $\mathbf{Z}_L = 10 + j5 \Omega$ . Las impedancias de carga conectada a  $\Delta$  son  $\mathbf{Z}_\Delta = 75 + j225 \Omega$ . Determine las corrientes de fasor en la carga conectada a  $\Delta$ .

**Solución**

Convierta la carga conectada a  $\Delta$  en carga conectada a Y utilizando la transformación  $\Delta$  a Y resumida en la tabla 12.4-1. Las impedancias de la carga conectada a Y equivalente balanceada son

$$\mathbf{Z}_Y = \frac{75 + j225}{3} = 25 + j75 \Omega$$

En la figura 12.6-1c se muestra el circuito equivalente por fase para el circuito Y a Y. La corriente de línea está dada por

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_a}{\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_Y} = \frac{110 \angle 0^\circ}{(10 + j5) + (25 + j75)} = 1.26 \angle -66^\circ \text{ A rms} \quad (12.6-1)$$

La corriente de línea,  $\mathbf{I}_{aA}$ , calculada utilizando el circuito equivalente por fase, también es la corriente de línea,  $\mathbf{I}_{aA}$ , en el circuito Y a Y, así como la corriente de línea,  $\mathbf{I}_{aA}$ , en el circuito Y a  $\Delta$ . Las demás corrientes de línea en el circuito Y a Y balanceado tienen la misma magnitud aunque difieren por  $120^\circ$  en el ángulo fasorial. Estas corrientes de línea son

$$\mathbf{I}_{bB} = 1.26 \angle -186^\circ \text{ A rms} \quad \text{e} \quad \mathbf{I}_{cC} = 1.26 \angle 54^\circ \text{ A rms}$$

Para comprobar el valor de  $\mathbf{I}_{bB}$ , aplique la KVL al circuito cerrado en el circuito Y a Y que empieza en el nodo n, pasa a través de los nodos b, B, N, y regresa al nodo n. La ecuación de KVL resultante es

$$\mathbf{V}_b = \mathbf{Z}_L \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{Z}_Y \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{V}_{Nn}$$

Como el circuito está balanceado,  $\mathbf{V}_{Nn} = 0$ . Despejar  $\mathbf{I}_{bB}$  da

$$\mathbf{I}_{bB} = \frac{\mathbf{V}_b}{\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_Y} = \frac{110 \angle -120^\circ}{(10 + j5) + (25 + j75)} = 1.26 \angle -186^\circ \text{ A rms} \quad (12.6-2)$$

La comparación de las ecuaciones 12.6-1 y 12.6-2 muestra que las corrientes de línea en el circuito Y a Y balanceado tienen la misma magnitud pero difieren por  $120^\circ$  en el ángulo fasorial.

Las corrientes de línea del circuito Y a  $\Delta$  en la figura 12.6-1a son iguales a las corrientes de línea del circuito Y a Y en la figura 12.6-1b porque los circuitos Y a  $\Delta$  y Y a Y son equivalentes.

El voltaje  $\mathbf{V}_{AN}$  en el circuito equivalente por fase es

$$\mathbf{V}_{AN} = \mathbf{I}_{aA} \mathbf{Z}_Y = (1.26 \angle -66^\circ)(25 + j75) = 99.6 \angle 5^\circ \text{ V rms}$$

El voltaje  $\mathbf{V}_{AN}$  calculado utilizando el circuito equivalente por fase es también el voltaje de fasor,  $\mathbf{V}_{AN}$ , del circuito Y a Y. Los demás voltajes de fasor del circuito Y a Y balanceado tienen la misma magnitud pero difieren por  $120^\circ$  en el ángulo fasorial. Estos voltajes de fasor son

$$\mathbf{V}_{BN} = 99.6 \angle -115^\circ \text{ V rms} \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_{CN} = 99.6 \angle 125^\circ \text{ V rms}$$

Los voltajes de línea a línea del circuito Y a Y se calculan como

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AN} - \mathbf{V}_{BN} = 99.5 \angle 5^\circ - 99.5 \angle -115^\circ = 172 \angle 35^\circ \text{ V rms}$$

$$\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{BN} - \mathbf{V}_{CN} = 99.5 \angle -115^\circ - 99.5 \angle 125^\circ = 172 \angle -85^\circ \text{ V rms}$$

$$\mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{CN} - \mathbf{V}_{AN} = 99.5 \angle 125^\circ - 99.5 \angle 5^\circ = 172 \angle 155^\circ \text{ V rms}$$

Los voltajes de fasor de una carga conectada a  $\Delta$  son iguales a los voltajes de línea a línea. Las corrientes de fasor son

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_{\Delta}} = \frac{172 \angle 35^\circ}{75 + j225} = 0.727 \angle -36^\circ \text{ A rms}$$

$$\mathbf{I}_{BC} = \frac{\mathbf{V}_{BC}}{\mathbf{Z}_{\Delta}} = \frac{172 \angle -85^\circ}{75 + j225} = 0.727 \angle -156^\circ \text{ A rms}$$

$$\mathbf{I}_{CA} = \frac{\mathbf{V}_{CA}}{\mathbf{Z}_{\Delta}} = \frac{172 \angle 155^\circ}{75 + j225} = 0.727 \angle -84^\circ \text{ A rms}$$

**EJERCICIO 12.6-1** La figura 12.6-1a muestra un circuito trifásico Y a  $\Delta$  balanceado. Los voltajes de fasor de la fuente conectada a Y son  $\mathbf{V}_a = 110 \angle 0^\circ \text{ V rms}$ ,  $\mathbf{V}_b = 110 \angle -120^\circ \text{ V rms}$  y  $\mathbf{V}_c = 110 \angle 120^\circ \text{ V rms}$ . Las impedancias de línea son  $\mathbf{Z}_L = 10 + j25 \Omega$ . Las impedancias de carga conectada a  $\Delta$  son  $\mathbf{Z}_D = 150 + j270 \Omega$ . Determine las corrientes de fasor en la carga conectada a  $\Delta$ .

**Respuesta:**  $\mathbf{I}_{AB} = 0.49 \angle -32.5^\circ \text{ A rms}$ ,  $\mathbf{I}_{BC} = 0.49 \angle -152.5^\circ \text{ A rms}$ ,  $\mathbf{I}_{CA} = 0.49 \angle 87.5^\circ \text{ A rms}$

## 12.7 POTENCIAS PROMEDIO E INSTANTÁNEA EN UNA CARGA TRIFÁSICA BALANCEADA

Una ventaja de la potencia trifásica es el flujo suave de la energía hacia la carga. Considere una carga balanceada con resistencia  $R$ . Entonces la potencia instantánea es

$$p(t) = \frac{v_{ab}^2}{R} + \frac{v_{bc}^2}{R} + \frac{v_{ca}^2}{R} \quad (12.7-1)$$

donde  $v_{ab} = V \cos \omega t$ , y los demás voltajes bifásicos tienen una fase de  $\pm 120^\circ$ , respectivamente. Además,

$$\cos^2 \alpha t = (1 + \cos 2\alpha)/2$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{V^2}{2R} [1 + \cos 2\omega t + 1 + \cos 2(\omega t - 120^\circ) + 1 + \cos 2(\omega t - 240^\circ)] \\ &= \frac{3V^2}{2R} + \frac{V^2}{2R} [\cos 2\omega t + \cos (2\omega t - 240^\circ) + \cos (2\omega t - 480^\circ)] \end{aligned} \quad (12.7-2)$$

El término entre corchetes es igual a cero para todo tiempo. Así, pues,

$$p(t) = \frac{3V^2}{2R}$$

La potencia instantánea transmitida a una carga trifásica balanceada es una constante.

La potencia total transmitida a una carga trifásica balanceada se puede calcular utilizando el circuito equivalente por fase. Por ejemplo, multiplicamos por 3 la potencia compleja transmitida a una carga en el circuito equivalente para obtener la potencia compleja total transmitida a la carga trifásica balanceada correspondiente.

Considere, una vez más, la figura 12.6-1. En la figura 12.6-1a se muestra un circuito Y a  $\Delta$  balanceado, y en la figura 12.6-1b se muestra el circuito Y a Y equivalente, el cual se obtuvo utilizando la transformación  $\Delta$  a Y que se resume en la tabla 12.4-1. En la figura 12.6-1c se muestra el circuito equivalente por fase correspondiente al circuito Y a Y. El voltaje  $\mathbf{V}_{AN} = V_P \angle \theta_{AV}$  y la corriente  $\mathbf{I}_{aA} = I_L \angle \theta_{AI}$  se obtienen utilizando el circuito equivalente por fase. El voltaje  $\mathbf{V}_{AN}$  y la corriente  $\mathbf{I}_{aA}$  son el voltaje de fasor y la corriente de línea de la carga conectada a Y en la figura 12.6-1b. La potencia promedio total transmitida a la carga conectada a Y balanceada está dada por

$$P_Y = 3 P_A = 3 V_P I_L \cos(\theta_{AV} - \theta_{AI}) = 3 V_P I_L \cos(\theta) \quad (12.7-3)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre el voltaje de fasor y la corriente de línea,  $\cos \theta$  es el factor de potencia, y  $V_P$  e  $I_P$  son los valores efectivos del voltaje de fasor y la corriente de línea.

Es más fácil medir el voltaje de línea a línea y la corriente de línea de un circuito. Recuerde también que la corriente de línea es igual a la corriente de fasor y que el voltaje de fasor es  $V_P = V_L/\sqrt{3}$  para la configuración de la carga Y. Por consiguiente,

$$P = 3 \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \theta = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta \quad (12.7-4)$$

La potencia promedio total transmitida a la carga conectada a  $\Delta$  en la figura 12.6-1a, es

$$P = 3P_{AB} = 3V_{AB}I_{AB} \cos \theta = 3(\sqrt{3}V_P) \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos \theta = 3 V_P I_L \cos \theta \quad (12.7-5)$$

En resumen, la potencia promedio total transmitida a la carga conectada a  $\Delta$  en la figura 12.6-1a es igual a la potencia promedio total transmitida a la carga balanceada conectada a Y en la figura 12.6-1b. Eso es adecuado porque los dos circuitos son equivalentes. Observe que la información requerida para calcular la potencia transmitida a una carga balanceada, Y o  $\Delta$ , se obtiene a partir del circuito equivalente por fase.

### EJEMPLO 12.7-1 Potencia transmitida a la carga

La figura 12.6-1a muestra un circuito trifásico Y a  $\Delta$  balanceado. Los voltajes de fasor de la fuente conectada a Y son  $\mathbf{V}_a = 110 \angle 0^\circ$  V rms,  $\mathbf{V}_b = 110 \angle -120^\circ$  V rms y  $\mathbf{V}_c = 110 \angle 120^\circ$  V rms. Las impedancias de línea son  $\mathbf{Z}_L = 10 + j5 \Omega$ . Las impedancias de carga conectada a  $\Delta$  son  $\mathbf{Z}_\Delta = 75 + j225 \Omega$ . Determine la potencia promedio transmitida a la carga.

#### Solución

Este circuito ya se analizó en el ejemplo 12.6-1. Ese análisis mostró que

$$\mathbf{I}_{aA} = 1.26 \angle -66^\circ \text{ A rms}$$

y

$$V_{AN} = 99.6 \angle 5^\circ \text{ V rms}$$

La potencia promedio total transmitida a la carga está dada por la ecuación 12.7-3 como

$$P = 3(99.6)(1.26) \cos(5^\circ - (-66^\circ)) = 122.6 \text{ W}$$

### EJEMPLO 12.7-2 La carga trifásica

Una carga trifásica balanceada recibe 15 kW a un factor de potencia de 0.8 de retardo cuando el voltaje de línea es 480 V rcm. Represente esta carga como una carga conectada a Y balanceada.

#### Solución

Representaremos la carga como tres impedancias conectadas a Y. Cada impedancia recibirá un tercio de la potencia transmitida a la carga trifásica, 5 kW a un retardo de 0.8. La potencia compleja recibida por cada impedancia será

$$\mathbf{S} = P + j \frac{P}{pf} \sin(\cos^{-1}(pf)) = 5 + j \frac{5}{0.8} \sin(\cos^{-1}(0.8)) = 5 + j3.75 \text{ kVA}$$

El voltaje a través de cada impedancia de la carga será el voltaje de fasor

$$V_P = \frac{|V_L|}{\sqrt{3}} \angle \phi = \frac{480}{\sqrt{3}} \angle \phi = 277 \angle \phi \text{ V rms}$$

El ángulo,  $\phi$ , del voltaje de fasor no se ha especificado. Los voltajes a través de las tres impedancias de la carga tienen la misma magnitud pero ángulos diferentes. La corriente en cada una de las impedancias de carga está dada por

$$\mathbf{I} = \left( \frac{\mathbf{S}}{V_P} \right)^* = \left( \frac{6250 \angle 36.9^\circ}{277 \angle \phi} \right)^* = 22.56 \angle (\phi - 36.9^\circ) \text{ A rms}$$

Por último, la impedancia de carga la da

$$\mathbf{Z} = \frac{V_P}{\mathbf{I}} = \frac{277 \angle \phi}{22.56 \angle (\phi - 36.9^\circ)} = 12.28 \angle 36.9^\circ = 9.82 + j7.37 \Omega$$

### EJEMPLO 12.7-3 Circuito trifásico

Un circuito trifásico balanceado consta de una fuente conectada a Y conectada a una carga balanceada. Las impedancias de línea son  $\mathbf{Z}_L = 2 + j0.5 \Omega$  cada una. La carga trifásica balanceada recibe 15 kW a un factor de potencia de 0.8 de retardo, y el voltaje de línea de la carga es de 480 V rms. Determine el voltaje de fuente requerido y la potencia compleja alimentada por la fuente trifásica.

#### Solución

La carga trifásica en este ejemplo es la misma que encontramos en el ejemplo 12.7-2. Si tomamos los resultados de ese ejemplo, podemos representar este circuito trifásico, utilizando el circuito equivalente por fase que

se muestra en la figura 12.6-1c, con  $\mathbf{Z}_L = 2 + j0.5 \Omega$  y  $\mathbf{Z}_Y = 9.82 + j7.37 \Omega$ . Como en el ejemplo 12.7-2, la corriente de línea depende de la potencia recibida por la carga y del voltaje de línea en la carga y está dada por

$$\mathbf{I}_{aA} = 22.56 \angle (\phi - 36.9^\circ) \text{ A rms}$$

donde no se ha especificado  $\phi$ . Aplicando la KVL, el voltaje de fuente requerido se puede expresar como

$$\mathbf{V}_a = (\mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_Y)\mathbf{I}_{aA} = (2 + j0.5 + 9.82 + j7.37)22.56 \angle (\phi - 36.9^\circ) = 320.6 \angle (\phi - 3.3^\circ) \text{ V rms}$$

La potencia compleja transmitida por la fuente trifásica es

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\text{fuente}} &= 3\mathbf{V}_a\mathbf{I}_{aA}^* = 3(320.6 \angle (\phi - 3.3^\circ))(22.56 \angle (\phi - 36.9^\circ))^* = 21.7 \angle 33.6^\circ \\ &= 18.1 + j12.0 \text{ kVA} \end{aligned}$$

Vale la pena observar que la potencia alimentada por la fuente trifásica no depende de un ángulo  $\phi$  no especificado. En este punto, puede ser conveniente especificar que  $\phi = 3.3^\circ$ , de modo que las fuentes de voltaje conectadas a Y tendrán ángulos fasoriales de  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  y  $-120^\circ$ .

**EJERCICIO 12.7-1** La figura 12.6-1a muestra un circuito trifásico Y a  $\Delta$  balanceado. Los voltajes de fasor de la fuente conectada a Y son  $\mathbf{V}_a = 110 \angle 0^\circ \text{ V rms}$ ,  $\mathbf{V}_b = 110 \angle -120^\circ \text{ V rms}$  y  $\mathbf{V}_c = 110 \angle 120^\circ \text{ V rms}$ . Las impedancias de línea son  $\mathbf{Z}_L = 10 + j5 \Omega$ . Las impedancias de carga conectada a  $\Delta$  son  $\mathbf{Z}_\Delta = 150 + j270 \Omega$ . Determine la potencia promedio transmitida a la carga conectada a  $\Delta$ .

**Respuesta intermedia:**  $\mathbf{I}_{aA} = 0.848 \angle -62.5^\circ \text{ A rms}$  y  $\mathbf{V}_{AN} = 87.3 \angle -1.5^\circ \text{ V rms}$ .

**Respuesta:**  $P = 107.9 \text{ W}$

## 12.8 MEDICIÓN DE POTENCIA CON DOS VATÍMETROS

Para muchas configuraciones de carga, por ejemplo un motor trifásico, la corriente o voltaje de fasor es inaccesible. Querríamos medir la potencia con un vatímetro conectado a cada fase. Sin embargo, dado que las fases no están disponibles medimos las corrientes de línea y los voltajes de línea a línea. Un vatímetro proporciona una lectura de  $V_L I_L \cos \theta$  donde  $V_L$  e  $I_L$  son las magnitudes rms y  $\theta$  es el ángulo entre el voltaje de línea,  $\mathbf{V}$ , y la corriente,  $\mathbf{I}$ . Elegimos medir  $V_L$  e  $I_L$ , el voltaje y la corriente de línea, respectivamente. Mostraremos que los dos vatímetros son suficientes para leer la potencia transmitida a la carga trifásica, como se muestra en la figura 12.8-1. Utilizamos  $bc$  para indicar la bobina de corriente y  $bv$  para indicar la bobina de voltaje.

El vatímetro 1 lee

$$P_1 = V_{AB}I_A \cos \theta_1 \quad (12.8-1)$$

y el vatímetro 2 lee

$$P_2 = V_{CB}I_C \cos \theta_2 \quad (12.8-2)$$

Para la secuencia de fase  $abc$  para una carga balanceada,

$$\theta_1 = \theta + 30^\circ$$

y

$$\theta_2 = \theta - 30^\circ \quad (12.8-3)$$



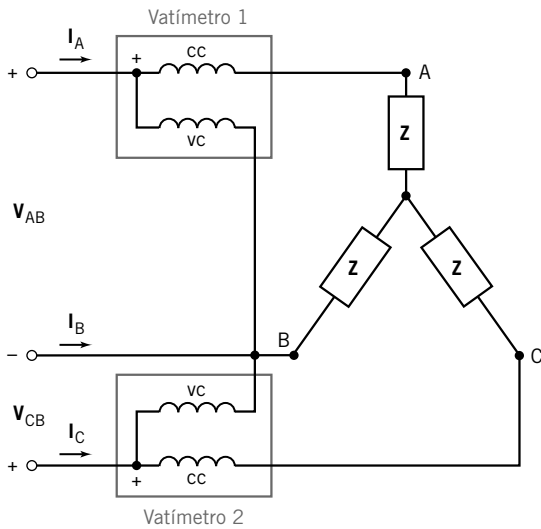


FIGURA 12.8-1 Conexión de dos vatímetros para una carga trifásica conectada a Y.

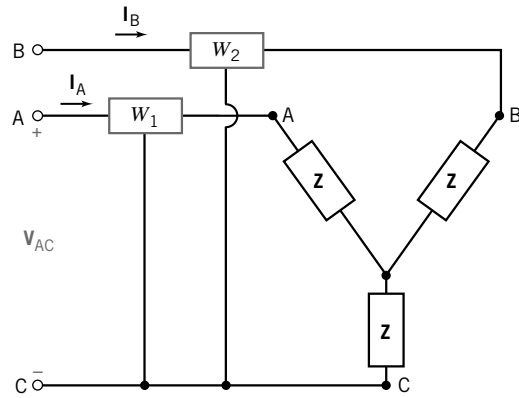


FIGURA 12.8-2 Conexión de dos vatímetros para el ejemplo 12.8-1.

donde  $\theta$  es el ángulo entre la corriente de fasor y el voltaje de fasor para la fase  $a$  de la fuente trifásica.

Por consiguiente,

$$P = P_1 + P_2 = 2V_L I_L \cos \theta \cos 30^\circ = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta \quad (12.8-4)$$

Lo cual es la potencia promedio total del circuito trifásico. La derivación anterior de la ecuación 12.8-4 es para un circuito balanceado, el resultado es bueno para cualquier carga de tres hilos, trifásica, incluso voltajes no balanceados o no senoidales.

El ángulo de factor de potencia,  $\theta$ , de un sistema trifásico balanceado se puede determinar a partir de la lectura de los dos vatímetros que se muestran en la figura 12.8-2.

La potencia total se obtiene de las ecuaciones 12.8-1 a la 12.8-3 como

$$\begin{aligned} P = P_1 + P_2 &= V_L I_L [\cos(\theta + 30^\circ) + \cos(\theta - 30^\circ)] \\ &= V_L I_L 2 \cos \theta \cos 30^\circ \end{aligned} \quad (12.8-5)$$

$$\text{Del mismo modo,} \quad P_1 - P_2 = V_L I_L (-2 \sin \theta \sin 30^\circ) \quad (12.8-6)$$

Al dividir la ecuación 12.8-5 entre 12.8-6, obtenemos

$$\frac{P_1 + P_2}{P_1 - P_2} = \frac{2 \cos \theta \cos 30^\circ}{-2 \sin \theta \sin 30^\circ} = \frac{-\sqrt{3}}{\tan \theta}$$

$$\text{Por consiguiente,} \quad \tan \theta = \sqrt{3} \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} \quad (12.8-7)$$

donde  $\theta$  = ángulo del factor de potencia.

**EJEMPLO 12.8-1** Método de dos vatímetros

El método de dos vatímetros se utiliza, como se muestra en la figura 12.8-2, para medir la potencia total transmitida a la carga conectada a Y cuando  $Z = 10 \angle 45^\circ \Omega$  y el voltaje de línea a línea de alimentación es de 220 V rms. Determine la lectura de cada vatímetro y la potencia total.

**Solución**

El voltaje de fasor es

$$\mathbf{V}_A = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ \text{ V rms}$$

Luego obtenemos la corriente de línea como

$$\mathbf{I}_A = \frac{\mathbf{V}_A}{\mathbf{Z}} = \frac{220 \angle -30^\circ}{10\sqrt{3} \angle 45^\circ} = 12.7 \angle -75^\circ \text{ A rms}$$

Entonces la segunda corriente de línea es

$$\mathbf{I}_B = 12.7 \angle -195^\circ \text{ A rms}$$

El voltaje  $\mathbf{V}_{AB} = 220 \angle 0^\circ \text{ V rms}$ ,  $\mathbf{V}_{CA} = 220 \angle +120^\circ \text{ V rms}$  y  $\mathbf{V}_{BC} = 220 \angle -120^\circ \text{ V rms}$ . El primer vatímetro lee

$$P_1 = I_A V_{AC} \cos \theta_1 = 12.7(220) \cos 15^\circ = 2\,698 \text{ W}$$

Como  $\mathbf{V}_{CA} = 220 \angle +120^\circ$ ,  $\mathbf{V}_{AC} = 220 \angle -60^\circ$ . Por consiguiente, el ángulo  $\theta_1$  queda entre  $\mathbf{V}_{AC}$  e  $\mathbf{I}_A$  y es igual a  $15^\circ$ . La lectura del segundo vatímetro es

$$P_2 = I_B V_{BC} \cos \theta_2 = 12.7(220) \cos 75^\circ = 723 \text{ W}$$

donde  $\theta_2$  es el ángulo entre  $\mathbf{I}_B$  y  $\mathbf{V}_{BC}$ . En consecuencia, la potencia total es

$$P = P_1 + P_2 = 3\,421 \text{ W}$$

Observamos que todos los cálculos anteriores suponen que el vatímetro prácticamente no absorbe potencia.

**EJEMPLO 12.8-2** Método de dos vatímetros

Los dos vatímetros en la figura 12.8-2 leen  $P_1 = 60 \text{ kW}$  y  $P_2 = 180 \text{ W}$ , respectivamente. Encuentre el factor de potencia del circuito.

**Solución**

A partir de la ecuación 12.8-7, tenemos

$$\tan \theta = \sqrt{3} \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} = \sqrt{3} \frac{120}{240} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$$

Por consiguiente, tenemos  $\theta = 40.9^\circ$  y el factor de potencia es

$$pf = \cos \theta = 0.756$$

El ángulo positivo,  $\theta$ , indica que el factor de potencia es de retardo. Si  $\theta$  es negativo, entonces el factor de potencia es de conducción.

**EJERCICIO 12.8-1** La corriente de línea para una carga trifásica balanceada es de 24 A rms. El voltaje de línea a línea es de 450 V rms, y el factor de potencia es de 0.47 de retardo. Si hay dos vatímetros conectados como se muestra en la figura 12.8-2, determine la lectura de cada medidor y la potencia total para la carga.

**Respuestas:**  $P_1 = -371$  W,  $P_2 = 9\,162$  W y  $P = 8\,791$  W.

**EJERCICIO 12.8-2** Los dos vatímetros están conectados como se muestra en la figura 12.8-2 con  $P_1 = 60$  kW y  $P_2 = 40$  kW, respectivamente. Determine (a) la potencia total y (b) el factor de potencia.

**Respuestas:** (a) 100 kW; (b) 0.945 de conducción

## 12.9 ¿CÓMO LO PODEMOS COMPROBAR...?

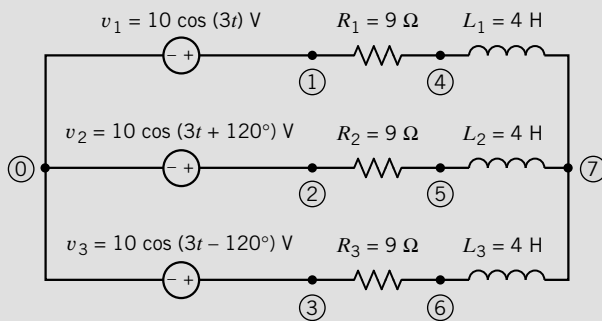
A los ingenieros se les suele solicitar comprobar que la solución de un problema sea la correcta. Por ejemplo, las soluciones propuestas para problemas de diseño se deben comprobar para confirmar que se ha cumplido con todas las especificaciones. Además, se deben revisar los resultados de la computadora para protegerse contra errores de captura de datos, así como las exigencias de los comerciantes, las cuales se deben analizar a fondo.

También a los estudiantes de ingeniería se les pide que verifiquen la exactitud de sus trabajos. Por ejemplo, tomarse un breve lapso antes de terminar un examen permitiría dar una vista rápida e identificar esas soluciones que podrían requerir un poco más de aplicación.

Los ejemplos siguientes ilustran técnicas útiles para comprobar las soluciones a los diversos problemas analizados en este capítulo.

### EJEMPLO 12.9-1 ¿Cómo podemos comprobar el análisis de circuitos trifásicos?

La figura 12.9-1a muestra un circuito trifásico balanceado. El análisis por computadora de este circuito produjo los voltajes y corrientes de elementos tabulados en la figura 12.9-1b. ¿Cómo podemos comprobar que este análisis por computadora es correcto?



(a)

Elemento	Voltaje	Corriente
V1 1 0 10 /0	10 /0	0.67 /127
V2 2 0 10 /120	10 /120	0.67 /113
V3 3 0 10 /-120	10 /-120	0.67 /7
R1 1 4 9	6 /-53	0.67 /-53
R2 2 5 9	6 /67	0.67 /67
R3 3 6 9	6 /-173	0.67 /-173
L1 4 7 4	8 /37	0.67 /-53
L2 5 7 4	8 /157	0.67 /67
L3 6 7 4	8 /83	0.67 /-173

(b)

FIGURA 12.9-1 (a) Un circuito trifásico. (b) Resultados del análisis por computadora.

**Solución**

Como el circuito trifásico está balanceado, se puede analizar utilizando un circuito equivalente por fase. El circuito equivalente por fase adecuado para este ejemplo se muestra en la figura 12.9-2. Este circuito equivalente por fase se puede analizar escribiendo una ecuación de enlace único:

$$10 = (9 + j12)I_L(\omega)$$

o bien

$$I_L(\omega) = 0.67e^{-j53^\circ} \text{ A}$$

donde  $I_L(\omega)$  es el fasor que corresponde a la corriente del inductor. El voltaje a través del inductor está dado por

$$V_L(\omega) = j12 I_L(\omega) = 8e^{j37^\circ} \text{ V}$$

El voltaje a través del resistor está dado por

$$V_R(\omega) = 9 I_L(\omega) = 6e^{-j53^\circ} \text{ V}$$

Estas corrientes y voltajes son los mismos que los valores dados en el análisis por computadora para las corrientes y voltajes de  $R_1$  y  $L_1$ . Concluimos que el análisis por computadora del circuito trifásico es correcto.

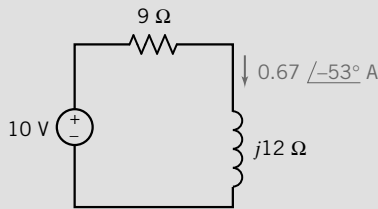


FIGURA 12.9-2 El circuito equivalente por fase.

**EJEMPLO 12.9-2** ¿Cómo podemos comprobar los circuitos trifásicos no balanceados?

El análisis por computadora del circuito en la figura 12.9-3 muestra que  $V_{Nn}(\omega) = 12.67 \angle 174.6^\circ \text{ V}$ . Este análisis por computadora no emplea valores rcm, por lo que 12.67 es la magnitud del voltaje senoidal  $v_{Nn}(t)$  más que el valor efectivo. Compruebe que este voltaje es correcto.

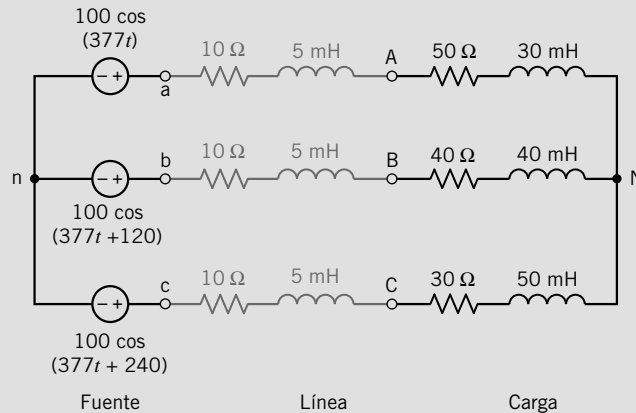


FIGURA 12.9-3 Un circuito trifásico.

## Solución

Este resultado se puede comprobar escribiendo y despejando una ecuación nodal para calcular  $V_{Nn}(\omega)$ , pero es más fácil comprobar este resultado verificando que la KCL se satisfaga en el nodo N.

Primero, calculamos las tres corrientes de línea como

$$I_A(\omega) = \frac{100 - V_{Nn}(\omega)}{60 + j(377)(0.035)} = 1.833 \angle -13^\circ \text{ A}$$

$$I_B(\omega) = \frac{100 \angle 120^\circ - V_{Nn}(\omega)}{50 + j(377)(0.045)} = 1.766 \angle 94.9^\circ \text{ A}$$

$$I_C(\omega) = \frac{100 \angle -120^\circ - V_{Nn}(\omega)}{40 + j(377)(0.055)} = 2.118 \angle -140.5^\circ \text{ A}$$

A continuación, aplicamos la KCL en el nodo N para obtener

$$1.833 \angle -13^\circ + 1.766 \angle 95.9^\circ + 2.118 \angle -140.5^\circ = 0 \text{ A}$$

Dado que KCL se satisface en el nodo N, el voltaje de nodos dado es correcto.

También comprobamos que la potencia promedio se conserve. Recuerde que en este ejemplo se han utilizado los valores pico, más que los valores efectivos. Primero, determine la potencia transmitida por la fuente (trifásica) como

$$I_A(\omega) = 1.833 \angle -13^\circ \text{ A y } V_{an}(\omega) = 100 \angle 0^\circ \text{ V, por lo tanto } P_a = \frac{(100)(1.833)}{2} \cos(0^\circ - (-13^\circ)) = 89.3 \text{ W}$$

$$I_B(\omega) = 1.766 \angle 94.9^\circ \text{ A y } V_{bn}(\omega) = 100 \angle 120^\circ \text{ V, por lo tanto } P_b = \frac{(100)(1.766)}{2} \cos(120^\circ - (94.9^\circ)) = 80 \text{ W}$$

$$I_C(\omega) = 2.118 \angle -140.5^\circ \text{ A y } V_{cn}(\omega) = 100 \angle 240^\circ \text{ V, por lo tanto } P_c = \frac{(100)(2.118)}{2} \cos(0^\circ + 140.5^\circ) = 99.2 \text{ W}$$

La potencia transmitida por la fuente es  $89.3 + 80 + 99.2 = 268.5 \text{ W}$ .

Luego, determine la potencia transmitida a la carga (trifásica) como

$$I_A(\omega) = 1.833 \angle -13^\circ \text{ A y } R_A = 50 \Omega, \text{ por lo tanto } P_A = \frac{1.833^2}{2} 50 = 84.0 \text{ W}$$

$$I_B(\omega) = 1.766 \angle 94.9^\circ \text{ A y } R_B = 40 \Omega, \text{ por lo tanto } P_B = \frac{1.766^2}{2} 40 = 62.4 \text{ W}$$

$$I_C(\omega) = 2.118 \angle -140.5^\circ \text{ A y } R_C = 30 \Omega, \text{ por lo tanto } P_C = \frac{2.118^2}{2} 30 = 67.3 \text{ W}$$

La potencia transmitida a la carga es  $84 + 62.4 + 67.3 = 213.7 \text{ W}$ .

Determine la potencia perdida en la línea (trifásica) como

$$I_A(\omega) = 1.833 \angle -13^\circ \text{ A y } R_{aA} = 10 \Omega, \text{ por lo tanto } P_{aA} = \frac{1.833^2}{2} 10 = 16.8 \text{ W}$$

$$I_B(\omega) = 1.766 \angle 94.9^\circ \text{ A y } R_{bB} = 10 \Omega, \text{ por lo tanto } P_{bB} = \frac{1.766^2}{2} 10 = 15.6 \text{ W}$$

$$I_C(\omega) = 2.118 \angle -140.5^\circ \text{ A y } R_{cC} = 10 \Omega, \text{ por lo tanto } P_{cC} = \frac{2.118^2}{2} 10 = 22.4 \text{ W}$$

La potencia perdida en la línea es de  $16.8 + 15.6 + 22.4 = 54.8 \text{ W}$ .

La potencia transmitida por la fuente es igual a la suma de la potencia perdida más la potencia transmitida a la carga. De nuevo, concluimos que el voltaje de nodos dado es correcto.

## 12.10 EJEMPLO DE DISEÑO

### CORRECCIÓN DEL FACTOR DE POTENCIA

La figura 12.10-1 muestra un circuito trifásico. Se han agregado los condensadores para mejorar el factor de potencia de la carga. Necesitamos determinar el valor de la capacitancia,  $C$ , requerido para obtener un factor de potencia de 0.9 de retardo.

#### Describe la situación y los supuestos

1. El circuito es excitado por fuentes senoidales las cuales tienen la misma frecuencia de 60 Hz o 377 rad/s. El circuito se encuentra en estado estable y es lineal. Para analizar este circuito se pueden utilizar fasores.
2. Es un circuito trifásico balanceado. Para analizar este circuito se puede utilizar un circuito equivalente por fase.
3. La carga contiene dos partes. La parte que comprende resistores e inductores está conectada como una Y (estrella). La parte que comprende condensadores está conectada como una  $\Delta$  (delta). Para simplificar la carga se puede utilizar una transformación de  $\Delta$  a Y.

En la figura 12.10-2 se muestra el circuito equivalente.

#### Establezca el objetivo

Determine el valor de  $C$  que se requiere para corregir el factor de potencia de 0.9 de retardo.

#### Genere un plan

En el capítulo anterior (11) se consideró la corrección del factor de potencia. Para corregir el factor de potencia de una carga se proporcionó una fórmula con la cual se puede calcular la reactancia,  $X_1$ , necesaria para efectuar la corrección.

$$X_1 = \frac{R^2 + X^2}{R \tan(\cos^{-1} pfc) - X}$$

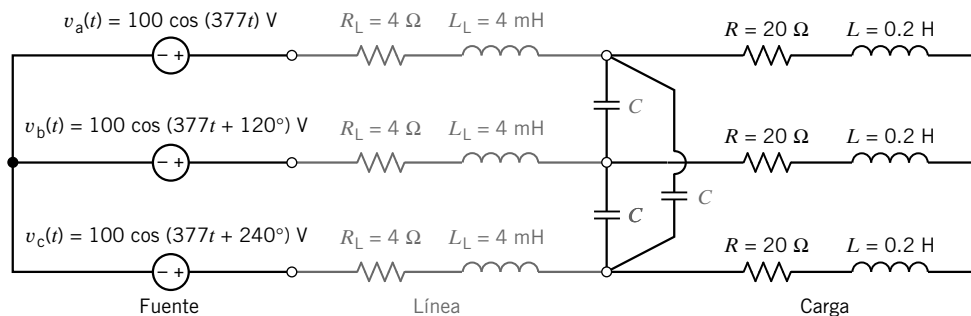


FIGURA 12.10-1 Circuito trifásico balanceado.

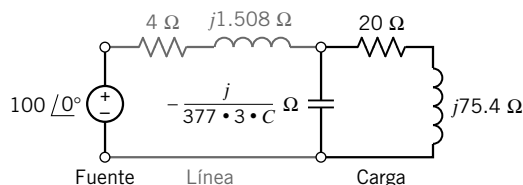


FIGURA 12.10-2 Circuito equivalente por fase.

donde  $R$  y  $X$  son las partes real e imaginaria de la impedancia de carga antes de que se corrija el factor de potencia, y de que  $pf_c$  sea el factor de potencia corregido. Después de utilizar esta ecuación para calcular  $X_1$ , se puede calcular la capacitancia,  $C$ , a partir de  $X_1$ . Observe que  $X_1$  será la reactancia de los condensadores equivalentes conectados a Y. Necesitaremos calcular el condensador equivalente conectado a  $\Delta$  del condensador conectado a Y.

### Actúe sobre el plan

Observemos que  $\mathbf{Z} = R + jX = 20 + j75.4 \Omega$ . Por consiguiente, la reactancia,  $X_1$ , necesaria para corregir el factor de potencia es

$$X_1 = \frac{20^2 + 75.4^2}{20 \tan(\cos^{-1} 0.9) - 75.4} = -92.6$$

El condensador conectado a Y equivalente al condensador conectado a  $\Delta$  se puede calcular a partir de  $\mathbf{Z}_Y = \mathbf{Z}_\Delta/3$ . Por consiguiente, la capacitancia del condensador conectado a Y equivalente es  $3C$ .

Por último, ya que  $X_1 = 1/(3C\omega)$ , tenemos

$$C = \frac{1}{\omega \cdot 3 \cdot X_1} = -\frac{1}{377 \cdot 3(-92.6)} = 9.548 \mu\text{F}$$

### Verifique la solución propuesta

Cuando  $C = 9.548 \mu\text{F}$ , la impedancia de una fase de la carga conectada a Y equivalente será

$$\mathbf{Z}_Y = \frac{\frac{1}{j377 \times 3 \times C} (20 + j75.4)}{\frac{1}{j377 \times 3 \times C} + (20 + j75.4)} = 246.45 + j119.4$$

El valor del factor de potencia es

$$pf = \cos \left( \tan^{-1} \left( \frac{119.4}{246.45} \right) \right) = 0.90$$

por lo tanto, se ha cumplido con las especificaciones.

## 12.11 RESUMEN

- La generación y transmisión de la potencia eléctrica son más eficientes en sistemas trifásicos que emplean tres voltajes de la misma magnitud y frecuencia, y que difieren uno de otro por  $120^\circ$  en fase.
- La fuente trifásica consta o bien de tres fuentes de voltaje sinusoides conectadas a Y, o de tres fuentes de voltaje senoidal conectadas a  $\Delta$ . Del mismo modo, los elementos de circuito que comprenden la carga están conectados a Y o a  $\Delta$ . La línea de transmisión conecta la fuente a la carga y consta de tres o de cuatro hilos.
- El análisis de circuitos trifásicos utilizando fasores e impedancias determinará la respuesta de *estado estable* del cir-

cuito trifásico. Nuestro principal interés está en la potencia que la fuente trifásica transmite a la carga trifásica. La tabla 12.1-1 resume las fórmulas que se utilizan para calcular la potencia transmitida a un elemento cuando el voltaje y la corriente del elemento se apegan a la convención pasiva.

- La corriente en el cable neutral de una conexión Y a Y balanceada es cero; sin embargo, el cable se puede eliminar si se desea. La clave para el análisis del circuito Y a Y es el cálculo de las corrientes de línea. Cuando el circuito no está balanceado, el primer paso en el análisis de este circuito es calcular  $\mathbf{V}_{Nn}$ , el voltaje en el nodo neutral de la carga trifásica respecto del voltaje en el nodo neutral de la fuente

trifásica. Este paso no es necesario cuando el circuito está balanceado porque  $V_{Nn} = 0$ . Una vez conocido  $V_{Nn}$ , se pueden calcular las corrientes de línea. La corriente de línea para una conexión Y a Y balanceada es  $V_a/Z$  para la fase  $a$ , y las otras dos corrientes se desplazan  $\pm 120^\circ$  de  $I_A$ .

- Para una carga  $\Delta$  convertimos la carga  $\Delta$  en una carga conectada a Y utilizando la relación de la transformación de  $\Delta$  a Y. Entonces procedemos con el análisis de Y a Y.
- La corriente de línea para una carga  $\Delta$  balanceada es  $\sqrt{3}$  veces la corriente de faser y está desplazada  $-30^\circ$ . El vol-

taje de línea a línea de una carga  $\Delta$  es igual al voltaje de faser.

- La potencia transmitida a una carga balanceada conectada a Y es  $P_Y \Delta \sqrt{3} V_{AB} I_A \cos \theta$  donde  $V_{AB}$  es el voltaje de línea a línea,  $I_A$  es la corriente de línea, y  $\theta$  es el ángulo entre el voltaje de faser y la corriente de faser ( $Z_Y \Delta Z \angle \theta$ ).
- Se describió el método de dos vatímetros de medición de potencia trifásica transmitida a una carga. Incluso consideramos la utilidad del método de dos vatímetros para determinar el ángulo del factor de potencia de un sistema trifásico.

## PROBLEMAS

### Sección 12.2 Voltajes trifásicos

**P 12.2-1** Una carga trifásica conectada a Y tiene un voltaje de faser:

$$V_c = 277 \angle 45^\circ \text{ V rms}$$

La secuencia de fasores es  $abc$ . Encuentre los voltajes de línea a línea  $V_{AB}$ ,  $V_{BC}$  y  $V_{CA}$ . Dibuje un diagrama de fasores que muestre los voltajes de faser y de línea.

**P 12.2-2** Un sistema trifásico tiene un voltaje de línea a línea

$$V_{BA} = 12\,470 \angle -35^\circ \text{ V rms}$$

con una carga Y. Encuentre los voltajes de faser cuando la secuencia de fasores es  $abc$ .

**P 12.2-3** Un sistema trifásico tiene un voltaje de línea a línea

$$V_{ab} = 1\,500 \angle 30^\circ \text{ V rms}$$

con una carga Y. Determine el voltaje de faser.

### Sección 12.3 El circuito Y a Y

**P 12.3-1** Considere un circuito Y a Y de tres hilos. Los voltajes de la fuente conectada a Y son  $V_a = (208/\sqrt{3}) \angle 0^\circ$  V rms,

$V_b = (208/\sqrt{3}) \angle -120^\circ$  V rms y  $V_c = (208/\sqrt{3}) \angle 120^\circ$  V rms. La carga conectada a Y está balanceada. La impedancia de cada fase es  $Z = 12 \angle 30^\circ \Omega$ .

- Encuentre los voltajes de faser.
- Encuentre las corrientes de línea y las corrientes de faser.
- Muestre las corrientes de línea y las corrientes de faser en un diagrama de fasores.
- Determine la potencia disipada en la carga.

**P 12.3-2** Un alimentador trifásico balanceado conectado a Y transmite potencia a través de un circuito de tres hilos más un cable neutral en un edificio grande de oficinas a una carga trifásica conectada a Y. El circuito opera a 60 Hz. Los voltajes de faser de la fuente conectada a Y son  $V_a = 120 \angle 0^\circ$  V rms,  $V_b = \angle -120^\circ$  V rms y  $V_c = \angle 120^\circ$  V rms. Cada cable de transmisión, incluyendo el cable neutral, tiene una resistencia de  $2\text{-}\Omega$ , y la carga Y balanceada tiene una resistencia de  $10\text{-}\Omega$  en serie con  $100\text{ mH}$ . Encuentre el voltaje de línea y la corriente de faser en la carga.

**P 12.3-3** En la figura P 12.3-3 se muestran una fuente conectada a Y y una carga. (a) Determine el valor de rms de la corriente  $i_a(t)$ . (b) Determine la potencia promedio transmitida a la carga.

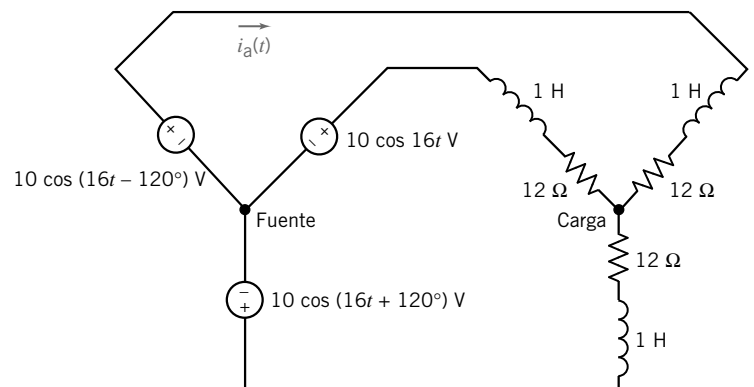


FIGURA P 12.3-3



**P 12.3-4** Un circuito Y a Y no balanceado. Encuentre la potencia promedio transmitida a la carga.

**Sugerencia:**  $\mathbf{V}_{Nn}(\omega) = 27.4 \angle -63.6^\circ \text{ V}$

**Respuesta:** 436.4 W

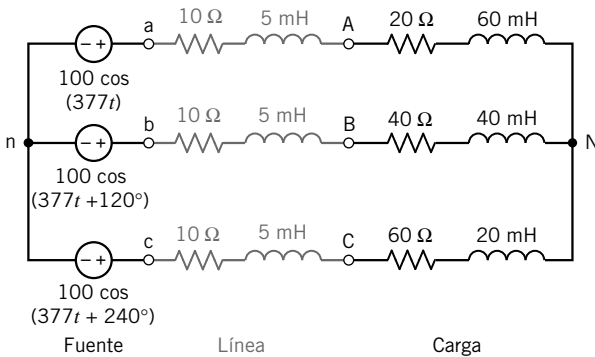


Figura P 12.3-4

**P 12.3-5** En la figura P 12.3-5 se muestra un circuito Y a Y no balanceado. Encuentre la potencia promedio transmitida a la carga.

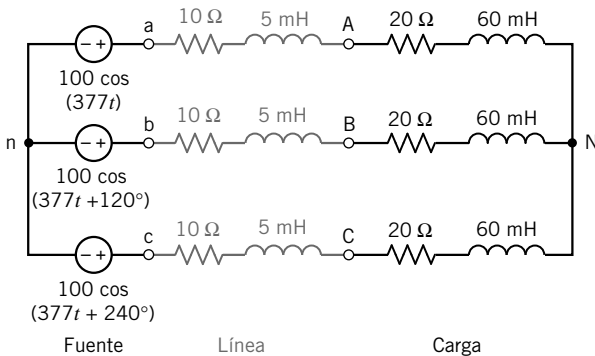


Figura P 12.3-5

**P 12.3-6** En la figura P 12.3-6 se muestra un circuito Y a Y no balanceado. Encuentre la potencia promedio transmitida a la carga.

**Sugerencia:**  $\mathbf{V}_{Nn}(\omega) = 1.755 \angle -29.5^\circ \text{ V}$

**Respuesta:** 436.4 W

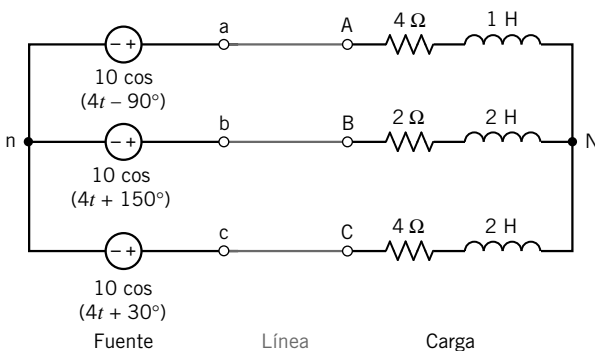


Figura P 12.3-6

**P 12.3-7** En la figura P 12.3-7 se muestra un circuito Y a Y balanceado. Encuentre la potencia promedio transmitida a la carga.

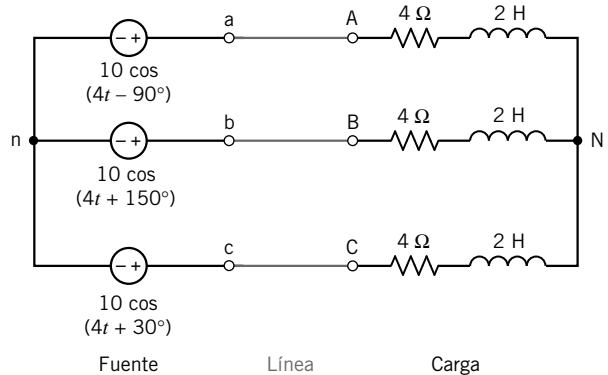


Figura P 12.3-7

## Sección 12.4 Fuente y carga conectadas a $\Delta$

**P 12.4-1** Una carga trifásica balanceada conectada a  $\Delta$  tiene una corriente de línea:

$$\mathbf{I}_B = 50 \angle -40^\circ \text{ A rms}$$

Encuentre las corrientes de fasor  $\mathbf{I}_{BC}$ ,  $\mathbf{I}_{AB}$  e  $\mathbf{I}_{CA}$ . Dibuje el diagrama de fasores que muestre las corrientes de línea y de fasor. La fuente utiliza la secuencia de fasores  $abc$ .

**P 12.4-2** Un circuito trifásico tiene dos cargas  $\Delta$  en paralelo balanceadas, una de resistores de 5- $\Omega$  y otra de resistores de 20- $\Omega$ . Encuentre la magnitud de la corriente de línea total cuando el voltaje de línea a línea es de 480 V rms.

## Sección 12.5 El circuito Y a Y

**P 12.5-1** Considere un circuito Y a  $\Delta$  de tres hilos. Los voltajes de la fuente conectada a Y son  $\mathbf{V}_a = (208/\sqrt{3}) \angle -30^\circ \text{ V rms}$ ,  $\mathbf{V}_b = (208/\sqrt{3}) \angle -150^\circ \text{ V rms}$  y  $\mathbf{V}_c = (208/\sqrt{3}) \angle 90^\circ \text{ V rms}$ . La carga conectada a  $\Delta$  está balanceada. La impedancia de cada fase es  $\mathbf{Z} = 12 \angle 30^\circ \Omega$ . Determine la corriente de línea y calcule potencia disipada en la carga.

**Respuesta:**  $P = 9\,360 \text{ W}$

**P 12.5-2** Una carga conectada a  $\Delta$  balanceada está conectada por tres hilos, cada uno con una resistencia de 4- $\Omega$ , a una fuente Y con  $\mathbf{V}_a = (480/\sqrt{3}) \angle -30^\circ \text{ V rms}$ ,  $\mathbf{V}_b = (480/\sqrt{3}) \angle -150^\circ \text{ V rms}$  y  $\mathbf{V}_c = (480/\sqrt{3}) \angle 90^\circ \text{ V rms}$ . Encuentre la corriente de línea  $\mathbf{I}_A$  cuando  $\mathbf{Z} = 39 \angle -40^\circ \Omega$ .

**Respuesta:**  $\mathbf{I}_A = 17 \angle 0.9^\circ \text{ A}$

**P 12.5-3** El circuito balanceado que se muestra en la figura P 12.5-3 tiene  $\mathbf{V}_{ab} = 380 \angle 30^\circ \text{ V rms}$ . Determine las corrientes de fasor en la carga cuando  $\mathbf{Z} = 3 + j4 \Omega$ . Bosqueje un diagrama de fasores.

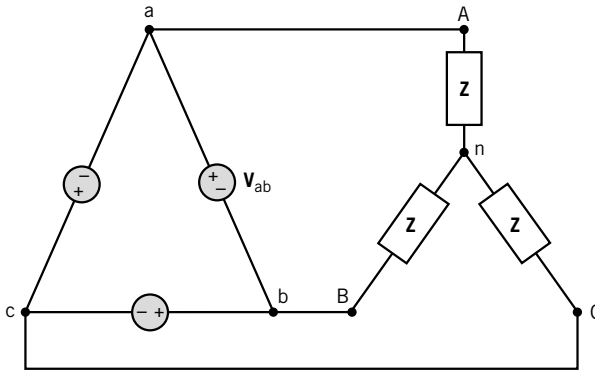


Figura P 12.5-3 Circuito  $\Delta$  a Y.

**P 12.5-4** El circuito balanceado que se muestra en la figura P 12.5-3 tiene  $V_{ab} = 380 \angle 0^\circ$  V rms. Determine las corrientes de línea y de fasor en la carga cuando  $Z = 9 + j12 \Omega$ .

### Sección 12.6 Circuitos trifásicos balanceados

**P 12.6-1** El fusible del ferrocarril del túnel del canal inglés está alimentado por un rcm de 25 kV desde los sistemas de rejilla del Reino Unido y Francia. Cuando hay una falla de alimentación en la rejilla, cada extremo es capaz de alimentar a todo el túnel pero de un modo operativo reducido.

El sistema de tracción del túnel es un sistema catenario convencional (cable superior) semejante al sistema del ferrocarril eléctrico principal de superficie del Reino Unido y de Francia. Lo que hace diferente y único al sistema de tracción del túnel es la alta densidad de la carga de tracción del arreglo de alimentación en un extremo. La carga de tracción del túnel es considerable. Para cada mitad del túnel, la carga es de 180 MVA (Barnes y Wong, 1991).

Suponga que cada voltaje de línea a línea de la fuente conectada a Y es de 25 kV rms y el sistema trifásico está conectado al motor de tracción de una locomotora eléctrica. El motor es una carga conectada a Y con  $Z = 150 \angle 25^\circ \Omega$ . Encuentre las corrientes de línea y la potencia transmitida al motor de tracción.

**P 12.6-2** Una fuente trifásica con un voltaje de línea de 45 kV rcm está conectada a dos cargas balanceadas. La carga conectada a Y tiene  $Z = 10 + j20 \Omega$ , y la carga  $\Delta$  tiene una impedancia de derivación de  $50 \Omega$ . Las líneas de conexión tienen una impedancia de  $2 \Omega$ . Determine la potencia transmitida a las cargas y la potencia perdida en los cables. ¿Qué porcentaje de potencia se pierde en los cables?

**P 12.6-3** Una fuente trifásica balanceada tiene una fuente conectada a Y con  $v_a = 5 \cos(2t + 30^\circ)$  conectada a una carga Y trifásica. Cada fase de la carga conectada a Y consta de un resistor de  $4 \Omega$  y un inductor de 4 H. Cada línea de conexión tiene una resistencia de  $2 \Omega$ . Determine la potencia promedio total transmitida a la carga.

### Sección 12.7 Potencias promedio e instantánea en una carga trifásica balanceada

**P 12.7-1** Encuentre la potencia absorbida por una carga trifásica balanceada conectada a Y cuando

$$V_{CB} = 208 \angle 15^\circ \text{ V rms} \quad \text{e} \quad I_B = 3 \angle 110^\circ \text{ A rms}$$

La fuente utiliza la secuencia de fasores  $abc$ .

**Respuesta:**  $P = 620 \text{ W}$

**P 12.7-2** Un motor trifásico transmite 20 hp operando a partir de un voltaje de línea de 480-V rms. El motor opera a 85% de eficiencia con un factor de potencia igual a 0.8 de retardo. Encuentre la magnitud y el ángulo de la corriente de línea para la fase A.

**Sugerencia:**  $1 \text{ hp} = 754.7 \text{ W}$

**P 12.7-3** A una carga trifásica balanceada la alimenta una fuente balanceada conectada a Y con un voltaje de línea a línea de 220 V rcm. Se absorben 1 500 W a 0.8 de factor de potencia de retardo. Calcule la impedancia de fasores si está (a) conectada a  $\Delta$  y (b) si está conectada a Y.

**P 12.7-4** Una fuente trifásica balanceada de 600-V rms conectada a Y tiene dos cargas  $\Delta$  balanceadas conectadas a las líneas. Las impedancias de cargas son  $40 \angle 30^\circ \Omega$  y  $50 \angle -60^\circ \Omega$ , respectivamente. Determine la corriente de línea y la potencia promedio total.

**P 12.7-5** Una fuente trifásica conectada a Y alimenta simultáneamente a dos cargas trifásicas balanceadas separadas. La primera carga total está conectada a  $\Delta$  y requiere 39 kVA a 0.7 de retardo. La segunda carga total está conectada a Y y requiere 15 kW a 0.21 de conducción. Cada línea tiene una impedancia de  $0.038 + j0.072 \Omega/\text{fase}$ . Calcule la magnitud del voltaje de fuente de línea a línea requerido para que las cargas reciban una alimentación de 208-V rms de línea a línea.

**P 12.7-6** Un edificio recibe alimentación de una planta pública a 4.16 kV rms. El edificio cuenta con tres cargas balanceadas conectadas a las líneas trifásicas:

- Conectada a  $\Delta$ , 500kVA a 0.85 de retardo.
- Conectada a Y, 75 kVA a 0.0 de conducción.
- Conectada a Y; cada fase con un resistor a  $150\text{-}\Omega$  en paralelo para una reactancia inductiva de  $225\text{-}\Omega$ .

El conductor de alimentación de la planta tiene cinco millas (8 km) de largo con una impedancia por fase de  $1.69 + j0.78 \Omega/\text{milla}$ . ¿A qué voltaje debe la planta alimentar su conductor de alimentación de modo que el edificio opere a 4.16 kV rms?

**Sugerencia:** 41.6 kV es el voltaje de línea a línea de la fuente conectada a Y balanceada.

**P 12.7-7** El diagrama que se muestra en la figura P 12.7-7 tiene dos cargas trifásicas que forman parte de una fábrica. Están conectadas en paralelo y requieren 4.16 kV rms. La carga 1 es de 1.5 MVA,  $pf$  de 0.75 e retardo, conectada a  $\Delta$ . La carga 2 es de 2 MW  $pf$  de 0.8 de retardo, conectada a Y. El alimentador del transformador de la subestación de la planta de potencia tiene una impedancia de fasor de  $0.4 + j0.8 \Omega$ . Determine lo siguiente:

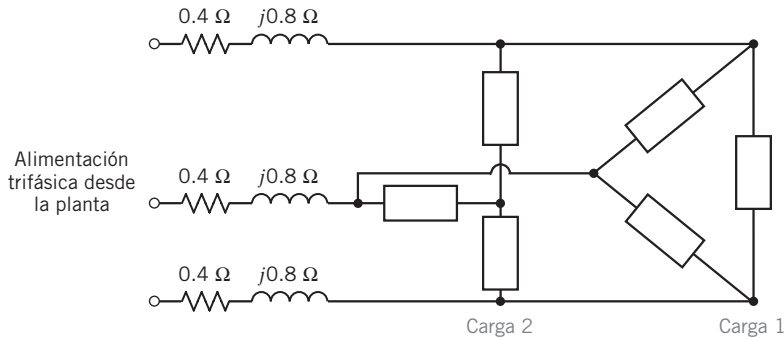


Figura P 12.7-7 Circuito trifásico con una carga  $\Delta$  y una carga  $Y$ .

- (a) La magnitud requerida del voltaje de línea en la alimentación.
- (b) La potencia real dibujada a partir de la alimentación.
- (c) El porcentaje de la potencia real dibujada a partir de la alimentación que consumen las cargas.

**P 12.7-8** La carga trifásica balanceada de un edificio comercial grande requiere 480 kW con un factor de potencia de retardo de 0.8. La carga es alimentada por una línea de conexión con una impedancia de  $5 + j25 \text{ m}\Omega$  por cada fase. Cada fase de la carga tiene un voltaje de línea a línea de 600 V rms. Determine la corriente de línea y el voltaje de línea en la fuente. Además, determine el factor de potencia en la fuente. Utilice el voltaje de línea a neutral como la referencia con un ángulo de  $0^\circ$ .

### Sección 12.8 Medición de potencia con dos vatímetros

**P 12.8-1** El método de dos vatímetros se sigue para determinar la potencia consumida por un motor trifásico de 440 V rms que es una carga balanceada conectada a  $Y$ . El motor opera a 20 hp con un porcentaje de 74.6 de eficiencia. La magnitud de la corriente de línea es de 52.5 A rms. Los vatímetros están conectados en las líneas  $A$  y  $C$ . Encuentre la lectura de cada vatímetro. El motor tiene un factor de potencia de retardo.

*Sugerencia:*  $1 \text{ hp} = 745.7 \text{ W}$

**P 12.8-2** Un sistema trifásico tiene un voltaje de línea a línea de 4 000 V rms y una carga balanceada conectada a  $\Delta$  con  $\mathbf{Z} = 40 + j30 \Omega$ . La secuencia de fasores es  $abc$ . Utilice los dos vatímetros conectados a las líneas  $A$  y  $C$ , con la línea  $B$  como línea común para la medición del voltaje. Determine la medición de la potencia total registrada por los vatímetros.

*Respuesta:*  $P = 768 \text{ kW}$

**P 12.8-3** Un sistema trifásico con una secuencia  $abc$  y un voltaje de línea a línea de 200 V rms alimenta a una carga conectada

a  $Y$  con  $\mathbf{Z} = 70.7 \angle 45^\circ \Omega$ . Encuentre las corrientes de línea. Encuentre la potencia total utilizando vatímetros conectados a las líneas  $B$  y  $C$ .

*Respuesta:*  $P = 400 \text{ W}$

**P 12.8-4** Un sistema trifásico con un voltaje de línea a línea de 208 V rms y secuencia de fasores  $abc$  está conectada a una carga  $Y$  balanceada con impedancia de  $10 \angle -30^\circ \Omega$  y a una carga  $\Delta$  balanceada con impedancia de  $15 \angle 30^\circ \Omega$ . Encuentre las corrientes de línea y la potencia total utilizando dos vatímetros.

**P 12.8-5** Se sigue el método de los dos vatímetros. El vatímetro en la línea  $A$  lee 920 W, y el vatímetro en la línea  $C$  lee 460 W. Encuentre la impedancia de la carga balanceada conectada a  $\Delta$ . El circuito es un sistema trifásico de 120 V rms con una secuencia  $abc$ .

*Respuesta:*  $\mathbf{Z}_\Delta = 27.1 \angle -30^\circ \Delta$

**P 12.8-6** Siguiendo el método de los dos vatímetros, determine la lectura de la potencia de cada vatímetro y la potencia total para el problema 12.5-1 cuando  $\mathbf{Z} = 0.868 + j4.924 \Omega$ . Coloque las bobinas de corriente en las líneas  $A - a$  y  $C - c$ .

### Sección 12.9 ¿Cómo lo podemos comprobar...?

**P 12.9-1** Una fuente conectada a  $Y$  está conectada a una carga conectada a  $Y$  (figura 12.3-1) con  $\mathbf{Z} = 10 = j4 \Omega$ . El voltaje de línea es  $V_L = 416 \text{ V rms}$ . El reporte de un estudiante establece que la corriente de línea  $\mathbf{I}_A = 38.63 \text{ A rms}$  y que la potencia transmitida a la carga es de 16.1 kW. Verifique estos resultados.

**P 12.9-2** Una carga  $\Delta$  con  $\mathbf{Z} = 40 + j30 \Omega$  tiene una fuente trifásica con  $V_L = 240 \text{ V rms}$  (figura 12.3-2). Un programa de análisis por computadora establece que una corriente de fasor es  $4.8 \angle -36.9^\circ \text{ A}$ . Verifique este resultado.

## Problemas de PSpice

**PS 12.1** Utilice PSpice para determinar la potencia transmitida a la carga en el circuito que se muestra en la figura PS 12.1.

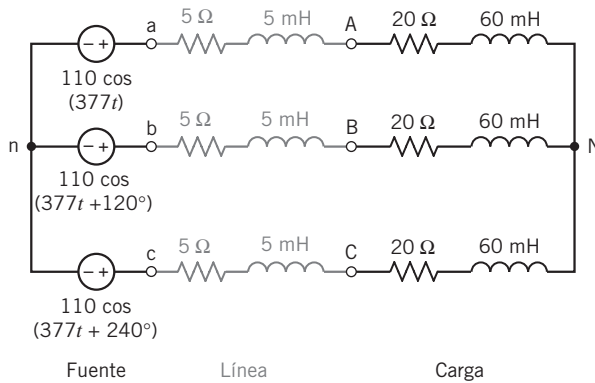


Figura PS 12.1

**PS 12.2** Utilice PSpice para determinar la potencia transmitida a la carga en el circuito que se muestra en la figura PS 12.2.

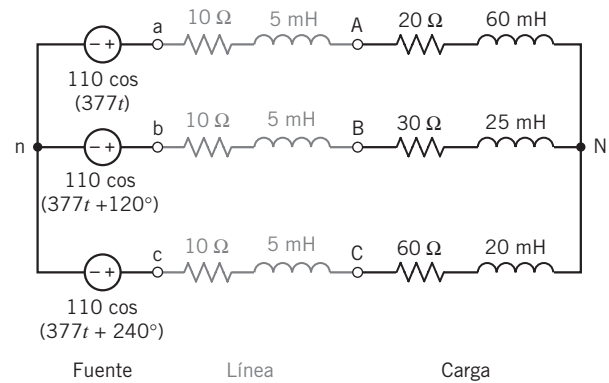


Figura PS 12.2

## Problemas de diseño

**PD 12.1** Una fuente Y trifásica balanceada tiene un voltaje de línea de  $208\ \text{V rms}$ . La potencia total transmitida a la carga balanceada es de  $1\ 200\ \text{W}$  con un factor de potencia de  $0.94$  de retardo. Determine la impedancia de carga requerida para cada fase de la carga  $\Delta$ . Calcule la corriente de línea resultante. La fuente es una secuencia  $ABC$  de  $208\text{-V rms}$ .

**PD 12.2** Un circuito trifásico de  $240\text{-V rms}$  tiene una impedancia  $Z$  de carga Y balanceada. Hay dos vatímetros conectados con bobinas de corriente en las líneas  $A$  y  $C$ . El vatímetro en la línea  $A$  lee  $1\ 440\ \text{W}$ , y el vatímetro en la línea  $C$  lee cero. Determine el valor de la impedancia.

**PD 12.3** Un circuito trifásico transmite  $100\ \text{hp}$  y opera al  $80\%$  de eficiencia con un factor de potencia de  $0.75$  de retardo. Determine el conjunto balanceado conectado a  $\Delta$  requerido de tres condensadores que mejorará el factor de potencia a  $0.90$  de retardo. El motor funciona a partir de líneas de  $480\text{-V rms}$ .

**PD 12.4** Un sistema trifásico tiene condiciones balanceadas de modo que la representación dl circuito por fase se puede utilizar como se muestra en la figura PD 12.4. Seleccione la proporción de vueltas de los transformadores de elevación y reducción de modo que el sistema funciona con una eficiencia mayor de  $99\%$ . El voltaje de carga está especificado como  $4\ \text{kV rms}$ , y la impedancia de carga es  $4/3\ \Omega$ .

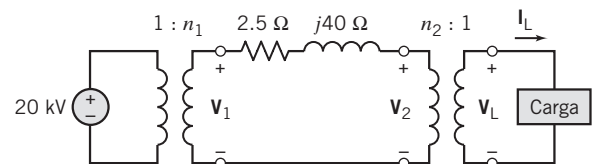


Figura PD 12.4

# Respuesta de frecuencia

# CAPÍTULO 13

## EN ESTE CAPÍTULO

- |      |  |       |  |
|------|--|-------|--|
| 13.1 | Introducción   | 13.8  | ¿Cómo lo podemos comprobar...?                   |
| 13.2 | Ganancia, cambio de fase y función de red                            | 13.9  | <b>EJEMPLO DE DISEÑO</b> — Sintonizador de radio |
| 13.3 | Diagramas de Bode  | 13.10 | Resumen  |
| 13.4 | Circuitos resonantes   |       | Problemas  |
| 13.5 | Respuesta de frecuencia de circuitos de amplificadores operacionales |       | Problemas de PSpice                              |
| 13.6 | Trazo de diagramas de Bode utilizando MATLAB                         |       | Problemas de diseño                              |
| 13.7 | Uso de PSpice para trazar un diagrama de respuesta de frecuencia     |       |  |

## 13.1 INTRODUCCIÓN

Considere el experimento ilustrado en la figura 13.1-1, en el cual un generador de funciones proporciona la entrada a un circuito lineal y el osciloscopio despliega la salida, o respuesta, del circuito lineal. El circuito lineal consta de resistores, condensadores, inductores y quizá fuentes dependientes y/o amplificadores operacionales. El generador de funciones nos permite elegir algunos tipos de funciones de entrada.

Suponga que elegimos una entrada senoidal. El generador de funciones nos permite ajustar la amplitud, el ángulo de fase y la frecuencia de entrada. Primero debemos tener en cuenta que no importa qué ajustes hagamos, la respuesta (estado estable) siempre será una onda de seno en la misma frecuencia que la entrada. La amplitud y el ángulo de fase de la salida difieren de la entrada, pero la frecuencia siempre es la misma que la frecuencia de la salida.

Luego de un poco más de experimentación, encontramos que **en toda frecuencia fija** lo siguiente es cierto:

- La relación de la amplitud de la senoide de salida con la amplitud de la senoide de entrada es una constante.
- La diferencia entre el ángulo de fase de la senoide de entrada y el ángulo de fase de la senoide de salida también es una constante.

La situación no es tan sencilla cuando variamos la frecuencia de la entrada. Ahora la amplitud y el ángulo de fase de la salida cambian de una manera más complicada.

En este capítulo desarrollaremos herramientas analíticas que nos permitirán pronosticar cómo la amplitud y el ángulo de fase de la senoide de salida cambiarán conforme modificamos la frecuencia de la senoide de entrada.

## 13.2 GANANCIA, CAMBIO DE FASE Y FUNCIÓN DE RED

La ganancia, el cambio de fase y la función de red son propiedades de circuitos lineales que describen el efecto que un circuito tiene sobre el voltaje o la corriente de una entrada senoidal. Esperamos

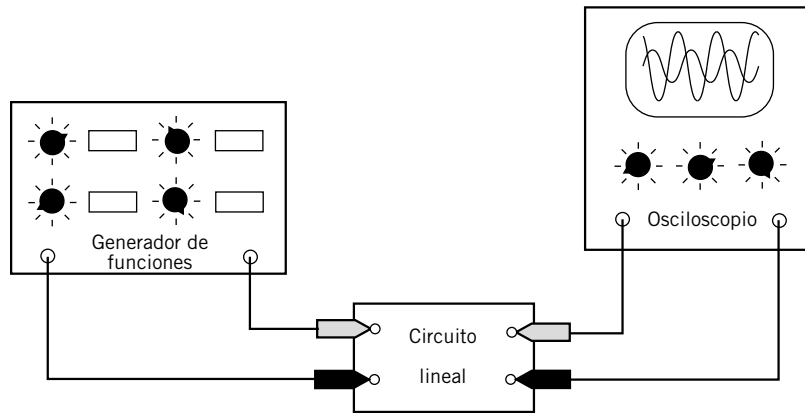


FIGURA 13.1-1 Medición de la entrada y la salida de un circuito lineal.

que el comportamiento de circuitos que contienen elementos reactivos como son los condensadores y los inductores, dependan de la frecuencia de la sinusoide de entrada.

De esta manera, esperamos que la ganancia, el cambio de fase y la función de red sean funciones de frecuencia. En efecto, veremos que éste es el caso.

Empezaremos por considerar el circuito que se muestra en la figura 13.2-1. La entrada a este circuito es el voltaje de la fuente de voltaje, y la salida, o respuesta, del circuito es el voltaje a través del resistor de 10-k $\Omega$ . Cuando la entrada es un voltaje senoidal, la respuesta de estado estable también será senoidal y tendrá la misma frecuencia que la entrada.

Suponga que los voltajes  $v_{\text{ent}}(t)$  y  $v_{\text{sal}}(t)$  se miden con un osciloscopio. La figura 13.2-2 muestra las formas de onda que se desplegarían en la pantalla del osciloscopio. Observe que se muestran las escalas mas no los ejes. Es habitual tomar el ángulo de la señal de entrada como  $0^\circ$ , es decir,

$$v_{\text{ent}}(t) = A \cos \omega t$$

Entonces,

$$v_{\text{sal}}(t) = B \cos (\omega t + \theta)$$

La **ganancia** del circuito describe la relación entre las dimensiones de las sinusoides de entrada y de salida. En particular, la ganancia es la relación de la amplitud de la sinusoide de la respuesta con la amplitud de la sinusoide de entrada.

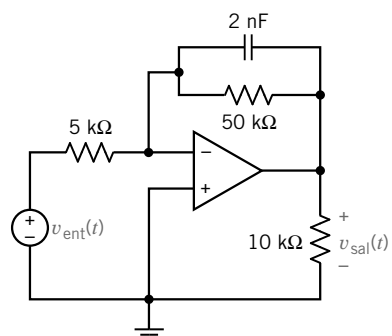


FIGURA 13.2-1 Circuito de amplificador operacional.

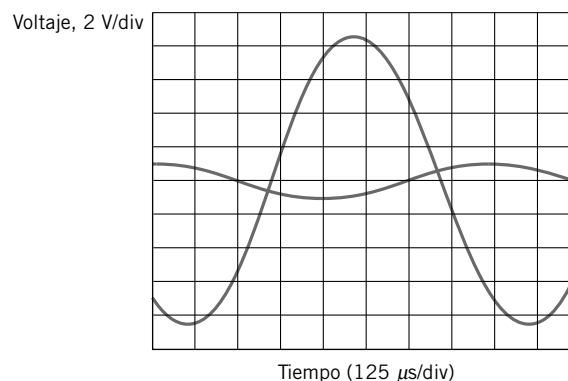


FIGURA 13.2-2 Sinusoides de entrada y salida para el circuito del amplificador operacional de la figura 13.2-1.

Es decir,

$$\text{ganancia} = \frac{B}{A}$$

El **cambio de fase** del circuito describe la relación entre los ángulos de fases de las sinusoides de entrada y de salida. En particular, el cambio de fase es la diferencia entre el ángulo de fase de la senoide de salida y el ángulo de fase de la senoide de entrada.

Es decir,

$$\text{cambio de fase} = \theta - 0^\circ = \theta$$

Para ser más específicos, necesitamos representaciones analíticas de las sinusoides que se muestran en la figura 13.2-2. El voltaje de entrada es el más pequeño de las dos sinusoides y se puede representar como

$$v_{\text{ent}}(t) = 1 \cos 6\,283t \text{ V}$$

La respuesta de estado estable es la mayor de las dos sinusoides y se puede representar como

$$v_{\text{sal}}(t) = 8.47 \cos (6\,283t + 148^\circ) \text{ V}$$

La **ganancia** de este circuito en la frecuencia  $\omega = 6\,283 \text{ rad/s}$  es

$$\text{Ganancia} = \frac{\text{amplitud de salida}}{\text{amplitud de entrada}} = \frac{8.47}{1} = 8.47$$

La ganancia es menos unitaria porque ambas amplitudes tienen unidades de voltios. Dado que la ganancia es mayor que 1, la senoide de salida es más grande que la senoide de entrada. Se dice que este circuito *amplifica* su entrada. Cuando la ganancia de un circuito es menor que 1, la senoide de salida es menor que la senoide de entrada. Entonces se dice que este circuito *atenúa* su entrada.

El *cambio de fase* de este circuito en la frecuencia  $\omega = 6\,283 \text{ rad/s}$  es

$$\text{Cambio de fase} = \text{ángulo de fase de salida} - \text{ángulo de fase de entrada} = 148^\circ - 0^\circ = 148^\circ$$

El cambio de fase determina cuánto tiempo avanza o se retarda la salida respecto de la entrada. Observe que

$$B \cos (\omega t + \theta) = B \cos \left( \omega \left( t + \frac{\theta}{\omega} \right) \right) = B \cos (\omega(t + t_0))$$

donde  $\theta$  es el ángulo de fase en radianes y  $t_0 = \theta/\omega$ . Los picos positivos de  $B \cos (\omega t + \theta)$  ocurren cuando

$$\omega t + \theta = n(2\pi)$$

y, despejando  $t$ , tenemos

$$t = \frac{n(2\pi)}{\omega} - t_0 = nT - t_0$$

donde  $n$  es cualquier número entero y  $T$  es el periodo de la senoide.

Los picos positivos de  $A \cos \omega t$  ocurren en  $t = \frac{n(2\pi)}{\omega}$  y los picos positivos de  $B \cos (\omega t + \theta)$  ocurren en  $t = \frac{n(2\pi)}{\omega} - t_0$ . Al parecer, un cambio de fase del radián  $\theta$  cambiará la senoide de salida por  $t_0$  segundos. Cuando la frecuencia es de  $6\,283 \text{ rad/s}$ , un cambio de fase de  $148^\circ$  o de  $2.58$  radianes hace que un cambio en el tiempo sea igual a

$$t_0 = \frac{\theta}{\omega} = \frac{2.58 \text{ rad}}{6\,283 \text{ rad/s}} = 410 \mu\text{s}$$

En la figura 13.2-2, los picos positivos de la senoide de entrada ocurren en 0 ms, 1 ms, 2 ms, 3 ms,.... Los picos positivos de la senoide de salida ocurren a 0.59 ms, 1.59 ms, 2.59 ms, 3.59,.... Los picos de la senoide de salida ocurren 410  $\mu\text{s}$  antes del pico siguiente de la senoide de entrada. La salida está avanzada en 410  $\mu\text{s}$  respecto de la entrada.

Observe que

$$v_{\text{sal}}(t) = 8.47 \cos(6\,283t + 148^\circ) = 8.47 \cos(6\,283t - 212^\circ)$$

porque un cambio de fase de  $360^\circ$  no modifica la senoide. Un cambio de fase de  $-212^\circ$  o  $-3.70$  radianes provoca un cambio en el tiempo de

$$t_0 = \frac{-3.70 \text{ rad}}{6\,283 \text{ rad/s}} = -590 \mu\text{s}$$

Los picos de la senoide de salida ocurren 590  $\mu\text{s}$  después de la anterior senoide de salida. La salida va retrasada por 590  $\mu\text{s}$  con respecto a la entrada.

Un cambio de fase que acelera la salida se denomina **avance de fase**. Un cambio de fase que retrasa la salida se denomina **retardo de fase**.

En la frecuencia  $\omega = 6\,283 \text{ rad/s}$ , este circuito amplifica su entrada por un factor de 8.47 y lo acelera en 410  $\mu\text{s}$  o, de manera equivalente, lo retrasa por 590  $\mu\text{s}$ . El circuito de la figura 13.2-1 tiene un avance de fase de  $148^\circ$  o, de manera equivalente, un retardo de fase de  $212^\circ$ .

Ahora consideremos este circuito cuando cambia la frecuencia de entrada. Cuando la entrada es

$$v_{\text{ent}}(t) = 1 \cos 3\,141.6t \text{ V}$$

se puede encontrar que la respuesta de estado estable de este circuito sea

$$v_{\text{sal}}(t) = 9.54 \cos(3\,141.6t + 163^\circ) \text{ V}$$

La ganancia y el cambio de fase de este circuito en la frecuencia  $\omega = 3\,141.6 \text{ rad/s}$  son

$$\text{ganancia} = \frac{\text{amplitud de salida}}{\text{amplitud de entrada}} = \frac{9.54}{1} = 9.54$$

y cambio de fase = ángulo de fase de salida - ángulo de fase de entrada =  $163^\circ - 0^\circ = 163^\circ$

El cambio de frecuencia de la entrada ha modificado la ganancia y el cambio de fase de este circuito. Aparentemente, la ganancia y el cambio de fase de este circuito son funciones de la frecuencia de la entrada. La tabla 13.2-1 muestra los valores de la ganancia y el cambio de fase que corresponden a varias

**Tabla 13.2-1 Datos de respuesta de frecuencia para un circuito**

$f$ (Hz)	$\omega$ (rad/s)	GANANCIA	CAMBIO DE FASE
100	682.3	9.98	$176^\circ$
500	3 141.6	9.54	$163^\circ$
1 000	6 283	8.47	$148^\circ$
5 000	31 416	3.03	$108^\circ$
10 000	62 830	1.57	$99^\circ$



elecciones de la frecuencia de entrada. Como se esperaba, la ganancia y el cambio de fase se modificaron cuando la frecuencia de la entrada cambió. La **función de red** describe la manera en que el comportamiento del circuito depende de la frecuencia de la entrada. La función de red se define en el dominio de frecuencia. Es la razón del fasor que corresponde a la sinusoide de respuesta del fasor que corresponde a la entrada. Sea  $\mathbf{X}(\omega)$  el fasor que corresponde a la entrada al circuito y  $\mathbf{Y}(\omega)$  el fasor que corresponda a la respuesta de estado estable de la red. Entonces,

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{Y}(\omega)}{\mathbf{X}(\omega)} \quad (13.2-1)$$

es la función de red. Observe que tanto  $\mathbf{X}(\omega)$  como  $\mathbf{Y}(\omega)$  corresponderían ya sea a una corriente o a un voltaje. Del mismo modo, la ganancia y el cambio de fase se pueden expresar en términos de la función de red. La ganancia es

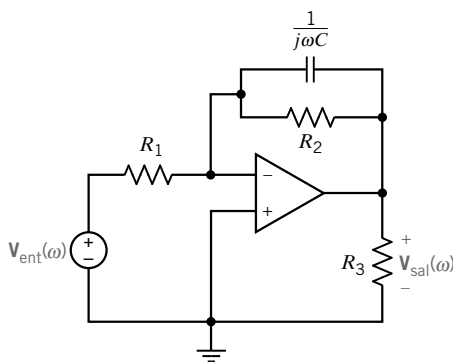
$$\text{ganancia} = |\mathbf{H}(\omega)| = \frac{|\mathbf{Y}(\omega)|}{|\mathbf{X}(\omega)|} \quad (13.2-2)$$

y el cambio de fase es

$$\text{cambio de fase} = \angle \mathbf{H}(\omega) = \angle \mathbf{Y}(\omega) - \angle \mathbf{X}(\omega) \quad (13.2-3)$$

Considere el problema de encontrar la función de red de un circuito dado. Para resolver dicho problema realizamos dos cosas. La primera, representamos el circuito en el dominio de frecuencia utilizando impedancias y fasores. (También representamos el circuito en el dominio de frecuencia cuando queremos encontrar la respuesta de estado estable a una entrada senoidal. En ese caso la frecuencia se representó como el valor de la frecuencia de la entrada senoidal, por ejemplo, 4 rad/s. Cuando encontramos la función de red, la frecuencia se representa por una variable,  $\omega$ ). La segunda, analizamos el circuito para determinar la relación del fasor que corresponde a la salida del circuito con el fasor que corresponde a la entrada del circuito. Este análisis podría implicar ecuaciones de enlaces o ecuaciones nodales, incluso impedancias equivalentes y división de voltaje y de corriente. En cualquier caso, el análisis se lleva a cabo en el dominio de frecuencia.

Encontremos ahora la función de red para el circuito que se muestra en la figura 13.2-1. El primer paso es representar este circuito en el dominio de frecuencia utilizando impedancias y fasores. La figura 13.2-3 muestra el circuito de dominio de frecuencia que corresponde al circuito de la figura 13.2-1. En este ejemplo, el fasor que corresponde a la entrada es  $\mathbf{V}_{\text{ent}}(\omega)$ , y el fasor que corresponde a la salida es  $\mathbf{V}_{\text{sal}}(\omega)$ . Nuestro propósito es encontrar la función de red  $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{V}_{\text{sal}}/\mathbf{V}_{\text{ent}}$ . Escriba la ecuación nodal en el nodo de entrada inversor del amplificador operacional y suponga un amplificador operacional ideal. Entonces tenemos



$$\frac{\mathbf{V}_{\text{ent}}(\omega)}{R_1} + \frac{\mathbf{V}_{\text{sal}}(\omega)}{R_2} + j\omega C \mathbf{V}_{\text{sal}}(\omega) = 0$$

Lo que implica

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_{\text{sal}}(\omega)}{\mathbf{V}_{\text{ent}}(\omega)} = \frac{-R_2}{R_1 + j\omega C R_1 R_2}$$

FIGURA 13.2-3 Representación del dominio de frecuencia del circuito del amplificador operacional de la figura 13.2-1.

La ganancia de este circuito es

$$\text{ganancia} = |\mathbf{H}(\omega)| = H = \frac{R_2/R_1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R_2^2}}$$

El cambio de fase de este circuito es

$$\text{cambio de fase} = \angle \mathbf{H}(\omega) = 180^\circ - \tan^{-1}(\omega C R_2)$$

Cuando  $R_1 = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 50 \text{ k}\Omega$  y  $C = 2 \text{ nF}$ ,

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{-10}{1 + (j\omega/10\ 000)}$$

$$\text{ganancia} = |\mathbf{H}(\omega)| = \frac{10}{\sqrt{1 + (\omega^2/10^8)}}$$

$$\text{cambio de fase} = \angle \mathbf{H}(\omega) = 180^\circ - \tan^{-1}(\omega/10\ 000)$$

Observe que la frecuencia de la entrada se ha representado por una variable,  $\omega$ , en vez de cualquier valor particular. De lo que resulta que la función de red, la ganancia y el cambio de fase describen la manera en que el comportamiento del circuito depende de la frecuencia de la entrada. Ya anteriormente consideramos el caso de cuando  $\omega = 6\ 283 \text{ rad/s}$ . Sustituir esta frecuencia en las ecuaciones para la ganancia y el cambio de fase da por resultado

$$\text{ganancia} = \frac{10}{\sqrt{1 + \frac{6\ 283^2}{10^8}}} = 8.47$$

$$\text{y} \quad \text{cambio de fase} = 180^\circ - \tan^{-1}(6\ 283/10\ 000) = 148^\circ$$

Estos resultados son los mismos que se obtuvieron cuando examinamos los trazos del osciloscopio de la figura 13.2-2. Del mismo modo, cada línea de la tabla 13.2-1 se puede obtener sustituyendo la frecuencia adecuada en las ecuaciones de la ganancia y el cambio de fase.

Las ecuaciones que representan la ganancia y el cambio de fase como funciones de frecuencia se denominan **respuesta de frecuencia** del circuito. La misma información se puede representar por una tabla o por gráficas en vez de ecuaciones. Estas tablas o gráficas también se denominan respuesta de frecuencia del circuito.

Para ver que la función de red en realidad represente el comportamiento del circuito, suponga que

$$v_{\text{ent}}(t) = 0.4 \cos(5\ 000t + 45^\circ) \text{ V}$$

La frecuencia de la senoide de entrada es  $\omega = 5\ 000 \text{ rad/s}$ . Sustituir esta frecuencia en la función de red da por resultado

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{-10}{1 + (j5\ 000/10\ 000)} = 8.94 \angle 153^\circ$$

$$\text{A continuación, } \mathbf{V}_{\text{sal}}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{V}_{\text{ent}}(\omega) = (8.94 \angle 153^\circ)(0.4 \angle 45^\circ) = 3.58 \angle 198^\circ$$

Volviendo al dominio de tiempo, la respuesta de estado estable es

$$v_{\text{sal}}(t) = 3.58 \cos(5\ 000t + 198^\circ) \text{ V}$$

Observe que la función de red contenía información suficiente para permitirnos calcular la respuesta de estado estable a partir de la senoide de entrada. En verdad, la función de red describe el comportamiento del circuito.

### EJEMPLO 13.2-1 Función de red de un circuito

### EJEMPLO INTERACTIVO

Considere el circuito que se muestra en la figura 13.2-4a. La entrada al circuito es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje,  $v_o(t)$ , a través de la conexión en serie del condensador y el resistor de 16-k $\Omega$ . La función de red que representa este circuito tiene la forma

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{1 + j\frac{\omega}{z}}{1 + j\frac{\omega}{p}} \quad (13.2-4)$$

La función de red depende de dos parámetros,  $z$  y  $p$ . El parámetro  $z$  se denomina el cero del circuito, y el parámetro  $p$  se denomina el polo del circuito. Determine los valores de  $z$  y de  $p$  para el circuito de la figura 13.2-4a.

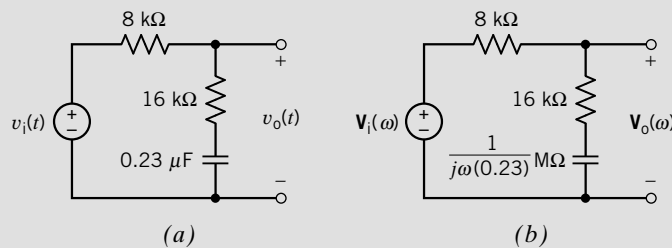


FIGURA 13.2-4 El circuito considerado en el ejemplo 13.2-1, representado (a) en el dominio de tiempo y (b) en el dominio de frecuencia.

### Solución

Analizaremos el circuito para determinar su función de red y la salida de la función de red en la forma dada en la figura 13.2-4. Una función de red es la relación del fasor de salida con el fasor de entrada. Los fasores están presentes en el dominio de frecuencia. En consecuencia, nuestro primer paso es representar el circuito en la frecuencia de dominio por lo que emplearemos fasores e impedancias. La figura 13.2-4b muestra la representación del dominio de frecuencia desde la figura 13.2-4a.

Las impedancias del condensador y el resistor 16-k $\Omega$  está conectado en series en la figura 13.2-4b. El equivalente de la impedancia es

$$\mathbf{Z}_c(\omega) = 16\,000 + \frac{10^6}{j(0.23)\omega}$$

La impedancia equivalente está conectada en serie con el resistor de 8-k $\Omega$ .  $\mathbf{V}_i(\omega)$  es el voltaje a través de las impedancias en serie, y  $\mathbf{V}_o(\omega)$  es el voltaje a través de la impedancia equivalente,  $\mathbf{Z}_c(\omega)$ . Aplique el principio de la división de voltajes para obtener

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_o(\omega) &= \frac{16\,000 + \frac{10^6}{j(0.23)\omega}}{8\,000 + 16\,000 + \frac{10^6}{j(0.23)\omega}} \mathbf{V}_i(\omega) = \frac{10^6 + j(0.23)\omega(16\,000)}{10^6 + j(0.23)\omega(24\,000)} \mathbf{V}_i(\omega) \\ &= \frac{10^6 + j(3\,680)\omega}{10^6 + j(5\,520)\omega} \mathbf{V}_i(\omega) = \frac{1 + j(0.00368)\omega}{1 + j(0.00552)\omega} \mathbf{V}_i(\omega) \end{aligned}$$

Divida ambos lados de la ecuación entre  $\mathbf{V}_i(\omega)$  para obtener la función de red del circuito

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{1 + j(0.00368)\omega}{1 + j(0.00552)\omega} \quad (13.2-5)$$

Igualar las funciones de red de las ecuaciones 13.2-4 y 13.2-5 da por resultado

$$\frac{1 + j(0.00368)\omega}{1 + j(0.00552)\omega} = \frac{1 + j\frac{\omega}{z}}{1 + j\frac{\omega}{p}}$$

Y comparar estas funciones de red nos da

$$z = \frac{1}{0.00368} = 271.74 \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad p = \frac{1}{0.00552} = 181.16 \text{ rad/s}$$

### EJEMPLO 13.2-2 Función de red de un circuito

### EJEMPLO INTERACTIVO

Considere el circuito que se muestra en la figura 13.2-5a. La entrada al circuito es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje,  $v_o(t)$ , a través de la conexión en serie del inductor y el resistor de  $2\text{-}\Omega$ . La función de red que representa este circuito es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = 0.2 \frac{1 + j\frac{\omega}{5}}{1 + j\frac{\omega}{25}} \quad (13.2-6)$$

Determine el valor de la inductancia,  $L$ .

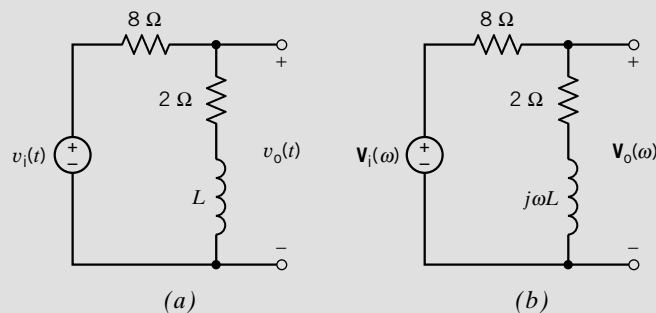


FIGURA 13.2-5 El circuito considerado en el ejemplo 13.2-2, representado (a) en el dominio de tiempo, y (b) en el dominio de frecuencia.

### Solución

El circuito se ha representado dos veces, por un diagrama de circuito y por una función de red. La inductancia desconocida,  $L$ , aparece en el diagrama de circuito, no así en la función de red dada. Podemos analizar el circuito para determinar su función de red. Esta segunda función de red dependerá de la inductancia desconocida. Determinaremos el valor de la inductancia mediante la igualdad de dos funciones de red.

Una función de red es la relación del fasor de salida con el fasor de entrada. Los fasores están presentes en el dominio de frecuencia. En consecuencia, nuestro primer paso es representar el circuito en la frecuencia de dominio, por lo que emplearemos fasores e impedancias. La figura 13.2-5b muestra la representación del dominio de frecuencia desde la figura 13.2-5a.

Las impedancias del inductor y del resistor de  $2 \Omega$  están conectadas en serie en la figura 13.2-5b. La impedancia equivalente es

$$\mathbf{Z}_e(\omega) = 2 + j\omega L$$

La impedancia equivalente está conectada en serie con el resistor de  $8\text{-}\Omega$ .  $\mathbf{V}_i(\omega)$  es el voltaje a través de las impedancias en serie, y  $\mathbf{V}_o(\omega)$  es el voltaje a través de la impedancia equivalente,  $\mathbf{Z}_e(\omega)$ . Aplique el principio de la división de voltajes para obtener

$$\mathbf{V}_o(\omega) = \frac{2 + j\omega L}{8 + 2 + j\omega L} \mathbf{V}_i(\omega) = \frac{2 + j\omega L}{10 + j\omega L} \mathbf{V}_i(\omega)$$

Divida ambos lados de esta ecuación entre  $\mathbf{V}_e(\omega)$  para obtener la función de red del circuito:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{2 + j\omega L}{10 + j\omega L}$$

A continuación, ponemos la función de red en la forma especificada por la ecuación 13.2-6. Al factorizar 2 de ambos términos en el numerador, y factorizando 10 de ambos términos en el denominador, tenemos

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{2 \left( 1 + j\omega \frac{L}{2} \right)}{10 \left( 1 + j\omega \frac{L}{10} \right)} = 0.2 \frac{1 + j\omega \frac{L}{2}}{1 + j\omega \frac{L}{10}} \quad (13.2-7)$$

Igualar las funciones de red dadas por las ecuaciones 13.2-6 y 13.2-7 nos da

$$0.2 \frac{1 + j\omega \frac{L}{2}}{1 + j\omega \frac{L}{10}} = 0.2 \frac{1 + j\omega \frac{5}{2}}{1 + j\omega \frac{25}{10}}$$

Si comparamos estas funciones de red obtenemos

$$\frac{L}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{y} \quad \frac{L}{10} = \frac{25}{10}$$

Los valores de  $L$  obtenidos a partir de estas ecuaciones deben concordar, y lo hacen. (Si no fuera así, hemos cometido algún error.) Despejar cada una de estas ecuaciones da por resultado  $L = 0.4 \text{ H}$ .

### EJEMPLO 13.2-3 Función de red de un circuito

### EJEMPLO INTERACTIVO

Considere el circuito que se muestra en la figura 13.2-6. La entrada al circuito es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje a través del condensador,  $v_o(t)$ . La función de red que representa este circuito es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{3}{\left( 1 + j\frac{\omega}{2} \right) \left( 1 + j\frac{\omega}{5} \right)} \quad (13.2-8)$$

Determine el valor de la inductancia,  $L$ , y de la ganancia,  $A$ , de la fuente de voltaje de voltaje controlado (VCVS).

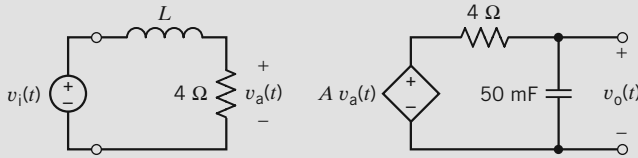


FIGURA 13.2-6 El circuito considerado en el ejemplo 13.2-3.

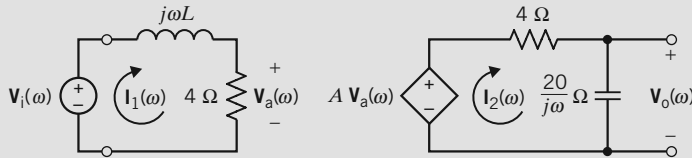


FIGURA 13.2-7 El circuito de la figura 13.2-6, representado en el dominio de frecuencia, utilizando impedancias y fasores.

## Solución

El circuito se ha representado dos veces, por un diagrama de circuito y por la función de red dada. Los parámetros desconocidos,  $L$  y  $A$ , aparecen en el diagrama de circuito, no así en la función de red dada. Podemos analizar el circuito para determinar su función de red. Esta versión de la función de red dependerá de los parámetros desconocidos. Determinaremos el valor de estos parámetros mediante la igualación de dos versiones de la función de red.

Una función de red es la relación del fasor de salida con el fasor de entrada. Los fasores están presentes en el dominio de frecuencia. En consecuencia, nuestro primer paso es representar el circuito en la frecuencia de dominio, por lo que emplearemos fasores e impedancias. La figura 13.2-7 muestra la representación del dominio de frecuencia del circuito de la figura 13.2-6.

La figura 13.2-7 consta de dos enlaces. La corriente de enlaces del enlace de la izquierda está etiquetada como  $\mathbf{I}_1(\omega)$ , y la corriente de enlaces de la derecha está etiquetada como  $\mathbf{I}_2(\omega)$ . Aplique la ley de los voltajes de Kirchoff (KVL) al enlace de la izquierda para obtener

$$j\omega L\mathbf{I}_1(\omega) + 4\mathbf{I}_1(\omega) - \mathbf{V}_i(\omega) = 0$$

Despejamos  $\mathbf{I}_1(\omega)$  para obtener

$$\mathbf{I}_1(\omega) = \frac{\mathbf{V}_i(\omega)}{j\omega L + 4} = \frac{0.25}{1 + j\omega \frac{L}{4}} \mathbf{V}_i(\omega)$$

A continuación aplicamos la ley de Ohm para representar  $\mathbf{V}_a(\omega)$  como

$$\mathbf{V}_a(\omega) = 4\mathbf{I}_1(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{4}} \mathbf{V}_i(\omega) \quad (13.2-9)$$

Aplique la KVL al enlace de la derecha para obtener

$$4\mathbf{I}_2(\omega) + \frac{20}{j\omega} \mathbf{I}_2(\omega) - A\mathbf{V}_a(\omega) = 0$$

Despejamos  $\mathbf{I}_2(\omega)$  para obtener

$$\mathbf{I}_2(\omega) = \frac{A}{4 + \frac{20}{j\omega}} \mathbf{V}_a(\omega) = \frac{j\omega A}{j\omega 4 + 20} \mathbf{V}_a(\omega) = \frac{\frac{j\omega}{20} A}{1 + j\frac{\omega}{5}} \mathbf{V}_a(\omega)$$

El voltaje de salida se obtiene de multiplicar la corriente de enlaces  $\mathbf{I}_2(\omega)$  por la impedancia del condensador:

$$\mathbf{V}_o(\omega) = \frac{20}{j\omega} \mathbf{I}_2(\omega) = \frac{20}{j\omega} \times \frac{\frac{j\omega}{20} A}{1 + j\frac{\omega}{5}} \mathbf{V}_a(\omega) = \frac{A}{1 + j\frac{\omega}{5}} \mathbf{V}_a(\omega) \quad (13.2-10)$$

Sustituir la expresión  $\mathbf{V}_a(\omega)$  de la ecuación 13.2-9 en la ecuación 13.2-10 nos da

$$\mathbf{V}_o(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\frac{L}{4}} \times \frac{A}{1 + j\frac{\omega}{5}} \mathbf{V}_i(\omega) = \frac{A}{\left(1 + j\omega\frac{L}{4}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{5}\right)} \mathbf{V}_i(\omega)$$

Divida ambos lados de esta ecuación entre  $\mathbf{V}_i(\omega)$  para obtener la función de red del circuito:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{A}{\left(1 + j\omega\frac{L}{4}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{5}\right)} \quad (13.2-11)$$

Al comparar las funciones de red dadas por las ecuaciones 13.2-8 y 13.2-11 dan por resultado  $A = 3 \text{ V/V}$  y  $L = 2 \text{ H}$ .

El circuito que se muestra en la figura 13.2-1 es un ejemplo de un circuito denominado filtro de paso bajo de primer orden. Los filtros de paso bajo de primer orden tienen funciones de red de la forma

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad (13.2-12)$$

La ganancia y el cambio de fase del filtro de paso bajo de primer orden son

$$\text{ganancia} = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad (13.2-13)$$

y

$$\text{cambio de fase} = \angle H_0 - \tan^{-1}(\omega/\omega_0) \quad (13.2-14)$$

La función de red del filtro de paso bajo de primer orden tiene dos parámetros,  $H_0$  y  $\omega_0$ . En bajas frecuencias, es decir  $\omega \ll \omega_0$ , la ganancia es  $|H_0|$ , de modo que  $|H_0|$  se denomina la ganancia de cd. (Cuando  $\omega = 0$ ,  $A \cos \omega t = A$ , es una constante o voltaje de cd.)

El otro parámetro de la función de red,  $\omega_0$ , se denomina frecuencia de mitad de potencia. Para explicar esta terminología, suponga que la entrada al filtro de primer orden en la figura 13.2-1 es

$$v_{\text{ent}}(t) = A \cos(\omega t)$$

Suponga, por conveniencia, que  $H_0 = 1$ . Entonces la salida del filtro de primer orden en la figura 13.2-1 es

$$v_o(t) = \frac{A}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \cos\left(\omega_0 t - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)$$

En la figura 13.2-1, el voltaje de salida es el voltaje a través de un resistor de  $10\text{-k}\Omega$ . La potencia promedio transmitida a este resistor es

$$P_{\text{ave}} = \frac{A^2}{2(10 \times 10^3)\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$$

A bajas frecuencias, es decir, en frecuencias que satisfacen  $\omega \ll \omega_0$ , la potencia promedio es aproximadamente de

$$P_1 = \frac{A^2}{2(10 \times 10^3)(1 + 0)} = \frac{A^2}{2(10 \times 10^3)}$$

En la frecuencia  $\omega \ll \omega_0$ , la potencia promedio es

$$P_2 = \frac{A^2}{2(10 \times 10^3)(1 + 1)} = \frac{P_1}{2}$$

Por esta razón,  $\omega_0$  se denomina frecuencia de mitad de potencia.

Es decir, suponga que mantenemos constante la magnitud de amplitud en tanto que variamos la frecuencia,  $\omega$ , de la entrada. Encontramos que el valor de la potencia de salida cuando  $\omega = \omega_0$  es la mitad del valor de la potencia de salida cuando  $\omega \ll \omega_0$ .

A continuación, considere el problema de diseñar un filtro de paso bajo de primer orden. Suponga que se nos han dado las especificaciones siguientes:

$$\text{ganancia de cd} = 2$$

$$\text{cambio de fase} = 120^\circ \quad \text{cuando} \quad \omega = 100 \text{ rad/s}$$

Antes de diseñar un circuito para reunir estas especificaciones, necesitamos poner más atención al cambio de fase. Considere la ecuación 13.2-14. Tanto  $\omega$  como  $\omega_0$  serán positivas, por lo que  $\tan^{-1}(\omega/\omega_0)$  estará entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ . Además,  $\angle H_0$  será  $0^\circ$  cuando  $H_0$  sea positiva y  $180^\circ$  cuando  $H_0$  sea negativa. Como resultado, solamente se pueden alcanzar cambios de fase entre  $-90^\circ$  y  $0^\circ$ , o entre  $90^\circ$  y  $180^\circ$  utilizando un filtro de paso bajo de primer orden. (Los cambios de fase que no se pueden obtener mediante un filtro de paso bajo de primer orden se pueden lograr utilizando otros tipos de circuito. Pero eso es un tema para otro día.) La tabla 13.2-2 muestra dos filtros de paso bajo de primer orden, uno para la obtención de cambios de fase entre  $90^\circ$  y  $180^\circ$  y el otro para obtener cambios de fase entre  $-90^\circ$  y  $0^\circ$ . Con base en el cambio de fase, seleccionamos el circuito en la primera fila de la tabla 13.2-2. La especificación en la ganancia de cd nos da

$$2 = |H_0| = \frac{R_2}{R_1}$$

La especificación en el cambio de fase resulta

$$120^\circ = 180^\circ - \tan^{-1}(100R_2C)$$

**Tabla 13.2-2 Circuitos de filtro de paso bajo de primer orden**

CAMBIO DE FASE	CIRCUITO DE FILTRO DE PASO BAJO DE PRIMER ORDEN	ECUACIONES DE DISEÑO
$90^\circ \leq \text{cambio de fase} \leq 180^\circ$		$H_0 = -\frac{R_2}{R_1}$ $\omega_0 = \frac{1}{R_2 C}$
$-90^\circ \leq \text{cambio de fase} \leq 0^\circ$		$H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left( 1 + \frac{R_3}{R_4} \right)$ $\omega_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}$



Éste es un conjunto de dos ecuaciones en las tres incógnitas  $R_1$ ,  $R_2$  y  $C$ . La solución no es única. Aún tenemos que tomar un valor para una de las incógnitas y luego resolver los valores de las otras dos incógnitas. Tomemos un valor conveniente para el condensador,  $C = 0.1 \mu\text{F}$ , y calculemos las resistencias.

$$R_2 = \frac{\tan(60^\circ)}{1000 \times 0.1 \times 10^{-6}} = 17.32 \text{ k}\Omega$$

y

$$R_1 = \frac{R_2}{2} = 8.66 \text{ k}\Omega$$

Concluimos que el circuito que se muestra en la primera fila de la tabla 13.2-2 tendrá una ganancia de  $cd = 2$  y un cambio de fase  $= 120^\circ$  en  $\omega = 1000 \text{ rad/s}$  cuando  $R_1 = 8.66 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 17.32 \text{ k}\Omega$  y  $C = 0.1 \mu\text{F}$ .

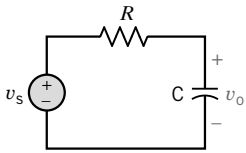


FIGURA E 13.2-1 Circuito RC.

**EJERCICIO 13.2-1** La entrada al circuito que se muestra en la figura E 13.2-1 es el voltaje de la fuente,  $v_s$ , y la respuesta es el voltaje del condensador,  $v_o$ . Suponga que  $R = 10 \text{ k}\Omega$  y  $C = 1 \mu\text{F}$ . ¿Cuáles son los valores de la ganancia y el cambio de fase cuando la frecuencia de entrada es  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ?

*Respuesta:* 0.707 y  $-45^\circ$

**EJERCICIO 13.2-2** La entrada al circuito que se muestra en la figura E 13.2-2 es el voltaje de la fuente,  $v_s$ , y la respuesta es el voltaje del resistor,  $v_o$ .  $R = 30 \Omega$  y  $L = 2 \text{ H}$ . Suponga que la frecuencia de entrada se ajusta hasta que la ganancia sea igual a 0.6. ¿Cuál es el valor de la frecuencia?

*Respuesta:* 20 rad/s

**EJERCICIO 13.2-3** La entrada al circuito que se muestra en la figura E 13.2-2 es el voltaje de la fuente,  $v_s$ , y la respuesta es la corriente de enlaces,  $i$ .  $R = 30 \Omega$  y  $L = 2 \text{ H}$ . ¿Cuáles son los valores de la ganancia y del cambio de fase cuando la frecuencia de entrada es  $\omega = 20 \text{ rad/s}$ ?

*Respuesta:* 0.02 A/V y  $-53.1^\circ$

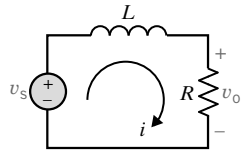


FIGURA E 13.2-2 Circuito RL.

**EJERCICIO 13.2-4** La entrada al circuito que se muestra en la figura E 13.2-1 es el voltaje de la fuente,  $v_s$ , y la respuesta es el voltaje del condensador,  $v_o$ . Suponga que  $C = 1 \mu\text{F}$ . ¿Qué valor de  $R$  se requiere para que se dé un cambio de fase igual a  $-45^\circ$  cuando la frecuencia de entrada sea  $\omega = 20 \text{ rad/s}$ ?

*Respuesta:*  $R = 50 \text{ k}\Omega$

**EJERCICIO 13.2-5** La entrada al circuito que se muestra en la figura E 13.2-1 es el voltaje de la fuente,  $v_s$ , y la respuesta es el voltaje del condensador,  $v_o$ . Suponga que  $C = 1 \mu\text{F}$ . ¿Qué valor de  $R$  se requiere para que se dé una ganancia igual a 1.5 cuando la frecuencia de entrada sea  $\omega = 20 \text{ rad/s}$ ?

*Respuesta:* No existe tal valor para  $R$ . La ganancia de este circuito nunca será mayor que 1.

### 13.3 DIAGRAMAS DE BODE

Es común el uso de trazos logarítmicos de la respuesta de frecuencia más que de trazos lineales. A los trazos logarítmicos se les llama *diagramas de Bode* en honor de William Bode, que los utilizara de manera extensa en su trabajo con amplificadores en los laboratorios Bell Telephone en las décadas de 1930 y 1940. Un diagrama de Bode es un trazo de ganancia de logaritmo y valores de ángulos de fase versus frecuencia, utilizando un eje horizontal de frecuencia logarítmica. El uso de logaritmos expande el rango de frecuencias reflejadas en el eje horizontal.

Tabla 13.3-1 Tabla de conversión de decibeles

MAGNITUD, $H$	$20 \log H$ (dB)
0.1	-20.00
0.2	-13.98
0.4	-7.96
0.6	-4.44
1.0	0.0
1.2	1.58
1.4	2.92
1.6	4.08
2.0	6.02
3.0	9.54
4.0	12.04
5.0	13.98
6.0	15.56
7.0	16.09
10.0	20.00
100.0	40.00

La función de red  $\mathbf{H}$  se puede escribir como

$$\mathbf{H} = H \angle \phi = H e^{j\phi} \quad (13.3-1)$$

Por lo común, el logaritmo de magnitud se expresa en términos del logaritmo para la base 10, de modo que utilizamos

$$\text{ganancia de logaritmo} = 20 \log_{10} H \quad (13.3-2)$$

y la unidad es el decibel (dB). La ganancia logarítmica también se denomina ganancia en dB. En la tabla 13.3-1 se da una tabla de conversión en decibeles.

La unidad decibel se deriva de la unidad belio. Suponga que  $P_1$  y  $P_2$  son dos valores de potencia. Tanto  $P_1/P_2$  como  $\log(P_1/P_2)$  son medidas de dimensiones relativas de  $P_1$  y  $P_2$ . La relación  $P_1/P_2$  no es unitaria, en tanto que  $\log(P_1/P_2)$  tiene al belio como su unidad. El nombre *belio* es en honor de Alexander Bell, inventor del teléfono.

El **diagrama de Bode** es una gráfica en decibeles y fases en grados, versus el logaritmo de frecuencia.

Obtengamos los diagramas de Bode que corresponden a la función de red.

$$\mathbf{H} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}} \angle \tan^{-1}(\omega/\omega_0) = H \angle \phi \quad (13.3-3)$$

La ganancia logarítmica es

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} H &= 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}} \\ &= 20 \log_{10} 1 - 20 \log_{10} \sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2} = -20 \log_{10} \sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2} \end{aligned}$$

Para frecuencias menores, es decir,  $\omega \ll \omega_0$

$$1 + (\omega/\omega_0)^2 \cong 1$$

por lo que la ganancia logarítmica es aproximadamente

$$20 \log_{10} H = -20 \log_{10} \sqrt{1} = 0 \text{ dB}$$

Ésta es la ecuación de una recta horizontal. Como esta recta se aproxima a la ganancia logarítmica para frecuencias bajas, se le denomina la asíntota de frecuencia baja del diagrama de Bode.

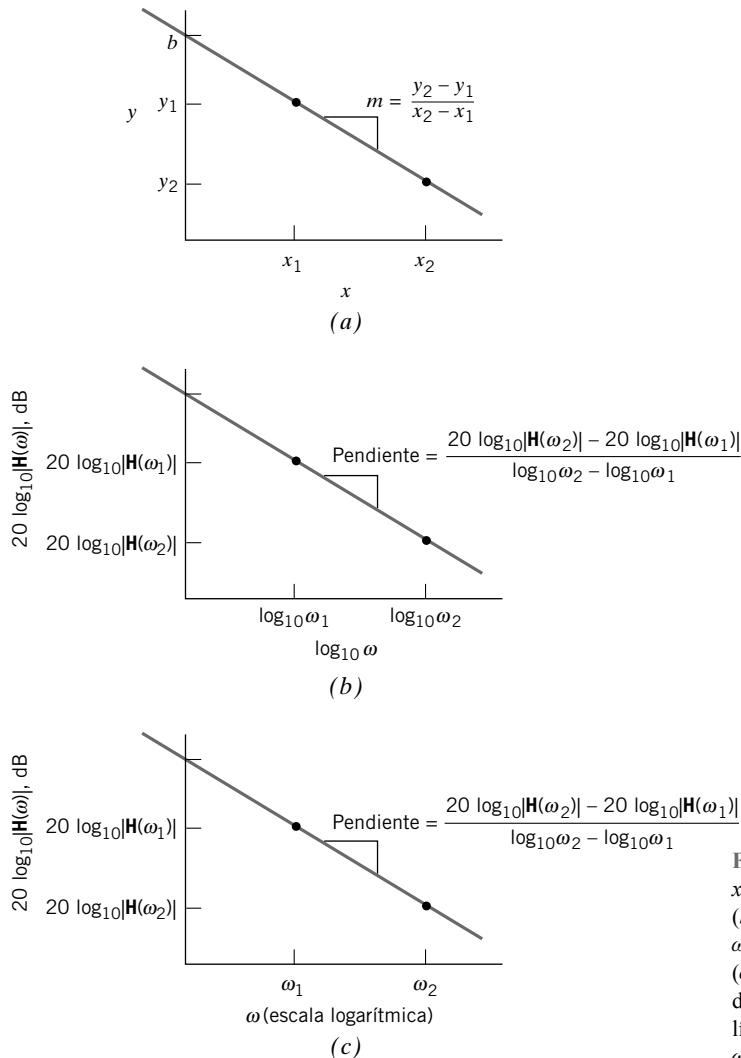
Para frecuencias grandes, es decir,  $\omega \gg \omega_0$

$$1 + (\omega/\omega_0)^2 \cong (\omega/\omega_0)^2$$

por lo tanto, la ganancia logarítmica es aproximadamente

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} H &= -20 \log_{10} \sqrt{(\omega/\omega_0)^2} \\ &= -20 \log_{10} \omega/\omega_0 = 20 \log_{10} \omega_0 - 20 \log_{10} \omega \end{aligned}$$

Esta ecuación muestra una de las ventajas del uso de logaritmos. El trazo de  $20 \log_{10} H$  versus  $\log_{10} \omega$  es una línea recta. A esta línea recta se le llama asíntota de frecuencia alta del diagrama de Bode. Las figuras 13.3-1a, b comparan la ecuación de la asíntota de alta frecuencia con la más conocida forma



**FIGURA 13.3-1** (a) trazo de  $y$  versus  $x$  para la línea recta  $y = mx + b$ . (b) Trazo de  $20 \log_{10} |\mathbf{H}(\omega)|$  versus  $\log_{10} \omega$  para la línea recta  $20 \log_{10} |\mathbf{H}(\omega)| = 20 \log_{10} \omega_0 - 20 \log_{10} \omega$ . (c) Trazo de  $20 \log_{10} |\mathbf{H}(\omega)|$  versus  $\omega$  para la línea recta  $20 \log_{10} |\mathbf{H}(\omega)| = 20 \log_{10} \omega_0 - 20 \log_{10} \omega$ .

de la ecuación de una línea recta,  $y = mx + b$ . La pendiente de la asíntota de frecuencia alta se puede calcular a partir de dos puntos en la línea recta. Esta pendiente se da al utilizar unidades de dB/década. En la figura 13.3-1b la ganancia en dB se traza versus  $\log \omega$ , en tanto que en la figura 13.3-1c, la ganancia en dB se traza versus  $\omega$ , utilizando una escala logarítmica. Es más conveniente etiquetar el eje de frecuencias cuando se utiliza una escala logarítmica para  $\omega$ . La ecuación que se utilizó para calcular la pendiente desde dos puntos en la línea es la misma de la figura 13.3-1c que la que está en la figura 13.3-1b.

Considere dos frecuencias,  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , con  $\omega_2 = 10^x \omega_1$ . Decimos que  $\omega_2$  es más grande que  $\omega_1$  por  $x$  décadas. De manera alterna,  $\omega_2$  es más grande que  $\omega_1$  por  $x = \log_{10}(\omega_2/\omega_1)$  décadas. Por ejemplo, 1 000 rad/s es 2 décadas más grande que 10 rad/s, y 316 rad/s es 1.5 décadas más grande que 10 rad/s.

La pendiente de la asíntota de frecuencia alta es

$$\frac{20 \log_{10} |\mathbf{H}(\omega_2)| - 20 \log_{10} |\mathbf{H}(\omega_1)|}{\log_{10} \omega_2 - \log_{10} \omega_1} = \frac{20 \log_{10} |\mathbf{H}(\omega_2)| - 20 \log_{10} |\mathbf{H}(\omega_1)|}{\log_{10}(\omega_2/\omega_1)}$$

Las unidades de esta pendiente son dB/décadas. La asíntota de frecuencia alta se caracteriza por

$$|\mathbf{H}(\omega)| \cong \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{\omega} \text{ cuando } \omega \gg \omega_0$$

El valor de la pendiente de la asíntota de frecuencia alta es

$$\begin{aligned} \frac{20 \log_{10} |\mathbf{H}(\omega_2)| - 20 \log_{10} |\mathbf{H}(\omega_1)|}{\log_{10}(\omega_2/\omega_1)} &= \frac{20 \log_{10}(\omega_0/\omega_2) - 20 \log_{10}(\omega_0/\omega_1)}{\log_{10}(\omega_2/\omega_1)} \\ &= \frac{-20 \log_{10}(\omega_2/\omega_1)}{\log_{10}(\omega_2/\omega_1)} = -20 \text{ dB/década} \end{aligned}$$

La intersección de la asíntota de frecuencia baja con la asíntota de frecuencia alta ocurre cuando

$$0 = 20 \log_{10} \omega - 20 \log_{10} \omega_0$$

es decir, cuando

$$\omega = \omega_0$$

Las asíntotas de frecuencia baja y alta forman un ángulo donde se cortan transversalmente. Dado que las asíntotas se cruzan en la frecuencia  $\omega = \omega_0$ , en ocasiones a  $\omega_0$  se le llama **frecuencia de ángulo**.

La figura 13.3-2 muestra la magnitud y la fase de los trazos de Bode para esta función de red. La curva asíntótica que se muestra en la figura 13.3-2 es una aproximación al diagrama de Bode. El **diagrama de Bode asíntótico** consta de la asíntota de frecuencia baja para  $\omega < \omega_0$  y la asíntota de frecuencia alta para  $\omega > \omega_0$ . La aproximación utilizada para obtener el diagrama de Bode asíntótico se resume en las ecuaciones siguientes:

$$|\mathbf{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}} \cong \begin{cases} 1 & \omega < \omega_0 \\ \omega_0/\omega & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

o bien

$$20 \log_{10} |\mathbf{H}(\omega)| = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}} \cong \begin{cases} 0 & \omega < \omega_0 \\ 20 \log_{10} \omega_0 - 20 \log_{10} \omega & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

El diagrama de Bode asíntótico es una buena aproximación al diagrama de Bode cuando  $\omega \ll \omega_0$  o bien  $\omega \gg \omega_0$ . Cerca de  $\omega = \omega_0$ , el diagrama de Bode asíntótico se deriva del diagrama de Bode exacto.

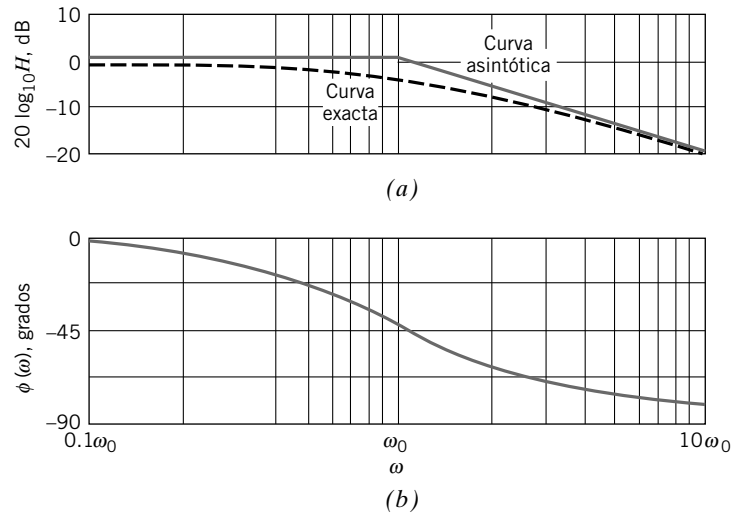


FIGURA 13.3-2 Diagrama de Bode para  $\mathbf{H} = (1 + jw/w_0)^{-1}$ . La curva punteada es la curva exacta de la magnitud. La curva sólida de la magnitud es una aproximación asintótica.

En  $\omega = \omega_0$ , el valor del diagrama de Bode asintótico es dB, mientras el valor del diagrama de Bode exacto es

$$20 \log_{10} |\mathbf{H}(\omega_0)| = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_0/\omega_0)^2}} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{2}} = -3.01 \text{ dB}$$

La característica de magnitud no presenta un corte de forma. No obstante, designamos la frecuencia en que la magnitud es  $1/\sqrt{2}$  veces la magnitud en  $\omega = 0$  como una frecuencia especial. En el diagrama de Bode, la caída de magnitud de  $1/\sqrt{2}$  resulta una caída logarítmica de aproximadamente  $-3$  dB en  $\omega = \omega_0$ . A la frecuencia  $\omega = \omega_0$  se le suele llamar *frecuencia de corte* o *frecuencia de ángulo*.

Desde luego,  $\mathbf{H}$  puede tomar formas diferentes de la ecuación 13.3-3; por ejemplo, considere el circuito que se muestra en la figura 13.3-3. La función de red de este circuito es

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{V}_o}{\mathbf{V}_s} = \frac{R + j\omega L}{R_s + R + j\omega L}$$

Pongamos esta función de red en la forma

$$\mathbf{H} = k \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}} = H \angle \phi$$

Esta función de red tiene tres parámetros:  $k$ ,  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Los tres tienen nombre. Las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son frecuencias de ángulo. Las frecuencias de ángulo que aparecen en el numerador de una función de red se llaman ceros, de modo que  $\omega_1$  es un cero en la función de red. Las frecuencias de ángulo que aparecen en el denominador de una función de red se denominan polos, por lo que  $\omega_2$  es un polo de la función de red. Dado que

$$k = \lim_{\omega \rightarrow 0} H$$

el parámetro  $k$  se denomina ganancia de frecuencia baja o ganancia de cd. La función de red de este circuito se puede expresar como

$$\mathbf{H} = \left( \frac{R}{R + R_s} \right) \frac{1 + j\frac{\omega L}{R}}{1 + j\frac{\omega L}{R + R_s}}$$

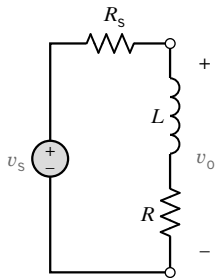


FIGURA 13.3-3 Voltaje de fuente transmitiendo potencia a una impedancia de carga que consta de  $L$  y  $R$ .

por lo tanto, la ganancia de cd es

$$k = \frac{R}{R + R_s}$$

y las frecuencias cero y polo se relacionan por

$$\omega_1 = \frac{R}{L} < \frac{R + R_s}{L} = \omega_2$$

La ganancia correspondiente a una función de red de esta forma es

$$H = k \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}}$$

Para obtener el diagrama de Bode asintótico, aproximamos  $\sqrt{1 + (\omega/\omega_1)^2}$  por 1 cuando  $\omega < \omega_1$  y por  $\omega/\omega_1$  cuando  $\omega > \omega_1$ . Del mismo modo, aproximamos  $\sqrt{1 + (\omega/\omega_2)^2}$  por 1 cuando  $\omega < \omega_2$  y por  $\omega/\omega_2$  cuando  $\omega > \omega_2$ . Por consiguiente,

$$H \cong \begin{cases} k & \omega < \omega_1 \\ \frac{k\omega}{\omega_1} & \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ \frac{k\omega_2}{\omega_1} & \omega_2 < \omega \end{cases}$$

A continuación, la ganancia logarítmica se aproxima por

$$20 \log_{10} H \cong \begin{cases} 20 \log_{10} k & \omega < \omega_1 \\ (20 \log_{10} k - 20 \log_{10} \omega_1) + 20 \log_{10} \omega & \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ (20 \log_{10} k - 20 \log_{10} \omega_1) + 20 \log_{10} \omega_2 & \omega_2 < \omega \end{cases}$$

Éstas son las ecuaciones de las asíntotas del diagrama de Bode. Cuando  $\omega < \omega_1$  y cuando  $\omega > \omega_2$ , las asíntotas son rectas horizontales. Las ecuaciones para estas asíntotas no incluyen un término que implique  $\log_{10} \omega$ , lo cual significa que la pendiente debe ser cero. Cuando  $\omega_1 < \omega < \omega_2$ , la ecuación de la asíntota incluye un término que implica  $\log_{10} \omega$ . El coeficiente de  $\log_{10} \omega$  es 20, que indica una pendiente de 20 dB/década.

El efecto de la ganancia de cd de  $k$  es limitado al término  $20 \log_{10} k$ , el cual aparece en la ecuación de cada una de las tres asíntotas. Cambiar el valor de  $k$  elevará el diagrama de Bode ( $k$  se incrementa) o lo bajará ( $k$  disminuye), pero no modificará la figura del diagrama de Bode. Por esta razón en ocasiones normalizamos la función de red dividiéndola entre la ganancia de cd. Las asíntotas del diagrama de Bode de la función de red normalizada las da

$$20 \log_{10} \left(\frac{H}{k}\right) \cong \begin{cases} 0 & \omega < \omega_1 \\ 20 \log_{10} \omega - 20 \log_{10} \omega_1 & \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ 20 \log_{10} \omega_2 - 20 \log_{10} \omega_1 & \omega_2 < \omega \end{cases}$$

El ángulo de fase de  $\mathbf{H}$  es

$$\phi = \angle k + \angle \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) - \angle \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2}\right) = 0 + \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)$$

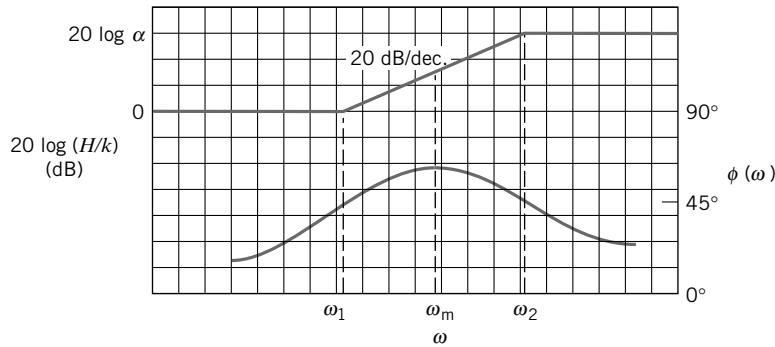


FIGURA 13.3-4 Diagrama de Bode para el circuito de la figura 13.3-3.

En la figura 13.3-4 se muestran el diagrama de Bode de fase y el diagrama de Bode de magnitud asintótica. Observe que la pendiente del diagrama de Bode de magnitud asintótica cambia conforme la frecuencia se aumenta pasado  $\omega_1$  y cambia de nuevo conforme la frecuencia se aumenta pasado  $\omega_2$ . Los ceros, como  $\omega_1$ , hacen que la pendiente se incremente 20 dB/década. Los polos, como  $\omega_2$ , hacen que la pendiente disminuya 20 dB/década. La pendiente de cada asíntota será un múltiplo entero de 20 dB/década.

### EJEMPLO 13.3-1 Diagrama de Bode

Encuentre el diagrama de Bode de magnitud asintótica

$$\mathbf{H}(\omega) = K \frac{j\omega}{1 + j\frac{\omega}{p}}$$

#### Solución

Aproxime  $\left(1 + j\frac{\omega}{p}\right)$  por 1 cuando  $\omega < p$  y por  $j\frac{\omega}{p}$  cuando  $\omega > p$  para obtener

$$\mathbf{H}(\omega) \cong \begin{cases} K(j\omega) & \omega < p \\ Kp & \omega > p \end{cases}$$

La ganancia logarítmica es

$$20 \log_{10} |\mathbf{H}(\omega)| \cong \begin{cases} 20 \log_{10} K + 20 \log_{10} \omega & \omega < p \\ 20 \log_{10}(Kp) & \omega > p \end{cases}$$

En la figura 13.3-5 se muestra el diagrama de Bode de magnitud asintótica, el factor  $j\omega$  en el numerador de  $\mathbf{H}(\omega)$  hace que la asíntota de frecuencia baja tenga una pendiente de 20 dB/década. La pendiente del diagrama de Bode de magnitud asintótica disminuye en 20 dB/década (desde 20 dB/década hasta cero) al momento de que la frecuencia aumenta pasado  $\omega = p$ .

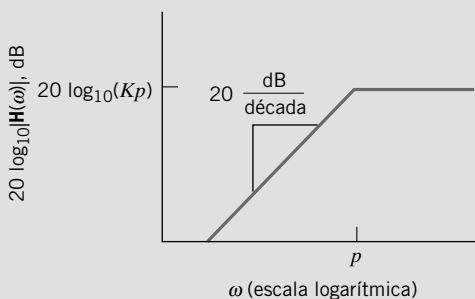


FIGURA 13.3-5 Diagrama de Bode de magnitud asintótica para el ejemplo 13.3-1.

### EJEMPLO 13.3-2 Diagrama de Bode de un circuito

### EJEMPLO INTERACTIVO

Considere el circuito que se muestra en la figura 13.3-6a. La entrada al circuito es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje de nodos en la terminal de salida,  $v_o(t)$ , del amplificador operacional. La función de red que representa el circuito es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} \quad (13.3-4)$$

En la figura 13.3-6b se muestra el diagrama de Bode de magnitud correspondiente. Determine los valores de las capacitancias  $C_1$  y  $C_2$ .

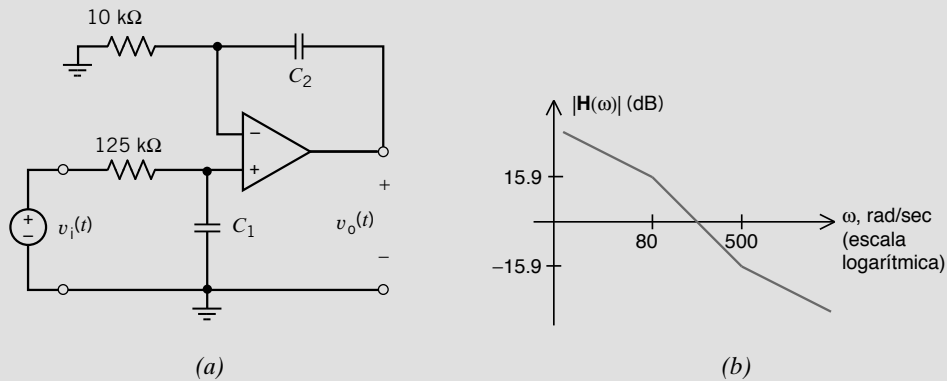


FIGURA 13.3-6 El circuito y el diagrama de Bode considerados en el ejemplo 13.3-2.

### Solución

La función de red proporciona una conexión entre el circuito y el diagrama de Bode. Podemos determinar la función de red a partir del diagrama de Bode, e incluso analizar el circuito para determinar su función de red. Los valores de las capacitancias se determinan al igualar los coeficientes de estas dos funciones de red.

**Paso 1:** Hagamos algunas observaciones respecto al diagrama de Bode que se muestra en la figura 13.3-6b:

- Hay dos frecuencias de ángulo, a 80 y 500 rad/s. La frecuencia de ángulo a 80 rad/s es un polo porque en 80 rad/s la pendiente del diagrama de Bode disminuye. La frecuencia de ángulo a 500 rad/s es cero porque en 500 rad/s la pendiente se incrementa.
- Las frecuencias de ángulo están separadas por  $\left(\frac{500}{80}\right) = 0.796$  décadas. La pendiente del diagrama de Bode es  $\frac{-15.9 - 15.9}{0.796} = -40$  dB/década entre las frecuencias de ángulo.
- En frecuencias bajas, es decir, en frecuencias menores que la frecuencia de ángulo más baja, la pendiente es  $-1 \times 20$  dB/década, de modo que la función de red incluye un factor  $(j\omega)^{-1}$

En consecuencia, la función de red correspondiente al diagrama de Bode es

$$\mathbf{H}(\omega) = k(j\omega)^{-1} \left( \frac{1 + j\frac{\omega}{500}}{1 + j\frac{\omega}{80}} \right) = k \frac{1 + j\frac{\omega}{500}}{j\omega \left( 1 + j\frac{\omega}{80} \right)} \quad (13.3-5)$$

donde  $k$  es una constante que aún se debe determinar.



**Paso 2:** A continuación, analizamos el circuito que se muestra en la figura 13.3-6a para determinar su función de red. Una función de red es la relación del fasor de salida con el fasor de entrada. Los fasores están presentes en el dominio de frecuencia. En consecuencia, nuestro segundo paso es representar el circuito en el dominio de frecuencia, utilizando fasores e impedancias. La figura 13.3-7 muestra la representación del dominio de frecuencia del circuito de la figura 13.3-6a.

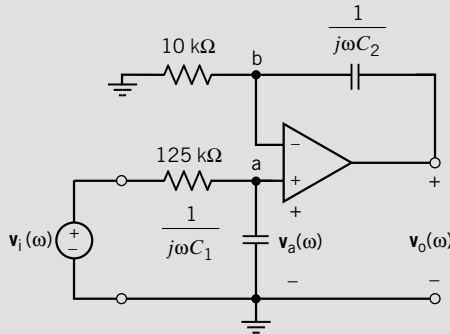


FIGURA 13.3-7 El circuito de la figura 13.3-6a, representado en el dominio de frecuencia utilizando impedancias y fasores.

Para analizar el circuito en la figura 13.3-7 primero escribimos una ecuación nodal en el nodo etiquetado como nodo a. (La corriente que llega a la entrada no inversora del amplificador operacional es cero, por lo tanto hay dos corrientes en esta ecuación nodal, las corrientes en las impedancias que corresponden al resistor de 125-k $\Omega$  y al condensador  $C_1$ .)

$$\frac{V_i(\omega) - V_a(\omega)}{125 \times 10^3} = \frac{V_a(\omega)}{\frac{1}{j\omega C_1}}$$

donde  $V_a(\omega)$  es el voltaje de nodos en el nodo a. Con algo de álgebra nos da

$$\frac{V_i(\omega)}{125 \times 10^3} = \left( \frac{1}{125 \times 10^3} + j\omega C_1 \right) V_a(\omega)$$

entonces 
$$V_i(\omega) = (1 + j\omega C_1 (125 \times 10^3)) V_a(\omega) \Rightarrow V_a(\omega) = \frac{V_i(\omega)}{1 + j\omega C_1 (125 \times 10^3)}$$

A continuación escribimos una ecuación nodal en el nodo etiquetado como nodo b. (La corriente que llega a la entrada inversora del amplificador operacional es cero, por lo que hay dos corrientes en esta ecuación nodal, las corrientes en las impedancias que corresponden al resistor de 10 k $\Omega$  y al condensador  $C_2$ .)

$$\frac{V_a(\omega)}{10 \times 10^3} + \frac{V_a(\omega) - V_o(\omega)}{\frac{1}{j\omega C_2}} = 0$$

Con algo de álgebra nos da

$$\begin{aligned} V_a(\omega) + j\omega C_2 (10 \times 10^3) (V_a(\omega) - V_o(\omega)) &= 0 \\ (1 + j\omega C_2 (10 \times 10^3)) V_a(\omega) &= j\omega C_2 (10 \times 10^3) V_o(\omega) \\ (1 + j\omega C_2 (10 \times 10^3)) \frac{V_i(\omega)}{1 + j\omega C_1 (125 \times 10^3)} &= j\omega C_2 (10 \times 10^3) V_o(\omega) \end{aligned}$$

Por último, 
$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)} = \left( \frac{1}{C_2 (10 \times 10^3)} \right) \frac{1 + j\omega C_2 (10 \times 10^3)}{(j\omega) (1 + j\omega C_1 (125 \times 10^3))} \quad (13.3-6)$$

**Paso 3:** Las funciones de red dadas en las ecuaciones 13.3-5 y 13.3-6 deben ser iguales, es decir,

$$k \frac{1 + j\frac{\omega}{500}}{j\omega \left(1 + j\frac{\omega}{80}\right)} = \mathbf{H}(\omega) = \left( \frac{1}{C_2 (10 \times 10^3)} \right) \frac{1 + j\omega C_2 (10 \times 10^3)}{(j\omega) (1 + j\omega C_1 (125 \times 10^3))}$$

Igualando coeficientes obtenemos

$$\frac{1}{80} = C_1(125 \times 10^3), \quad \frac{1}{500} = C_2(10 \times 10^3) \quad \text{y} \quad k = \frac{1}{C_2(10 \times 10^3)} = 500$$

o bien 
$$C_1 = \frac{1}{80(125 \times 10^3)} = 0.1 \mu\text{F} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{1}{500(10 \times 10^3)} = 0.2 \mu\text{F}$$

### EJEMPLO 13.3-3 Diagrama de Bode de un circuito

### EJEMPLO INTERACTIVO

Considere el circuito que se muestra en la figura 13.3-8a. La entrada al circuito es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje de nodos,  $v_o(t)$ , en la terminal de salida del amplificador operacional. La función de red que representa este circuito es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} \quad (13.3-7)$$

El diagrama de Bode de magnitud correspondiente también se muestra en la figura 13.3-8b. Determine los valores de las capacitancias,  $C_1$  y  $C_2$ .

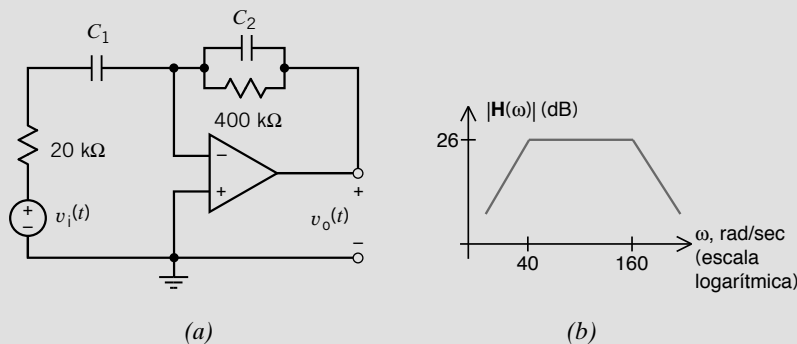


FIGURA 13.3-8 El circuito y el diagrama de Bode considerados en el ejemplo 13.3-3.

### Solución

La función de red proporciona una conexión entre el circuito y el diagrama de Bode. Podemos determinar la función de red desde el diagrama de Bode, e incluso analizar el circuito para determinar su función de red. Los valores de las capacitancias se determinan al igualar los coeficientes de estas dos funciones de red.

**Paso 1:** Primero hacemos algunas observaciones respecto del diagrama de Bode que se muestra en la figura 13.3-8b.

1. Hay dos frecuencias de ángulo, a 40 y 160 rad/s. Ambas frecuencias de ángulo son polos porque la pendiente del diagrama de Bode disminuye en ambas frecuencias de ángulo.
2. Entre las frecuencias de ángulo, la ganancia es  $|\mathbf{H}(\omega)| = 26 \text{ dB} = 10^{26/20} = 20 \text{ V/V}$ .
3. En frecuencias bajas, es decir, en frecuencias menores que la más pequeña frecuencia de ángulo, la pendiente es  $1 \times 20 \text{ dB/década}$ , por lo que la función de red incluye un factor  $(j\omega)^1$ .

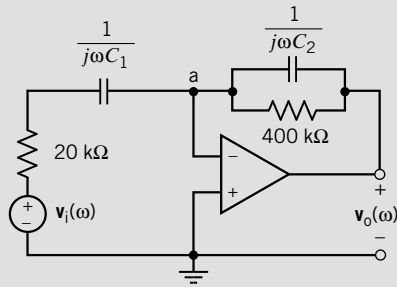


FIGURA 13.3-9 El circuito de la figura 13.3-8a, representado en el dominio de frecuencia, utilizando impedancias y fasores.

En consecuencia, la función de red correspondiente al diagrama de Bode es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{k(j\omega)}{\left(1 + j\frac{\omega}{40}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{160}\right)} \quad (13.3-8)$$

**Paso 2:** A continuación, analizamos el circuito que se muestra en la figura 13.3-8a para determinar su función de red. Una función de red es la relación del fasor de salida con el fasor de entrada. Los fasores están presentes en el dominio de frecuencia. En consecuencia, nuestro segundo paso es representar el circuito en el dominio de frecuencia, utilizando fasores e impedancias. La figura 13.3-9 muestra la representación del dominio de frecuencia del circuito de la figura 13.3-8a.

Para analizar el circuito en la figura 13.3-9, escribimos una ecuación nodal en el nodo etiquetado como nodo a. Al hacerlo así, trataremos las impedancias en serie  $20 \text{ k}\Omega$  y  $\frac{1}{j\omega C_1}$ , como una impedancia equivalente única igual a  $20 \times 10^3 + \frac{1}{j\omega C_1}$ . (El voltaje de nodos en el nodo a es cero porque los voltajes en los nodos de entrada de un amplificador operacional son iguales. La corriente que invade la entrada inversora es cero, por lo que hay tres corrientes en esta ecuación nodal.)

$$\frac{\mathbf{V}_i(\omega)}{20 \times 10^3 + \frac{1}{j\omega C_1}} + \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{400 \times 10^3} + \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\frac{1}{j\omega C_2}} = 0$$

Con algo de álgebra, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{(j\omega C_1)\mathbf{V}_i(\omega)}{1 + j\omega C_1(20 \times 10^3)} + \left(\frac{1}{400 \times 10^3} + j\omega C_2\right)\mathbf{V}_o(\omega) &= 0 \\ \frac{(j\omega C_1)(400 \times 10^3)\mathbf{V}_i(\omega)}{1 + j\omega C_1(20 \times 10^3)} &= -(1 + j\omega C_2(400 \times 10^3))\mathbf{V}_o(\omega) \end{aligned}$$

Por último, 
$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{-j\omega C_1(400 \times 10^3)}{(1 + j\omega C_1(20 \times 10^3))(1 + j\omega C_2(400 \times 10^3))} \quad (13.3-9)$$

**Paso 3:** Las funciones de red dadas en las ecuaciones 13.3-8 y 13.3-9 deben ser iguales. Es decir,

$$\frac{k(j\omega)}{\left(1 + j\frac{\omega}{40}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{160}\right)} = \mathbf{H}(\omega) = \frac{-j\omega C_1(400 \times 10^3)}{(1 + j\omega C_1(20 \times 10^3))(1 + j\omega C_2(400 \times 10^3))}$$

Igualar coeficientes nos da

$$\frac{1}{40} = C_1(20 \times 10^3), \quad \frac{1}{160} = C_2(400 \times 10^3) \text{ y } k = -C_1(400 \times 10^3)$$

por lo que 
$$C_1 = \frac{1}{40(20 \times 10^3)} = 1.25 \mu\text{F} \text{ y } C_2 = \frac{1}{160(400 \times 10^3)} = 15.625 \text{ nF}$$

y 
$$k = -C_1(400 \times 10^3) = -(1.25 \times 10^{-6})(400 \times 10^3) = -0.5$$

**EJEMPLO 13.3-4** Función de red con polos complejos

La función de red de un filtro de paso bajo de segundo orden tiene la forma

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{k \omega_0^2}{(j\omega)^2 + j2\zeta\omega_0\omega + \omega_0^2}$$

Esta función de red depende de tres elementos: la ganancia de cd,  $k$ ; la frecuencia de ángulo,  $\omega_0$ , y la razón de amortiguamiento,  $\zeta$ . Por conveniencia, consideramos el caso donde  $k = 1$ . Luego, utilizando  $j^2 = -1$ , podemos escribir la función de red como

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_0\omega}$$

Determine el diagrama de Bode de magnitud asintótica del filtro de paso bajo de segundo orden cuando la ganancia de cd es 1.

**Solución**

El denominador de  $\mathbf{H}(\omega)$  contiene un factor nuevo, el cual implica  $\omega^2$ . El diagrama de Bode asintótico se basa en la aproximación

$$(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\zeta\omega_0\omega \cong \begin{cases} \omega_0^2 & \omega < \omega_0 \\ -\omega^2 & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

Con esta aproximación podemos expresar  $\mathbf{H}(\omega)$  como

$$\mathbf{H}(\omega) \cong \begin{cases} 1 & \omega < \omega_0 \\ -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

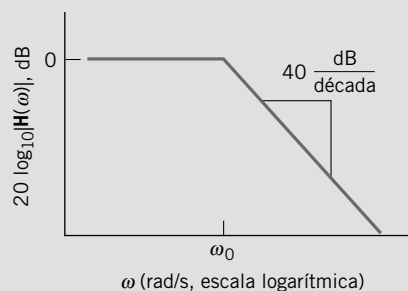
La ganancia logarítmica es

$$20 \log_{10} |\mathbf{H}(\omega)| \cong \begin{cases} 0 & \omega < \omega_0 \\ 40 \log_{10} \omega_0 - 40 \log_{10} \omega & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

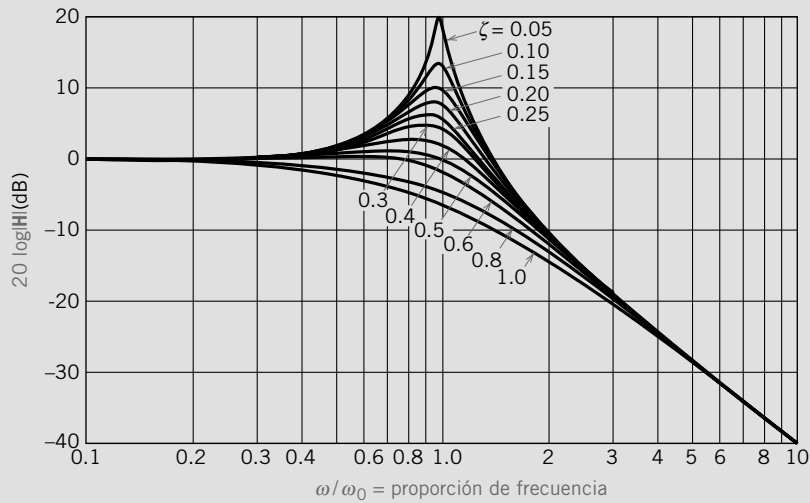
En la figura 13.3-10 se muestra el diagrama de Bode de magnitud asintótica, y la magnitud real, así como el diagrama de Bode de fase real, se muestran en la figura 13.3-11. El diagrama de Bode asintótico es una buena aproximación al diagrama de Bode real cuando  $\omega \ll \omega_0$  o bien  $\omega \gg \omega_0$ . Cerca de  $\omega = \omega_0$ , el diagrama de Bode asintótico se desvía del diagrama de Bode real. En  $\omega = \omega_0$ , el valor del diagrama de Bode asintótico es 0 dB en tanto que el valor del diagrama de Bode real es

$$\mathbf{H}(\omega_0) = \frac{1}{2\zeta}$$

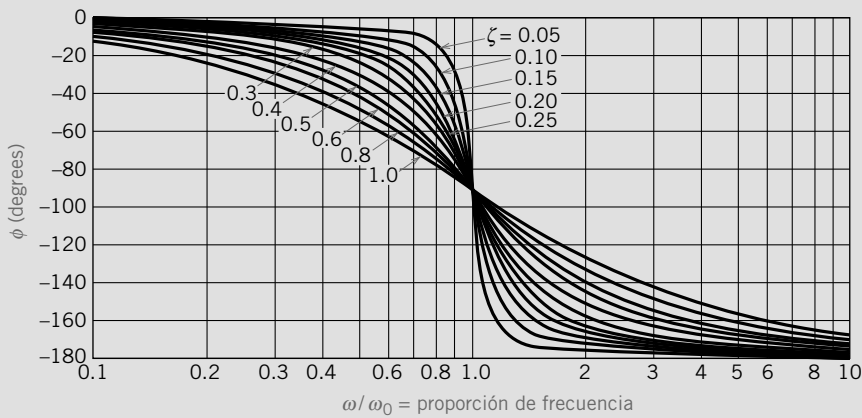
Como muestran esta ecuación y la figura 13.3-11, la desviación entre el diagrama de Bode real y asintótico cerca de  $\omega = \omega_0$  depende de  $\zeta$ . La frecuencia  $\omega_0$  se denomina *frecuencia de ángulo*. La pendiente del diagrama de Bode asintótico disminuye 40 dB/década en cuanto la frecuencia se incrementa pasado  $\omega = \omega_0$ . En términos del diagrama de Bode asintótico, el denominador de esta función de red actúa como dos polos en  $p = \omega_0$ . Si este factor fuera a aparecer en el numerador de una función de red, debería actuar como dos ceros en  $z = \omega_0$ . La pendiente del diagrama de Bode asintótico debe incrementar en 40 dB/década en cuanto la frecuencia se incrementa pasado  $\omega = \omega_0$ .



**FIGURA 13.3-10** El diagrama de Bode de magnitud asintótica del filtro de paso bajo de segundo orden cuando la ganancia de cd es 1.



(a)



(b)

FIGURA 13.3-11 Diagrama de Bode de  $\mathbf{H}(j\omega) = [1 + (2\zeta/\omega_0)j\omega + (j\omega/\omega_0)^2]^{-1}$  para dos décadas de frecuencia.

### EJEMPLO 13.3-5 El diagrama de Bode de magnitud para una función de red complicada

Encuentre el diagrama de Bode de magnitud asintótica de

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{5(1 + 0.1j\omega)}{j\omega(1 + 0.5j\omega) \left[ 1 + 0.6\left(\frac{j\omega}{50}\right) - \left(\frac{\omega}{50}\right)^2 \right]}$$

#### Solución

Las frecuencias de ángulo de  $\mathbf{H}(\omega)$  son  $z = 10$ ,  $p = 2$  y  $\omega_0 = 50$  rad/s. La frecuencia de ángulo más pequeña es  $p = 2$ . Cuando  $\omega < 2$ ,  $\mathbf{H}(\omega)$  se puede aproximar como

$$\mathbf{H}(\omega) \approx \frac{5}{j\omega}$$

entonces la ecuación de la asíntota de frecuencia baja es

$$20 \log_{10} |\mathbf{H}| = 20 \log_{10} 5 - 20 \log_{10} \omega$$

La pendiente de la asíntota de frecuencia baja es  $-20\text{dB/década}$ . Encontramos un punto en la asíntota de frecuencia baja. Cuando  $\omega = 1$ ,

$$20 \log_{10} |\mathbf{H}| = 20 \log_{10} 5 - 20 \log_{10} 1 = 14 \text{ dB}$$

La pendiente de la asíntota de frecuencia baja es una línea recta con una pendiente de  $-20 \text{ dB/década}$  que pasa a través del punto  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ ,  $|\mathbf{H}| = 14 \text{ dB}$ .

La pendiente del diagrama de Bode asintótico cambiará conforme  $\omega$  aumente pasada cada frecuencia de ángulo. La pendiente disminuye  $20 \text{ dB/década}$  en  $\omega = p = 2 \text{ rad/s}$ , luego aumenta  $20 \text{ dB/década}$  en  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ , y finalmente disminuye  $40 \text{ dB/década}$  en  $\omega = 50 \text{ rad/s}$ . El diagrama de Bode de magnitud asintótica se muestra en la figura 13.3-12.

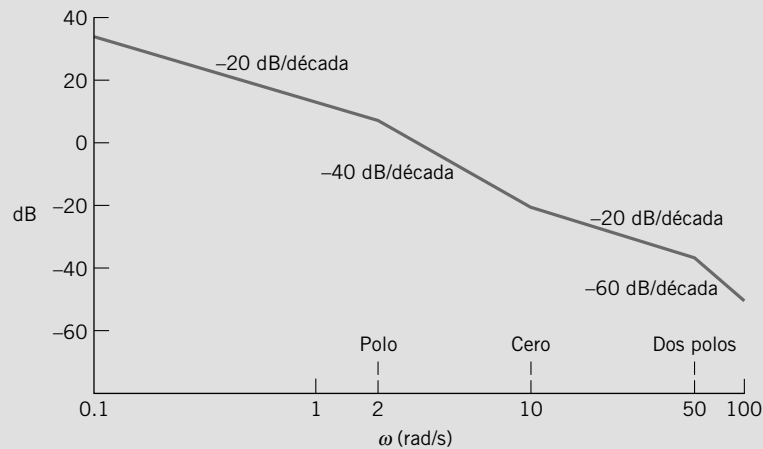


FIGURA 13.3-12 Trazo asintótico para el ejemplo 13.3-5.

### EJEMPLO 13.3-6 Diseño de un circuito para tener un diagrama de Bode especificado

Vamos a diseñar el circuito que se muestra en la figura 13.3-3 para satisfacer las especificaciones siguientes.

1. La ganancia de frecuencia baja es 0.1.
2. La ganancia de frecuencia alta es 1.
3. Las frecuencias de ángulo se basan en el rango de 100 a 2 000 hertz.

#### Solución

Nos encontramos ante dos problemas. El primero, ¿se pueden satisfacer estas especificaciones utilizando este circuito? El segundo, si es posible, ¿qué valores de  $R$ ,  $R_s$  y  $L$  se requieren?

Nuestro análisis anterior de este circuito mostraba que la ganancia de frecuencia baja es menor que 1 y que la ganancia de frecuencia alta es igual a 1. Este circuito se puede utilizar sólo para satisfacer especificaciones que sean consistentes con estos datos. Por fortuna, las especificaciones dadas lo son. La primera especificación

requiere

$$0.1 = \text{ganancia de frecuencia baja} = k = \frac{R}{R + R_s}$$

Como este circuito tiene una ganancia de frecuencia alta igual a 1, se satisface la especificación.

Ahora atendamos las especificaciones en las frecuencias de ángulo. El rango de la frecuencia especificada se da utilizando unidades de hertz, en tanto que las frecuencias de ángulo tienen unidades de radianes/segundo. Dado que  $\omega_1 > \omega_2$ , la tercera especificación requiere que

$$(2\pi)100 < \frac{R}{L} = \omega_1$$

y

$$(2\pi)2000 > \frac{R + R_s}{L} = \omega_2$$

Nuestra labor es encontrar valores de  $R$ ,  $R_s$  y  $L$  que satisfagan estos tres requerimientos. No tenemos garantía de que existan valores adecuados. Si existe un conjunto de valores adecuados es posible que no sean únicos. Tratemos

$$R = 100 \Omega$$

La especificación sobre la ganancia de la frecuencia baja requiere que

$$R_s = 9R = 900 \Omega$$

La especificación sobre el cero se satisfará si

$$L = \frac{R}{(2\pi)100} = 0.159 \text{ H}$$

Sólo resta comprobar que estos valores de  $R$ ,  $R_s$  y  $L$  satisfagan la especificación en la frecuencia de polo. Porque

$$\frac{R + R_s}{L} = 6289 < 12\,566 = (2\pi)2\,000$$

la especificación se satisface.

En resumen, cuando

$$R = 100 \Omega, \quad R_s = 900 \Omega \quad \text{y} \quad L = 0.159 \text{ H}$$

el circuito que se muestra en la figura 13.3-3 satisface las especificaciones dadas anteriormente.

Esta solución no es única. En realidad, cuando  $R = 100$  y  $R_s = 900$ , cualquier inductancia en el rango de  $0.796 < L < 0.159 \text{ H}$  se puede utilizar para satisfacer estas especificaciones.

### EJEMPLO 13.3-7 Diseño de un circuito para tener un diagrama de Bode especificado

Diseñe un circuito que contenga el diagrama de Bode de magnitud asintótica que se muestra en la figura 13.3-13a.

#### Solución

La pendiente de este diagrama de Bode es 20 dB/década para frecuencias bajas, es decir,  $\omega < 500 \text{ rad/s}$ , de modo que  $\mathbf{H}(\omega)$  debe tener un factor  $j\omega$  en su numerador. La pendiente disminuye 20 dB/década (desde 20 dB/década hasta cero) en cuanto  $\omega$  se incrementa pasado  $\omega = 500 \text{ rad/s}$ , por lo que  $\mathbf{H}(\omega)$  debe tener un polo en  $\omega = 500 \text{ rad/s}$ . Con base en estas observaciones

$$\mathbf{H}(\omega) = \pm k \frac{j\omega}{1 + j\frac{\omega}{500}}$$

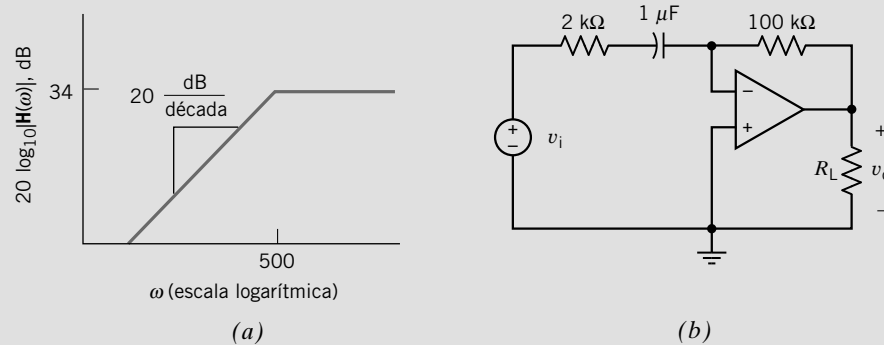


FIGURA 13.3-13 (a) Un diagrama de Bode de magnitud asintótica y (b) circuito que implementa ese diagrama de Bode.

La ganancia del diagrama de Bode asintótico es  $34 \text{ dB} = 50$  cuando  $\omega > 500 \text{ rad/s}$ , de modo que

$$50 = \pm k \frac{j\omega}{\omega} = \pm k \times 500$$

Por consiguiente,  $k = \pm 0.1$  y

$$\mathbf{H}(\omega) = \pm 0.1 \cdot \frac{j\omega}{1 + j\frac{\omega}{500}}$$

Necesitamos un circuito que tenga una función de red de esta forma. La tabla 13.3-2 contiene un conjunto de circuitos y funciones de red correspondientes. La fila 4 de la tabla 13.3-2 contiene el circuito que podemos utilizar. Las ecuaciones de diseño proporcionadas en la fila 4 de la tabla indican que

$$\begin{aligned} 0.1 &= R_2 C \\ 500 &= \frac{1}{CR_1} \end{aligned}$$

Dado que hay más incógnitas que ecuaciones, la solución de estas ecuaciones de diseño no es única. Tome  $C = 1 \mu\text{F}$ . Entonces

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{0.1}{10^{-6}} = 100 \text{ k}\Omega \\ R_1 &= \frac{1}{500 \cdot 10^{-6}} = 2 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

En la figura 13.3-13b se muestra el circuito terminado.

**EJERCICIO 13.3-1** (a) Convierta la ganancia  $|\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s| = 2$  decibeles. (b) Suponga  $|\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s| = -6.02 \text{ dB}$ . ¿Cuál es el valor de esta ganancia “no en dB”?

**Respuestas:** (a) 6.02 dB; (b) 0.5

**EJERCICIO 13.3-2** En un determinado rango de frecuencia, la magnitud de la función de red se puede aproximar como  $H = 1/\omega^2$ . ¿Cuál es la pendiente del diagrama de Bode en este rango, expresado en decibeles por década?

**Respuesta:**  $-40 \text{ dB/década}$



Tabla 13.3-2 Conjunto de circuitos y funciones de red correspondientes

CIRCUITO	FUNCIÓN DE RED
	$\mathbf{H}(\omega) = -k \frac{1 + j \frac{\omega}{z}}{1 + j \frac{\omega}{p}}$ <p>donde</p> $k = \frac{R_2}{R_1}$ $z = \frac{1}{C_1 R_1}$ $p = \frac{1}{C_2 R_2}$
	$\mathbf{H}(\omega) = -\frac{k}{1 + j \frac{\omega}{p}}$ <p>donde</p> $k = \frac{R_2}{R_1}$ $p = \frac{1}{C R_2}$
	$\mathbf{H}(\omega) = -k \left( 1 + j \frac{\omega}{z} \right)$ <p>donde</p> $k = \frac{R_2}{R_1}$ $z = \frac{1}{C R_1}$
	$\mathbf{H}(\omega) = -k \frac{j\omega}{1 + j \frac{\omega}{p}}$ <p>donde</p> $k = R_2 C$ $p = \frac{1}{C R_1}$
	$\mathbf{H}(\omega) = -\frac{k(j\omega)}{\left( 1 + j \frac{\omega}{p_1} \right) \left( 1 + j \frac{\omega}{p_2} \right)}$ <p>donde</p> $k = C_1 R_2$ $p_1 = \frac{1}{C_1 R_1}$ $p_2 = \frac{1}{C_2 R_2}$

**EJERCICIO 13.3-3** Considere la función de red

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{j\omega A}{B + j\omega C}$$

Encuentre (a) la frecuencia de ángulo; (b) la pendiente del diagrama de Bode de magnitud asintótica para  $\omega$  por encima de la frecuencia de ángulo en decibeles por década; (c) la pendiente del diagrama de Bode de magnitud por debajo de la frecuencia de ángulo, y (d) la ganancia en decibeles para  $\omega$  por encima de la frecuencia de ángulo.

**Respuestas:** (a)  $\omega_0 = B/C$ ; (b) cero; (c) 20 dB/década y (d)  $20 \log_{10} \frac{A}{C}$

### 13.4 CIRCUITOS RESONANTES

En esta sección estudiaremos el comportamiento de algunos circuitos denominados *circuitos resonantes*. Empezaremos con un ejemplo.

Considere la situación que se muestra en la figura 13.4-1a. La entrada a este circuito es la corriente de la fuente de corriente, y la respuesta es el voltaje a través de la fuente de corriente. Dado que la entrada al circuito es senoidal, podemos utilizar fasores para analizar este circuito. Sabemos que la función de red del circuito es la relación del fasor de respuesta con el fasor de entrada. En este caso, esa función de red será una impedancia

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{A \angle \theta}{B \angle 0^\circ}$$

La figura 13.4-1b muestra algunos datos que se obtuvieron mediante la aplicación de una entrada con una amplitud de 2 mA y una frecuencia que se modificó. La fila 1 de esta tabla describe el desempeño de este circuito cuando  $\omega = 200$  rad/s. A esta frecuencia, la impedancia del circuito es

$$\mathbf{Z} = \frac{6.6 \angle 48^\circ}{0.002} = 3300 \angle 48^\circ \Omega$$

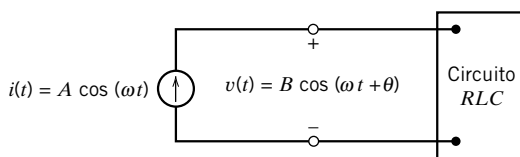
Convirtamos esta impedancia de la forma polar a la forma rectangular:

$$\mathbf{Z} = 2208 + j2452 \Omega$$

Esto semeja la impedancia equivalente de un resistor y un inductor en serie. La resistencia sería de  $2208 \Omega$ . Dado que la frecuencia es  $\omega = 200$  rad/s, la inductancia sería de 12.26 H. Recuerde que en la forma rectangular las impedancias se representan como

$$\mathbf{Z} = R + jX$$

donde  $R$  se denomina la resistencia y  $X$  la reactancia. Cuando  $\omega = 200$  rad/s, decimos que la reactancia de este circuito es inductiva porque la reactancia es positiva y por lo tanto podría haber sido causada por un inductor único.



(a)

$A, A$	$\omega, \text{rad/s}$	$B, V$	$\theta$
0.002	200	6.6	$48^\circ$
0.002	220	8.4	$33^\circ$
0.002	250	10.0	$0^\circ$
0.002	270	9.3	$-21^\circ$
0.002	300	7.4	$-43^\circ$

(b)

**FIGURA 13.4-1** (a) Un circuito RLC con una entrada senoidal, y (b) algunos datos de respuesta de frecuencia.

La última fila de la tabla describe el desempeño de este circuito cuando  $\omega = 300$  rad/s. Ahora

$$\mathbf{Z} = \frac{7.4 \angle -43^\circ}{0.002} = 3700 \angle -43^\circ = 2706 - j 2\,523 \, \Omega$$

Como la reactancia es negativa, no podría haber sido causada por un inductor único. Esta impedancia se parece a la impedancia equivalente de un resistor único conectado en serie con un condensador único:

$$R - j \frac{1}{\omega C} = 2\,706 - j 2\,523 \, \Omega$$

Igualar las partes reales muestra que la resistencia es  $2\,706 \, \Omega$ . Igualar partes imaginarias muestra que la capacitancia es  $1.32 \, \mu\text{F}$ .

La reactancia de este circuito es inductiva en algunas frecuencias y capacitiva en otras frecuencias. Podemos decir cuándo la reactancia será inductiva y cuándo será capacitiva observando la última columna de la tabla. Cuando  $\theta$  es positivo, la reactancia es inductiva y cuando  $\theta$  es negativa, la reactancia será capacitiva. La frecuencia  $\omega = 250$  rad/s es especial. Cuando la frecuencia de entrada es menor que  $250$  rad/s, la reactancia es inductiva, pero cuando la frecuencia de entrada es más grande que  $250$  rad/s, la reactancia es capacitiva. Esta frecuencia especial se denomina **frecuencia resonante** y se indica como  $\omega_0$ . Desde la tercera fila de la tabla podemos ver que cuando  $\omega = \omega_0 = 250$  rad/s

$$\mathbf{Z} = \frac{10 \angle 0^\circ}{0.002} = 5\,000 \angle 0^\circ = 5\,000 - j 0 \, \Omega$$

La reactancia es cero. En la frecuencia de resonancia, la impedancia es puramente resistiva. En realidad, este hecho se puede utilizar para identificar la frecuencia resonante.

A partir de la figura 13.4-1 se puede hacer otra observación. La magnitud de la impedancia es máxima cuando  $\omega = \omega_0 = 250$  rad/s. cuando la frecuencia se reduce desde  $\omega_0$  o se incrementa a partir de  $\omega_0$ , la magnitud de la impedancia disminuye.

A continuación, considere el circuito que se muestra en la figura 13.4-2. A este circuito se le llama **circuito de resonancia en paralelo**. La impedancia equivalente del resistor, el inductor y el condensador en paralelo es

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \angle -\tan^{-1} R \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (13.4-1)$$

Este circuito presenta un cierto comportamiento conocido. La reactancia será cero cuando

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

La frecuencia que satisface esta ecuación es la frecuencia resonante,  $\omega_0$ . Despejando esta ecuación tenemos

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

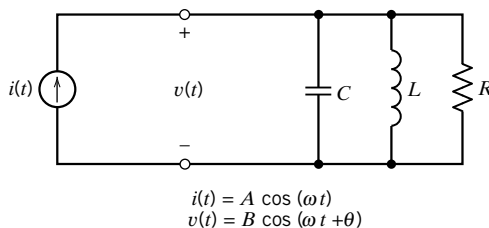


FIGURA 13.4-2 El circuito resonante en paralelo.

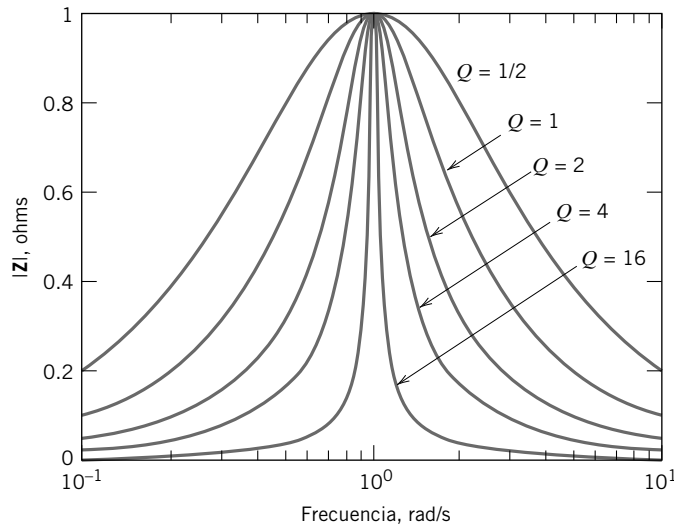


FIGURA 13.4-3 Efecto de  $Q$  sobre la respuesta de frecuencia de un circuito resonante.

En  $\omega = \omega_0$ ,  $\mathbf{Z} = R$ . La magnitud de  $\mathbf{Z}$  disminuye conforme  $\omega$  se incrementa o disminuye a partir de  $\omega_0$ . El ángulo de  $\mathbf{Z}$  es positivo cuando  $\omega < \omega_0$ , y negativa cuando  $\omega > \omega_0$ , de modo que la reactancia es inductiva cuando  $\omega > \omega_0$ .

La impedancia se puede poner en la forma

$$\mathbf{Z} = \frac{k}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad (13.4-2)$$

donde

$$k = R, \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{y} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (13.4-3)$$

Los parámetros  $k$ ,  $Q$  y  $\omega_0$  caracterizan al circuito resonante. La frecuencia resonante,  $\omega_0$ , es la frecuencia a la cual la reactancia es cero, y en la que la magnitud de la impedancia está al máximo.  $Q$  se denomina factor de calidad del circuito resonante. La magnitud de la impedancia disminuirá en cuanto  $\omega$  se reduce desde  $\omega_0$  o se incrementa desde  $\omega_0$ . El **factor de calidad** controla cuán rápidamente disminuye  $|\mathbf{Z}|$ . La figura 13.4-3 ilustra la impedancia de  $Q$ . Tanto  $k$  como  $\omega_0$  se establecieron a 1 en la figura 13.4-3 para enfatizar la relación entre  $Q$  y  $|\mathbf{Z}|$ .

La figura 13.4-3 muestra que cuanto más grande es el valor de  $Q$ , más aguda es la forma del trazo de la respuesta de frecuencia. Podemos cuantificar esta observación si introducimos el ancho de banda del circuito resonante. Para este final, sean  $\omega_1$  y  $\omega_2$  las que indiquen las frecuencias donde

$$|\mathbf{Z}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |\mathbf{Z}(\omega_0)| = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

Habrán dos frecuencias como éstas, una más pequeña que  $\omega_0$  y la otra más grande que  $\omega_0$ . Sean  $\omega_1 < \omega_2$  y  $\omega_1 > \omega_2$ . El ancho de banda,  $BW$ , del circuito resonante se define como

$$BW = \omega_2 - \omega_1$$

Las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son soluciones de la ecuación

$$\frac{k}{\sqrt{2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}}$$

o bien 
$$\sqrt{2} = \sqrt{1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos lados, tenemos

$$1 = Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2$$

Ahora, tomando la raíz cuadrada de ambos lados,

$$\pm 1 = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

(Se requiere el signo  $\pm$  porque se satisface  $a^2 = b^2$  si  $a = b$ , o  $-a = b$ .) Esta ecuación se puede reacomodar para obtener la siguiente ecuación cuadrática:

$$\omega^2 \mp \frac{\omega_0 \omega}{Q} - \omega_0^2 = 0$$

Esta ecuación tiene cuatro soluciones, pero sólo dos son positivas. Las soluciones positivas son

$$\omega_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2 + \omega_0^2} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2 + \omega_0^2}$$

Al fin, estamos preparados para calcular el ancho de banda

$$BW = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \quad (13.4-4)$$

Esta ecuación indica que el ancho de banda es más pequeño, es decir, el trazo de respuesta de frecuencia es más agudo cuando el valor de  $Q$  es más grande.

### EJEMPLO 13.4-1 Circuito resonante en serie

La figura 13.4-4 muestra un circuito resonante en serie. Determine la relación entre los parámetros  $k$ ,  $Q$  y  $\omega_0$  y los valores de los elementos  $R$ ,  $L$  y  $C$  para el circuito resonante en serie.

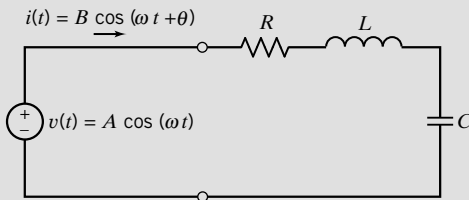


FIGURA 13.4-4 El circuito resonante en serie.

### Solución

La entrada a este circuito es la fuente de voltaje, y la respuesta es la corriente en el enlace. La función de red es la relación del fasor de respuesta con el fasor de entrada. En este caso, la función de red es la admitancia equivalente del resistor, del condensador y el inductor en serie:

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \frac{1}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \quad (13.4-5)$$

Para identificar  $k$ ,  $Q$  y  $\omega_0$ , hay que reordenar esta función de red de modo que tenga la forma

$$\mathbf{Y} = \frac{k}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad (13.4-6)$$

Al reordenar la ecuación 13.4-5,

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{1}{R + j\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\omega}\right)} = \frac{\frac{1}{R}}{1 + j\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\omega}\right)}$$

Comparando esta ecuación con la 13.4-6 nos da

$$k = \frac{1}{R}, \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{y} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

### EJEMPLO 13.4-2 Respuesta de frecuencia de un circuito resonante

La figura 13.4-5 muestra el trazo de respuesta de frecuencia de magnitud de un circuito resonante. ¿Cuáles son los valores de los parámetros  $k$ ,  $Q$  y  $\omega_0$ ?

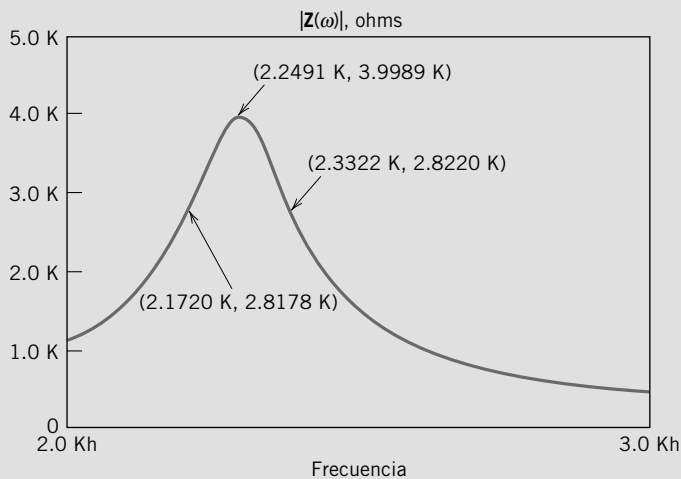


FIGURA 13.4-5 La respuesta de frecuencia de magnitud de un circuito resonante.

### Solución

El primer paso es hallar el pico de la respuesta de frecuencia y determinar los valores de la frecuencia y la impedancia que corresponda a ese punto. Esta frecuencia es la frecuencia resonante,  $\omega_0$ , y la impedancia en esta frecuencia es  $k$ . En la figura 13.4-5 está etiquetado este punto en la respuesta de frecuencia. La frecuencia es

$$\omega_0 = (2\pi)2249 = 14\,130 \text{ rad/s}$$

La impedancia es

$$k = 4\,000\ \Omega$$

A continuación, las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se identifican encontrando los puntos en la respuesta de frecuencia donde el valor de la impedancia es  $k/\sqrt{2} = 2\,828\ \Omega$ . Estos puntos se han etiquetado en la figura 13.4-5. (El trazo que se muestra en la figura 13.4-5 se realizó utilizando PSpice y Probe. La función de cursor en Probe se utilizó para etiquetar puntos en la respuesta de frecuencia. Cada etiqueta indica primero la frecuencia y luego la impedancia. No fue posible mover el cursor a los puntos en que la impedancia era exactamente de  $2\,828\ \Omega$ , de modo que se etiquetaron los puntos en que la impedancia estaba lo más cerca posible a los  $2\,828\ \Omega$ .)

$$\omega_1 = (2\pi)2\,172 = 13\,647\ \text{rad/s} \quad \text{y} \quad \omega_2 = (2\pi)2\,332 = 14\,653\ \text{rad/s}$$

El factor de calidad,  $Q$ , se calcula como

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{14\,130}{14\,653 - 13\,647} = 14$$

Ahora que ya se conocen los valores de los parámetros  $k$ ,  $Q$  y  $\omega_0$ , la función red se puede expresar como

$$\mathbf{Z}(\omega) = \frac{4\,000}{1 + j14\left(\frac{\omega}{14\,130} - \frac{14\,130}{\omega}\right)}$$

### EJEMPLO 13.4-3 Circuito resonante en paralelo

Diseñe un circuito resonante en paralelo que tenga  $k = 4\,000\ \Omega$ ,  $Q = 14$  y  $\omega_0 = 14\,130\ \text{rad/s}$ .

#### Solución

La tabla 13.4-1 resume la relación entre los parámetros  $k$ ,  $Q$  y  $\omega_0$  y los valores de los elementos  $R$ ,  $L$  y  $C$  para el circuito resonante en paralelo. Estas relaciones se pueden usar para calcular  $R$ ,  $L$  y  $C$  desde  $\omega_0$ . Primero

$$R = k = 4\,000\ \Omega$$

Luego,

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 = 14\,130$$

y

$$R\sqrt{\frac{C}{L}} = Q = 14$$

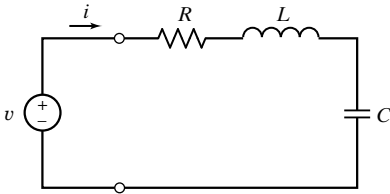
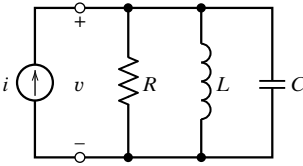
Al reacomodar estas dos últimas ecuaciones nos da

$$\frac{14\sqrt{L}}{4\,000} = \sqrt{C} = \frac{1}{14\,130\sqrt{L}}$$

Por lo tanto,

$$L = \frac{4\,000}{14\,130(14)} = 20\ \text{mH} \quad \text{y} \quad C = \frac{1}{14\,130^2(0.002)} = 0.25\ \mu\text{F}$$

Tabla 13.4.1 Circuitos resonantes en serie y en paralelo

	CIRCUITO RESONANTE EN SERIE	CIRCUITO RESONANTE EN PARALELO
Circuito		
Función de red	$Y = \frac{k}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$	$Z = \frac{k}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$
Frecuencia resonante	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Magnitud máxima	$k = \frac{1}{R}$	$k = R$
Factor de calidad	$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$	$Q = R \sqrt{\frac{C}{L}}$
Ancho de banda	$BW = \frac{R}{L}$	$BW = \frac{1}{RC}$

**EJEMPLO 13.4-4** Diseño de circuitos resonantes

La figura 13.4-5 muestra el trazo de respuesta de frecuencia de magnitud de un circuito resonante. Diseñe un circuito que tenga esta respuesta de frecuencia.

**Solución**

Ya hemos resuelto antes este problema. Hay que hacer tres cosas para diseñar el circuito requerido. Primera, determinar los parámetros  $k$ ,  $Q$  y  $\omega_0$  a partir de la respuesta de frecuencia. Eso lo hicimos en el ejemplo 13.4-2. Segunda, observamos que la respuesta de frecuencia resonante dada es una impedancia, más que una admitancia, y elegimos el circuito resonante en paralelo de la tabla 13.4-1. Tercera, los valores de los elementos  $R$ ,  $L$  y  $C$  se deben calcular desde los valores de  $k$ ,  $Q$  y  $\omega_0$ ; esto lo hicimos en el ejemplo 13.4-3.

**EJERCICIO 13.4-1** Para el circuito  $RLC$  resonante en paralelo cuando  $R = 8 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 40 \text{ mH}$ , y  $C = 0.25 \text{ }\mu\text{F}$ , encuentre (a)  $Q$  y (b) ancho de banda.

**Respuestas:** (a)  $Q = 20$ ; (b)  $AB = 500 \text{ rad/s}$

**EJERCICIO 13.4-2** Se requiere un circuito  $RLC$  resonante en paralelo de frecuencia alta, para operar a  $\omega_0 = 10 \text{ Mrad/s}$  con un ancho de banda de  $200 \text{ rad/s}$ . Determine el  $Q$  y  $L$  requeridos cuando  $C = 10 \text{ pF}$ .

**Respuestas:**  $Q = 50$  y  $L = 1 \text{ mH}$



**EJERCICIO 13.4-3** Un circuito resonante en serie tiene  $L = 1$  mH, y  $C = 10$   $\mu$ F. Encuentre los  $Q$  y  $R$  requeridos cuando se desea que el ancho de banda sea de 15.9 Hz.

**Respuestas:**  $Q = 100$  y  $R = 0.1$   $\Omega$

**EJERCICIO 13.4.4** Un circuito resonante en serie tiene un inductor  $L = 10$  mH. (a) Seleccione  $C$  y  $R$  de modo que  $\omega_0 = 10^6$  rad/s y que el ancho de banda sea  $AB = 10^3$  rad/s. (b) Encuentre la admitancia  $\mathbf{Y}$  de este circuito para una señal en  $\omega = 1.05 \times 10^6$  rad/s.

**Respuestas:** (a)  $C = 100$  pF,  $R = 10$   $\Omega$

$$(b) \mathbf{Y} = \frac{10}{1 + j97.6}$$

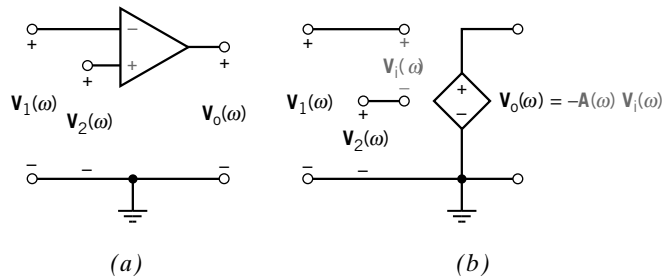
## 13.5 RESPUESTA DE FRECUENCIA DE CIRCUITOS DE AMPLIFICADORES OPERACIONALES

La ganancia de un amplificador operacional no es infinita; antes bien, es finita y disminuye con la frecuencia. La ganancia  $\mathbf{A}(\omega)$  del amplificador operacional es una función de  $\omega$  dada por

$$\mathbf{A}(\omega) = \frac{A_0}{1 + j\omega/\omega_1}$$

donde  $A_0$  es la ganancia de cd, y  $\omega_1$  es la frecuencia de ángulo. Normalmente, la ganancia de cd es más grande que  $10^4$  y  $\omega_1$  es menor que 100 rad/s. En la figura 13.5-1 se muestra un modelo de circuito de un amplificador operacional no ideal dependiente de la frecuencia. Este modelo es más preciso, incluso algo más complicado, que el modelo de amplificador operacional ideal.

Consideremos un ejemplo de circuito de amplificador operacional que incorpore un amplificador operacional dependiente de frecuencia.



**FIGURA 13.5-1** (a) Amplificador operacional, y (b) un modelo de un amplificador operacional dependiente de frecuencia.

### EJEMPLO 13.5-1 Respuesta de frecuencia de un amplificador no inversor

Considere el amplificador no inversor de la figura 13.5-2a. Reemplazar el amplificador operacional con un amplificador operacional dependiente de frecuencia resulta en el circuito que se muestra en la figura 13.5-2b. Suponga que  $R_2 = 90$  k $\Omega$  y  $R_1 = 10$  k $\Omega$ , y que los parámetros del amplificador operacional son  $A_0 = 10^5$  y  $\omega_1 = 10$  rad/s. Determine el diagrama de Bode de magnitud para la ganancia del amplificador operacional,  $\mathbf{A}(\omega)$ , y para la función de red del amplificador no inversor,  $\mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$ .

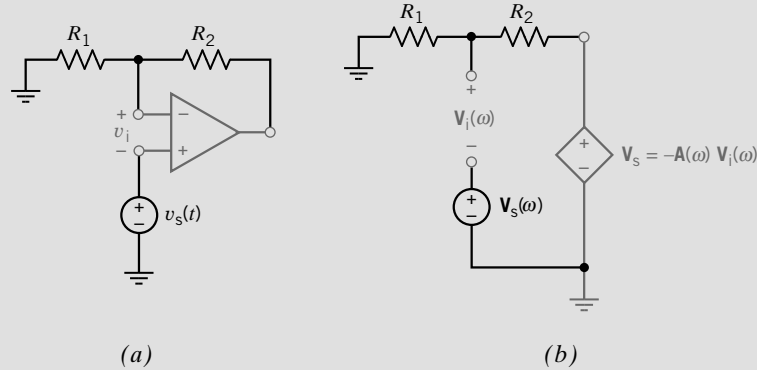


FIGURA 13.5-2 (a) Un amplificador no inversor, y (b) un circuito equivalente que incorpora el modelo dependiente de frecuencia del amplificador operacional.

**Solución**

El diagrama de Bode de  $20 \log |A(\omega)|$  se muestra en la figura 13.5-3. Observe que la magnitud es igual a 1 (0 dB) en  $\omega = 10^6$  rad/s.

Escribir una ecuación nodal en la figura 13.5-2b nos da

$$\frac{V_i + V_s}{R_1} + \frac{V_i + V_s + A(\omega)V_i}{R_2} = 0$$

El modelo dependiente de frecuencia del amplificador operacional lo describe

$$V_s = -A(\omega)V_i$$

Combinar estas ecuaciones resulta

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{A(\omega)}{1 + \frac{A(\omega)}{k}}$$

donde  $k = (R_1 + R_2)/R_1$  es la ganancia del amplificador no inversor cuando el amplificador operacional se modela como un amplificador operacional ideal. Si sustituimos  $A(\omega)$ , obtenemos

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{A_o/(1 + j\omega/\omega_1)}{1 + (A_o/k)/(1 + j\omega/\omega_1)} = \frac{A_o}{1 + j\omega/\omega_1 + A_o/k} = \frac{A_c}{1 + j\omega/(A_2\omega_1)}$$

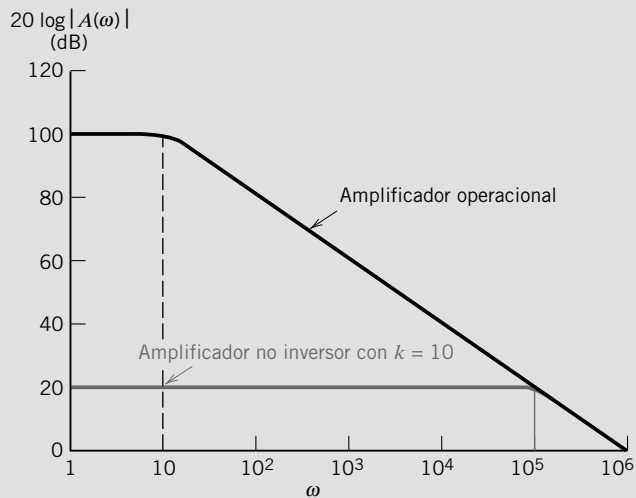


FIGURA 13.5-3 Diagrama de magnitud de Bode del amplificador operacional y del amplificador operacional no inversor (en gris).

donde  $A_c$  es la ganancia de cd del amplificador no inversor definido como  $A_c = \frac{A_o}{1 + \frac{A_o}{k}}$  y  $A_2 = 1 + \frac{A_o}{k}$ . Usualmente  $1 \ll \frac{A_o}{k}$ , de modo que  $A_c \cong k$  y  $A_2 \cong \frac{A_o}{k}$ . Entonces

$$\frac{V_o}{V_s} \cong \frac{k}{(1 + j\omega/\omega_0)}$$

donde  $\omega_0 = A_o\omega_1/k$  es la frecuencia de ángulo del amplificador no inversor. Observe que el producto de la ganancia de cd y la frecuencia de ángulo es

$$\omega_0 k = \frac{A_o\omega_1}{k} k = A_o\omega_1$$

Al producto se le denomina producto de ganancia de ancho de banda. Observe que depende sólo del amplificador operacional, no de  $R_1$  y  $R_2$ .

Para este ejemplo,  $k = 10$  y  $A_o = 100 \text{ dB} = 10^5$ , y, por lo tanto, tenemos  $A_c = 10$ ,  $A_2 = 10^4$  y  $\omega_1 A_2 = 10^5$ . Por consiguiente,

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{10}{1 + j10^{-5}\omega}$$

Este circuito tiene un diagrama de Bode de magnitud como se muestra en gris en la figura 13.5-3. Observe que el amplificador operacional no inversor tiene una ganancia de frecuencia de 20 dB y una frecuencia de corte de  $10^5 \text{ rad/s}$ . El producto de ganancia de ancho de banda se conserva en  $10^6 \text{ rad/s}$ .

### 13.6 TRAZO DE DIAGRAMAS DE BODE UTILIZANDO MATLAB

Se puede utilizar MATLAB para desplegar el diagrama de Bode o el trazo de respuesta de frecuencia que corresponda a una función de red. A guisa de ejemplo, considere la función de red

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{K \left(1 + j\frac{\omega}{z}\right)}{\left(1 + j\frac{\omega}{p_1}\right) \left(1 + j\frac{\omega}{p_2}\right)}$$

La figura 13.6-1 muestra un archivo de entrada de MATLAB que se puede utilizar para obtener el diagrama de Bode que corresponda a la función de red. Este archivo de MATLAB consta de cuatro partes.

En la primera parte, el comando `log space` de MATLAB se utiliza para especificar el rango de frecuencia para el diagrama de Bode. El comando `log space` también proporciona una lista de frecuencias que se espacian en forma pareja (en una escala logarítmica) sobre este rango de frecuencia.

La red dada tiene cuatro parámetros, la ganancia,  $K$ , el cero,  $z$ , y los dos polos,  $p_1$  y  $p_2$ . La segunda parte del archivo de entrada de MATLAB especifica valores para estos cuatro parámetros.

La tercera parte del archivo de entrada de MATLAB es un “bucle” que evalúa  $\mathbf{H}(\omega)$ ,  $|\mathbf{H}(\omega)|$  y  $\angle \mathbf{H}(\omega)$  en cada frecuencia en la lista de frecuencias producida por el comando `log space`.

La cuarta parte del archivo de entrada de MATLAB conforma la diagramación. El comando

```
semilogx (w/(2*pi), 20*log10 (mag))
```

efectúa varias cosas. El comando `semilogx` indica que se debe hacer el diagrama utilizando una escala logarítmica para la primera variable y una escala lineal para la segunda variable. La primera variable, frecuencia, se divide entre  $2\pi$  para convertirse en Hz. La segunda variable,  $|\mathbf{H}(\omega)|$ , se convierte a dB.

Los diagramas de Bode producidos utilizando este archivo de entrada de MATLAB se muestran en la figura 13.6-2.

La segunda y tercera partes del archivo de entrada de MATLAB se pueden modificar para trazar los diagramas de Bode para una función de red diferente.

```

% nf.m - plot the Bode plot of a network function

%-----
%      Create a list of logarithmically spaced frequencies.
%-----
wmin=10;                % starting frequency, rad/s
wmax=100000;           % ending frequency, rad/s
w = logspace(log10(wmin),log10(wmax));

%-----
%      Enter values of the parameters that describe the
%      network function.
%-----
K= 10;                 % constant
z= 1000;               % zero
p1=100;  p2=10000;    % poles

%-----
% Calculate the value of the network function at each frequency.
% Calculate the magnitude and angle of the network function.
%-----
for k=1:length(w)
    H(k) = K*(1+j*w(k)/z) / ( (1+j*w(k)/p1) * (1+j*w(k)/p2) );
    mag(k) = abs(H(k));
    phase(k) = angle(H(k));
end

%-----
%      Plot the Bode plot.
%-----
subplot(2,1,1), semilogx(w/(2*pi), 20*log10(mag))
xlabel('Frequency, Hz'), ylabel('Gain, dB')
title('Bode plot')
subplot(2,1,2), semilogx(w/(2*pi), phase)
xlabel('Frequency, Hz'), ylabel('Phase, deg')

```

FIGURA 13.6-1 Archivo de entrada de MATLAB para trazar los diagramas de Bode que corresponden a una función de red.

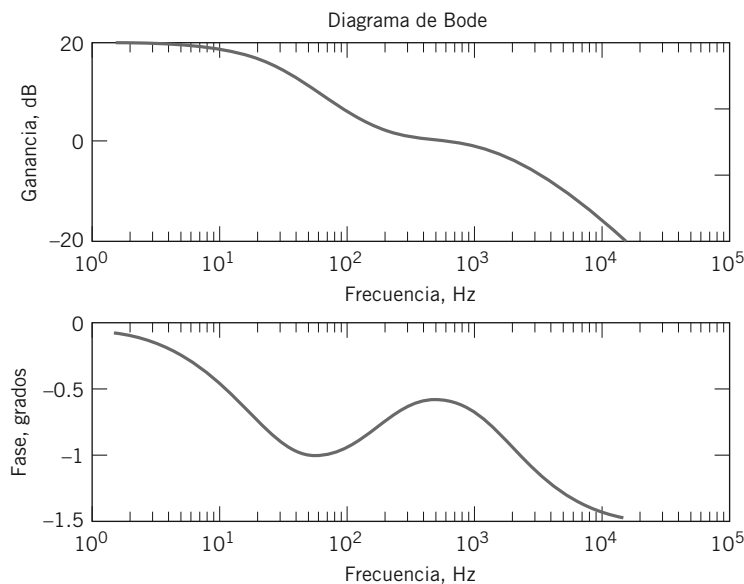


FIGURA 13.6-2 Los diagramas de Bode, producidos utilizando el archivo de entrada de MATLAB en la figura 13.6-1.

## 13.7 USO DE PSPICE PARA TRAZAR UN DIAGRAMA DE RESPUESTA DE FRECUENCIA

Para utilizar PSpice en el trazo de la respuesta de frecuencia de un circuito, hacemos lo siguiente:

1. Dibujamos el circuito en el taller de OrCAD Capture.
2. Especificamos una simulación AC Sweep\Noise.
3. Ejecutamos la simulación.
4. Trazamos los resultados de la simulación.

El eje de frecuencia de un trazo de respuesta de frecuencia puede ser un eje lineal o un eje logarítmico. Cuando se utiliza un eje logarítmico para la variable de frecuencia, los trazos se refieren como diagramas de Bode o trazos de Bode. Cuando trabajamos con escalas logarítmicas nos encontramos términos como *octava* y *década*. La frecuencia se duplica en una octava y se incrementa por un factor en una década. (El logaritmo de la frecuencia se incrementa en 1 al incrementarse la frecuencia una década.).

Sea  $A \angle \theta$  el fasor del voltaje de nodos en el nodo 2 de un circuito. PSpice utiliza la notación

$$V(2) \angle Vp(2) = A \angle \theta$$

Es decir,  $V(2)$  indica la magnitud del fasor y  $Vp(2)$  indica el ángulo del fasor. PSpice proporciona el ángulo en grados. Del mismo modo,  $V(R2)$  representa la magnitud del voltaje a través del resistor  $R2$ , en tanto que  $Vp(R2)$  indica el ángulo. PSpice indica que las unidades son decibeles al insertar “dB” dentro del nombre de una señal justo antes del paréntesis. Por ejemplo,  $VdB(2)$  indica la magnitud del voltaje del fasor del voltaje de nodos en dB.

### EJEMPLO 13.7-1 Uso de PSpice para trazar una respuesta de frecuencia

La entrada al circuito que se muestra en la figura 13.7-1 es el voltaje de la fuente de voltaje  $v_s(t)$ . La respuesta es el voltaje,  $v_o(t)$  a través del resistor de 20-k $\Omega$ . Utilice PSpice para trazar le respuesta de frecuencia de este circuito.

#### Solución

Empezamos por dibujar el circuito en el taller de OrCAD como se muestra en la figura 13.7-2 (vea el apéndice A). Se le ha dado nombre a dos nodos de este circuito utilizando una parte de PSpice denominada conector de página libre. El conector de página libre particular utilizado en la figura 13.7-1 se denomina OFFPAGELEFT-R, y se

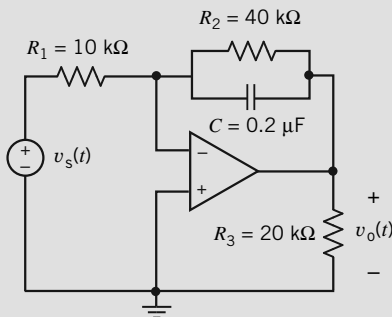


FIGURA 13.7.1 El circuito considerado en el ejemplo 13.7-1.

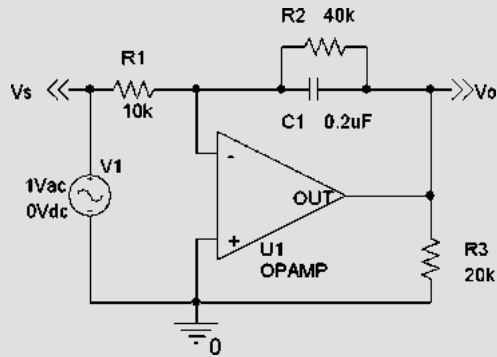


FIGURA 13.7-2 El circuito de la figura 13.7-1 como se dibujó en el taller de OrCAD.

encuentra en la biblioteca denominada CPASYM. Para etiquetar un nodo, seleccione Place/Off-Page Connector... en el menú de OrCAD Capture para que se despliegue el cuadro de diálogo Place Off-Connector. Seleccione la biblioteca CAPSYM desde esta lista de bibliotecas y luego elija OFFPAGELEFT-R. El nuevo conector estará etiquetado como OFFPAGELEFT-R. Utilice el editor propietario para cambiar este nombre a algo más descriptivo, como Vo. Arrolle el conector a un nodo adecuado del circuito para nombrar Vo a ese nodo.

Realizaremos una simulación AC Sweep/Noise. (En la barra de menús de OrCAD, seleccione PSpice/New Simulation; luego haga clic en la opción AC Sweep/Noise de la lista desplegable Análisis Type. Establezca Start Frequency a 1 y End Frequency a 1000. Seleccione Logarithmic Sweep y establezca Points/Decade a 100.) En la barra de menús de OrCAD Capture seleccione PSpice/Run Simulation Profile para ejecutar la simulación.

Luego de una exitosa simulación ACSweep/Noise, OrCAD Capture abre de manera automática una ventana Schematics. De los menús de Schematics seleccione Plot/Add para agregar un segundo trazo. Aparecerán dos trazos en limpio, uno sobre el otro. Haga clic en el trazo superior para seleccionarlo.

En los menús de Schematics, seleccione Trace/Add para desplegar el cuadro de diálogo Add Traces. Primero seleccione V(Vo) y luego V(Vs) de la lista de Simulation Output Variables. Trace Expression, cerca del botón del cuadro de diálogo, será V(Vo)V(Vs). Edite la expresión de ruta para que sea Vdb(Vo) – Vdb(Vs). Vdb(Vo) – Vdb(Vs) es la ganancia en decibelios. Cierre el cuadro de diálogo Add Traces.

Seleccione el trazo inferior. Seleccione Trace/Add para desplegar el cuadro de diálogo Add Traces. Seleccione primero V(Vo) y luego V(Vs). Edite la expresión de ruta para que sea Vp(Vo) – Vp(Vs). Vp(Vo) – Vp(Vs) es el cambio de fase en grados. Cierre el cuadro de diálogo Add Traces.

La figura 13.7-3 muestra los trazos resultantes luego de etiquetar algunos puntos.

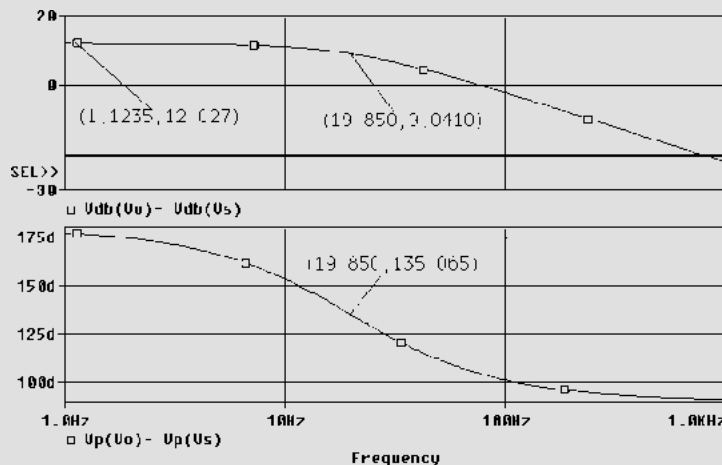


FIGURA 13.7-3 Diagramas de Bode de ganancia y fase.

### 13.8 ¿CÓMO LO PODEMOS COMPROBAR...?

A los ingenieros se les suele solicitar comprobar que la solución de un problema sea la correcta. Por ejemplo, las soluciones propuestas para problemas de diseño se deben comprobar para confirmar que se ha cumplido con todas las especificaciones. Además, se deben revisar los resultados de la computadora para protegerse contra errores de captura de datos, así como las exigencias de los comerciantes, las cuales se deben analizar a fondo.

También a los estudiantes de ingeniería se les pide que verifiquen la exactitud de sus trabajos. Por ejemplo, tomarse un breve lapso antes de terminar un examen permitiría dar una vista rápida e identificar esas soluciones que podrían requerir un poco más de aplicación.

Los ejemplos siguientes ilustran técnicas útiles para comprobar las soluciones a los diversos problemas analizados en este capítulo.

#### EJEMPLO 13.8-1 ¿Cómo podemos comprobar los diagramas de Bode?

La figura 13.8-1a muestra la estructura de un laboratorio para medir la respuesta de frecuencia de un circuito. Una entrada senoidal está conectada a la entrada de un circuito que tiene la función de red  $H(\omega)$ . Se utiliza un osciloscopio para medir las sinusoides de entrada y de salida. El voltaje de entrada se utiliza para activar el osciloscopio de modo que el ángulo de fase de la entrada sea cero. Los datos de la respuesta de frecuencia se reúnen al variar la frecuencia de entrada y medir la amplitud del voltaje de la entrada y la amplitud y la fase del voltaje de salida.

En este ejemplo, la respuesta de frecuencia deseada está especificada por el diagrama de Bode que se muestra en la figura 13.8-1b. La figura 13.8-1c muestra los datos de la respuesta de frecuencia de las mediciones del laboratorio. En este ejemplo se midió la amplitud, no así el ángulo de fase, del voltaje de salida. **¿Cómo podemos comprobar** que en verdad el circuito ha realizado el diagrama de Bode especificado?

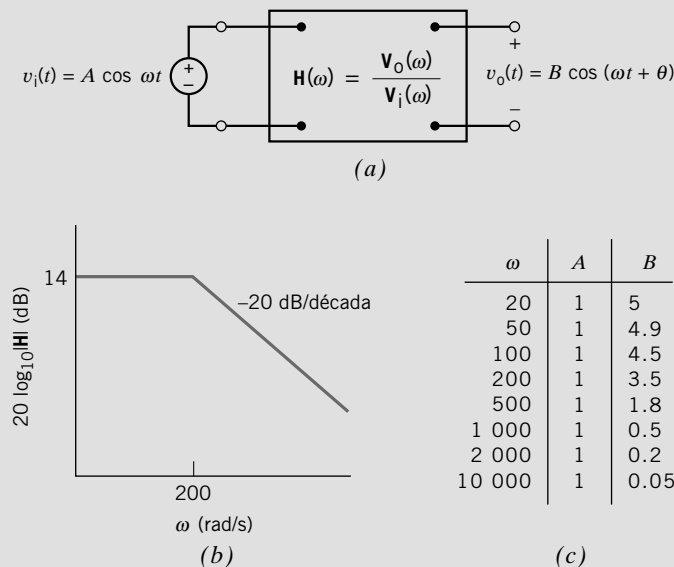


FIGURA 13.8-1 (a) Un circuito; (b) diagrama de Bode y (c) datos de la respuesta de frecuencia.

**Solución**

El diagrama de Bode tiene tres características que podemos buscar en los datos de la respuesta de frecuencia.

1. La ganancia de cd es de 14 dB.
2. La pendiente del diagrama de Bode es  $-20$  dB cuando  $\omega \gg 200$  rad/s.
3. La frecuencia de ángulo es de 200 rad/s.

La frecuencia más baja a la que se tomaron los datos de la respuesta de frecuencia es 20 rad/s. A esta frecuencia, la ganancia se midió que fuera

$$|\mathbf{H}(20)| = \frac{B}{A} = \frac{5}{1} = 14 \text{ dB}$$

la cual es igual a la ganancia especificada de cd por el diagrama de Bode.

Para identificar la frecuencia de ángulo a partir de los datos de la respuesta de frecuencia, buscamos la frecuencia a la cual la ganancia es

$$\frac{\text{ganancia de cd}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3.536$$

Los datos de la respuesta de frecuencia indican que la ganancia es 3.5 en una frecuencia de 200 rad/s. Esto concuerda con la frecuencia de ángulo de 200 rad/s del diagrama de Bode especificado.

La pendiente de la respuesta de frecuencia a frecuencia alta está dada por

$$\frac{20 \log_{10}(0.05) - 20 \log_{10}(0.5)}{\log_{10}(10\,000) - \log_{10}(1\,000)} = -20 \text{ dB/década}$$

la cual es la misma que la pendiente del diagrama de Bode.

Los datos de la respuesta de frecuencia confirman que el circuito en realidad tiene el diagrama de Bode especificado.

**EJEMPLO 13.8-2** ¿Cómo podemos comprobar la ganancia y el cambio de fase?

Sus notas de laboratorio indican que el circuito que se muestra en la figura 13.8-2 se construyó utilizando  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 50 \text{ k}\Omega$  y  $C = 10 \text{ nF}$ . La ganancia y el cambio de fase de este circuito se midieron para ser  $2.7$  y  $125^\circ$  a 500 hertz. ¿Cómo podemos comprobar si esta información es consistente?

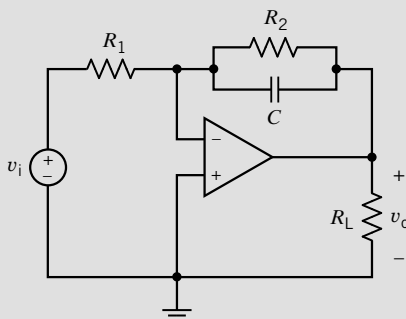


FIGURA 13.8-2 Circuito de amplificador operacional.



**Solución**

La función de red de este circuito es

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\omega) &= -\frac{\frac{1}{j\omega C} \parallel R_2}{R_1} = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + j\omega R_2 C} \\ &= \frac{-\frac{50 \times 10^3}{10 \times 10^3}}{1 + j(2\pi \times 500)(50 \times 10^3)(10 \times 10^{-9})} = 2.685 \angle 122.5^\circ \end{aligned}$$

La ganancia y el cambio de fase calculados están acordes con la ganancia y el cambio de fase medidos. Las notas de laboratorio están correctas.

**EJEMPLO 13.8-3** ¿Cómo podemos comprobar la respuesta de frecuencia?

Un informe obsoleto de laboratorio de hace un par de años incluye los datos siguientes sobre un circuito en particular:

1. La magnitud y la fase de las respuestas de frecuencia se muestran en la figura 13.8-3.
2. Cuando la entrada al circuito era

$$v_{\text{ent}} = 4 \cos(2\pi 1200t) \text{ V}$$

la respuesta de estado estable era

$$v_{\text{sal}} = 6.25 \cos(2\pi 1200t + 110^\circ) \text{ V}$$

¿Cómo podemos comprobar si estos datos son consistentes?

**Solución**

Se necesita comprobar tres cosas: las frecuencias, las amplitudes y los ángulos de fase. Las frecuencias de las sinusoides son las mismas, lo cual es bueno pues el circuito debe ser lineal si se ha de representar por una respuesta de frecuencia, y la respuesta de estado estable de un circuito lineal a una entrada senoidal es una senoide en la misma frecuencia que la entrada. La frecuencia de la senoide de entrada y salida es

$$\omega = 2 \times \pi \times 1200 \text{ rad/s}$$

o bien

$$f = 1200 \text{ Hz}$$

Por fortuna, la ganancia y el cambio de fase a 1200 Hz se han etiquetado en los trazos de respuesta de frecuencia que se muestran en la figura 13.8-3. La ganancia a 1200 Hz se etiqueta como 3.9 dB, lo cual significa que

$$\frac{|\mathbf{V}_{\text{sal}}|}{|\mathbf{V}_{\text{ent}}|} = 3.9 \text{ dB} = 1.57$$

donde  $\mathbf{V}_{\text{sal}}$  y  $\mathbf{V}_{\text{ent}}$  son los fasores que corresponden a  $v_{\text{ent}}(t)$  y  $v_{\text{sal}}(t)$ . Comprobemos esto contra los datos sobre las sinusoides de entrada y de salida. Dado que las magnitudes de los fasores son iguales a las amplitudes de las sinusoides correspondientes,

$$\frac{|\mathbf{V}_{\text{sal}}|}{|\mathbf{V}_{\text{ent}}|} = \frac{6.25}{4} = 1.56$$

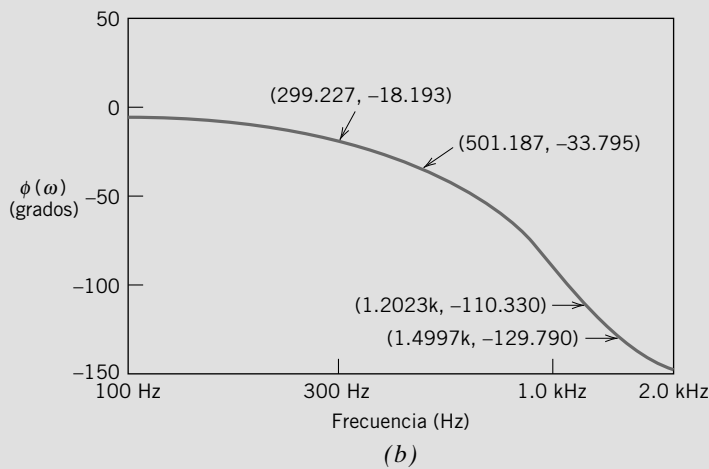
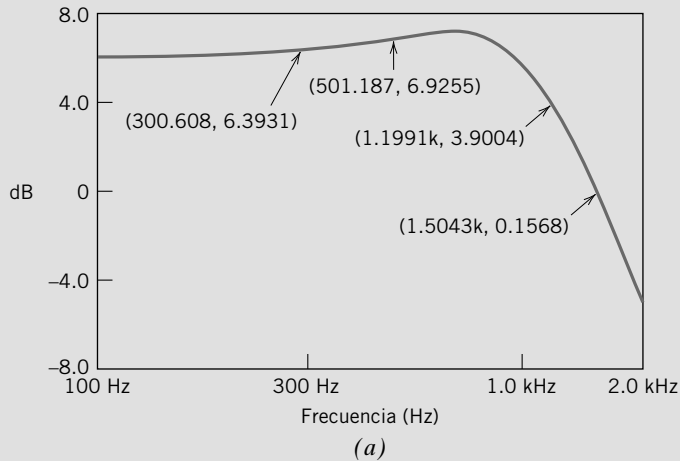


FIGURA 13.8-3 (a) Magnitud y (b) fase de respuesta de frecuencia del circuito.

Éste es un muy buen acuerdo para un trabajo experimental.

A continuación consideramos el cambio de fase. La respuesta de frecuencia indica que el cambio de fase en 1 200 Hz es  $-110^\circ$ , lo cual implica que

$$\angle \mathbf{V}_{\text{sal}} - \angle \mathbf{V}_{\text{ent}} = -110^\circ$$

Comprobemos esto contra los datos sobre las sinusoides de entrada y salida. Como los ángulos de los fasores son iguales a los ángulos de fase de las sinusoides correspondientes,

$$\angle \mathbf{V}_{\text{sal}} - \angle \mathbf{V}_{\text{ent}} = 110^\circ - 0^\circ = 110^\circ$$

Los signos de los ángulos de fase no concuerdan. En una frecuencia de 1 200 Hz, un ángulo de fase de  $110^\circ$  indica que los picos de la sinusoide de salida seguirán a los picos de la sinusoide de entrada por

$$t_0 = \frac{110^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{1}{1\,200} = 0.255 \text{ ms}$$

en tanto que un ángulo de fase de  $-110^\circ$  indica que los picos de la sinusoide de salida precederán a los picos de la sinusoide de entrada por 0.255 ms. Es como si el ángulo de la sinusoide de salida se hubiera ingresado de manera incorrecta en los datos de laboratorio.

Hemos encontrado un error en el reporte obsoleto y propuesto una explicación para dicho error.

## 13.9 EJEMPLO DE DISEÑO

## SINTONIZADOR DE RADIO

Tres estaciones de radio difunden en tres diferentes frecuencias, 700 kHz, 1 000 kHz y 1 400 kHz. La figura 13.9-1 muestra un diagrama simplificado de un receptor de radio. La antena recibe señales de las tres estaciones, de modo que la entrada del sintonizador será la suma de las tres señales. Suponga que este voltaje lo describe

$$v_i(t) = \text{sen}(2\pi \times 7 \times 10^5 t + 135^\circ) + \text{sen}(2\pi \times 10^6 t) + \text{sen}(2\pi \times 1.4 \times 10^6 t + 300^\circ) \quad (13.9-1)$$

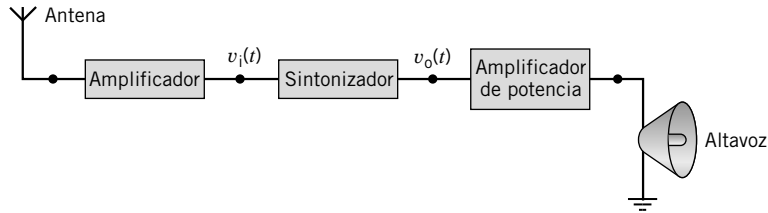


FIGURA 13.9-1 Diagrama simplificado de un receptor de radio.

Considere el problema de sintonizar la estación que difunde a 1 000 kHz. El sintonizador debe eliminar el primero y el tercer términos de  $v_i(t)$  para producir la señal de salida.

$$v_o(t) = \text{sen}(2\pi \times 10^6 t + \theta)$$

**Describe la situación y los supuestos**

Sea  $\mathbf{H}(\omega)$  la función de red del sintonizador. El sintonizador debe tener una ganancia aproximadamente igual a 1 en 1 000 kHz ( $|\mathbf{H}(2\pi \times 10^6)| \cong 1$ ) y aproximadamente igual a cero en 700 kHz y en 1 400 kHz ( $|\mathbf{H}(2\pi \times 10^5)| \cong 0$ ) y ( $|\mathbf{H}(2\pi \times 1.4 \times 10^6)| \cong 0$ ). La salida del sintonizador será

$$\begin{aligned} v_o(t) &= |\mathbf{H}(2\pi \times 7 \times 10^5)| \text{sen}(2\pi \times 7 \times 10^5 t + 135^\circ) \\ &+ \underline{|\mathbf{H}(2\pi \times 7 \times 10^5)|} + |\mathbf{H}(2\pi \times 10^6)| \text{sen}(2\pi \times 10^6 t + \underline{|\mathbf{H}(2\pi \times 10^6)|}) \\ &+ |\mathbf{H}(2\pi \times 1.4 \times 10^6)| \text{sen}(2\pi \times 1.4 \times 10^6 t + 300^\circ) \\ &+ \underline{|\mathbf{H}(2\pi \times 1.4 \times 10^6)|} \end{aligned} \quad (13.9-2)$$

o bien

$$v_o(t) \cong \text{sen}(2\pi \times 10^6 t + \theta)$$

donde

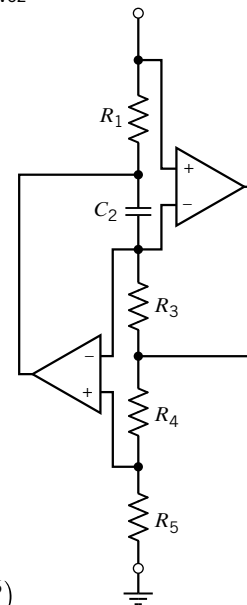
$$\theta = \underline{|\mathbf{H}(2\pi \times 10^6)|}$$

**Establezca el objetivo**

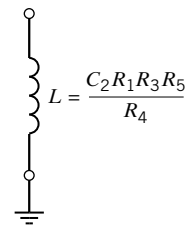
El objetivo es diseñar un circuito que contenga resistores, condensadores, y amplificadores operacionales que tengan una ganancia igual a 1 en 1 000 kHz e igual a cero en 700 y 1 400 kHz.

**Genere un plan**

El sintonizador se basará en un circuito resonante que tenga  $\omega_0 = 2\pi \times 10^6 = 6.283 \times 10^6 \text{ rad/s}$  y  $Q = 15$ . La figura 13.9-2 muestra el

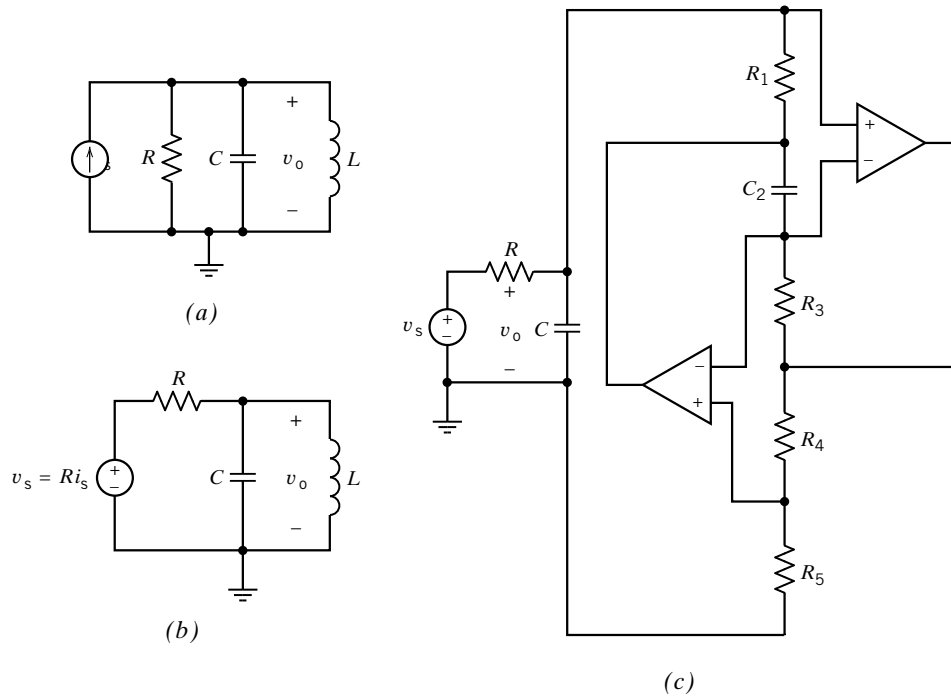


(a)



(b)

FIGURA 13.9-2 (a) Circuito de amplificador operacional denominador inductor simulado, y (b) el inductor equivalente.



**FIGURA 13.9-3** (a) Un circuito resonante. (b) Filtro pasa banda. (c) Filtro pasa banda de un amplificador operacional RC.

circuito de un amplificador operacional denominado inductor simulado. Este circuito actúa como un inductor aterrizado cuya inductancia es igual a

$$L = \frac{C_2 R_1 R_3 R_5}{R_4} \quad (13.9-3)$$

La figura 13.9-3 muestra cómo se puede utilizar un circuito resonante en paralelo para diseñar un sintonizador; en la figura 13.9-3a se puede ver un circuito de estas características. Si se va a utilizar el circuito resonante en paralelo para el sintonizador, se debe modificar. La entrada para el sintonizador es un voltaje, pero la entrada al circuito resonante en paralelo es una corriente. Para obtener un circuito que tenga una entrada de voltaje se utiliza una transformación de fuente, que se muestra en la figura 13.9-3b. A continuación, el inductor se reemplaza con un inductor simulado para producir el circuito que se muestra en la figura 13.9-3c. Éste es el circuito que se utilizará como sintonizador.

El diseño se completará en dos pasos. Primero, los valores de  $L$ ,  $R$  y  $C$  se calcularán de modo que el circuito resonante en paralelo tenga  $\omega_0 = 6.283 \times 10^6$  rad/s y  $Q = 15$ . Luego el condensador y los resistores se seleccionarán del inductor simulado para satisfacer la ecuación 13.9-3.

### Actúe sobre el plan

Primero, diseñe el circuito resonante que tenga  $\omega_0 = 6.283 \times 10^6$  rad/s y  $Q = 15$ . Tome un valor que convenga a la capacitancia,  $C = 0.001 \mu\text{F}$ . Entonces,

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{(6.283 \times 10^6)^2 \times 10^{-9}} = 25.33 \mu\text{H}$$

y

$$R = Q \sqrt{\frac{L}{C}} = 15 \sqrt{\frac{25.33 \times 10^{-6}}{10^{-9}}} = 2387 \Omega$$

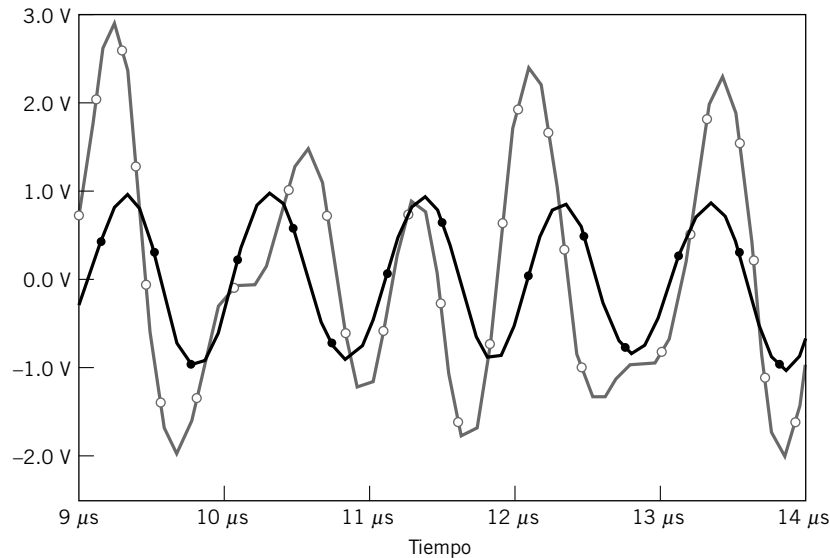


FIGURA 13.9-4 Simulación con PSpice del sintonizador de radio.

A continuación, diseñe el inductor simulado para tener una inductancia de  $L = 25.33 \mu\text{H}$ . Hay varias formas de hacerlo. Tomemos  $C_2 = 0.001 \mu\text{F}$ ,  $R_1 = 1.5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 1.5 \text{ k}\Omega$  y  $R_4 = 80 \text{ k}\Omega$ . Entonces,

$$R_5 = \frac{R_4 L}{C_2 R_1 R_3} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 25.33 \cdot 10^{-6}}{10^{-9} \cdot 1.5 \cdot 10^3 \cdot 1.5 \cdot 10^3} = 900 \Omega$$

#### Verifique la solución propuesta

La figura 13.9-4 muestra los resultados de una simulación de PSpice del sintonizador. La entrada al circuito es  $v_i(t)$  descrita por la ecuación 13.9-1. Esta señal no es senoidal. La salida del filtro es una senoide con una amplitud de aproximadamente 1 y una frecuencia de 1 000 kHz, como lo requería la ecuación 13.9-2. Por consiguiente, se satisfacen las especificaciones de diseño.

## 13.10 RESUMEN

- Ganancia, cambio de fase y la función de red son propiedades de los circuitos lineales que describen el efecto de un circuito sobre el voltaje o la corriente de una entrada senoidal.
- La ganancia del circuito describe la relación entre las dimensiones de las sinusoides de entrada y de salida. La ganancia es la relación de la amplitud de la senoide de salida con la amplitud de la senoide de entrada.
- El cambio de fase del circuito describe la relación entre los ángulos de fase de las sinusoides de entrada y de salida. El cambio de fase es la diferencia entre el ángulo de fase de la senoide de salida y el ángulo de fase de la senoide de entrada.
- La función de red describe la forma en que el comportamiento del circuito depende de la frecuencia de la entrada. La función de red se define en el dominio de frecuencia. Es la razón del fasor que corresponde a la senoide de respuesta con el fasor que corresponde a la entrada.
- La tabla 13.3-2 muestra las funciones de red de varios circuitos de amplificadores operacionales comunes.
- La respuesta de frecuencia describe cómo la ganancia y el cambio de fase de un circuito dependen de la frecuencia. Para expresar la respuesta de frecuencia son útiles las ecuaciones, las tablas, incluso los diagramas.

- Los diagramas de Bode representan la respuesta de frecuencia como trazos de la ganancia en decibeles y la fase, utilizando una escala logarítmica para la frecuencia. Los diagramas de Bode de magnitud asintótica son diagramas de Bode aproximados fáciles de dibujar. Los términos *frecuencia de ángulo* y *frecuencia de corte* se usan de manera rutinaria para describir circuitos lineales. Estos términos describen características del diagrama de Bode asintótico.
- Algunos circuitos lineales presentan un fenómeno llamado resonancia. Estos circuitos contienen elementos reactivos pero actúan como si fueran puramente resistivos en una frecuencia en particular, denominada frecuencia resonante. Los circuitos resonantes se describen utilizando la frecuencia resonante, el

factor de calidad y el ancho de banda. La tabla 13.4-1 resume las propiedades de los circuitos resonantes en serie y en paralelo.

- La ganancia de los amplificadores operacionales depende de la frecuencia de la entrada. El uso de un modelo de amplificador operacional que incluya una ganancia dependiente de frecuencia hace que nuestro análisis sea más preciso pero también más complicado. Utilizamos el modelo más complicado cuando requerimos precisión adicional, y el modelo más sencillo cuando no la necesitamos.
- Se puede utilizar PSpice para analizar un circuito y mostrar su respuesta de frecuencia.
- También se puede utilizar MATLAB para mostrar la respuesta de frecuencia de una función de red.

## PROBLEMAS

### Sección 13.2 Ganancia, cambio de fase y función de red

**P 13.2-1** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.2-1 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje  $v_o(t)$  a través de la conexión en paralelo del condensador y del resistor de  $10\text{-}\Omega$ . Determine la función de red,  $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{V}_o(\omega)/\mathbf{V}_i(\omega)$ , de este circuito.

*Respuesta:*  $\mathbf{H}(\omega) = \frac{0.2}{1 + j4\omega}$

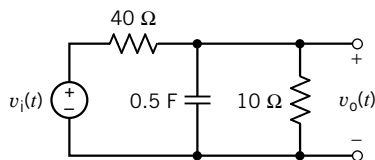


Figura P 13.2-1

**P 13.2-2** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.2-2 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje  $v_o(t)$  a través de la conexión en paralelo del condensador y del resistor de  $160\text{-}\Omega$ . Determine la función de red,  $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{V}_o(\omega)/\mathbf{V}_i(\omega)$ , de este circuito.

*Respuesta:*  $\mathbf{H}(\omega) = \frac{1 + j(0.004)\omega}{1 + j(0.005)\omega}$

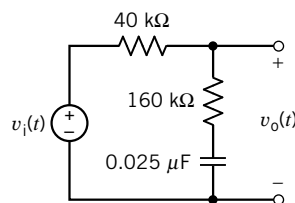


Figura P 13.2-2

**P 13.2-3** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.2-3 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje  $v_o(t)$  a través del resistor de  $6\text{-}\Omega$ . Determine la función de red,  $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{V}_o(\omega)/\mathbf{V}_i(\omega)$ , de este circuito.

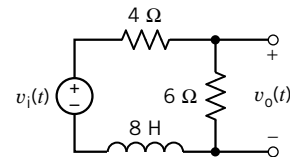


Figura P 13.2-3

**P 13.2-4** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.2-4 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje  $v_o(t)$  a través de la conexión en paralelo del condensador y del resistor de  $60\text{-}\Omega$ . La función de red que representa este circuito es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = (0.6) \frac{1 + j\frac{\omega}{12}}{1 + j\frac{\omega}{20}}$$

Determine los valores de la inductancia,  $L$ , y de la resistencia,  $R$ .

*Respuestas:*  $L = 5\text{ H}$ , y  $R = 40\text{ }\Omega$

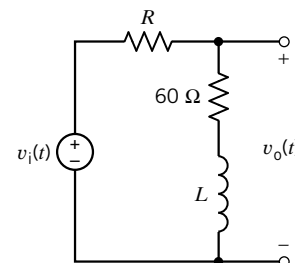


Figura P 13.2-4

**P 13.2-5** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.2-5 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje  $v_o(t)$  a través de la conexión en paralelo del condensador y del resistor de  $2\text{-}\Omega$ . La función de red que representa este circuito es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{0.2}{1 + j4\omega}$$

Determine los valores de la capacitancia,  $C$ , y de la resistencia,  $R$ .

**Respuestas:**  $C = 2.5\text{ F}$  y  $R = 8\ \Omega$

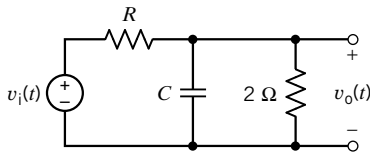


Figura P 13.2-5

**P 13.2-6** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.2-6 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje  $v_o(t)$  a través del condensador. Determine la función de red,  $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{V}_o(\omega)/\mathbf{V}_i(\omega)$ , de este circuito.

**Respuesta:**  $\mathbf{H}(\omega) = \frac{0.6}{(j\omega)(1 + j(0.2)\omega)}$

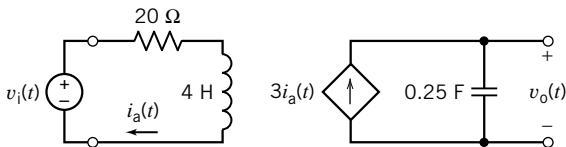


Figura P 13.2-6

**P 13.2-7** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.2-7 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje  $v_o(t)$  a través del resistor de  $30\ \Omega$ . La función de red de este circuito es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{4}{1 + j\frac{\omega}{100}}$$

Determine el valor de la capacitancia,  $C$ , y el valor de la ganancia,  $A$ , de la VCVS.

**Respuestas:**  $C = 5\ \mu\text{F}$  y  $A = 6\text{ V/V}$

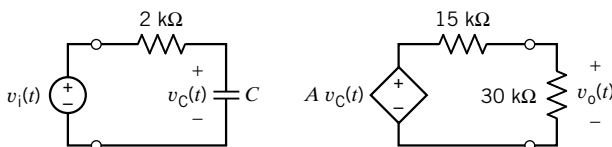


Figura P 13.2-7

**P 13.2-8** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.2-8 es el voltaje de la fuente,  $v_i(t)$ , y la respuesta es el voltaje  $v_o(t)$  a través de  $R_L$ . Encuentre la función de red.

**Respuesta:**  $\mathbf{H}(\omega) = -5/(1 + j\omega/10)$

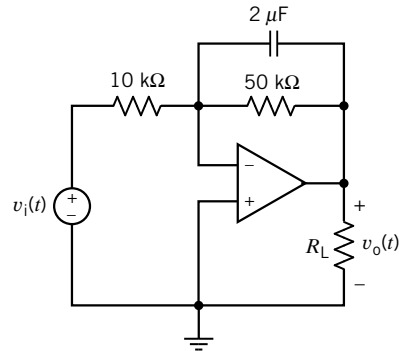


Figura P 13.2-8

**P 13.2-9** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.2-9 es el voltaje de la fuente,  $v_i(t)$ , y la respuesta es el voltaje  $v_o(t)$  a través de  $R_L$ . Expresar la ganancia y el cambio de fase como funciones de la frecuencia en radianes,  $\omega$ .

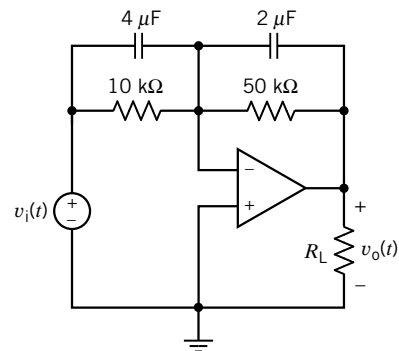


Figura P 13.2-9

**P 13.2-10** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.2-10 es el voltaje de la fuente,  $v_i(t)$ , y la respuesta es el voltaje  $v_o(t)$  a través de  $R_L$ . La resistencia,  $R_1$ , es de  $10\ \text{k}\Omega$ . Diseñe este circuito para satisfacer las dos especificaciones siguientes:

- La ganancia a frecuencias bajas es 5.
- La ganancia a frecuencias altas es 2.

**Respuestas:**  $R_2 = 20\ \text{k}\Omega$  y  $R_3 = 30\ \text{k}\Omega$

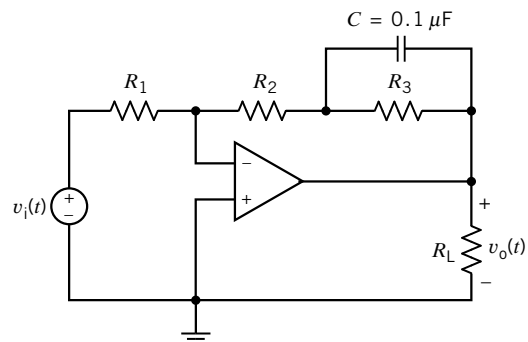


Figura P 13.2-10

**P 13.2-11** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.2-11 es el voltaje de la fuente,  $v_i(t)$ , y la respuesta es el voltaje  $v_o(t)$  a través de  $R_L$ . Diseñe este circuito para satisfacer las dos especificaciones siguientes:

- (a) El cambio de fase en  $\omega = 1\,000$  rad/s es  $135^\circ$ .
- (b) La ganancia a frecuencias altas es 10.

*Respuestas:*  $R_1 = 1\text{ k}\Omega$  y  $R_2 = 10\text{ k}\Omega$

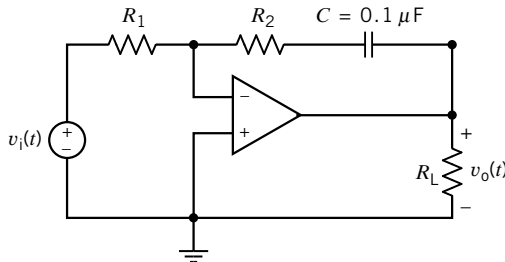


Figura P 13.2-11

**P 13.2-12** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.2-12 es el voltaje de la fuente,  $v_i(t)$ , y la respuesta es el voltaje  $v_o(t)$  a través de  $R_L$ . Diseñe este circuito para satisfacer las dos especificaciones siguientes:

- (a) El cambio de fase en  $\omega = 1\,000$  rad/s es  $225^\circ$ .
- (b) La ganancia a frecuencias altas es 10.

*Respuestas:*  $R_1 = 10\text{ k}\Omega$  y  $R_2 = 100\text{ k}\Omega$

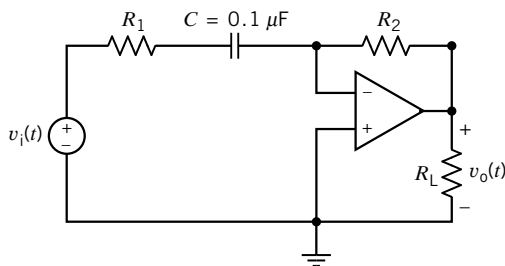
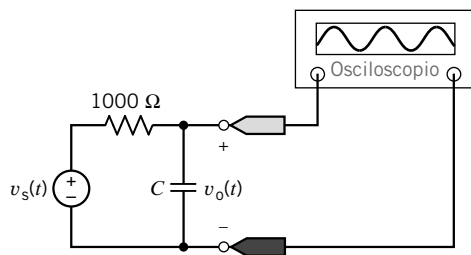


Figura P 13.2-12



(a)

**P 13.2-13** La entrada al circuito de la figura P 13.2-13 es  $v_s = 50 + 30 \cos(500t + 115^\circ) + 20 \cos(2500t + 30^\circ)$  mV. Encuentre el voltaje de salida de estado estable,  $v_o$ , para (a)  $C = 0.1\text{ }\mu\text{F}$  y (b)  $C = 0.01\text{ }\mu\text{F}$ . Suponga un amplificador operacional ideal.

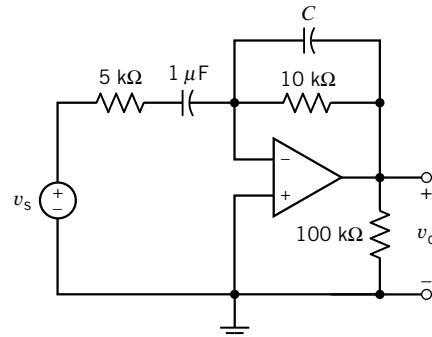
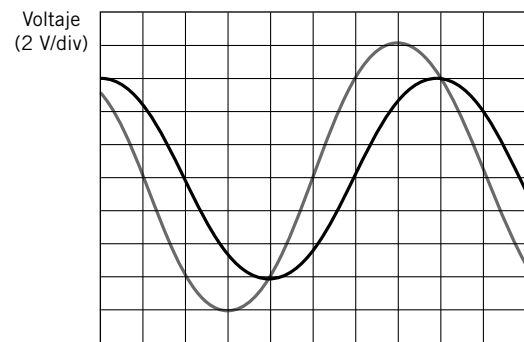


Figura P 13.2-13

**P 13.2-14** El voltaje de la fuente,  $v_s$ , se muestra en el circuito de la figura P 13.2-14a como una sinusoidal que tiene una frecuencia de 500 Hz y una amplitud de 8 V. El circuito se encuentra en estado estable. Los trazos del osciloscopio muestran las formas de onda de la entrada y de la salida como se ve en la figura P 13.2-14b.

- (a) Determine la ganancia y el cambio de fase del circuito a 500 Hz.
- (b) Determine el valor del condensador.
- (c) Si se cambia la frecuencia de la entrada, entonces la ganancia y el cambio de fase del circuito también cambiarán. ¿Cuáles son los valores de la ganancia y el cambio de fase en la frecuencia de 200 Hz? ¿A 2 000 Hz? ¿A qué frecuencia el cambio de fase será de  $-45^\circ$ ? ¿A qué frecuencia el cambio de fase será de  $-135^\circ$ ?
- (d) ¿Qué valor de capacitancia se requeriría para hacer que el cambio de fase en 500 Hz fuera de  $-60^\circ$ ? ¿Qué valor de capacitancia se requeriría para hacer que el cambio de fase en 500 Hz fuera de  $-300^\circ$ ?
- (e) Suponga que el cambio de fase hubiera sido de  $120^\circ$  a 500 Hz. ¿Cuál habría sido el valor del condensador?



(b)

Figura P 13.2-14



**Respuestas:** (b)  $C = 0.26 \mu\text{F}$ . (e) Este circuito no se puede diseñar para producir un cambio de fase  $= -120^\circ$ .

**P 13.2-15** La entrada al circuito en la figura P 13.2-15 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje  $v_o(t)$ . La función de red de este circuito es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{(-0.1)j\omega}{\left(1 + j\frac{\omega}{p}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{125}\right)}$$

Determine los valores de la capacitancia,  $C$ , y del polo,  $p$ .

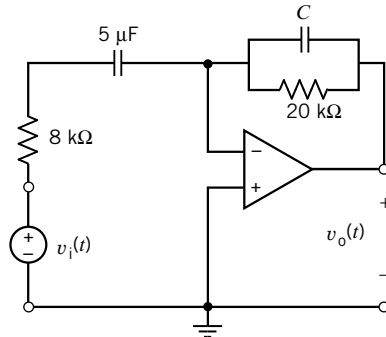


Figura P 13.2-15

**P 13.2-16** La entrada al circuito en la figura P 13.2-16 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s(t)$ . La salida es el voltaje  $v_o(t)$ . La función de red de este circuito es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)} = k \frac{1 + j\frac{\omega}{z}}{1 + j\frac{\omega}{p}}$$

Determine expresiones que relacionen los parámetros de la función de red,  $k$ ,  $z$  y  $p$  con los parámetros del circuito,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L$ ,  $N_1$  y  $N_2$ .

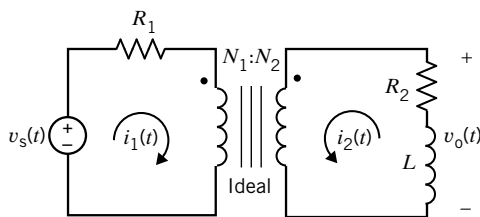


Figura P 13.2-16

**P 13.2-17** La entrada al circuito en la figura P 13.2-17 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s(t)$ . La salida es el voltaje  $v_o(t)$ . La función de red de este circuito es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)} = k \frac{j\omega}{1 + j\frac{\omega}{p}}$$

Determine expresiones que relacionen los parámetros de la función de red,  $k$ ,  $z$  y  $p$  con los parámetros del circuito,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $M$ ,  $L_1$  y  $L_2$ .

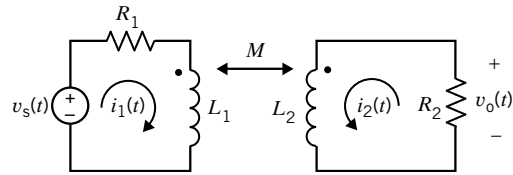


Figura P 13.2-17

**P 13.2-18** La entrada al circuito en la figura P 13.2-18 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje  $v_o(t)$ . La función de red de este circuito es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = k \frac{j\omega}{\left(1 + j\frac{\omega}{p_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{p_2}\right)}$$

Determine las expresiones que relacionan los parámetros de la función de red,  $k$ ,  $p_1$  y  $p_2$  con los parámetros del circuito,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $A$ ,  $C$  y  $L$ .

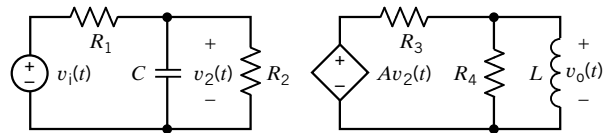


Figura P 13.2-18

**P 13.2-19** La entrada al circuito en la figura P 13.2-19 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_f$ . La salida del circuito es el voltaje  $v_o$  del condensador. Determine los valores de las resistencias,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$ , requeridas para hacer que la función de red del circuito sea

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)} = \frac{21}{\left(1 + j\frac{\omega}{5}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{200}\right)}$$

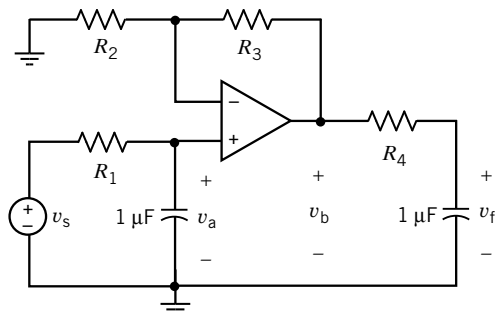


Figura P 13.2-19

**P 13.2-20** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.2-20 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_f$ . La salida del circuito es el voltaje  $v_s$ . Determine la función de red

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)}$$

del circuito.

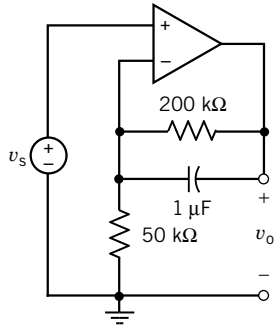


Figura P 13.2-20

**P 13.2-21** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.2-21 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . La salida del circuito es el voltaje,  $v_o$ , del condensador. Determine la función de red

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)}$$

del circuito.

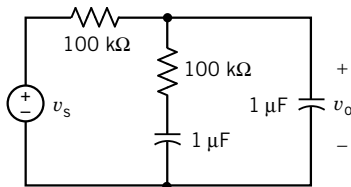


Figura P 13.2-21

**P 13.2-22** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.2-22 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . La salida del circuito es el voltaje,  $v_o$ , del condensador. La función de red del circuito es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{p}}$$

Determine los valores de  $H_0$  y  $p$ .

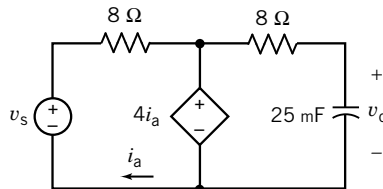


Figura P 13.2-22

**P 13.2-23** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.2-23 es la corriente de la fuente de corriente,  $i_s$ . La salida del circuito es la corriente del resistor,  $i_o$ . La función de red del circuito es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{I}_o(\omega)}{\mathbf{I}_s(\omega)} = \frac{0.8}{1 + j\frac{\omega}{40}}$$

Determine los valores de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ .

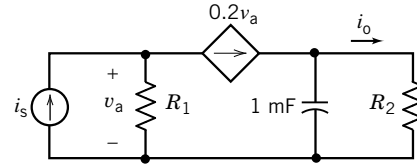


Figura P 13.2-23

**P 13.2-24** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.2-24 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . La salida del circuito es el voltaje,  $v_o$ , del resistor. Especifique valores para  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $R$  y  $K$  que hagan que la función de red del circuito sea

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)} = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{20}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{50}\right)}$$

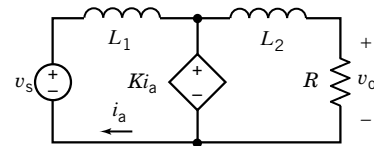


Figura P 13.2-24

**P 13.2-25** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.2-25 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . La salida del circuito es el voltaje,  $v_o$ , del resistor. Especifique valores para  $R$  y  $C$  que hagan que la función de red del circuito sea

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)} = \frac{-8}{1 + j\frac{\omega}{250}}$$

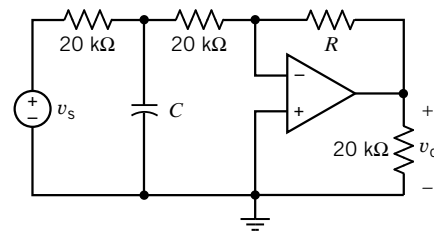


Figura P 13.2-25

**P 13.2-26** La función de red de un circuito es  $\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)} = \frac{j40\omega}{120 + j20\omega}$ . Cuando la entrada a este circuito es  $v_s(t) = 5 \cos(5t + 15^\circ)$  V, la salida es  $v_o(t) = A \cos(5t + 65.194^\circ)$  V. Por otro lado, cuando la entrada a este circuito es  $v_s(t) = 5 \cos(8t + 15^\circ)$  V, la salida es  $v_o(t) = 8 \cos(8t + \theta)$  V. Determine los valores de  $A$  y  $\theta$ .

**Respuestas:**  $A = 6.4018$  V y  $\theta = 51.87^\circ$

**P 13.2-27** La función de red de un circuito es  $\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)} = \frac{k}{1 + j\frac{\omega}{p}}$  donde  $k > 0$  y  $p > 0$ . Cuando la entrada a este

circuito es

$$v_s(t) = 12 \cos(120t + 30^\circ) \text{ V}$$

la salida es

$$v_o(t) = 42.36 \cos(120t - 48.69^\circ) \text{ V}$$

Determine los valores de  $k$  y  $p$ .

**Respuestas:**  $k = 18$  y  $p = 24$  rad/s

**P 13.2-28** La función de red de un circuito es  $\mathbf{H}(\omega) = \frac{20}{8+j\omega}$ .

Cuando la entrada a este circuito es senoidal, la salida también es senoidal. Sea  $\omega_1$  la frecuencia a la que la senoide de la salida sea dos veces más grande que la senoide de entrada y sea  $\omega_2$  la frecuencia a la que la senoide de salida se vea retardada en un periodo de décima con respecto a la senoide de entrada. Determine los valores de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

**P 13.2-29** La entrada al circuito en la figura P 13.2-29 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s(t)$ . La salida es el voltaje  $v_o(t)$ . Cuando la entrada es  $v_s(t) = 8 \cos(40t) \text{ V}$ , la salida es  $v_o(t) = 2.5 \cos(40t + 14^\circ) \text{ V}$ . Determine los valores de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ .

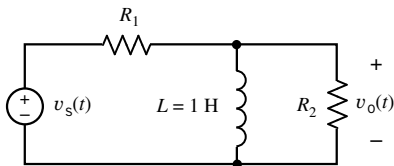


Figura P 13.2-29

**P 13.2-30** La entrada al circuito en la figura P 13.2-30 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s(t)$ . La salida es el voltaje  $v_o(t)$ . La entrada  $v_s(t) = 2.5 \cos(1000t) \text{ V}$ , hace que la salida sea  $v_o(t) = 8 \cos(1000t + 104^\circ) \text{ V}$ . Determine los valores de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ .

**Respuestas:**  $R_1 = 1515 \Omega$  y  $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$

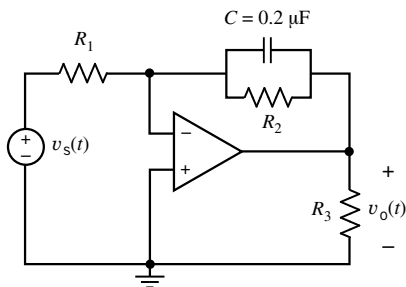


Figura P 13.2-30

### Sección 13.3 Diagramas de Bode

**P 13.3-1** Bosqueje el diagrama de Bode de magnitud de

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{4(5+j\omega)}{1+j\frac{\omega}{50}}$$

**P 13.3-2** Compare los diagramas de Bode de magnitud de

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{10(5+j\omega)}{50+j\omega} \text{ y } \mathbf{H}(\omega) = \frac{100(5+j\omega)}{50+j\omega}$$

**P 13.3-3** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.3-3 es el voltaje de fuente,  $v_{\text{ent}}(t)$ , y la respuesta es el voltaje a través de  $R_3$ ,  $v_{\text{sal}}(t)$ . Los valores de los componentes son  $R_1 = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 0.1 \mu\text{F}$  y  $C_2 = 0.1 \mu\text{F}$ . Bosqueje el diagrama de Bode de magnitud asintótica para la función de red.

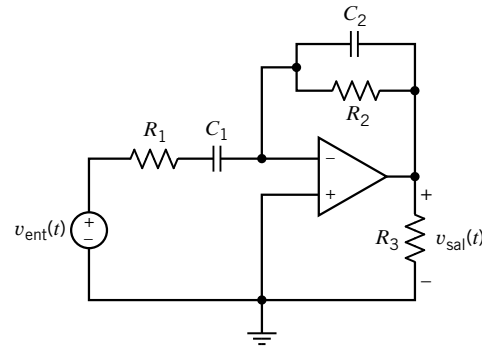


Figura P 13.3-3

**P 13.3-4** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.3-4 es el voltaje de fuente,  $v_s(t)$ , y la respuesta es el voltaje a través de  $R_3$ ,  $v_o(t)$ . Determine  $\mathbf{H}(\omega)$  y bosqueje el diagrama de Bode.

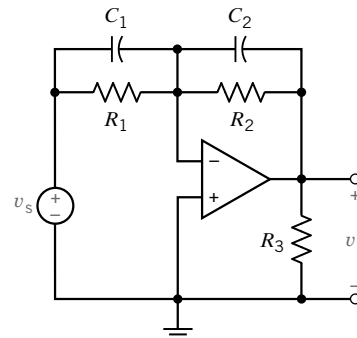
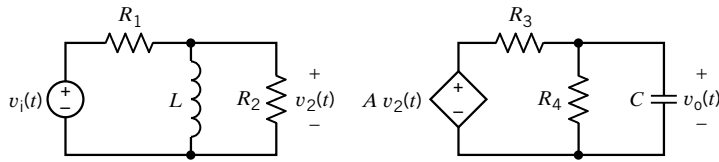


Figura P 13.3-4

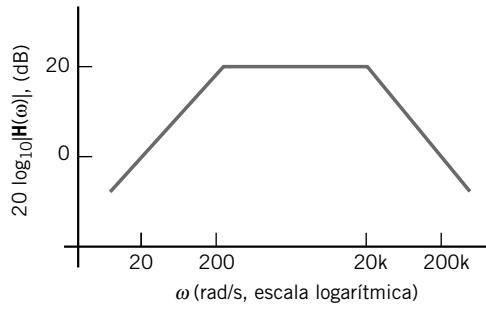
**P 13.3-5** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.3-5a es el voltaje,  $v_i(t)$ , de la fuente de voltaje independiente. La salida es el voltaje,  $v_o(t)$ , a través del condensador. Diseñe este circuito para tener el diagrama de Bode que se muestra en la figura 13.3-5b.

**Sugerencia:** Primero, muestre que la función de red del circuito es

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\omega) &= \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} \\ &= \frac{j\omega \left( \frac{ALR_4}{R_1(R_3 + R_4)} \right)}{\left( 1 + j\omega \frac{L(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \right) \left( 1 + j\omega \frac{CR_3 R_4}{R_3 + R_4} \right)} \end{aligned}$$



(a)

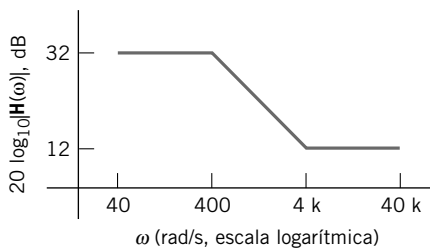


(b)

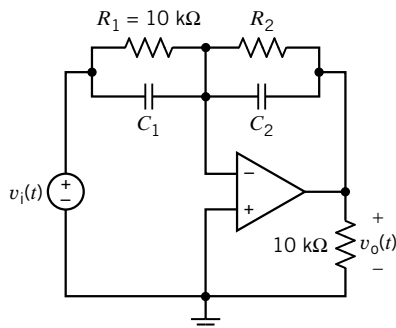
Figura P 13.3-5

**P 13.3-6** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.3-6b es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje  $v_o(t)$ . La función de red de este circuito es  $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{V}_o(\omega)/\mathbf{V}_i(\omega)$ . Determine los valores de  $R_2$ ,  $C_1$  y  $C_2$  que se requieren para hacer que este circuito tenga el diagrama de Bode de magnitud que se muestra en la figura P 13.3-6a.

**Respuestas:**  $R_2 = 400 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 25 \text{ nF}$  y  $C_2 = 6.25 \text{ nF}$



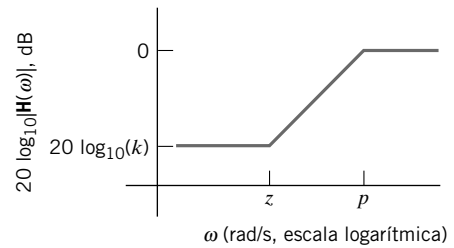
(a)



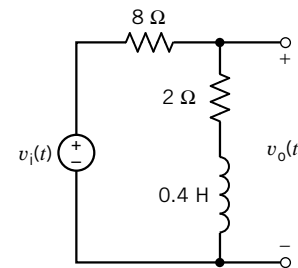
(b)

Figura P 13.3-6

**P 13.3-7** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.3-7b es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje  $v_o(t)$ . La función de red de este circuito es  $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{V}_o(\omega)/\mathbf{V}_i(\omega)$ . En la figura P 13.3-7a se muestra el diagrama de Bode de magnitud. Determine los valores de las frecuencias de ángulo,  $z$  y  $p$ . Determine el valor de la ganancia de frecuencia baja,  $k$ .



(a)



(b)

Figura P 13.3-7

**P 13.3-8** Determine  $\mathbf{H}(j\omega)$  a partir del diagrama de Bode asintótico en la figura P 13.3-8.

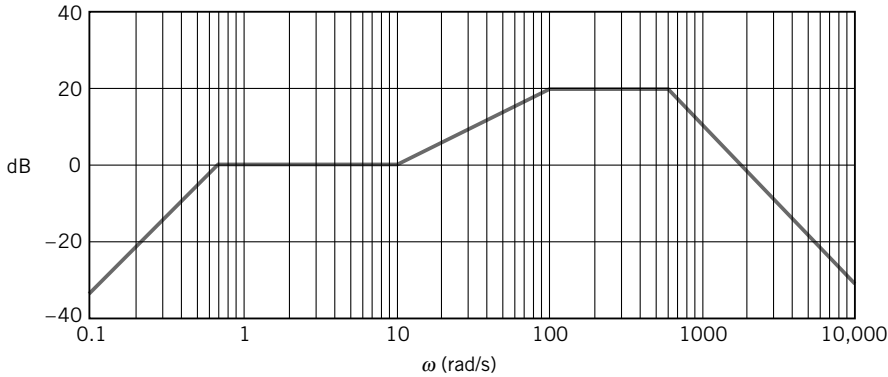


Figura P 13.3-8

**P 13.3-9** Un circuito tiene una función de red

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{k(1 + j\omega/z)}{j\omega}$$

- (a) Encuentre las asíntotas de alta y de baja frecuencia del diagrama de Bode de magnitud.  
 (b) Las asíntotas de alta y baja frecuencia comprenden el diagrama de Bode de magnitud. ¿Sobre qué rangos de frecuencias está el diagrama de Bode de magnitud asíntótica de  $\mathbf{H}(\omega)$  dentro del porcentaje de 1 del valor real de  $\mathbf{H}(\omega)$ ?

**P 13.3-10** Los médicos utilizan electrodos de tejidos para formar la interfase que conduce corriente al tejido objetivo del cuerpo humano. El electrodo de tejido se puede modelar por el circuito  $RC$  que se muestra en la figura P 13.3-10. El valor de cada elemento depende del material del electrodo y la construcción física, así como de las propiedades del tejido que se va a investigar. Encuentre el diagrama de Bode para  $V_o/V_s = \mathbf{H}(j\omega)$  cuando  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$  y la resistencia del tejido es  $R_t = 5 \text{ k}\Omega$ .

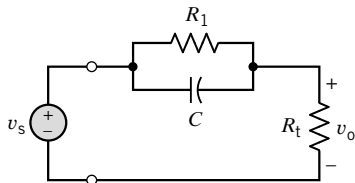


Figura P 13.3-10

**P 13.3-11** La figura P 13.3-11 muestra un circuito y el correspondiente diagrama de Bode de magnitud asíntótica. La entrada a este circuito es el voltaje de fuente,  $v_{\text{ent}}(t)$ , y la respuesta es el voltaje  $v_o(t)$ . Los valores de los componentes son  $R_1 = 80 \Omega$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $L_1 = 0.03 \text{ H}$ ,  $L_2 = 0.07 \text{ H}$  y  $M = 0.01 \text{ H}$ . Determine los valores de  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $p$  y  $z$ .

**Respuestas:**  $K_1 = 0.75$ ,  $K_2 = 0.2$ ,  $z = 333 \text{ rad/s}$  y  $p = 1250 \text{ rad/s}$ .

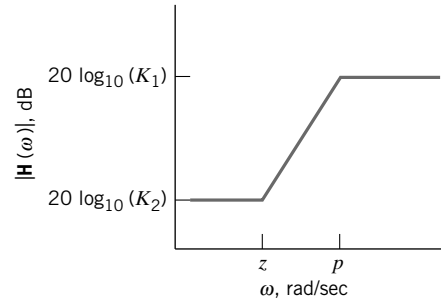
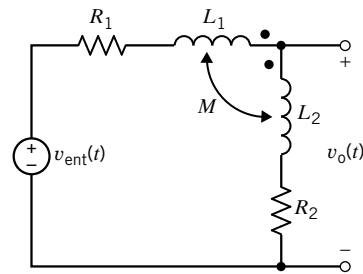


Figura P 13.3-11

**P 13.3-12** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.3-12 es el voltaje de la fuente,  $v_{\text{ent}}(t)$  y la respuesta es el voltaje  $v_{\text{sal}}(t)$  a través de  $R_3$ . Los valores de los componentes son  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 0.025 \mu\text{F}$  y  $C_2 = 0.05 \mu\text{F}$ . Bosquee el diagrama de Bode de magnitud asíntótica para la función de red.

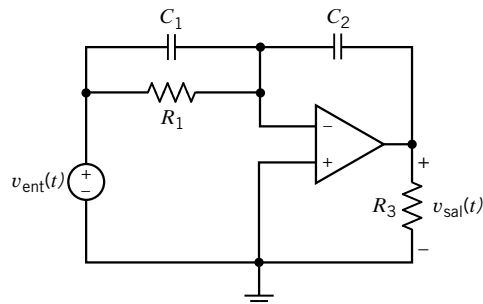


Figura P 13.3-12

**P 13.3-13** Diseñe un circuito que tenga el diagrama de Bode de magnitud asíntotica que se muestra en la figura P 13.3-13.

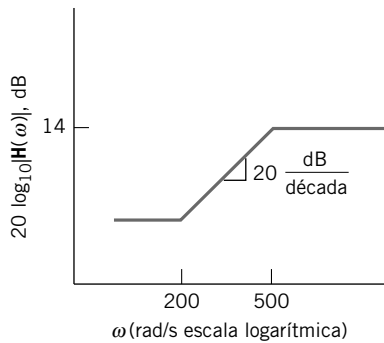


Figura P 13.3-13

**P 13.3-14** Diseñe un circuito que tenga el diagrama de Bode de magnitud asíntotica que se muestra en la figura P 13.3-14.

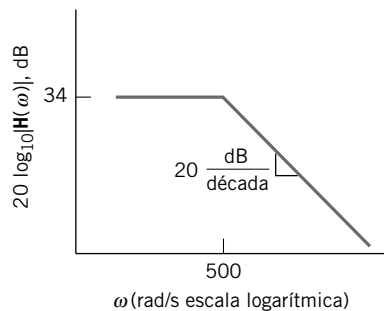


Figura P 13.3-14

**P 13.3-15** Diseñe un circuito que tenga el diagrama de Bode de magnitud asíntotica que se muestra en la figura P 13.3-15.

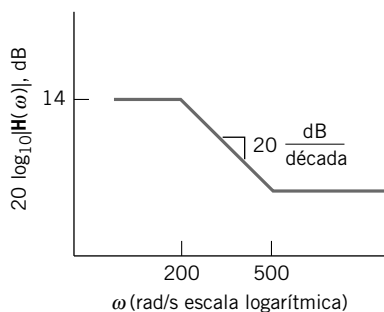


Figura P 13.3-15

**P 13.3-16** Diseñe un circuito que tenga el diagrama de Bode de magnitud asíntotica que se muestra en la figura P 13.3-16.

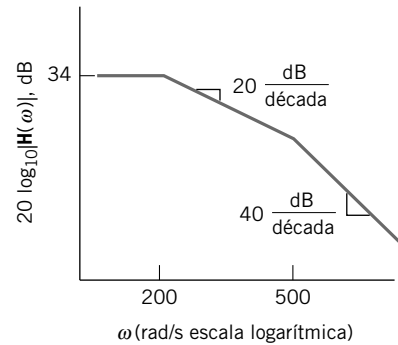


Figura P 13.3-16

**P 13.3-17** El implante de caracol (cóclea) se propone para pacientes con deficiencia auditiva debido al mal funcionamiento de las células sensoriales de la cóclea en el oído interno (Loeb, 1985). Estos dispositivos utilizan un micrófono para captar sonido y un procesador para convertirlo en señales eléctricas, y transmiten estas señales al sistema nervioso. Un implante de cóclea se basa en el hecho de que muchas de las fibras nerviosas auditivas permanecen intactas en el paciente que tiene esta forma de pérdida auditiva. La transmisión desde el micrófono hasta las células nerviosas está representado por la función de ganancia

$$H(j\omega) = \frac{10(j\omega/50 + 1)}{(j\omega/2 + 1)(j\omega/20 + 1)(j\omega/80 + 1)}$$

Trace el diagrama de Bode de magnitud para  $H(j\omega)$  de  $1 \leq \omega \leq 100$ .

**P 13.3-18** En la figura 13.3-18 se muestra un circuito de amplificador operacional, en el que  $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$  y  $C = 0.02 \mu\text{F}$ .

- (a) Encuentre la expresión para la función de red  $H = V_o/V_s$  y bosqueje el diagrama de Bode asíntotico.
- (b) ¿Cuál es la ganancia del circuito,  $|V_o/V_s|$ , para  $\omega = 0$ ?
- (c) ¿En qué frecuencia  $|V_o/V_s|$  cae a  $1/\sqrt{2}$  de este valor de frecuencia baja?

*Respuestas:* (b) 20 dB y (c) 10 000 rad/s

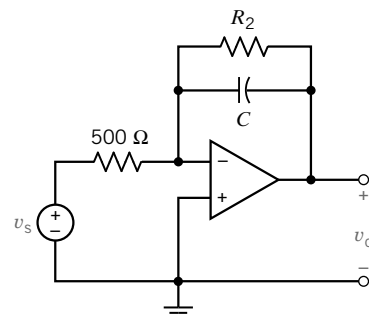


Figura P 13.3-18

**P 13.3-19** Determine la función de red  $H(\omega)$  para el circuito del amplificador operacional que se muestra en la figura P 13.3-19, y trace el diagrama de Bode. Suponga amplificadores operacionales ideales.

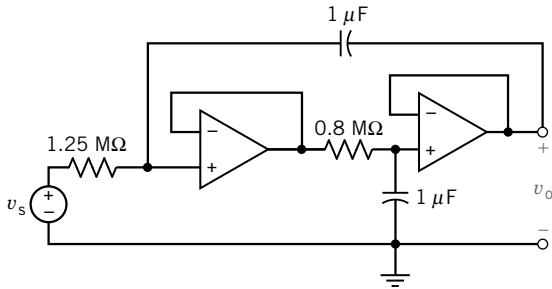


Figura P 13.3-19

P 13.3-20 La función de red de un circuito es

$$H(\omega) = \frac{-3(5 + j\omega)}{j\omega(2 + j\omega)}$$

Bosqueje el diagrama de Bode de magnitud asintótica que corresponde a **H**.

P 13.3-21 La función de red de un circuito es

$$H(\omega) = \frac{(j\omega)^3}{(4 + j2\omega)}$$

Bosqueje el diagrama de Bode de magnitud asintótica que corresponde a **H**.

P 13.3-22 La función de red de un circuito es

$$H(\omega) = \frac{2(j2\omega + 5)}{(4 + j3\omega)(j\omega + 2)}$$

Bosqueje el diagrama de Bode de magnitud asintótica que corresponde a **H**.

P 13.3-23 La función de red de un circuito es

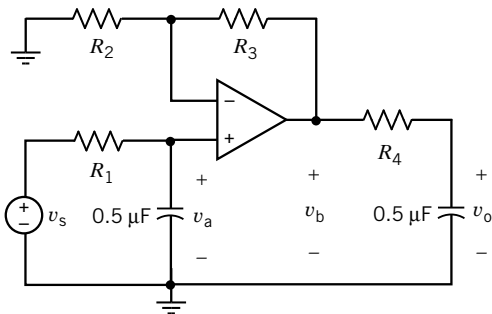
$$H(\omega) = \frac{4(20 + j\omega)(20\,000 + j\omega)}{(200 + j\omega)(2\,000 + j\omega)}$$

Bosqueje el diagrama de Bode de magnitud asintótica que corresponde a **H**.

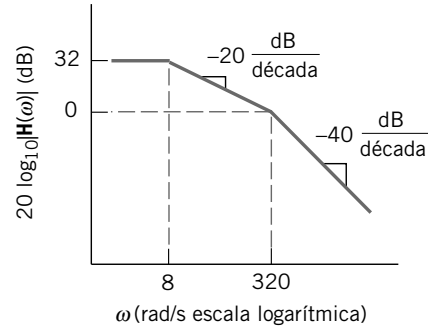
P 13.3-24 La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.3-24a es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . La salida del circuito es el voltaje,  $v_o$ , del condensador. La función de red del circuito es

$$H(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_s(\omega)}$$

Determine los valores de las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$  requeridas para hacer que la función de red del circuito corresponda con el diagrama de Bode asintótico en la figura P 13.3-24b.



(a)



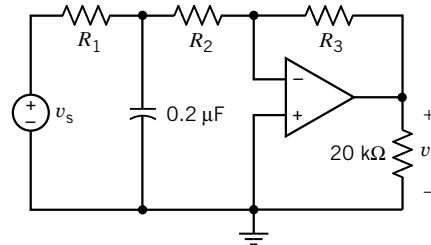
(b)

Figura P 13.3-24

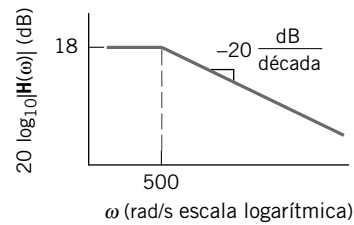
P 13.3-25 La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.3-25a es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . La salida del circuito es el voltaje,  $v_o$ . La función de red del circuito es

$$H(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_s(\omega)}$$

Determine los valores de las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  requeridas para hacer que la función de red del circuito corresponda con el diagrama de Bode asintótico en la figura P 13.3-25b.



(a)



(b)

Figura P 13.3-25

P 13.3-26 La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.3-26a es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . La salida del circuito es el voltaje,  $v_o$ . La función de red del circuito es

$$H(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_s(\omega)}$$

(a) Determine los valores de las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$  requeridos para hacer que la función de red del circuito corresponda con el diagrama de Bode asintótico en la figura P 13.3-26b.

(b) Determine los valores de las ganancias  $K_1$  y  $K_2$  en la figura P 13.3-26b.

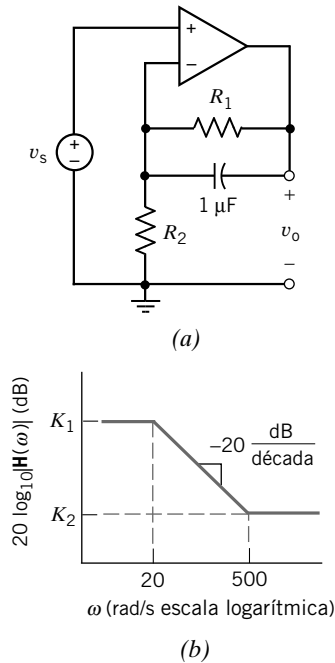


Figura P 13.3-26

**P 13.3-27** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.3-27a es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . La salida del circuito es el voltaje,  $v_o$ . La función de red del circuito es

$$H(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_s(\omega)}$$

Determine los valores de  $R$ ,  $C$ ,  $R_1$  y  $R_2$  requeridos para hacer que la función de red del circuito corresponda al diagrama de Bode asintótico en la figura P 13.3-27b.

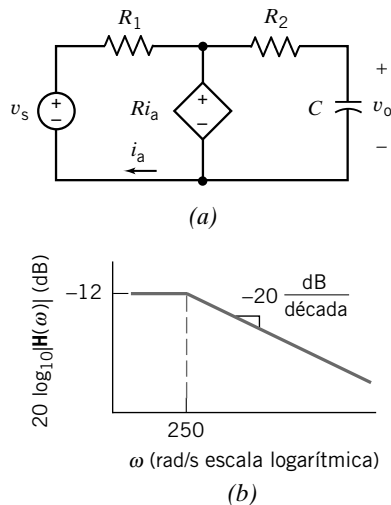


Figura P 13.3-27

**P 13.3-28** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.3-28a es la corriente de la fuente de corriente,  $i_s$ . La salida del circuito es la corriente,  $i_o$ , del condensador. La función de red del circuito es

$$H(\omega) = \frac{I_o(\omega)}{I_s(\omega)}$$

Determine los valores de  $G$ ,  $C$ ,  $R_1$  y  $R_2$ , requeridos para hacer que la función de red del circuito corresponda con el diagrama de Bode asintótico que se muestra en la figura P 13.3-28b.

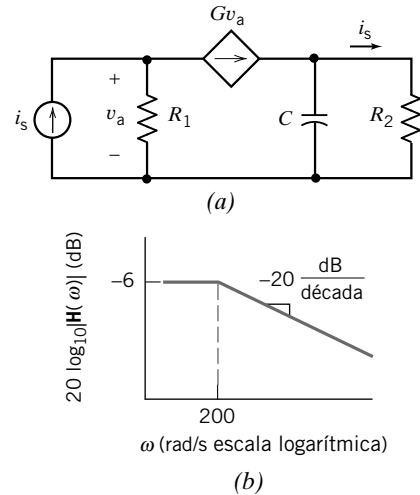


Figura P 13.3-28

**P 13.3-29** En la figura P 13.3-29 se muestra un circuito de primer orden. Determine la razón  $V_o/V_s$  y bosqueje el diagrama de Bode cuando  $RC = 0.1$  y  $R_1/R_2 = 3$ .

*Respuesta:*  $H = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{1}{1 + j\omega RC}$

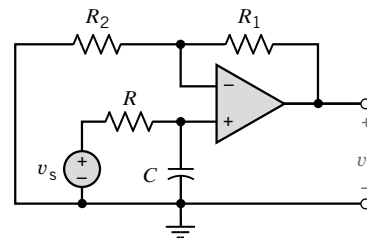


Figura P 13.3-29

**P 13.3-30** (a) Dibuje el diagrama de Bode de la función de red  $V_o/V_s$  para el circuito de la figura P 13.3-30. (b) Determine  $v_o(t)$  cuando  $v_s = 10 \cos 20t$  V.

*Respuesta:* (b)  $v_o(t) = 4.18 \cos(20t - 24.3^\circ)$  V

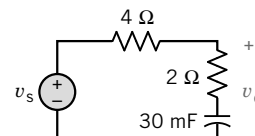


Figura P 13.3-30



**P 13.3-31** Dibuje el diagrama de Bode de magnitud asintótica para

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{10(1+j\omega)}{j\omega(1+j0.5\omega)(1+j0.6(\omega/50) + (j\omega/50)^2)}$$

**Sugerencia:** En  $\omega = 0.1$  rad/s, el valor de la ganancia es de 40 dB y la pendiente del diagrama de Bode asintótico es  $-20$  dB/década. Hay un cero en 1 rad/s, un polo en 2 rad/s, y un polo de segundo orden en 50 rad/s. La pendiente del diagrama de Bode de magnitud asintótica se incrementa 20 dB/década conforme se incrementa la frecuencia pasado el cero y, finalmente, disminuye 40 dB/década al incrementarse la frecuencia pasado el polo de segundo orden.

### Sección 13.4 Circuitos resonantes

**P 13.4-1** Para un circuito  $RLC$  en paralelo con  $R = 10$  k $\Omega$ ,  $L = 1/120$  H y  $C = 1/30$   $\mu$ F, encuentre  $\omega_0$ ,  $Q$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y el ancho de banda  $BW$ .

**Respuestas:**  $\omega_0 = 60$  krad/s,  $Q = 20$ ,  $\omega_1 = 58.519$  krad/s,  $\omega_2 = 61.519$  krad/s y  $BW = 3$  krad/s.

**P 13.4-2** Un circuito  $RLC$  resonante en paralelo es conducido por una fuente de corriente  $i_s = 20 \cos \omega t$  mA y muestra una respuesta máxima de 8 V en  $\omega = 1\,000$  rad/s y 4 V a 897.6 rad/s. Encuentre  $R$ ,  $L$  y  $C$ .

**Respuestas:**  $R = 400$   $\Omega$ ,  $\omega_1, L = 50$  mH y  $C = 20$   $\mu$ F

**P 13.4-3** Un circuito  $RC$  resonante en serie tiene  $L = 10$  mH,  $C = 0.01$   $\mu$ F y  $R = 100$   $\Omega$ . Determine  $\omega_0$ ,  $Q$  y  $BW$ .

**Respuestas:**  $\omega_0 = 10^5$ ,  $Q = 10$  y  $BW = 10^4$ .

**P 13.4-4** Un cristal de cuarzo tiene la propiedad de que cuando se aplica presión a su caras, desarrolla una diferencia potencial a través de las facetas opuestas. Cuando se aplica un voltaje alternante ocurren vibraciones mecánicas y se presenta una resonancia electromecánica. Un cristal se puede representar por un circuito  $RLC$  en serie. Un cristal específico tiene un modelo con  $L = 1$  mH,  $C = 10$   $\mu$ F y  $R = 1$   $\Omega$ . Encuentre  $\omega_0$ ,  $Q$  y el ancho de banda.

**Respuestas:**  $\omega_0 = 10^4$  rad/s,  $Q = 10$  y  $BW = 10^3$  rad/s

**P 13.4-5** Diseñe un circuito resonante en paralelo para tener  $\omega_0 = 2\,500$  rad/s,  $\mathbf{Z}(\omega_0) = 100$   $\Omega$  y  $AB = 500$  rad/s.

**Respuestas:**  $R = 100$   $\Omega$ ,  $L = 8$  mH y  $C = 20$   $\mu$ F

**P 13.4-6** Diseñe un circuito resonante en serie que tenga  $\omega_0 = 2\,500$  rad/s,  $\mathbf{Y}(\omega) = 1/100$   $\Omega$  y  $BW = 500$  rads.

**Respuestas:**  $R = 100$   $\Omega$ ,  $L = 0.2$  H y  $C = 0.8$   $\mu$ F.

**P 13.4-7** El circuito que se muestra en la figura 13.4-7 representa un condensador, bobina y un resistor en paralelo. Calcule la frecuencia resonante. El ancho de banda y  $Q$  para el circuito.

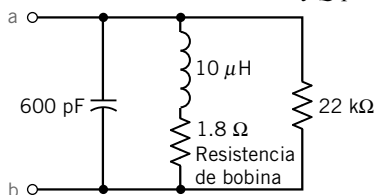


Figura P 13.4-7

**P 13.4-8** Considere el modelo sencillo de un sistema de energía eléctrica como se muestra en la figura P 13.4-8. La inductancia,  $L = 0.25$  H, representa la línea de potencia y el transformador. La carga del cliente es  $R_L = 100$   $\Omega$ , y el cliente suma  $C = 25$   $\mu$ F para incrementar la magnitud de  $\mathbf{V}_o$ . La fuente es  $v_s = 1\,000 \cos 400t$  V, y se desea que  $|\mathbf{V}_o|$  también sea de 1 000 V.

- Encuentre  $|\mathbf{V}_o|$  para  $R_L = 100$   $\Omega$ .
- Cuando el cliente sale por la noche, desconecta mucha de su carga, haciendo que  $R_L = 1$  k $\Omega$ , en cuyo punto, empiezan a aparecer chispas y humo en el equipo que aún queda conectado a la línea de potencia. El cliente le llama para consultarle. ¿Por qué aparecieron las chispas cuando  $R_L = 1$  k $\Omega$ ?

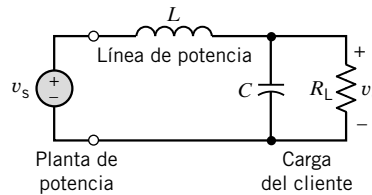


FIGURA P 13.4-8 Modelo de un sistema de energía eléctrica.

**P 13.4-9** Considere el circuito en la figura P 13.4-9.  $R_1 = R_2 = 1$   $\Omega$ . Seleccione  $C$  y  $L$  para obtener una frecuencia resonante de  $\omega_0 = 100$  rad/s.

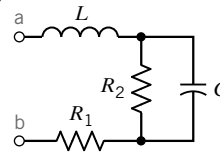


Figura P 13.4-9

**P 13.4-10** Para el circuito que se muestra en la figura P 13.4-10, (a) derive una expresión para la respuesta de magnitud  $|\mathbf{Z}_{ent}|$  versus  $\omega$ ; (b) bosqueje  $|\mathbf{Z}_{ent}|$  versus  $\omega$  y, (c) encuentre  $|\mathbf{Z}_{ent}|$  en  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ .

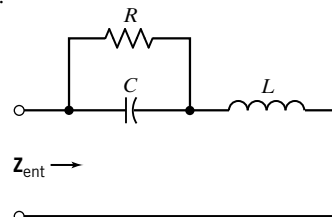


Figura P 13.4-10

**P 13.4-11** El circuito que se muestra en la figura P 13.4-11 muestra un arreglo experimental que se podría utilizar para medir los parámetros  $k$ ,  $Q$  y  $\omega_0$  de este circuito resonante en serie. Estos parámetros se pueden determinar desde un diagrama de respuesta de frecuencia de magnitud para  $\mathbf{Y} = \mathbf{I}/\mathbf{V}$ . Es más conveniente medir los voltajes de nodo que las corrientes, por lo que se han medido los voltajes de nodo  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{V}_2$ . Expresé  $|\mathbf{Y}|$  como una función de  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{V}_2$ .

**Sugerencia:** Sea  $\mathbf{V} = A$  y  $\mathbf{V}_2 = B \angle \theta$ .

$$\text{Entonces } \mathbf{I} = \frac{(A - B \cos \theta) - jB \sin \theta}{R}$$

Respuesta:  $|Y| = \frac{\sqrt{(A - B \cos \theta)^2 + (B \sin \theta)^2}}{AR}$

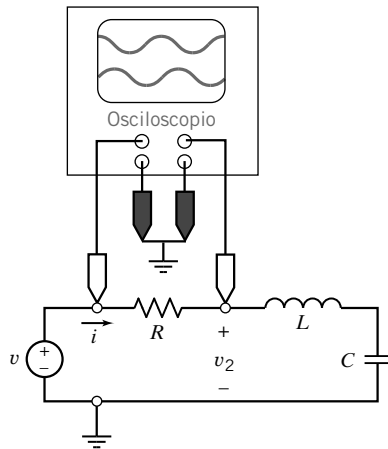


Figura P 13.4-11

**Sección 13.6 Trazo de gráficas de Bode utilizando MATLAB**

**P 13.6-1** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.6-1 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . La salida del circuito es el voltaje,  $v_o$ . Utilice MATLAB para trazar la ganancia y el cambio de fase de este circuito como una función de frecuencia para frecuencias en el rango de  $1 < \omega < 1\,000$  rad/s.

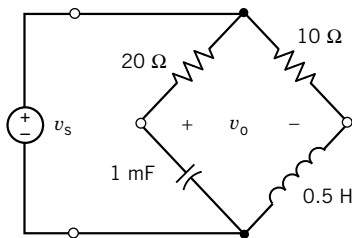


Figura P 13.6-1

**P 13.6-2** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.6-2 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . La salida del circuito es el voltaje,  $v_o$ . Utilice MATLAB para trazar la ganancia y el cambio de fase de este circuito como una función de frecuencia para frecuencias en el rango de  $1 < \omega < 1\,000$  rad/s.

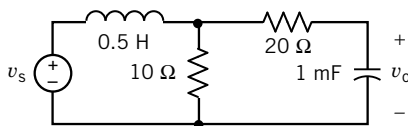


Figura P 13.6-2

**P 13.6-3** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 13.6-3 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_s$ . La salida del circuito es el voltaje,  $v_o$ . Utilice MATLAB para trazar la ganancia y el cambio de fase de este circuito como una función de frecuencia para frecuencias en el rango de  $1 < \omega < 1\,000$  rad/s.

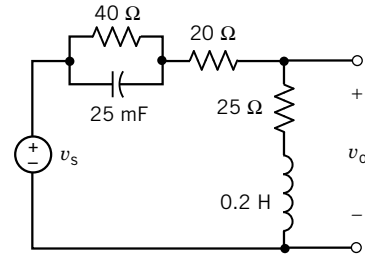


Figura P 13.6-3

**Sección 13.9 ¿Cómo lo podemos comprobar...?**

**P 13.9-1** El análisis de circuitos contenido en un reporte de laboratorio indica que la función de red de un circuito es

$$H(\omega) = \frac{1 + j \frac{\omega}{630}}{10 \left( 1 + j \frac{\omega}{6\,300} \right)}$$

Este reporte de laboratorio contiene la siguiente respuesta de frecuencia de mediciones hechas sobre el circuito. ¿Estos datos se ven razonables?

$\omega$ , rad/s	200	400	795	1585	3162
$ H(\omega) $	0.105	0.12	0.16	0.26	0.460
$\omega$ , rad/s	6 310	12 600	25 100	50 000	100 000
$ H(\omega) $	0.71	1.0	1.0	1.0	1.0

**P 13.9-2** Un circuito resonante en paralelo (vea figura 13.4-2) tiene  $Q = 70$  y una frecuencia resonante  $\omega_0 = 10\,000$  rad/s. Un reporte establece que el ancho de banda de este circuito es 71.43 rad/s. Verifique este resultado.

**P 13.9-3** Un circuito resonante en serie (vea figura 13.4-4) tiene  $L = 1$  mH,  $C = 10$   $\mu$ F y  $R = 0.5$   $\Omega$ . Un programa de software establece que la frecuencia resonante es  $f_0 = 1.59$  kHz y el ancho de banda es  $AB = 79.6$  Hz. ¿Son correctos estos resultados?

**P 13.9-4** Un reporte obsoleto de laboratorio contiene el diagrama de Bode aproximado que se muestra en la figura P 13.8-4 y concluye que la función de red es

$$H(\omega) = \frac{40 \left( 1 + j \frac{\omega}{200} \right)}{\left( 1 + j \frac{\omega}{800} \right)}$$

¿Está de acuerdo?

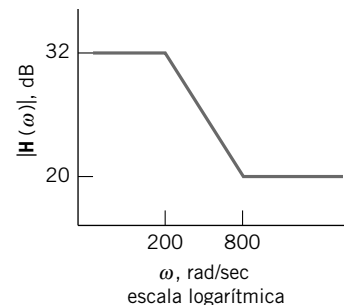


Figura P 13.8-4

## Problemas de PSpice

**PS 13-1** La entrada al circuito que se muestra en la figura PS 13-1 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje,  $v_o(t)$ , a través de la conexión en paralelo del condensador y el resistor de 1 k $\Omega$ . La función de red que representa este circuito es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{k}{1 + j\frac{\omega}{p}}$$

Utilice PSpice para trazar la respuesta de frecuencia de este circuito. Determine los valores del polo,  $p$ , y de la ganancia de cd,  $k$ .

*Respuestas:*  $p = 250$  rad/s y  $k = 0.2$  V/V

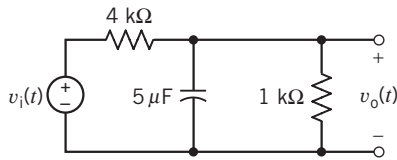


Figura PS 13-1

**PS 13-2** La entrada al circuito que se muestra en la figura PS 13-2 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje,  $v_o(t)$ , a través de la conexión en serie del inductor y el resistor de 60-k $\Omega$ . La función de red que representa este circuito es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = k \frac{1 + j\frac{\omega}{z}}{1 + j\frac{\omega}{p}}$$

Utilice PSpice para trazar la respuesta de frecuencia de este circuito. Determine los valores del polo,  $p$ , del cero,  $z$ , y de la ganancia de cd,  $k$ .

*Respuestas:*  $p = 20$  rad/s,  $z = 12$  rad/s y  $k = 0.6$  V/V

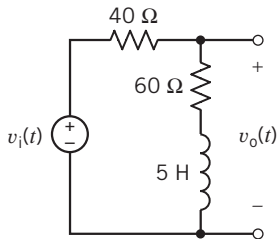


Figura PS 13-2

**PS 13-3** La entrada al circuito que se muestra en la figura PS 13-3 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje,  $v_o(t)$ , a través del resistor de 30-k $\Omega$ . La función de red que representa este circuito es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{k}{1 + j\frac{\omega}{p}}$$

Utilice PSpice para trazar la respuesta de frecuencia de este circuito. Determine los valores del polo,  $p$ , y de la ganancia de cd,  $k$ .

*Respuestas:*  $p = 100$  rad/s y  $k = 4$  V/V

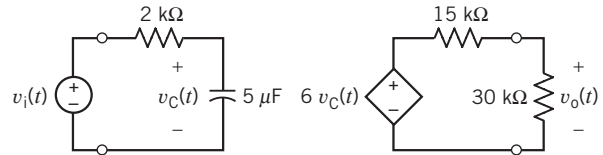


Figura PS 13-3

**PS 13-4** La entrada al circuito que se muestra en la figura PS 13-4 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje,  $v_o(t)$ , a través del resistor de 20-k $\Omega$ . La función de red que representa este circuito es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{k}{1 + j\frac{\omega}{p}}$$

Utilice PSpice para trazar la respuesta de frecuencia de este circuito. Determine los valores del polo,  $p$ , y de la ganancia de cd,  $k$ .

*Respuestas:*  $p = 10$  rad/s y  $k = 5$  V/V

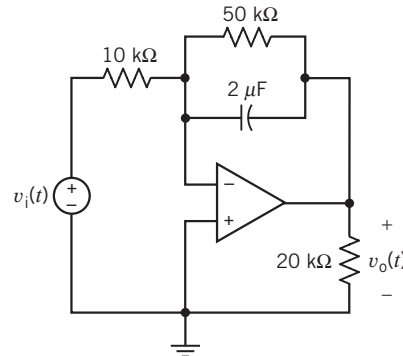


Figura PS 13-4

**PS 13-5** La figura PS 13-5 muestra un circuito y una respuesta de frecuencia. Los trazos de la respuesta de frecuencia se realizaron utilizando PSpice y Probe.  $V(R3:2)$  y  $Vp(R3:2)$  indican la magnitud y el ángulo del fasor que corresponden a  $v_o(t)$ .  $V(V1:+)$  y  $Vp(V1:+)$  indican la magnitud y el ángulo del fasor que corresponden a  $v_i(t)$ . Por ende,  $V(R3:2)/V(V1:+)$  es la ganancia del circuito y  $Vp(R3:2) - Vp(V1:+)$  es el cambio de fase del circuito.

Determine valores para  $R$  y  $C$  requeridos para hacer que el circuito corresponda a la respuesta de frecuencia.

*Sugerencia:* PSpice y Probe emplean m para mil o  $10^{-3}$ . Por lo tanto, la etiqueta (159.513, 892.827 m) indica que la ganancia del circuito es  $892.827 \times 10^{-3} = 0.892827$  en una frecuencia de 159.513 Hz  $\approx 100$  rad/s.

*Respuestas:*  $R = 5$  k $\Omega$  y  $C = 0.2$   $\mu$ F

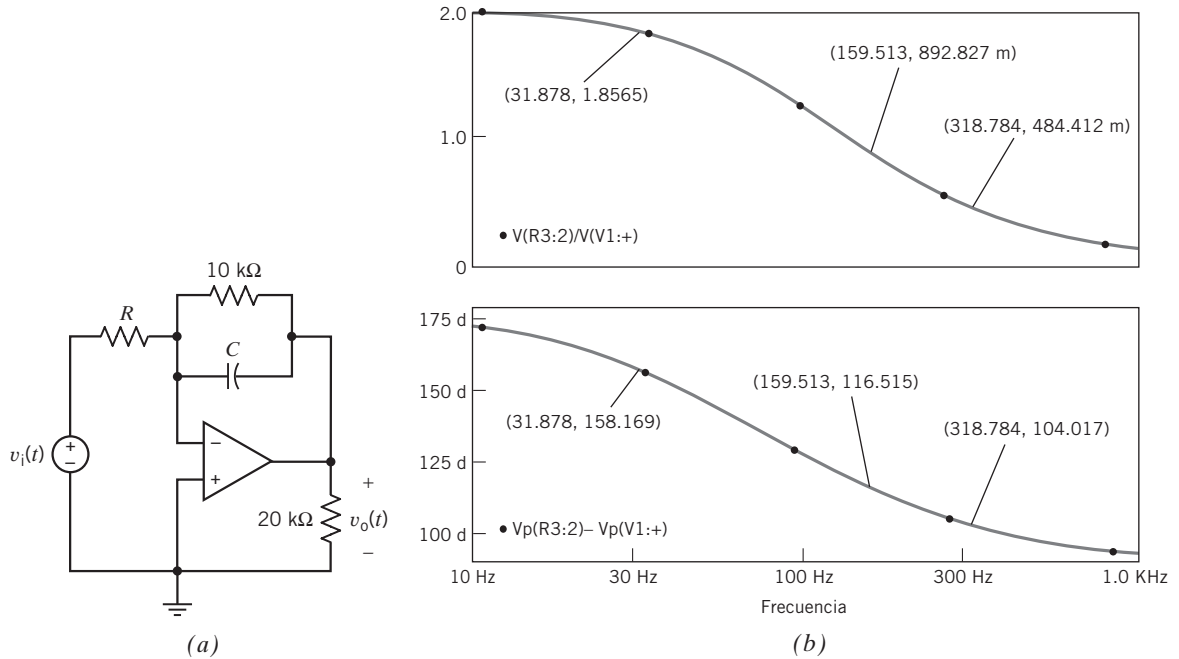


Figura PS 13.5 (a) Un circuito y (b) la respuesta de frecuencia correspondiente.

**PS 13-6** La figura PS 13-6 muestra un circuito y una respuesta de frecuencia. Los trazos de la respuesta de frecuencia se realizaron utilizando PSpice y Probe.  $V(R3:2)$  y  $Vp(R3:2)$  indican la magnitud y el ángulo del fasor que corresponden a  $v_o(t)$ .

$V(V1:+)$  y  $Vp(V1:+)v_i(t)$ . Por ende,  $V(R3:2)/V(V1:+)Vp(R3:2) - Vp(V1:+)$

Determine valores para  $R$  y  $C$  requeridos para hacer que el circuito corresponda a la respuesta de frecuencia.

**Sugerencia:** PSpice y Probe emplean m para mil o  $10^{-3}$ . Por lo tanto, la etiqueta (159.268, 171.408 m) indica que la ganancia

del circuito es  $171.408 \times 10^{-3} = 0.171408$  en una frecuencia de  $159.268 \text{ Hz} \approx 1000 \text{ rad/s}$ .

**Respuestas:**  $R = 20 \text{ k}\Omega$  y  $C = 0.25 \mu\text{F}$

## Problemas de diseño

**PD 13-1** Diseñe un circuito que tenga una ganancia de frecuencia baja de 5, y haga la transición de  $H = 2$  a  $H = 5$  entre las frecuencias de 1 kHz y 10 kHz.

**PD 13-2** Determine  $L$  y  $C$  para el circuito de la figura PD 13.2 para obtener un filtro de paso bajo con una ganancia de  $-3 \text{ dB}$  a 100 kHz.

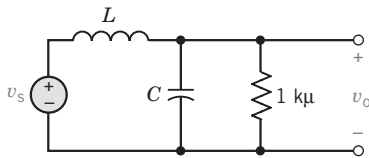


Figura PD 13.2

**PD 13-3** La British Rail ha construido un ferrocarril instrumentado que puede ser jalado sobre sus rieles a velocidades de hasta 180 km/ph y mediremos la geometría del grado de tracción. Con el uso de tal ferrocarril, la British Rail puede monitorear y dar seguimiento al desgaste gradual del grado de los rieles, en especial la bancada de las curvas, y así permitir un mantenimiento preventivo que se programa según se vaya necesitando en antelación a fallas del grado de tracción.

El ferrocarril instrumentado tiene muchos sensores, como sensores de la tasa de ángulo (dispositivos que producen una señal proporcional a la velocidad de rotación) y acelerómetros (dispositivos que producen una señal proporcional a la aceleración), cuyas señales se filtran y combinan en cierto modo para crear un sensor compuesto denominado acelerómetro compensado (Lewis, 1988). Un componente de esta señal de sensor compuesto se obtiene por la integración y filtrado de paso bajo de una señal del acelerómetro. Un filtro de paso bajo de primer orden se aproximará a un integrador en frecuencias muy por encima de las frecuencias de corte. Esto se puede ver al calcular el cambio de fase de la función de transferencia de filtrado en varias frecuencias. A frecuencias bastante altas, el cambio de fase se aproximará a  $90^\circ$ , la fase característica de un integrador.

Se ha propuesto un circuito para filtrar la señal del acelerómetro, como se muestra en la figura PD 13-3. El circuito está compuesto de tres secciones, etiquetadas A, B y C. Para cada sección, encuentre una expresión y déle nombre a la función desempeñada por esa sección. Luego encuentre una expresión para la función de ganancia de todo el circuito,  $V_o/V_s$ . Para los valores de componentes, evalúe la magnitud y la fase de la respuesta del circuito en 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0 y 10.0 Hz. Dibuje un diagrama de Bode. ¿En qué frecuencia está la respuesta de fase aproximadamente igual a  $0^\circ$ ? ¿Cuál es el significado de esta frecuencia?

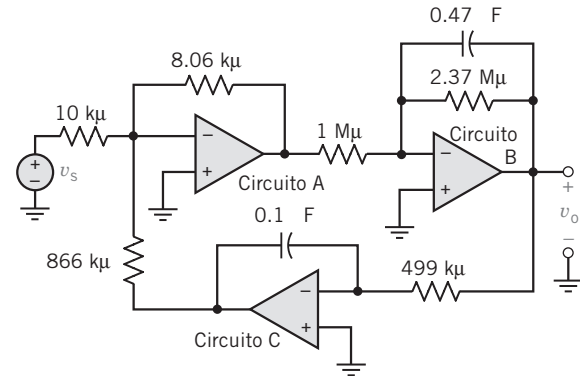


Figura PD 13-3

**PD 13-4** Diseñe un circuito que tenga la función de red

$$\mathbf{H}(\omega) = 10 \frac{j\omega}{\left(1 + j\frac{\omega}{200}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{500}\right)}$$

**Sugerencia:** Utilice dos circuitos de la tabla 13.4-1. Conecte los circuitos en cascada. Esto significa que la salida de un circuito se utiliza como la entrada del circuito siguiente.  $\mathbf{H}(\omega)$  será el producto de la función de red de los dos circuitos a partir de la tabla 13.3-2.

**PD 13-5** Los instrumentos que perciben la tensión se pueden utilizar para medir la orientación y la magnitud de tensiones que circulan en más de una dirección. La investigación de una forma de prevenir los terremotos se enfoca en la identificación de precursores, o cambios, que alertan confiablemente de un sismo inminente. Dado que muy pocos terremotos han ocurrido precisamente en locaciones instrumentadas, se ha vuelto una búsqueda lenta y frustrante. Los estudios de laboratorio muestran que antes de que la roca se rompa realmente (lo que precipita un terremoto) su velocidad de tensión interna aumenta. El material empieza a fallar antes de que se fracture realmente. Este preludio a la fractura directa se denomina "corrimiento terciario" (Brown, 1989).

La frecuencia de señales de tensión varía de 0.1 a 100 rad/s. Se utiliza un circuito denominado filtro de paso de banda para pasar estas frecuencias. La función de red del filtro de paso de banda es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{Kj\omega}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

Especifique  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $K$  de modo que lo siguiente sea el caso:

1. La ganancia es de al menos 17 dB sobre el rango de 0.1 a 100 rad/s.
2. La ganancia es de menos de 17 dB fuera del rango de 0.1 a 100 rad/s.
3. La ganancia máxima es de 20 dB.

**PD 13-6** ¿Es posible diseñar el circuito que se muestra en la figura PD 13-6 para tener un cambio de fase de  $-45^\circ$  y una ganancia de 2 V/V, ambos en una frecuencia de 100 radianes/segundo, utilizando un condensador de 0.1 microfaradios y un resistor de un rango de 1 k ohmios a 200 k ohmios?

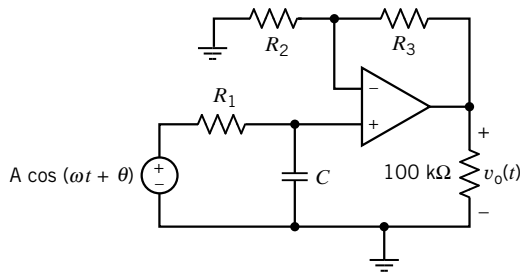


Figura PD 13-6

**PD 13-7** Diseñe el circuito que se muestra en la figura PD 13-7a para tener el diagrama de Bode asintótico que se muestra en la figura PD 13-7b.

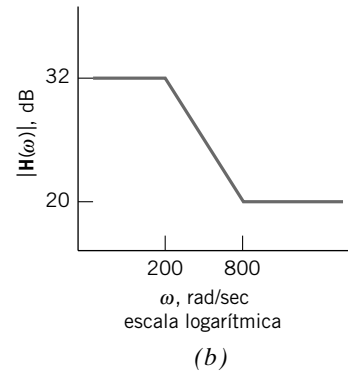
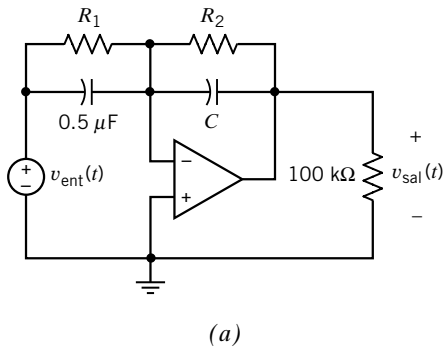


Figura PD 13-7

**PD 13-8** Para el circuito de la figura 13-8, seleccione  $R_1$  y  $R_2$  de modo que la ganancia en frecuencias altas sea de 10 V/V y el cambio de fase sea de  $195^\circ$  en  $\omega = 1\,000$  rad/s. Determine la ganancia en  $\omega = 10$  rad/s.

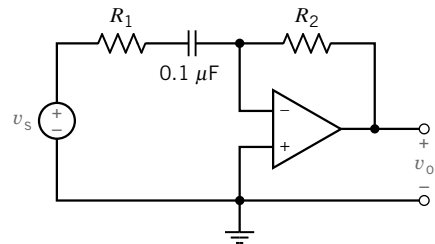


Figura PD 13-8

# Transformada de Laplace

## CAPÍTULO 14

### EN ESTE CAPÍTULO

- |      |  |       |  |
|------|--|-------|--|
| 14.1 | Introducción   | 14.10 | Estabilidad  |
| 14.2 | Transformada de Laplace  | 14.11 | Expansión de fracción parcial utilizando MATLAB                          |
| 14.3 | Entradas de pulso  | 14.12 | ¿Cómo podemos comprobar... la función de transferencia?                  |
| 14.4 | Transformada inversa de Laplace                                      | 14.13 | <b>EJEMPLO DE DISEÑO</b> — Compuerta de carga del transbordador espacial |
| 14.5 | Teoremas del valor inicial y final                                   | 14.14 | Resumen  |
| 14.6 | Solución de ecuaciones diferenciales que describen un circuito       |       | Problemas  |
| 14.7 | Análisis de circuitos utilizando impedancias y condiciones iniciales |       | Problemas de PSpice  |
| 14.8 | Función de transferencia e impedancia                                |       | Problemas de diseño  |
| 14.9 | Convolución  |       |  |

### 14.1 INTRODUCCIÓN

Los circuitos que no contienen condensadores o inductores se pueden representar por ecuaciones algebraicas.

- Los capítulos del 1 a 6 describieron circuitos sin condensadores o inductores. Aprendimos muchas cosas acerca de los circuitos, entre ellas cómo representarlos mediante ecuaciones de corrientes de enlaces o por ecuaciones de voltaje de nodos.
- En el capítulo 7 se describen los inductores y los condensadores.

Los circuitos que tienen condensadores y/o inductores se representan por ecuaciones diferenciales. En general, el orden de la ecuación diferencial es igual a la cantidad de condensadores, más el número de inductores en el circuito. La escritura y despeje de estas ecuaciones diferenciales puede ser un reto.

- En el capítulo 8 analizamos circuitos de primer orden.
- En el capítulo 9 analizamos circuitos de segundo orden.

La respuesta de un circuito que contiene condensadores y/o inductores se puede separar en dos partes: la respuesta de estado estable y la parte transitoria de la respuesta.

- En los capítulos 10 a 13 estudiamos la respuesta de estado estable de circuitos con entradas senoidales. Encontramos que podríamos analizar tales circuitos representándolos en el dominio de frecuencia. No restringimos nuestra atención a circuitos de primero o segundo orden.

- En este capítulo encontramos la respuesta total, la parte transitoria, más la parte de estado estable, de circuitos con condensadores y/o inductores. No restringiremos la atención a circuitos de primero o segundo orden, o a circuitos con entradas senoidales.

En este capítulo presentamos una herramienta muy poderosa para el análisis de circuitos. La transformada de Laplace capacita al analista de circuitos para transformar el conjunto de ecuaciones diferenciales que describen un circuito al dominio de frecuencia complejo, donde se convierten en un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales. Luego, manejando álgebra directamente, resolvemos variables de interés. Finalmente, empleamos la transformada inversa de Laplace para volver al dominio de tiempo y expresar la respuesta deseada en términos de tiempo. ¡Realmente es una herramienta poderosa!

A continuación, aprendemos cómo representar el circuito en sí en el dominio de frecuencia complejo. Luego de hacerlo, podemos analizar el circuito escribiendo y despejando un conjunto de ecuaciones algebraicas, por ejemplo, ecuaciones de corrientes de enlaces o ecuaciones de voltaje de nodos. En otras palabras, al utilizar el dominio de frecuencia complejo se elimina la necesidad de escribir la ecuación diferencial que representa al circuito.

Para terminar, aprendemos cómo representar un circuito lineal por su función de transferencia, respuesta escalón, o respuesta de impulso.

## 14.2 TRANSFORMADA DE LAPLACE

Como hemos visto en capítulos anteriores, es útil *transformar* las ecuaciones describiendo un circuito desde el dominio de tiempo hasta el dominio de frecuencia, luego efectuar un análisis y, finalmente, transformar la solución del problema de vuelta al dominio de tiempo. Recuerde que en el capítulo 10 definimos el fasor como una transformación matemática para simplificar el hallazgo de la respuesta de estado estable de un circuito a una entrada senoidal. Utilizando la transformación de fasores, solucionamos *ecuaciones algebraicas* que tienen coeficientes compuestos en vez de despejar *ecuaciones diferenciales*, si bien con coeficientes reales. El método de transformar se resume en la figura 14.2-1.

En este capítulo utilizaremos la transformada de Laplace en vez de la transformación de fasores, para transformar ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas. Esto nos permitirá determinar la respuesta total para diversas funciones de entrada en vez de respuestas de estado estable para entradas senoidales. (La respuesta total consta de la respuesta de estado estable a una con la parte transitoria de

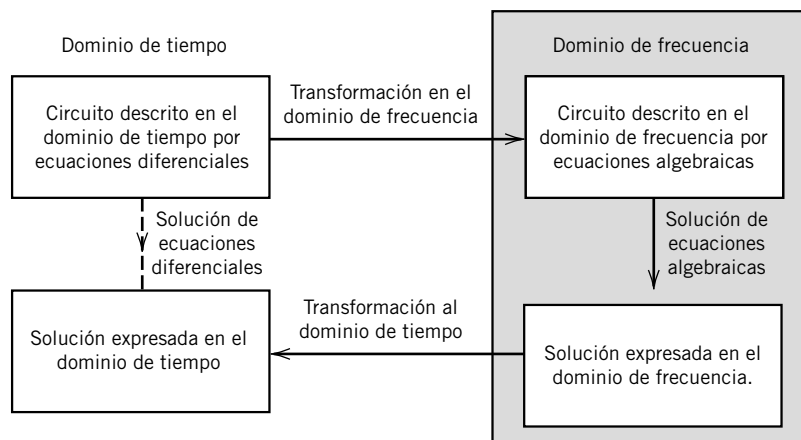


FIGURA 14.2-1 Método de transformar.





**FIGURA 14.2-2**  
A Pierre Simon Laplace (1749-1827) se le acredita la transformada que lleva su nombre. Cortesía de Burndy Library.

la respuesta. Más adelante hablaremos de esto extensamente.) A Pierre Simon Laplace (figura 14.2-2) se le acredita la transformada que lleva su nombre.

La **transformada de Laplace** (de un lado o unilateral) se define como

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (14.2-1)$$

donde  $s$  es una variable compuesta dada por

$$s = \sigma + j\omega \quad (14.2-2)$$

La exponente  $st$  de  $e$  en la ecuación 14.2-1 debe ser medible. En consecuencia,  $s$  tiene unidades de frecuencia. Es usual referirse a  $s$  como frecuencia compleja. El límite inferior de la integral en la ecuación 14.2-1 es  $0^-$ , un tiempo justo antes de  $t = 0$ . Por el contrario, la transformada de Laplace no contempla el efecto de esa parte de  $f(t)$  que ocurre al tiempo  $t < 0$ .

La notación  $\mathcal{L}[f(t)]$  indica la toma de transformada de Laplace de  $f(t)$ . Al resultado,  $F(s)$  se le llama transformada de Laplace de  $f(t)$ . Se dice que la función  $f(t)$  existe en el dominio de tiempo, en tanto de que la función  $F(s)$  se dice que existe en el dominio de frecuencia compleja, o dominio  $s$ . (En ocasiones, de manera informal, la referencia a dominio de frecuencia compleja es como dominio de frecuencia cuando el contexto hace más claro que dominio de frecuencia sea más breve que dominio de frecuencia compleja.).

La transformada inversa de Laplace se define por la integral de inversión compleja

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (14.2-3)$$

La integral en la ecuación 14.2-3 es una integración de contorno en el plano compuesto. La evaluación de esta integral requiere un análisis complejo y está más allá del propósito de este libro. En vez de evaluar la integral en la ecuación 14.2-3, nos apoyamos en el hecho de que la transformada de Laplace es en realidad la transformada inversa de Laplace. Es decir, si  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ , entonces también  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ . Decimos que  $f(t)$  y  $F(s)$  comprenden un par de transformadas de Laplace e indican este hecho como

$$f(t) \leftrightarrow F(s) \quad (14.2-4)$$

Recordamos que la parte de  $f(t)$  que ocurre al tiempo  $t < 0$  no tiene efecto sobre  $F(s)$ , vemos que  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$  provee  $f(t)$  sólo para  $t > 0$ . (A veces la incertidumbre acerca de  $f(t)$  para  $t > 0$  se resuelve requiriendo que  $f(t)$  para  $t < 0$  para  $t < 0$  para todas las funciones de dominio de tiempo.)

### EJEMPLO 14.2-1 Pares de transformada de Laplace

- (a) Encuentre la transformada de Laplace de  $f(t) = e^{-at}$ , donde  $a > 0$ .  
 (b) Encuentre la transformada de Laplace de  $g(t) = e^{-at}u(t)$ , donde  $a > 0$  y  $u(t)$  son la función de escalón unitario.

#### Solución

- (a) Si utilizamos la ecuación 14.2-1, tenemos

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[e^{-at}] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-at}e^{-st} dt = \left. \frac{-e^{-(s+a)t}}{s+a} \right|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

- (b) Usamos de nuevo la ecuación 14.2-1, y tenemos

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[e^{-at}u(t)] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-at}e^{-st} dt = \left. \frac{-e^{-(s+a)t}}{s+a} \right|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

En este ejemplo,  $f(t) \neq g(t)$  cuando  $t < 0$ , pero  $f(t) = g(t)$  cuando  $t > 0$ . En consecuencia,  $F(s) = G(s)$ . La transformada inversa de Laplace de  $F(s) = G(s)$  sólo proporciona  $f(t)$  o  $g(t)$  para  $t > 0$ . Podemos resumir los resultados de este ejemplo con el par de transformada de Laplace:

$$e^{-at} \text{ para } t > 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{s+a}$$

Podríamos hacer un alto y preguntarnos en qué condiciones la integral de la ecuación 14.2-1 converge con un valor finito. Se puede mostrar que la integral converge cuando

$$\int_{0-}^{\infty} |f(t)|e^{-\sigma_1 t} dt < \infty$$

para alguna  $\sigma_1$  positiva real. Si la magnitud de  $f(t)$  es  $|f(t)| < Me^{at}$  para toda  $t$  positiva, la integral convergerá con  $\sigma_1 > a$ . Por consiguiente, la región de convergencia está dada por  $\infty > \sigma_1 > a$  y  $\sigma_1$  se conoce como la abscisa de la convergencia absoluta. Las funciones de tiempo  $f(t)$  que son físicamente posibles tienen siempre una transformada de Laplace.

La linealidad es una propiedad importante de la transformada de Laplace. Considere

$$f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$$

para constantes arbitrarias  $a_1$  y  $a_2$ . Si utilizamos la ecuación 14.2-1 tenemos

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = \int_{0-}^{\infty} (a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t))e^{-st} dt \\ &= a_1 \int_{0-}^{\infty} f_1(t)e^{-st} dt + a_2 \int_{0-}^{\infty} f_2(t)e^{-st} dt \\ &= a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) \end{aligned}$$

donde  $F_1(s)$  y  $F_2(s)$  son transformadas de Laplace de las funciones de tiempo  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ , respectivamente. Podemos resumir la linealidad como

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \quad \leftrightarrow \quad a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) \quad (14.2-5)$$

### EJEMPLO 14.2-2 Linealidad

Encuentre la transformada de Laplace de  $\sin \omega t$ .

#### Solución

Utilice la identidad de Euler para escribir

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

Del ejemplo 14.2-1 tenemos

$$e^{-at} \text{ para } t > 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{s+a}$$

por lo tanto

$$e^{-j\omega t} \text{ para } t > 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{s+j\omega}$$

y

$$e^{j\omega t} \text{ para } t > 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{s-j\omega}$$

Si utilizamos la superposición, entonces tenemos

$$\mathcal{L}[\text{sen } \omega t] = \frac{1}{2j} \mathcal{L}[e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}] = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{(s + j\omega) - (s - j\omega)}{2j(s - j\omega)(s + j\omega)} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Podemos resumir los resultados de este ejemplo con el par de transformadas de Laplace

$$\text{sen } \omega t \text{ para } t > 0 \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Obtengamos la transformación de la primera derivada de  $f(t)$ . Contamos con

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt$$

Anticipándonos a la integración por partes, tomemos  $u = e^{-st}$  y  $dv = \left(\frac{df}{dt}\right) dt = df$ . Entonces  $du = -se^{-st}$  y  $v = f$ . Ahora, al integrar las partes nos da

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s \int_0^{\infty} f e^{-st} dt + f e^{-st} \Big|_0^{\infty} = sF(s) - f(0^-)$$

Podemos resumir la diferenciación en el dominio de tiempo como

$$\frac{df}{dt} \leftrightarrow sF(s) - f(0^-) \quad (14.2-6)$$

Por lo tanto, la transformada de Laplace de la derivada de una función es  $s$  veces la transformada de Laplace de la función, menos la condición inicial.

### EJEMPLO 14.2-3 Diferenciación en el dominio de tiempo

Encuentre la transformada de Laplace de  $\cos \omega t$ .

#### Solución

El coseno es proporcional a la derivada del seno

$$\cos \omega t = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} \text{sen } \omega t$$

Utilizamos la linealidad

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} \text{sen } \omega t\right]$$

Nos valemos de la ecuación 14.2-6,

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} \text{sen } \omega t\right] = s \mathcal{L}[\text{sen } \omega t] - \text{sen } 0 = s \mathcal{L}[\text{sen } \omega t] - 0$$

Del ejemplo 14.2-2,

$$\mathcal{L}[\text{sen } \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

La combinación de resultados nos da

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{1}{\omega}(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

De este modo, empleamos la definición de la transformada de Laplace dada en la ecuación 14.2-1 para obtener los pares de la transformada de Laplace y las propiedades de la transformada de Laplace. La tabla 14.2-1 provee un conjunto de pares importantes de la transformada de Laplace. La tabla 14.2-2 da una lista de propiedades importantes de la transformada de Laplace.

**Tabla 14.2-1 Pares de la transformada de Laplace**

$f(t)$ para $t > 0$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)u(t)]$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}t^n$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\text{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\text{cos}(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \text{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \text{cos}(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

**Tabla 14.2-2 Propiedades de la transformada de Laplace**

PROPIEDAD	$f(t), t > 0$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)u(t)]$
Linealidad	$a_1f_1(t) + a_2f_2(t)$	$a_1F_1(s) + a_2F_2(s)$
Escala de tiempo	$f(at)$ , donde $a > 0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
Integración de tiempo	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$
Diferenciación de tiempo	$\frac{df(t)}{dt}$ $\frac{d^2f(t)}{dt^2}$ $\frac{d^nf(t)}{dt^n}$	$sF(s) - f(0^-)$ $s^2F(s) - \left(sf(0^-) + \frac{df(0^-)}{dt}\right)$ $s^nF(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} \frac{d^{k-1}f(0^-)}{dt^{k-1}}$
Cambio de tiempo	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
Cambio de frecuencia	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
Convolución de tiempo	$f_1(t)*f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$	$F_1(s)F_2(s)$
Integración de frecuencia	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\lambda)d\lambda$
Diferenciación de frecuencia	$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
Valor inicial	$f(0^+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
Valor final	$f(\infty)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

**EJEMPLO 14.2-4** Pares y propiedades de la transformada de Laplace

Encuentre la transformada de Laplace de  $5 - 5e^{-2t}(1 + 2t)$ .

**Solución**

A partir de la linealidad  $\mathcal{L}[5 - 5e^{-2t}(1 + 2t)] = 5 \mathcal{L}[1] - 5 \mathcal{L}[e^{-2t}(1 + 2t)]$

Utilizamos el cambio de frecuencia de la tabla 14.2-2 con  $f(t) = 1 + 2t$  y nos da

$$\mathcal{L}[e^{-2t}(1 + 2t)] = \mathcal{L}[e^{-2t}f(t)] = F(s + 2)$$

donde  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[1 + 2t] = \mathcal{L}[1] + 2 \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s} + 2 \left( \frac{1}{s^2} \right)$

A continuación,  $F(s + 2) = F(s)|_{s \leftarrow s+2}$

Es decir, debemos reemplazar cada  $s$  en  $F(s)$  por  $s + 2$  para obtener  $F(s + 2)$ :

$$F(s + 2) = \left( \frac{1}{s} + 2 \left( \frac{1}{s^2} \right) \right) \Big|_{s \leftarrow s+2} = \frac{1}{s + 2} + 2 \left( \frac{1}{(s + 2)^2} \right) = \frac{s + 2 + 2(1)}{(s + 2)^2} + \frac{s + 4}{s^2 + 4s + 4}$$

Conjuntando todo resulta

$$\mathcal{L}[5 - 5e^{-2t}(1 + 2t)] = 5 \left( \frac{1}{s} \right) - 5 \left( \frac{s + 4}{s^2 + 4s + 4} \right) = \frac{5(s^2 + 4s + 4) - 5s(s + 4)}{s(s^2 + 4s + 4)} = \frac{20}{s(s^2 + 4s + 4)}$$

**EJEMPLO 14.2-5** Pares y propiedades de la transformada de Laplace

Encuentre la transformada de Laplace de  $10 e^{-4t} \cos(20t + 36.9^\circ)$ .

**Solución**

La tabla 14.2-1 tiene entradas para  $\cos(\omega t)$  y  $\sin(\omega t)$ , pero no para  $\cos(\omega t + \theta)$ . Podemos utilizar la identidad trigonométrica

$$A \cos(\omega t + \theta) = (A \cos \theta) \cos(\omega t) - (A \sin \theta) \sin(\omega t)$$

para escribir

$$10 \cos(20t + 36.9^\circ) = 8 \cos(20t) - 6 \sin(20t)$$

Ahora utilizamos la linealidad para escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[10e^{-4t} \cos(20t + 36.9^\circ)] &= \mathcal{L}[e^{-4t}(8 \cos(20t) - 6 \sin(20t))] \\ &= 8 \mathcal{L}[e^{-4t} \cos(20t)] - 6 \mathcal{L}[e^{-4t} \sin(20t)] \end{aligned}$$

Al utilizar los cambios de frecuencia de la tabla 14.2-2 con  $f(t) = \cos(20t)$  resulta

$$\mathcal{L}[e^{-4t} \cos(20t)] = \mathcal{L}[e^{-4t}f(t)] = F(s + 4)$$

donde 
$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[\cos(20t)] = \frac{s}{s^2 + 20^2} = \frac{s}{s^2 + 400}$$

A continuación, 
$$F(s+4) = F(s)|_{s \leftarrow s+4}$$

Es decir, debemos reemplazar  $s$  en  $F(s)$  por  $s+4$  para obtener  $F(s+4)$ :

$$\mathcal{L}[e^{-4t} \cos(20t)] = F(s+4) = \frac{s}{s^2 + 400} \Big|_{s \leftarrow s+4} = \frac{s+4}{(s+4)^2 + 400} = \frac{s+4}{s^2 + 8s + 416}$$

Del mismo modo 
$$\mathcal{L}[e^{-4t} \sin(20t)] = \frac{20}{s^2 + 400} \Big|_{s \leftarrow s+4} = \frac{20}{(s+4)^2 + 400} = \frac{20}{s^2 + 8s + 416}$$

Conjuntado todo nos da

$$\mathcal{L}[10e^{-4t} \cos(20t + 36.9^\circ)] = 8 \left( \frac{s+4}{s^2 + 8s + 416} \right) - 6 \left( \frac{20}{s^2 + 8s + 416} \right) = \frac{8s - 88}{s^2 + 8s + 416}$$

### EJEMPLO 14.2-5 Pares y propiedades de la transformada de Laplace

Encuentre la transformada de Laplace de  $2\delta(t) + 3 + 4u(t)$ .

#### Solución

A partir de la linealidad, 
$$\mathcal{L}[2\delta(t) + 3 + 4u(t)] = 2 \mathcal{L}[\delta(t)] + 3 \mathcal{L}[1] + 4 \mathcal{L}[u(t)]$$

Porque  $1 = u(t)$  para  $t \geq 0$ ,  $\mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[u(t)]$ . Utilizando la tabla 14.2-1 resulta

$$\mathcal{L}[2\delta(t) + 3 + 4u(t)] = 2 \mathcal{L}[\delta(t)] + 3 \mathcal{L}[1] + 4 \mathcal{L}[u(t)] = 2(1) + 3 \left( \frac{1}{s} \right) + 4 \left( \frac{1}{s} \right) = 2 + \frac{7}{s}$$

## 14.3 ENTRADAS DE PULSO

La función escalón, que se muestra en la figura 14.3-1a y se representa como

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (14.3-1)$$

hace una transición abrupta de 0 a 1 en tiempo  $t = 0$ . Defina que la función de impulso,  $\delta(t)$  sea

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \text{indefinida} & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases} \quad (14.3-2)$$

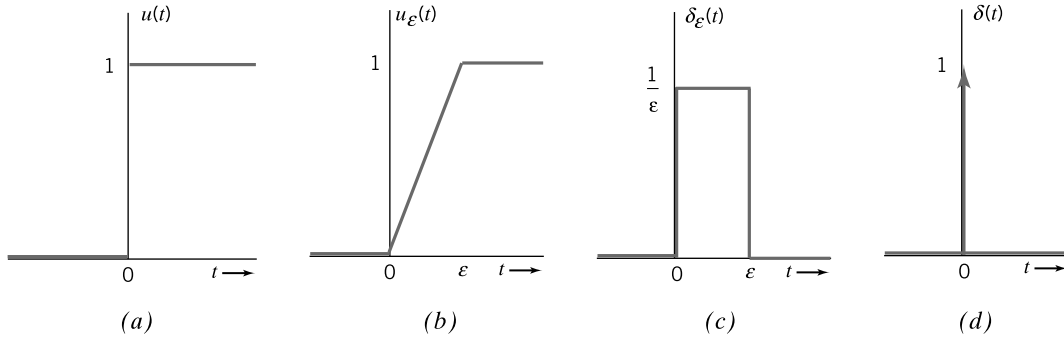


FIGURA 14.3-1 (a) La función escalón; (b) una aproximación a la función escalón; (c) una función de pulso, y (d) la función de impulso.

Dado que  $\delta(t)$  es indefinida en tiempo 0, consideramos la función  $u_\epsilon(t)$  que se muestra en la figura 14.3-1b. Esta función realiza la transición de 0 a 1 durante el intervalo de 0 a  $\epsilon$ . Observe que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(t) = u(t)$$

Sea

$$\delta_\epsilon(t) = \frac{d}{dt} u_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\epsilon} & 0 < t < \epsilon \\ 0 & t > \epsilon \end{cases}$$

Vemos que  $\delta_\epsilon(t)$  es la función de pulso que se muestra en la figura 14.3-1c. Observe que para cualquier valor de  $\epsilon$ , el área bajo el pulso está dada por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(t) dt = \int_0^\epsilon \frac{1}{\epsilon} dt = 1$$

Ahora, sea

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t)$$

Esta definición de  $\delta(t)$  es consistente con la definición dada en la ecuación 14.3-2. Vemos que  $\delta(t)$  es un pulso que tiene magnitud infinita, duración infinitesimal, y un área igual a 1. No podemos dibujar muy fácilmente un pulso así, por lo que representamos  $\delta(t)$  con una flecha como se muestra en la figura 14.3-1d. La altura de la flecha es igual al área de la función de impulso. (A veces, al área de la función de impulso se le llama la fuerza del impulso. Además, a la función de impulso también se le suele llamar función delta.)

Una propiedad importante de la función de impulso es

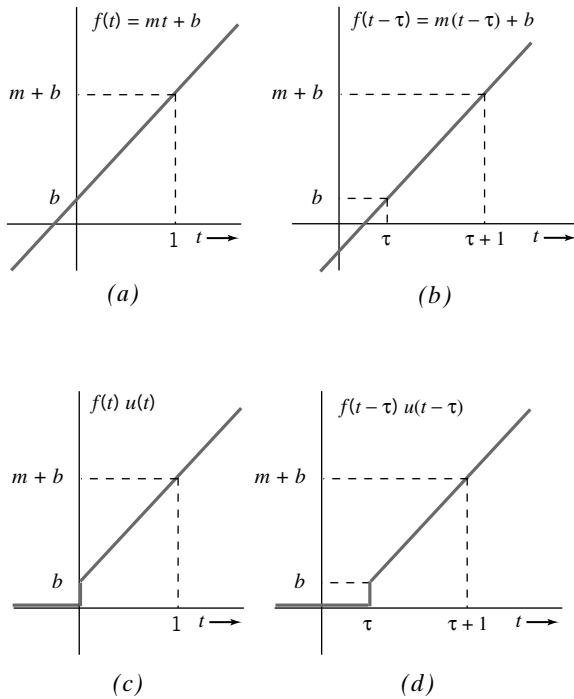
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad (14.3-3)$$

Si dejamos que  $f(t) = 1$ , resulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

lo que muestra una vez más que el área bajo la función de impulso es 1. Más interesante aún, la ecuación 14.3-3 se puede utilizar para determinar la transformada de Laplace de la función de impulso

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0-}^{\infty} e^{-st} \delta(t) dt = e^0 = 1$$



**FIGURA 14.3-2** (a) Una función; (b) copia retardada de la función; (c) una función nueva formada por la multiplicación de  $f(t)$  por una función escalón, y (d) copia retardada de la función nueva.

A continuación, consideramos algunas técnicas útiles para encontrar transformadas de Laplace de otras funciones de pulso. Podemos retardar una función  $f(t)$  por tiempo  $\tau$  al reemplazar cada ocurrencia de  $t$  por  $t - \tau$ .

Considere la función

$$f(t) = mt + b$$

que se muestra en la figura 14.3-2a. Suponga que deseamos cambiarla (retardarla) a  $\tau$  segundos más tarde. Esta función tiene una ocurrencia única de  $t$ , de modo que la reemplazamos por  $t - \tau$  para obtener

$$f(t - \tau) = m(t - \tau) + b = mt + (b - m\tau)$$

que se muestra en la figura 14.3-2b. A continuación, considere la función

$$g(t) = f(t)u(t) = (mt + b)u(t)$$

Esta función, que se muestra en la figura 14.3-2c, es idéntica a  $f(t)$  cuando  $t > 0$ , pero  $g(t) = 0$  cuando  $t < 0$ . Suponga que deseamos retardar  $g(t)$  por  $\tau$  segundos. La función  $g(t)$  contiene dos ocurrencias de  $t$ , y debemos reemplazar cada ocurrencia de  $t$  por  $t - \tau$ .

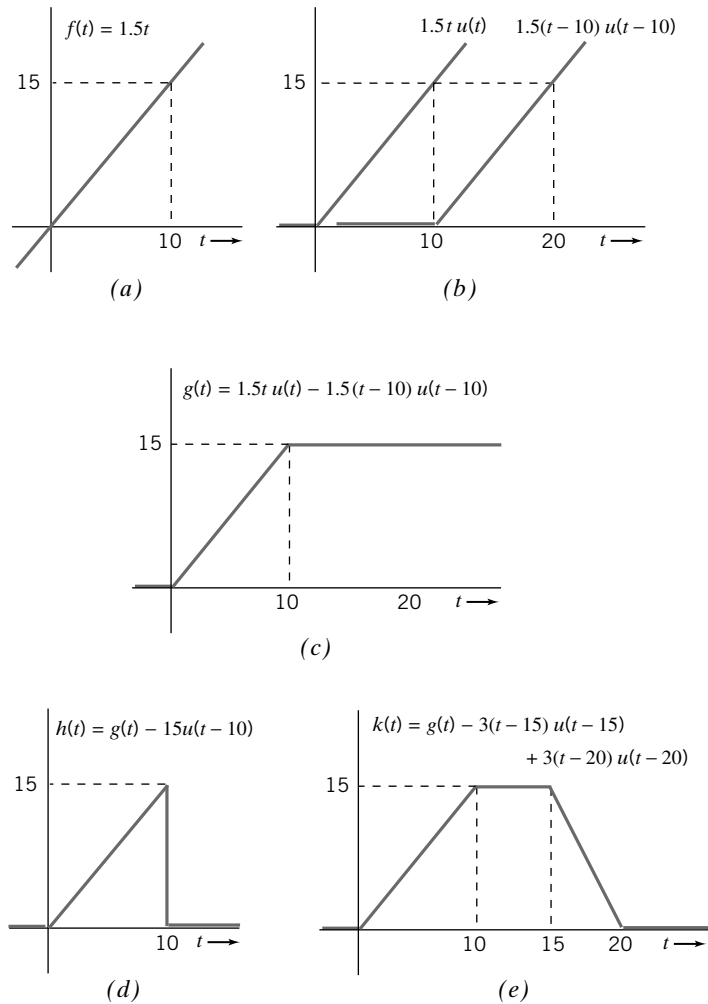
$$g(t - \tau) = (m(t - \tau) + b)u(t - \tau)$$

Mostrada en la figura 14.3-2d,  $g(t - \tau)$  es en realidad una copia retardada de  $g(t)$ . Observe que  $f(t - \tau)u(t - \tau)$  es diferente de  $f(t - \tau)u(t)$  y de  $f(t)u(t - \tau)$ .

La figura 14.3-3 muestra cómo se pueden usar estas técnicas para representar funciones de pulso. Empezando con  $f(t) = 1.5t$ , una recta que pasa a través del origen en la figura 14.3-3a, multiplicamos por una función escalón de modo que el producto sea 0 para el tiempo  $t < 0$ . En la figura 14.3-b se muestra la función  $f(t)u(t)$  junto con una copia retardada,  $f(t - 10)u(t - 10)$ . Al restar la copia retardada nos da

$$g(t) = f(t)u(t) - f(t - 10)u(t - 10) = 1.5tu(t) - 1.5(t - 10)u(t - 10) \quad (14.3-4)$$





**FIGURA 14.3-3** (a) Una función; (b) una función de rampa y una copia retardada de la función de rampa; (c) una función nueva formada de la resta de la rampa retardada a partir de la rampa; (d) un pulso triangular, y (e) un pulso trapezoide.

que se muestra en la figura 14.3-3c. Restar una función escalón adecuadamente escalada y retardada da como resultado el pulso que se muestra en la figura 14.3-3d:

$$h(t) = g(t) - 15u(t - 10) = 1.5 t u(t) - 1.5(t - 10)u(t - 10) - 15u(t - 10) \quad (14.3-5)$$

Por otra parte, empezar con  $g(t)$  y luego restar y sumar copias retardadas de  $tu(t)$  adecuadamente escaladas y retardadas, da como resultado el pulso que se muestra en la figura 14.3-3e:

$$k(t) = g(t) - 3.0(t - 15) u(t - 15) + 3.0(t - 20) u(t - 20) \quad (14.3-6)$$

(Restar  $3.0(t - 15)u(t - 15)$  hace que  $k(t)$  empiece a disminuir en  $t = 15$  s. Sumar  $3.0(t - 20)u(t - 20)$  hace que  $k(t)$  se nivele en  $t = 20$  s. Sin este último término,  $k(t)$  seguiría disminuyendo.)

Para obtener la transformada de la función de tiempo cambiado, utilizamos la definición de la transformación para obtener

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)u(t - \tau)] = \int_0^{\infty} f(t - \tau)u(t - \tau)e^{-st} dt = \int_{\tau}^{\infty} f(t - \tau)e^{-st} dt$$

Ahora sea  $t - \tau = x$  para obtener

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)u(t - \tau)] = \int_0^{\infty} f(x)e^{-s(\tau+x)} dx = e^{-s\tau} \int_{\tau}^{\infty} f(x)e^{-sx} dx = e^{-s\tau} F(s)$$

Este resultado se resume como

$$f(t - \tau)u(t - \tau) \leftrightarrow e^{-s\tau} F(s) \quad (14.3-7)$$

### EJEMPLO 14.3-1 Transformadas de Laplace de funciones de pulso

Encuentre las transformadas de Laplace de  $g(t)$ ,  $h(t)$  y  $k(t)$  que se muestran en la figura 14.3-3.

#### Solución

Luego de obtener las ecuaciones 14.3-4, 14.3-5 y 14.3-6, las transformadas de Laplace requeridas se determinan fácilmente utilizando la ecuación 14.3-7:

$$\begin{aligned} G(s) = \mathcal{L}[g(t)] &= \mathcal{L}[1.5t u(t)] - \mathcal{L}[1.5(t - 10) u(t - 10)] \\ &= 1.5 \left( \frac{1}{s^2} \right) - e^{-10s} \left( 1.5 \left( \frac{1}{s^2} \right) \right) = \frac{1.5(1 - e^{-10s})}{s^2} \end{aligned}$$

$$H(s) = \mathcal{L}[h(t)] = \mathcal{L}[g(t)] - \mathcal{L}[15 u(t - 10)] = \frac{1.5(1 - e^{-10s})}{s^2} - e^{-10s} \left( \frac{15}{s} \right)$$

$$\begin{aligned} K(s) = \mathcal{L}[k(t)] &= \mathcal{L}[g(t)] - \mathcal{L}[3.0(t - 15) u(t - 15)] + \mathcal{L}[3.0(t - 20) u(t - 20)] \\ &= \frac{1.5(1 - e^{-10s})}{s^2} - e^{-15s} \left( \frac{3.0}{s^2} \right) + e^{-20s} \left( \frac{3.0}{s^2} \right) = \frac{1.5(1 - e^{-10s}) - 2e^{-15s} + 2e^{-20s}}{s^2} \end{aligned}$$

## 14.4 TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Con frecuencia queremos encontrar la transformada inversa de Laplace de una función representada como una razón de polinomios en  $s$ . Considere:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (14.4-1)$$

donde los coeficientes de los polinomios son números reales. Se dice que la función  $F(s)$  debe ser una función racional de  $s$  porque es la razón de dos polinomios en  $s$ . Por lo común, tenemos  $n > m$ , en cuyo caso  $F(s)$  se denomina una función racional propia.

Las raíces del polinomio denominador  $D(s)$  son las raíces de la ecuación  $D(s) = 0$  y se les llama **polos** de  $F(s)$ . Descomponemos en factores  $D(s)$  y obtenemos

$$D(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)$$

Los polos,  $p_i$ , pueden ser reales o compuestos. Los polos compuestos aparecen en pares conjugados compuestos, es decir, si  $p_1 = a + jb$  es un polo de  $F(s)$ , entonces  $F(s)$  también tendrá un polo,  $p_i = p_1^* = a - jb$ . Se dice que un polo  $p_i$  de  $F(s)$  debe ser un polo simple de  $F(s)$  si ninguno de los demás polos de  $F(s)$  son iguales a  $p_i$ . Por el contrario,  $p_i$  es un polo repetido de  $F(s)$  si al menos uno de los demás polos de  $F(s)$  es igual a  $p_i$ . La multiplicidad de un polo repetido  $p_i$  es el número de polos iguales, entre ellos el mismo  $p_i$ . Las raíces del polinomio numerador  $N(s)$  se llaman los **ceros** de  $F(s)$ .

Encontraremos la transformada inversa de Laplace de una función racional propia  $F(s)$  en tres pasos. Primero, ejecutamos una expansión de fracción parcial para expresar  $F(s)$  como una suma de funciones simples,  $F_i(s)$ .

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_i(s) + \cdots + F_n(s)$$

Luego utilizamos los pares de transformación de la tabla 14.2-1 y las propiedades de la tabla 14.2-2 para encontrar la transformada inversa de Laplace de cada  $F_i(s)$ . Finalmente, utilizando linealidad, sumamos las transformaciones inversas de  $F_i(s)$  para obtener la transformada inversa de Laplace de  $F(s)$ .

Cuando todos los polos de una función racional propia,  $F(s)$ , son polos simples, la expansión de fracción parcial de  $F(s)$  es

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \\ &= \frac{R_1}{s - p_1} + \frac{R_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{R_i}{s - p_i} + \cdots + \frac{R_n}{s - p_n} \end{aligned} \quad (14.4-2)$$

La expansión de fracción parcial tiene un término que corresponde a cada polo simple de  $F(s)$ . Los coeficientes,  $R_i$ , se llaman residuos. Cada residuo  $R_i$  corresponde al polo,  $p_i$ , en los mismos términos de la ecuación 14.4-2. El residuo correspondiente a un polo real es un número real. Los residuos que corresponden a polos de conjugada compleja son de suyo conjugadas complejas. Los valores de los residuos de polos simples se calculan como

$$R_i = (s - p_i)F(s)|_{s=p_i} \quad (14.4-3)$$

#### EJEMPLO 14.4-1 Transformada inversa de Laplace: polos reales, simples

Encuentre la transformada inversa de Laplace de  $F(s) = \frac{s+3}{s^2+7s+10}$ .

#### Solución

La  $F(s)$  dada es en verdad una función racional propia. Descomponga el denominador y desarrolle una expansión de fracción parcial

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2+7s+10} = \frac{s+3}{(s+2)(s+5)} = \frac{R_1}{s+2} + \frac{R_2}{s+5}$$

donde

$$R_1 = (s+2) \left( \frac{s+3}{(s+2)(s+5)} \right) \Big|_{s=-2} = \frac{s+3}{s+5} \Big|_{s=-2} = \frac{-2+3}{-2+5} = \frac{1}{3}$$

y

$$R_2 = (s+5) \left( \frac{s+3}{(s+2)(s+5)} \right) \Big|_{s=-5} = \frac{s+3}{s+2} \Big|_{s=-5} = \frac{-5+3}{-5+2} = \frac{2}{3}$$

Entonces

$$F(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+5}$$

Utilizando linealidad y tomando la transformada inversa de Laplace de cada término resulta

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+5}\right] = \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] + \frac{2}{3} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+5}\right] = \frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{2}{3} e^{-5t} \text{ para } t \geq 0$$

Suponga que  $F(s)$  tiene un par de polos de conjugada compleja simples  $p_1 = -a + jb$  y  $p_2 = -a - jb$ . Los residuos correspondientes en la expansión de fracción parcial también serán conjugadas complejas, digamos  $R_1 = c + jd$  y  $R_2 = c - jd$ . La expansión de fracción parcial de  $F(s)$  es

$$F(s) = \frac{R_1}{s-p_1} + \frac{R_2}{s-p_2} + F_3(s) = \frac{c+jd}{s-(-a+jb)} + \frac{c-jd}{s-(-a-jb)} + F_3(s) \quad (14.4-4)$$

donde  $F_3(s)$  es la suma de los términos de la expansión de fracción parcial debida a los demás polos de  $F(s)$ . A continuación, combine los primeros dos términos, utilizando un común denominador, para obtener

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{c+jd}{s+a-jb} + \frac{c-jd}{s+a+jb} + F_3(s) \\ &= \frac{(c+jd)(s+a-jb) + (c-jd)(s+a+jb)}{(s+a-jb)(s+a+jb)} + F_3(s) \\ &= \frac{2cs + 2(ac - bd)}{s^2 + 2as + a^2 + b^2} + F_3(s) \\ &= \frac{2c(s+a) - 2bd}{(s+a)^2 + b^2} + F_3(s) \\ &= 2c \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2} - 2d \frac{b}{(s+a)^2 + b^2} + F_3(s) \end{aligned}$$

Observe que la expansión de fracción parcial de  $F(s)$  se puede expresar como

$$F(s) = \frac{K_1 s + K_2}{s^2 + 2as + a^2 + b^2} + F_3(s) \quad (14.4-5)$$

donde  $K_1 = 2c$  y  $K_2 = 2(ac - bd)$ .

Al tomar la transformada inversa de Laplace de los primeros dos términos resulta

$$\mathcal{L}^{-1}\left[2c \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}\right] = 2c \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}\right] = 2c e^{-at} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + b^2}\right] = 2c e^{-at} \cos(bt)$$

y

$$\mathcal{L}^{-1}\left[2d \frac{b}{(s+a)^2 + b^2}\right] = 2d \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}\right] = 2d e^{-at} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b}{s^2 + b^2}\right] = 2d e^{-at} \sin(bt)$$

Utilizamos linealidad y tenemos

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2c e^{-at} \cos(bt) - 2d e^{-at} \sin(bt) + \mathcal{L}^{-1}[F_3(s)] \quad (14.4-6)$$

### EJEMPLO 14.4-2 Transformada inversa de Laplace: polos compuestos simples

Encuentre la transformada inversa de Laplace de  $F(s) = \frac{10}{(s^2 + 6s + 10)(s + 2)}$ .

#### Solución

Las raíces de la cuadrática  $(s^2 + 6s + 10)$  son complejas, y podemos escribir  $F(s)$  como

$$F(s) = \frac{10}{(s + 3 - j)(s + 3 + j)(s + 2)}$$

Utilizando una expansión de fracción parcial, tenemos

$$F(s) = \frac{10}{(s + 3 - j)(s + 3 + j)(s + 2)} = \frac{R_1}{s - (-3 + j)} + \frac{R_2}{s - (3 - j)} + \frac{R_3}{s + 2}$$

Si utilizamos la ecuación 14.4-3,

$$\begin{aligned} R_1 &= (s + 3 - j) \left( \frac{10}{(s + 3 - j)(s + 3 + j)(s + 2)} \right) \Big|_{s=-3+j} \\ &= \frac{10}{(s + 3 + j)(s + 2)} \Big|_{s=-3+j} = \frac{10}{(-3 + j + 3 + j)(-3 + j + 2)} = -\frac{5}{2} + j\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Al comparar la ecuación 14.4-4, vemos que  $a = 3$ ,  $b = 1$ ,  $c = -2.5$  y  $d = 2.5$ . Luego,

$$\begin{aligned} R_2 &= (s + 3 + j) \left( \frac{10}{(s + 3 - j)(s + 3 + j)(s + 2)} \right) \Big|_{s=-3-j} \\ &= \frac{10}{(s + 3 - j)(s + 2)} \Big|_{s=-3-j} = \frac{10}{(-3 - j + 3 - j)(-3 - j + 2)} = -\frac{5}{2} - j\frac{5}{2} \end{aligned}$$

y

$$R_3 = (s + 2) \left( \frac{10}{(s + 3 - j)(s + 3 + j)(s + 2)} \right) \Big|_{s=-2} = \frac{10}{s^2 + 6s + 10} \Big|_{s=-2} = 5$$

Finalmente, utilizando la ecuación 14.4-6,

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{10}{(s^2 + 6s + 10)(s + 2)} \right] = 2c e^{-at} \cos(bt) - 2d e^{-at} \sin(bt) + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{5}{s + 2} \right] \\ &= 2(-2.5)e^{-3t} \cos(1t) - 2(2.5)e^{-3t} \sin(1t) + 5e^{-2t} \\ &= -5e^{-3t} \cos(t) - 5e^{-3t} \sin(t) + 5e^{-2t} \text{ para } t \geq 0 \end{aligned}$$

#### Solución alterna

Si utilizamos la ecuación 14.4-5 podemos expresar  $F(s)$  como

$$F(s) = \frac{10}{(s^2 + 6s + 10)(s + 2)} = \frac{K_1 s + K_2}{s^2 + 6s + 10} + F_3(s) = \frac{K_1 s + K_2}{s^2 + 6s + 10} + \frac{R_3}{s + 2}$$

Con la ecuación 14.4-3 calculamos

$$R_3 = (s + 2) \left( \frac{10}{(s^2 + 6s + 10)(s + 2)} \right) \Big|_{s=-2} = \frac{10}{s^2 + 6s + 10} \Big|_{s=-2} = 5$$

Entonces 
$$\frac{10}{(s^2 + 6s + 10)(s + 2)} = \frac{K_1 s + K_2}{s^2 + 6s + 10} + \frac{5}{s + 2} \quad (14.4-7)$$

Multiplicar ambos lados de esta ecuación por el denominador de  $F(s)$ , resulta

$$10 = (K_1 + 5)s^2 + (2K_1 + K_2 + 30)s + 2K_2 + 50$$

Los coeficientes de  $s^2$ ,  $s^1$  y  $s^0$  de la derecha de esta ecuación deben ser iguales cada uno a los coeficientes correspondientes de la izquierda. (Los coeficientes de  $s^2$  y  $s^1$  de la izquierda son cero.) Igualar los coeficientes correspondientes da

$$0 = K_1 + 5, \quad 0 = K_1 + K_2 + 30 \quad \text{y} \quad 10 = 2K_2 + 50$$

Despejar estas ecuaciones da  $K_1 = -5$  y  $K_2 = -20$ . Sustituimos en la ecuación 14.4-7 y tenemos

$$\frac{10}{(s^2 + 6s + 10)(s + 2)} = \frac{-5s - 20}{s^2 + 6s + 10} + \frac{5}{s + 2}$$

A continuación,

$$\frac{-5s - 20}{s^2 + 6s + 10} = \frac{-5s - 20}{(s^2 + 6s + 9) + 1} = \frac{-5s - 20}{(s + 3)^2 + 1} = \frac{-5(s + 3) - 5}{(s + 3)^2 + 1} = -5 \left( \frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 1} \right) - 5 \left( \frac{1}{(s + 3)^2 + 1} \right)$$

Entonces 
$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-5s - 20}{s^2 + 6s + 10} \right] &= -5 \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 1} \right] - 5 \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s + 3)^2 + 1} \right] \\ &= -5e^{-3t} \cos(t) - 5e^{-3t} \sin(t) \end{aligned}$$

Aprovechamos la superposición,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{10}{(s^2 + 6s + 10)(s + 2)} \right] = -5e^{-3t} \cos(t) - 5e^{-3t} \sin(t) + 5e^{-2t} \text{ para } t \geq 0$$

como antes.

A continuación, suponga que  $F(s)$  tiene polos repetidos, es decir,

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{(s - p_1)^q (s - p_{q+1}) \cdots (s - p_n)}$$

donde el entero  $q$  se denomina multiplicidad del polo repetido,  $p_1$ . En este caso, la expansión de fracción parcial de  $F(s)$  que incluye todas las potencias del término  $(s - p_1)$  hasta la multiplicidad.

$$F(s) = \frac{R_1}{s - p_1} + \frac{R_2}{(s - p_1)^2} + \cdots + \frac{R_q}{(s - p_1)^q} + \frac{R_{q+1}}{s - p_{q+1}} + \cdots + \frac{R_n}{s - p_n} \quad (14.4-8)$$

Los residuos que corresponden a los polos repetidos están dados por

$$R_{q-k} = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{ds^k} (s - p_1)^q F(s) \right] \Big|_{s=p_1} \quad \text{para } k = q - 1, q - 2, \dots, 2, 1, 0 \quad (14.4-9)$$

Es decir,

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{(q-1)!} \left[ \frac{d^{q-1}}{ds^{q-1}} (s - p_1)^q F(s) \right] \Big|_{s=p_1}, \\ R_2 &= \frac{1}{(q-2)!} \left[ \frac{d^{q-2}}{ds^{q-2}} (s - p_1)^q F(s) \right] \Big|_{s=p_1}, \dots \\ R_q &= [(s - p_1)^q F(s)] \Big|_{s=p_1} \end{aligned}$$

### EJEMPLO 14.4-3 Transformada inversa de Laplace: polos repetidos

Encuentre la transformada inversa de Laplace de  $F(s) = \frac{4}{(s+1)^2(s+2)}$ .

#### Solución

Utilizando la ecuación 14.4-8, podemos expresar  $F(s)$  como

$$F(s) = \frac{4}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{(s+1)^2} + \frac{R_3}{s+2}$$

Utilizando la ecuación 14.4-3,

$$R_3 = (s+2) \frac{4}{(s+1)^2(s+2)} \Big|_{s=-2} = \frac{4}{(s+1)^2} \Big|_{s=-2} = \frac{4}{(-2+1)^2} = 4$$

Utilizando la ecuación 14.4-9,

$$R_1 = \frac{d}{ds} \left( (s+1)^2 \frac{4}{(s+1)^2(s+2)} \right) \Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds} \frac{4}{s+2} \Big|_{s=-1} = \frac{-4}{(s+2)^2} \Big|_{s=-1} = -4$$

y

$$R_2 = (s+1)^2 \frac{4}{(s+1)^2(s+2)} \Big|_{s=-1} = \frac{4}{s+2} \Big|_{s=-1} + \frac{4}{-1+2} = 4$$

Entonces,

$$F(s) = \frac{4}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{-4}{s+1} + \frac{4}{(s+1)^2} + \frac{4}{s+2}$$

Luego, utilizando la propiedad del cambio de frecuencia de la tabla 14.2.2, obtenemos

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{4}{(s+1)^2} \right] = e^{-t} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{4}{s^2} \right] = 4t e^{-t}$$

Por último, utilizando linealidad,

$$f(t) = -4e^{-t} + 4te^{-t} + 4e^{-2t} \quad \text{para } t \geq 0$$

#### Solución alterna

Si utilizamos la ecuación 14.4-8

$$F(s) = \frac{4}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{R_2}{(s+1)^2} + \frac{R_3}{s+2}$$

Como antes,

$$R_3 = (s+2) \frac{4}{(s+1)^2(s+2)} \Big|_{s=-2} = \frac{4}{(s+1)^2} \Big|_{s=-2} = \frac{4}{(-2+1)^2} = 4$$

y

$$R_2 = (s+1)^2 \frac{4}{(s+1)^2(s+2)} \Big|_{s=-1} = \frac{4}{s+2} \Big|_{s=-1} = \frac{4}{-1+2} = 4$$

por lo tanto,

$$\frac{4}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{R_1}{s+1} + \frac{4}{(s+1)^2} + \frac{4}{s+2}$$

Multiplicar ambos lados por  $(s+1)^2(s+2)$  resulta

$$4 = R_1(s+1)(s+2) + 4(s+2) + 4(s+1)^2 = (R_1+4)s^2 + (3R_1+4+8)s + 2R_1+8+4$$

Los coeficientes de  $s^2$ ,  $s^1$  y  $s^0$  de la derecha de esta ecuación deben ser muy iguales a los coeficientes correspondientes de la izquierda. (Los coeficientes de  $s^2$  y  $s^1$  de la izquierda son cero.) Igualar los coeficientes correspondientes resulta

$$0 = R_1 + 4, 0 = 3R_1 + 4 + 8 \quad \text{y} \quad 4 = 2R_1 + 8 + 4$$

Despejar estas ecuaciones da  $R_1 = -4$ . Sustituir resulta

$$F(s) = \frac{4}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{-4}{s+1} + \frac{4}{(s+1)^2} + \frac{4}{s+2}$$

Como antes

$$f(t) = -4e^{-t} + 4te^{-t} + 4e^{-2t} \quad \text{para } t \geq 0$$

#### EJEMPLO 14.4-4 Transformada de Laplace: función racional impropia

Encuentre la transformada inversa de Laplace de  $F(s) = \frac{4s^3 + 15s^2 + s + 30}{s^2 + 5s + 6}$ .

#### Solución

Compare esta  $F(s)$  con la  $F(s)$  en la ecuación 14.4-1 para ver que  $m = 3$  y  $n = 2$ . Como  $m$  no es menor que  $n$ , efectuamos la división larga  $s^2 + 5s + 6 \overline{)4s^3 + 15s^2 + s + 30}$  para obtener

$$F(s) = 4s - 5 + \frac{2s}{s^2 + 5s + 6}$$

El último término de la derecha es una función racional propia, por lo que efectuamos la expansión de fracción parcial para obtener

$$F(s) = 4s - 5 + \frac{2s}{s^2 + 5s + 6} = 4s - 5 + \frac{2s}{(s+3)(s+2)} = 4s - 5 + \frac{6}{s+3} - \frac{4}{s+2}$$

Al utilizar la propiedad de diferenciación de tiempo de la tabla 14.4-4 da  $\mathcal{L}^{-1}[s] = \frac{d}{dt}\delta(t)$ . Utilizamos linealidad para obtener

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4s^3 + 15s^2 + s + 30}{s^2 + 5s + 6}\right] = 4\frac{d}{dt}\delta(t) - 5\delta(t) + 6e^{-3t} - 4e^{-2t} \quad \text{para } t \geq 0$$

## 14.5 TEOREMAS DEL VALOR INICIAL Y FINAL

El valor inicial de una función  $f(t)$  es el valor  $t = 0$ , siempre que  $f(t)$  sea continuo en  $t = 0$ . Si  $f(t)$  es discontinuo en  $t = 0$ , el valor inicial es el límite como  $t \rightarrow 0^+$ , donde  $t$  se acerca a  $t = 0$  desde tiempo positivo.

El **valor inicial** de una función se puede encontrar utilizando

$$f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (14.5-1)$$

A esta ecuación se le llama **teorema del valor inicial**. Para comprobar el teorema del valor inicial, empezamos con la propiedad de diferenciación de tiempo de la tabla 14.2-2:

$$sF(s) - f(0-) = \mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \int_{0-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt$$



Tomando el límite como  $s \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0-)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0-}^{0+} \frac{df}{dt} e^{-st} dt + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0+}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt$$

El primer integral de la derecha es igual a  $f(0+) - f(0-)$  porque  $e^{-st} = 1$  para  $t$  entre  $0-$  y  $0+$ . El segundo integral de la derecha desaparece porque  $e^{-st} \rightarrow 0$  para  $s \rightarrow \infty$ . En el lado izquierdo,  $\lim_{s \rightarrow \infty} f(0-) = f(0-)$  porque  $f(0-)$  es independiente de  $s$ . Por lo tanto,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) - f(0-) = f(0+) - f(0-)$$

Agregar  $f(0-)$  a cada lado confirma el teorema del valor inicial dado en la ecuación 14.5-1.

El **valor final** de una función  $f(t)$  es  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  donde

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (14.5-2)$$

Esta ecuación se llama **teorema del valor final**. Para comprobar el teorema del valor final, de nuevo empezamos con la propiedad de diferenciación de tiempo de la tabla 14.2-2:

$$sF(s) - f(0-) = \mathcal{L} \left[ \frac{df}{dt} \right] = \int_0^{\infty} \left( \frac{df}{dt} \right) e^{-st} dt$$

y tomamos el límite como  $s \rightarrow 0$  para ambos lados para obtener

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0-)] = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \left( \frac{df}{dt} \right) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \left( \frac{df}{dt} \right) e^{-0t} dt = f(\infty) - f(0-)$$

En el lado izquierdo,  $\lim_{s \rightarrow 0} f(0-) = f(0-)$  porque  $f(0-)$  es independiente de  $s$ . Por lo tanto,

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0-) = f(\infty) - f(0-)$$

Agregar  $f(0-)$  a cada lado confirma el teorema del valor final dado en la ecuación 14.5-2.

### EJEMPLO 14.5-1 Teoremas del valor inicial y final

Considere la situación en la que construimos un circuito en el laboratorio y analizamos el mismo circuito utilizando las transformadas de Laplace. La figura 14.5-1 muestra un trazo de la salida del circuito,  $v(t)$ , obtenido por medición de laboratorio. Suponga que nuestro análisis de circuitos da

$$V(s) = \mathcal{L}[v(t)] = \frac{2s^2 + 30s + 136}{s(s^2 + 9s + 34)} \quad (14.5-3)$$

¿El análisis de circuito concuerda con la medición de laboratorio?

#### Solución

Determinar la transformada inversa de Laplace de  $V(s)$  requiere una expansión de fracción parcial. Antes de que hagamos ese trabajo, apliquemos los teoremas del valor inicial y del valor final para ver si es posible que  $V(s)$ , dado en la ecuación 14.5-3, pueda ser la transformada de Laplace  $v(t)$  que se muestra en la figura 14.5-1.

A partir de la figura 14.5-1 vemos que los valores inicial y final son

$$v(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} v(t) = 2 \text{ V y } v(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 4 \text{ V} \quad (14.5-4)$$

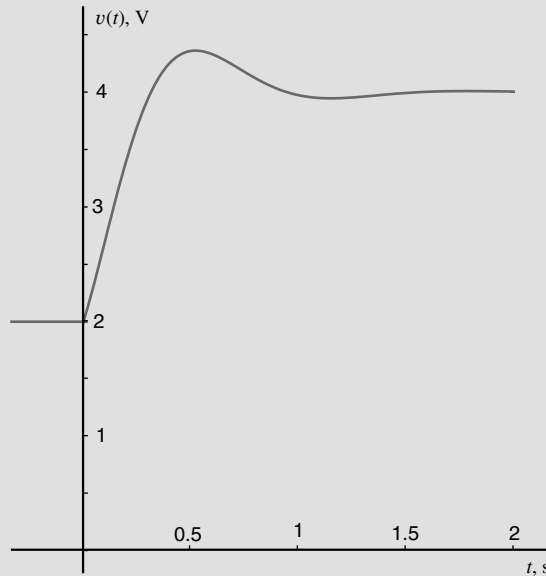


FIGURA 14.5-1

Luego calculamos

$$v(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left( \frac{2s^2 + 30s + 136}{s(s^2 + 9s + 34)} \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s^2 + 30s + 136}{s^2 + 9s + 34} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\frac{2s^2}{s^2} + \frac{30s}{s^2} + \frac{136}{s^2}}{\frac{s^2}{s^2} + \frac{9s}{s^2} + \frac{34}{s^2}} = \frac{2}{1} = 2 \text{ V}$$

y

$$v(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{2s^2 + 30s + 136}{s(s^2 + 9s + 34)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s^2 + 30s + 136}{s^2 + 9s + 34} = \frac{136}{24} = 4 \text{ V}$$

Ya que estos valores inicial y final concuerdan, es posible que  $V(s)$ , dada en la ecuación 14.5-3, pueda ser la transformada de Laplace de  $v(t)$  que se muestra en la figura 14.5-1. Ahora es apropiado determinar la transformada inversa de Laplace de  $V(s)$ .

Podemos expresar  $V(s)$  como

$$V(s) = \frac{2s^2 + 30s + 136}{s(s^2 + 9s + 34)} = \frac{K_1s + K_2}{s^2 + 9s + 34} + \frac{R_3}{s}$$

donde

$$R_3 = s \left( \frac{2s^2 + 30s + 136}{s(s^2 + 9s + 34)} \right) \Big|_{s=0} = \frac{2s^2 + 30s + 136}{s^2 + 9s + 34} \Big|_{s=0} = 4$$

Entonces

$$V(s) = \frac{2s^2 + 30s + 136}{s(s^2 + 9s + 34)} = \frac{K_1s + K_2}{s^2 + 9s + 34} + \frac{4}{s}$$

Multiplicar ambos lados de  $s(s^2 + 9s + 34)$  resulta

$$2s^2 + 30s + 136 = s(K_1s + K_2) + 4(s^2 + 9s + 34) = (K_1 + 4)s^2 + (K_2 + 36)s + 136$$

Igualar los coeficientes de  $s^2$  y  $s^2$  resulta en  $K_1 = -2$  y  $K_2 = -6$ . Entonces

$$V(s) = \frac{2s^2 + 30s + 136}{s(s^2 + 9s + 34)} = \frac{4}{s} - \frac{2s + 6}{s^2 + 9s + 34} = \frac{4}{s} - \frac{2(s + 3)}{(s + 3)^2 + 25}$$

Tomamos la transformada inversa de Laplace y nos da

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{4}{s} - \frac{2(s+3)}{(s+3)^2 + 25} \right] = 4 - 2e^{-3t} \cos(5t) \quad \text{para } t \geq 0$$

la cual es en realidad la ecuación que representa la función que se muestra en la figura 14.5-1.

## 14.6 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES QUE DESCRIBEN UN CIRCUITO

Podemos resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen un circuito eléctrico mediante la transformada de Laplace de una variable y sus derivadas. He aquí el procedimiento:

1. Aplique las leyes de Kirchoff y las ecuaciones de elementos para representar el circuito por una ecuación diferencial o un conjunto de ecuaciones diferenciales.
2. Transforme cada ecuación diferencial en una ecuación algebraica tomando la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación.
3. Despeje las ecuaciones algebraicas para obtener la transformada de Laplace de la salida del circuito.
4. Tome la transformada de Laplace para obtener el circuito de salida en sí.

El ejemplo siguiente ilustra este procedimiento.

### EJEMPLO 14.6-1 Transformadas de Laplace de ecuaciones diferenciales

Encuentre  $v_C(t)$  para el circuito que se muestra en la figura 14.6-1 cuando  $i_L(0^-) = 0.5 \text{ A}$  y  $v_C(0^-) = 2.5 \text{ V}$ .

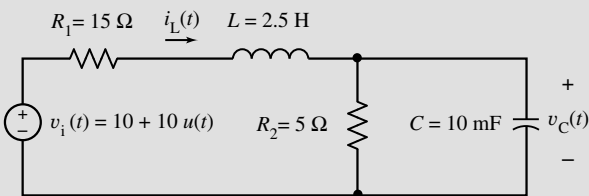


FIGURA 14.6-1. El circuito considerado en el ejemplo 14.6-1.

### Solución

Aplique la KCL al nodo superior de  $R_2$  para obtener

$$i_L(t) = \frac{v_C(t)}{R_2} + C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (14.6-1)$$

Aplique la KVL al enlace izquierdo para obtener

$$v_1(t) = R_1 i_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} + v_C(t) \quad (14.6-2)$$

Recuerde esta propiedad de la transformada de Laplace de la tabla 14.2-2:

$$\frac{df}{dt} \leftrightarrow sF(s) - f(0^-)$$

Tome la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación 14.6-1 para obtener

$$I_L(s) = \frac{V_C(s)}{R_2} + C(V_C(s) - v_C(0^-)) \quad (14.6-3)$$

Tome la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación 14.6-2 para obtener

$$V_i(s) = R_1 I_L(s) + L(I_L(s) - i_L(0^-)) + V_C(s) \quad (14.6-4)$$

Sustituya la expresión  $I_L(s)$  de la ecuación 14.6-3 en la ecuación 14.6-4 y simplifique para obtener

$$V_i(s) = \left( LCs^2 + \left( \frac{L}{R_2} + R_1 C \right) s + 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) V_C(s) - (LCs + R_1 C)v_C(0^-) - Li_L(0^-) \quad (14.6-5)$$

Observamos que  $v_i = 20$  V para  $t > 20$ , determinamos  $V_i(s) = \mathcal{L}[20] = \frac{20}{s}$ . Entonces, utilizando los valores dados de las condiciones iniciales y de los parámetros del circuito, obtenemos

$$\frac{20}{s} = (s^2 + 26s + 160)V_C(s) - (s + 6)(2.5) - 2.5(0.5)$$

Despejamos  $V_C(s)$  y resulta

$$V_C(s) = \frac{2.5s^2 + 65s + 800}{s(s^2 + 26s + 160)} = \frac{2.5s^2 + 65s + 800}{s(s + 10)(s + 16)}$$

Ejecutar una expansión de fracción parcial resulta

$$V_C(s) = \frac{2.5s^2 + 65s + 800}{s(s + 10)(s + 16)} = \frac{5}{s} + \frac{4.17}{s + 16} - \frac{6.67}{s + 10}$$

Tomar la transformada inversa de Laplace da

$$v_C(t) = 5 + 4.17e^{-16t} - 6.67e^{-10t} \text{ V para } t > 0$$

## 14.7 ANÁLISIS DE CIRCUITOS UTILIZANDO IMPEDANCIA Y CONDICIONES INICIALES

Ya hemos visto que podemos representar un circuito en el dominio de tiempo por ecuaciones diferenciales y luego emplear la transformada de Laplace para transformar las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas. En esta sección veremos que podemos representar un circuito en el dominio de frecuencia utilizando la transformada de Laplace, y luego analizarlo mediante ecuaciones algebraicas. Este método eliminará la necesidad de escribir ecuaciones diferenciales para representar el circuito.

La relación  $v$ - $i$  para el resistor es la ley de Ohm:

$$v(t) = i(t)R \quad (14.7-1)$$

Por consiguiente, la relación de la transformada de Laplace con un resistor  $R$  es

$$V(s) = I(s)R \quad (14.7-2)$$

La figura 14.7-1 muestra la representación del resistor en (a) el dominio de tiempo y (b) en el dominio de frecuencia, utilizando la transformada de Laplace. Como sugieren las ecuaciones anteriores, las representaciones en los dominios de tiempo y de frecuencia del resistor son muy parecidas.

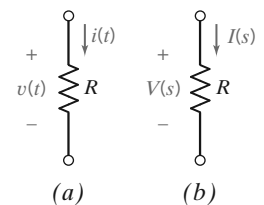


FIGURA 14.7-1 Un resistor representado (a) en el dominio de tiempo y (b) en el dominio de frecuencia utilizando la transformada de Laplace.

Se define que la impedancia de un elemento debe ser

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} \quad (14.7-3)$$

siempre que las condiciones iniciales sean cero. Observe que la impedancia se define en el dominio de frecuencia, no en el dominio de tiempo.

En el caso del resistor, no hay condición inicial para establecer a cero. La comparación de las ecuaciones 14.7-1 y 14.7-2 muestra que la impedancia del resistor es igual a la resistencia.

Un condensador se representa por su ecuación de dominio de tiempo

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v(0) \quad (14.7-4)$$

La transformada de Laplace de la ecuación 14.7-4 es

$$V(s) = \frac{1}{Cs} I(s) + \frac{v(0)}{s} \quad (14.7-5)$$

Para determinar la impedancia del condensador, establezca la condición inicial,  $v(0)$ , a cero. Luego, con la ecuación 14.7-3, obtenemos

$$Z_C(s) = \frac{1}{Cs}$$

como la impedancia del condensador.

La ecuación 14.7-5 se utiliza para representar el condensador en el dominio de frecuencia, como se muestra en la figura 14.7-2b. La conexión en serie de elementos en la figura 14.7-2b corresponde a la suma de voltajes en la ecuación 14.7-5. La corriente a través de la impedancia en la figura 14.7-2b produce el voltaje primero en el lado derecho de la ecuación 14.7-5, en tanto que la fuente de voltaje en la figura 14.7-2b alimenta el segundo voltaje en el lado derecho de la ecuación 14.7-5.

Despejar la ecuación 14.7-5 para  $I(s)$  resulta

$$I(s) = CsV(s) - Cv(0) \quad (14.7-6)$$

La ecuación 14.7-6 representa el condensador en el dominio de frecuencia, como se muestra en la figura 14.7-2c. La conexión en paralelo de elementos en la figura 14.7-2c corresponde a la suma de las corrientes en la ecuación 14.7-6. El voltaje a través de la impedancia en la figura 14.7-2b produce la primera

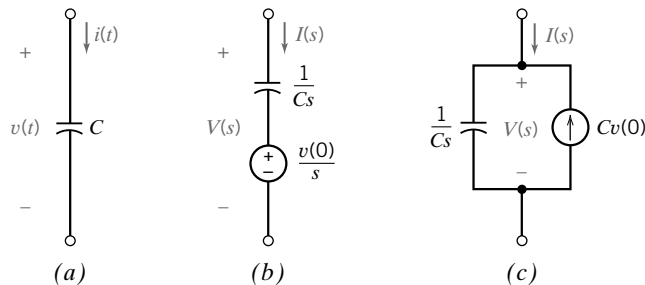


FIGURA 14.7-2 Un condensador, representado (a) en el dominio de tiempo y (b) en el dominio de frecuencia, utilizando la transformada de Laplace. (c) Representación alterna en el dominio de frecuencia.

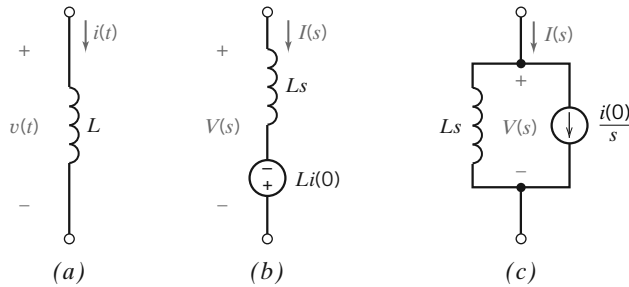


FIGURA 14.7-3 Un inductor representado (a) en el dominio de tiempo, y (b) en el dominio de frecuencia, utilizando la transformada de Laplace. (c) Representación alterna del dominio de frecuencia.

corriente en el lado derecho de la ecuación 14.7-6, en tanto que la fuente de corriente en la figura 14.7-2b alimenta la corriente en el lado derecho de la ecuación 14.7-6. Observe que la dirección de referencia de la fuente de corriente en la figura 14.7-2b se eligió para que correspondiera con el signo menos en la ecuación 14.7-6.

Un inductor se representa por su ecuación de dominio de tiempo,

$$v(t) = L \frac{d}{dt} i(t) \quad (14.7-7)$$

La transformada de Laplace de la ecuación 14.7-7 es

$$V(s) = LsI(s) - Li(0) \quad (14.7-8)$$

Para determinar la impedancia del inductor, establezca la condición inicial,  $i(0)$ , a cero. Luego, con la ecuación 14.7-3 obtenemos

$$Z_L(s) = Ls$$

como la impedancia del inductor.

La ecuación 14.7-8 representa el inductor en la frecuencia de dominio, como muestra la figura 14.7-3b. La conexión en serie de elementos en la figura 14.7-3b corresponde a la suma de voltajes en la ecuación 14.7-8.

Despejar la ecuación 14.7-8 para  $I(s)$  resulta

$$I(s) = \frac{1}{Ls} V(s) + \frac{i(0)}{s} \quad (14.7-9)$$

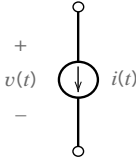
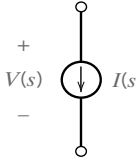
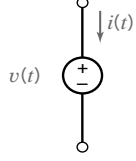
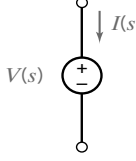
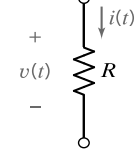
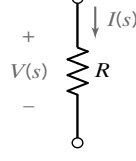
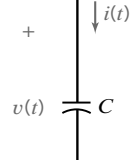
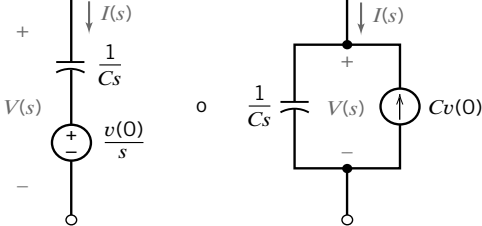
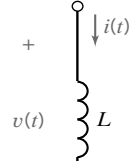
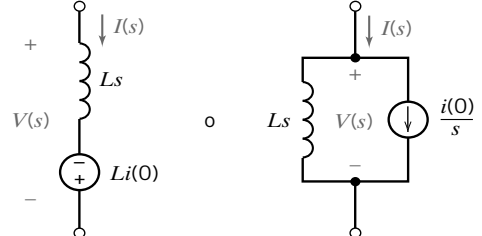
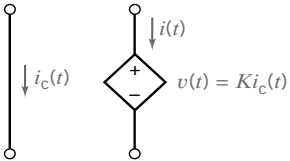
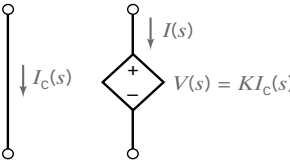
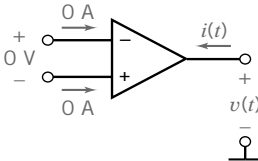
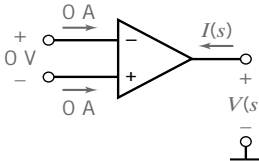
La ecuación 14.7-9 representa el inductor en el dominio de frecuencia, como muestra la figura 14.7-3c. La conexión en paralelo de elementos en la figura 14.7-3c corresponde a la suma de corrientes en la ecuación 14.7-9.

La tabla 14.7-1 sintetiza la representación en los dominios de tiempo y de frecuencia de elementos de circuitos. Además de los resistores, condensadores e inductores, esta tabla muestra las representaciones de dominio de frecuencia de fuentes independientes y dependientes de amplificadores operacionales. Las fuentes independientes se especifican por funciones de tiempo,  $i(t)$  y  $v(t)$ , en el dominio de tiempo y por las transformadas de Laplace correspondientes  $I(s)$  y  $V(s)$ , en el dominio de frecuencia. Las fuentes dependientes y los amplificadores operacionales funcionan de la misma manera en el dominio de frecuencia que en el dominio de tiempo.

Para representar un circuito en el dominio de frecuencia, reemplazamos la representación del dominio de tiempo de cada elemento de circuito por su representación de dominio de frecuencia.

Para encontrar la respuesta total de un circuito lineal, primero representamos el circuito en el dominio de frecuencia utilizando la transformada de Laplace. Luego analizamos el circuito, quizás escribiendo ecuaciones de enlaces o nodales. Por último, utilizamos la transformada inversa de Laplace para representar la respuesta en el dominio de tiempo.

**Tabla 14.7-1 Representaciones de elementos de circuitos en el dominio de tiempo y en el dominio de frecuencia**

NOMBRE	DOMINIO DE TIEMPO	DOMINIO DE FRECUENCIA
Fuente de corriente		
Fuente de voltaje		
Resistor		
Condensador		
Inductor		
Fuente dependiente		
Amplificador operacional		

### EJEMPLO 14.7-1 Análisis de circuitos utilizando la transformada de Laplace

#### EJEMPLO INTERACTIVO

Considere el circuito que se muestra en la figura 14.7-4. La entrada al circuito es el voltaje de la fuente de voltaje, 24 V. La salida de este circuito, el voltaje a través del condensador, está dada por

$$v_o(t) = 16 - 12e^{-0.6t} \text{ V} \quad \text{cuando } t > 0 \quad (14.7-10)$$

Determine el valor de la capacitancia,  $C$ .

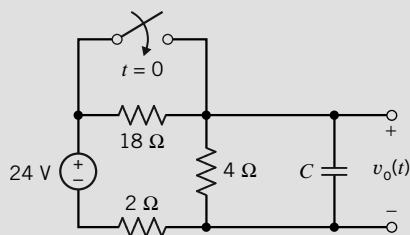


FIGURA 14.7-4 El circuito considerado en el ejemplo 14.7-1.

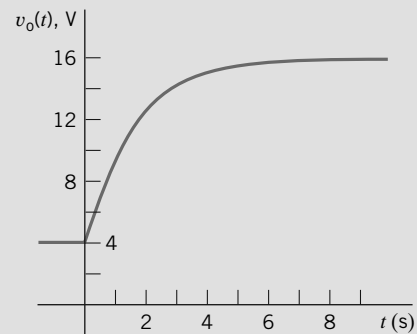


FIGURA 14.7-5 Voltaje del condensador,  $v_o(t)$ , a partir del circuito que se muestra en la figura 14.7-4.

### Solución

Antes de que se cierre el interruptor, el circuito se encontrará en estado estable. Como la única entrada a este circuito es el voltaje constante de la fuente de voltaje, todas las corrientes y voltajes de los elementos, entre ellos el voltaje del condensador, tendrán valores constantes. Cerrar el interruptor altera el circuito dejando fuera el resistor de 18- $\Omega$ . Al final, la perturbación desaparece y el circuito queda de nuevo en estado estable. Todas las corrientes y voltajes de elementos tendrán nuevamente valores constantes pero, es probable, valores constantes diferentes a los que tenían antes de que el interruptor se cerrara.

Durante la perturbación, los voltajes y corrientes de elementos no son constantes. Por ejemplo, la ecuación 14.7-10 describe el voltaje del condensador después de que se cierra el interruptor. Observe que hay dos partes para el voltaje del condensador. Una parte,  $12e^{-0.6t}$ , termina al incrementarse el valor de  $t$ . A esa parte se le llama parte transitoria de la respuesta, o solamente respuesta transitoria. La otra parte, 16, no desaparece y es la respuesta de estado estable. La suma de la respuesta transitoria y la respuesta de estado estable se denomina respuesta total. El voltaje de salida descrito por la ecuación 14.7-10 es una respuesta total de este circuito.

La figura 14.7-5 muestra un trazo del voltaje del condensador dado por la ecuación 14.7-10. Observe que el voltaje del condensador es continuo. Esto es lo que se esperaba porque, al no haber corrientes libres, el voltaje de un condensador debe ser continuo. En particular, el valor del voltaje del condensador inmediatamente después de que se cierre el interruptor es igual al valor inmediatamente antes de que se cierre el interruptor. De la figura 14.7-5, vemos que en tiempo  $t = 0$ , cuando el interruptor se cierra, el valor del voltaje del condensador es  $v_o(0) = 4 \text{ V}$ .

¿Cómo afecta el valor de la capacitancia  $C$  al voltaje del condensador? Para responder esta cuestión debemos analizar el circuito. Puesto que queremos determinar la respuesta total, analizaremos el circuito utilizando las transformadas de Laplace. La figura 14.7-6 muestra la representación del circuito en el dominio de frecuencia. El circuito cerrado está representado por un cortocircuito. Ese cortocircuito está conectado en paralelo con el resistor de 18- $\Omega$ . Un cortocircuito en paralelo con un resistor es equivalente a un cortocircuito, por lo que el circuito cerrado y el resistor de 18- $\Omega$  han sido reemplazados por un cortocircuito único. El modelo de dominio de frecuencia del condensador consta de dos partes, una impedancia y una fuente de voltaje. El voltaje de la



fuente de voltaje depende de la condición inicial del condensador, es decir, de  $v_o(0) = 4$  V.

Podemos analizar el circuito de la figura 14.7-6 escribiendo y resolviendo dos ecuaciones de enlaces.

Aplique la KVL al enlace izquierdo para obtener

$$4(I_1(s) - I_2(s)) + 2I_1(s) - \frac{24}{s} = 0$$

Despejar  $I_1(s)$  resulta

$$I_1(s) = \frac{2}{3}I_2(s) + \frac{4}{s} \quad (14.7-11)$$

Aplique la KVL al enlace derecho para obtener

$$\frac{1}{Cs}I_2(s) + \frac{4}{s} - 4(I_1(s) - I_2(s)) = 0$$

Conjuntar los términos que impliquen  $I_2(s)$  resulta

$$\left(\frac{1}{Cs} + 4\right)I_2(s) = -\frac{4}{s} + 4I_1(s)$$

Sustituir la expresión  $I_1(s)$  de la ecuación 14.7-11 nos da

$$\left(\frac{1}{Cs} + 4\right)I_2(s) = -\frac{4}{s} + 4\left(\frac{2}{3}I_2(s) + \frac{4}{s}\right) = \frac{12}{s} + \frac{8}{3}I_2(s)$$

Conjuntar los términos que impliquen  $I_2(s)$  resulta

$$\left(\frac{1}{Cs} + \frac{4}{3}\right)I_2(s) = \frac{12}{s}$$

Multiplique ambos lados de esta ecuación por  $\frac{3}{4}s$  para obtener

$$\left(s + \frac{3}{4C}\right)I_2(s) = 9$$

Despejar  $I_2(s)$  resulta

$$I_2(s) = \frac{9}{s + \frac{3}{4C}} \quad (14.7-12)$$

Al referirnos a la figura 14.7-6 vemos que el voltaje del condensador está relacionado con la corriente de enlaces del enlace derecho por

$$V_o(s) = \frac{1}{Cs}I_2(s) + \frac{4}{s}$$

Sustituimos la expresión  $I_2(s)$  de la ecuación 14.7-12, y nos da

$$V_o(s) = \left(\frac{1}{Cs}\right)\frac{9}{s + \frac{3}{4C}} + \frac{4}{s} = \frac{\frac{9}{C}}{s\left(s + \frac{3}{4C}\right)} + \frac{4}{s}$$

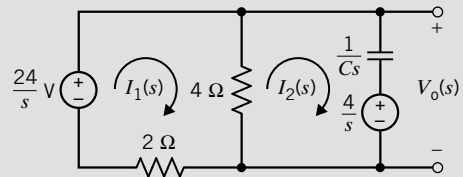


FIGURA 14.7-6 El circuito, representado en el dominio de frecuencia, utilizando la transformada de Laplace.

Efectuar una expansión de fracción parcial da por resultado

$$V_o(s) = \frac{12}{s} - \frac{12}{s + \frac{3}{4C}} + \frac{4}{s} = \frac{16}{s} - \frac{12}{s + \frac{3}{4C}} \quad (14.7-13)$$

Recuerde que  $v_o(t)$  está dada en la ecuación 14.7-10. Si tomamos la transformada de Laplace de  $v_o(t)$  nos da

$$V_o(s) = \mathcal{L}[v_o(t)] = \mathcal{L}[(16 - 12e^{-0.6t})u(t)] = \frac{16}{s} - \frac{12}{s + 0.6} \quad (14.7-14)$$

Comparar las ecuaciones 14.7-13 y 14.7-14 muestra que

$$0.6 = \frac{3}{4C} \Rightarrow C = 1.25 \text{ F}$$

### EJEMPLO 14.7-2 Análisis de circuitos utilizando la transformada de Laplace

### EJEMPLO INTERACTIVO

Considere el circuito que se muestra en la figura 14.7-7. La entrada al circuito es el voltaje de la fuente de voltaje, 24 V. La salida de este circuito, el voltaje a través del resistor de 6-Ω, está dada por

$$v_o(t) = 12 - 6e^{-0.35t} \text{ V cuando } t > 0 \quad (14.7-15)$$

Determine el valor de la inductancia,  $L$ , y de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ .

### Solución

Antes de que se cierre el interruptor, el circuito se encontrará en estado estable. Como la única entrada a este circuito es el voltaje constante de la fuente de voltaje, todas las corrientes y voltajes de los elementos, entre ellos el voltaje del inductor, tendrán valores constantes. Cerrar el interruptor altera el circuito dejando fuera el resistor  $R_1$ . Al final, la perturbación desaparece y el circuito queda de nuevo en estado estable. Todas las corrientes y voltajes de elementos tendrán nuevamente valores constantes pero, es probable, valores constantes diferentes a los que tenían antes de que el interruptor se cerrara.

La ecuación 14.7-15 describe el voltaje de salida después de que se cierra el interruptor. Observe que hay dos partes para este voltaje. Una parte,  $-6e^{-0.35t}$ , termina al incrementarse el valor de  $t$ . A esa parte se le llama parte transitoria de la respuesta, o solamente respuesta transitoria. La otra parte, 12, no desaparece y es la respuesta de estado estable. La suma de la respuesta transitoria y la respuesta de estado estable se denomina respuesta total. El voltaje de salida descrito por la ecuación 14.7-15 es la respuesta total de este circuito.

¿Cómo afectan los valores de los parámetros  $L$ ,  $R_1$  y  $R_2$  al voltaje de salida? Para responder esta cuestión debemos analizar el circuito. Puesto que queremos determinar la respuesta total, la analizaremos utilizando las transformadas de Laplace. El modelo de dominio de frecuencia del inductor consta de dos partes, una impedancia y un voltaje fuente de corriente. El valor del voltaje de la fuente de voltaje o de la corriente de la fuente de corriente dependen de la condición inicial del inductor, es decir, la corriente del inductor en tiempo  $t = 0$ . Necesitamos encontrar la corriente inicial del inductor antes de que podamos representar el circuito, utilizando transformadas de Laplace.

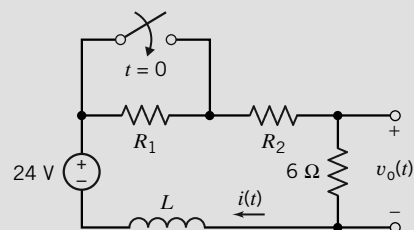


FIGURA 14.7-7 El circuito considerado en el ejemplo 14.7-2.

Al referirnos a la figura 14.7-7, vemos que la corriente del inductor es igual a la corriente en el resistor de  $6\text{-}\Omega$ . En consecuencia,

$$i(t) = \frac{v(t)}{6} = \frac{12 - 6e^{-0.35t}}{6} = 2 - e^{-0.35t} \text{ A cuando } t > 0 \quad (14.7-16)$$

Al no haber voltajes libres, la corriente en cualquier inductor es continua. En consecuencia, el valor de la corriente del inductor inmediatamente antes de  $t = 0$  es igual al valor inmediatamente después de  $t = 0$ . Para encontrar la corriente inicial del inductor, establecemos  $t = 0$  en la ecuación 14.7-16 para obtener  $i(0) = 1 \text{ A}$ .

La figura 14.7-8 muestra la representación en el dominio de frecuencia del circuito. Seleccionamos el modelo del inductor que utiliza una fuente de voltaje para responsabilizarse de la condición inicial en anticipación a la escritura de una ecuación de enlaces. El voltaje de esta fuente de voltaje es

$$Li(0) = (L)(1) = L$$

En la figura 14.7-8, el interruptor cerrado está representado por un cortocircuito. Ese cortocircuito está conectado en paralelo con el resistor  $R_1$ . Un cortocircuito en paralelo con un resistor es equivalente a un cortocircuito, por lo tanto, el circuito cerrado y  $R_1$  han sido reemplazados por un cortocircuito único.

Para analizar el circuito en la figura 14.7-8 escribimos y despejamos una ecuación de enlace única. Aplique la KVL al enlace para obtener

$$(R_2 + 6 + Ls)I(s) = L + \frac{24}{s}$$

Despejamos  $I(s)$  y nos da

$$I(s) = \frac{L + \frac{24}{s}}{Ls + R_2 + 6} = \frac{s + \frac{24}{L}}{s\left(s + \frac{R_2 + 6}{L}\right)}$$

Aplicar la ley de Ohm resulta

$$V_o(s) = 6I(s) = \frac{6s + \frac{(6)(24)}{L}}{s\left(s + \frac{R_2 + 6}{L}\right)}$$

La expansión de fracción parcial resulta

$$V_o(s) = \frac{(6)(24)}{s} - \frac{6(18 - R_2)}{s + \frac{R_2 + 6}{L}} \quad (14.7-17)$$

Recuerde que  $v_o(t)$  se da en la ecuación 14.7-15. Tomando la transformada de Laplace de  $v_o(t)$  nos da

$$V_o(s) = \mathcal{L}[v_o(t)] = \mathcal{L}[(12 - 6e^{-0.35t})u(t)] = \frac{12}{s} - \frac{6}{s + 0.35} \quad (14.7-18)$$

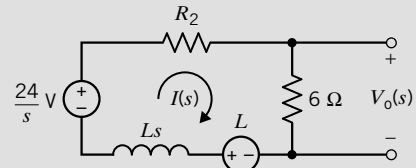


FIGURA 14.7-8 El circuito representado en el dominio de frecuencia, utilizando la transformada de Laplace.

Comparar las ecuaciones 14.7-17 y 14.7-18 muestra que

$$\frac{(6)(24)}{R_2 + 6} = 12 \Rightarrow R_2 = 6 \Omega$$

y

$$0.35 = \frac{R_2 + 6}{L} = \frac{12}{L} \Rightarrow L = \frac{12}{0.35} = 34.29 \text{ H}$$

¿Cómo podemos encontrar  $R_1$ ? El resistor  $R_1$  se eliminó del circuito al cerrarse el interruptor, pero  $R_1$  era parte del circuito antes de que se cerrara el interruptor. La corriente inicial del inductor depende del valor de la resistencia  $R_1$ . La única entrada al circuito en la figura 14.7-9 es una constante, 24 V. En consecuencia, cuando el circuito se encuentra en estado estable, el inductor actuará como un cortocircuito. La figura 14.7-9 muestra el circuito en estado estable cuando el circuito está abierto. El circuito abierto está modelado como cortocircuito. Escribir y despejar una ecuación de enlace resulta

$$i(t) = \frac{24}{R_1 + 6 + 6}$$

Sea  $t = 0$  para que

$$\frac{24}{R_1 + 6 + 6} = i(0) = 1 \Rightarrow R_1 = 12 \Omega$$

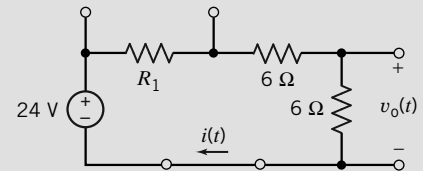


FIGURA 14.7-9 El circuito en estado estable antes de que se cierre el interruptor.

### EJEMPLO 14.7-3 Análisis de circuitos utilizando la transformada de Laplace

Considere el circuito que se muestra en la figura 14.7-10a. La entrada al circuito es el voltaje de la fuente de voltaje, 12 V. La salida de este circuito es la corriente en el inductor,  $i_L(t)$ . Determine la corriente en el inductor,  $i_L(t)$ , para  $t > 0$ .

#### Solución

Escribamos y despejemos ecuaciones de enlaces. Los circuitos en serie que representan al condensador y al inductor en el dominio de frecuencia contienen fuentes de voltaje más que fuentes de corriente. Es más fácil encargarse de fuentes de voltaje que de fuentes de corriente cuando se escriben ecuaciones de enlaces, de modo que elegimos la representación en serie para el condensador y para el inductor. De la figura 14.7-10b, las condiciones iniciales son  $v_c(0) = 8 \text{ V}$ , e  $i_L(0) = 4 \text{ A}$ . La figura 14.7-11b muestra la representación en el dominio de frecuencia del circuito.

Las ecuaciones de corrientes de enlaces son

$$\left(1 + \frac{1}{s}\right) I_1(s) - \frac{1}{s} I_2(s) = \frac{12}{s} - \frac{8}{s}$$

y

$$-\frac{1}{s} I_1(s) + \left(1 + s + \frac{1}{s}\right) I_2(s) = 4 + \frac{8}{s}$$

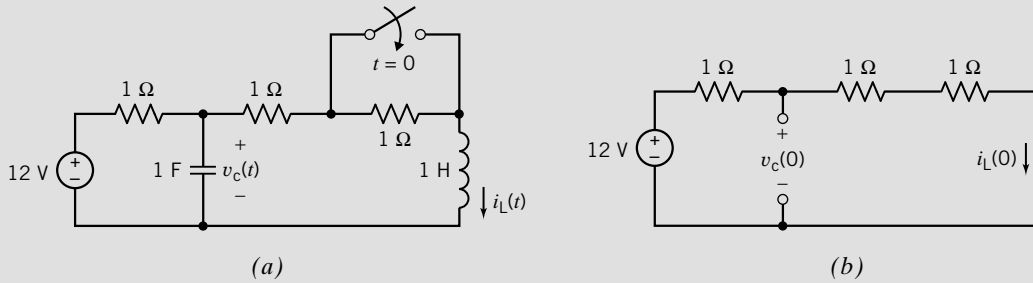


FIGURA 14.7-10 (a) El circuito considerado en el ejemplo 14.7-3. (b) El circuito en estado estable antes de que se cierre el interruptor.

Despejamos  $I_2(s)$  y obtenemos

$$I_2(s) = \frac{4(s^2 + 3s + 3)}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

La expansión de fracción parcial conveniente es

$$\frac{I_2(s)}{4} = \frac{s^2 + 3s + 3}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + D}{s^2 + 2s + 2}$$

Entonces, determinamos que  $A = 1.5$ ,  $B = -0.5$  y  $D = 0$ . Entonces, podemos establecer

$$\frac{I_2(s)}{4} = \frac{1.5}{s} + \frac{-0.5s}{(s+1)^2 + 1}$$

Utilizando la tabla 14.2-1 de las transformadas de Laplace, obtenemos

$$i_L(t) = i_2(t) = \{6 + 2\sqrt{2}e^{-t} \text{sen}(t - 45^\circ)\} \text{ A para } t > 0$$

Al comprobar el valor inicial de  $i_2$  obtenemos  $i_2(0) = i_L(0) = 4\text{ A}$ , lo cual comprueba el valor inicial correcto. El valor final es  $i_2(\infty) = 6\text{ A}$ .

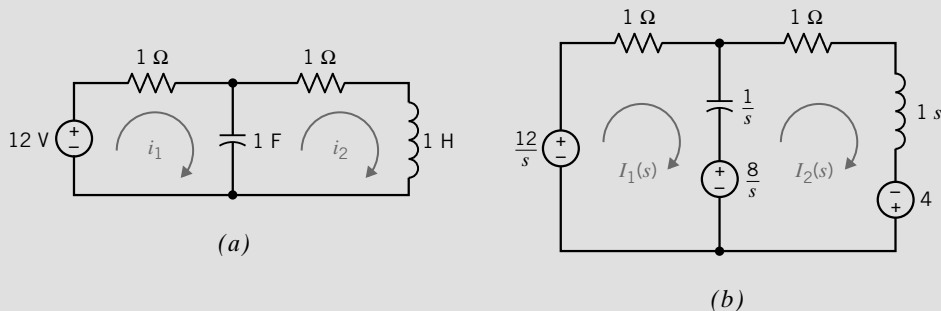
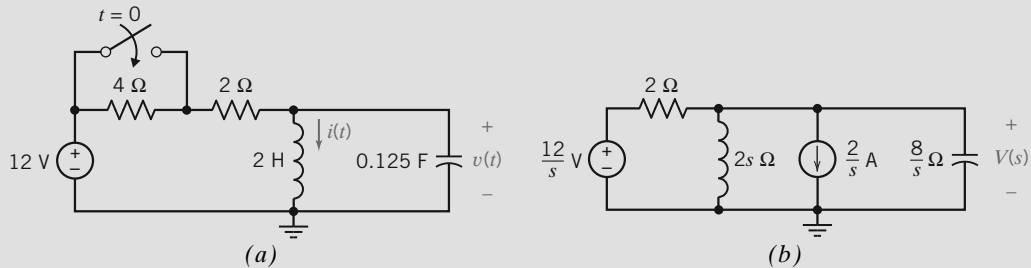


FIGURA 14.7-11 (a) Circuito con corrientes de enlaces. (b) Modelo de circuito de transformada de Laplace.

**EJEMPLO 14.7-4** Análisis de circuitos utilizando la transformada de Laplace

El interruptor en el circuito de la figura 14.7-12a se cierra en tiempo  $t = 0$ . Determine el voltaje  $v(t)$  después de que se cierre el interruptor.



**FIGURA 14.7-12** El circuito del ejemplo 14.7-4, representado en (a) dominio de tiempo, y (b) en dominio de frecuencia, utilizando las transformadas de Laplace.

**Solución**

Escribamos y despejemos ecuaciones nodales. En el dominio de frecuencia utilizaremos el modelo en paralelo para el condensador y el inductor porque los modelos en paralelo contienen fuentes de corriente en vez de fuentes de voltaje. Las condiciones iniciales son  $i(0) = 2 \text{ A}$  y  $v(0) = 0 \text{ V}$ . Puesto que  $v(0) = 0$ , la corriente y la fuente de corriente en la representación de dominio de frecuencia del condensador son cero. Una fuente de corriente cero es equivalente a un circuito abierto. La figura 14.7-12b muestra la representación de dominio de frecuencia del circuito después de que el interruptor se ha cerrado.

Aplique la KCL en el nodo superior del inductor para obtener la ecuación nodal

$$\frac{V(s) - \frac{12}{s}}{2} + \frac{V(s)}{2s} + \frac{2}{s} + \frac{V(s)}{\frac{8}{s}} = 0$$

Despejar  $V(s)$  resulta

$$V(s) = \frac{32}{s^2 + 4s + 4} = \frac{32}{(s + 2)^2}$$

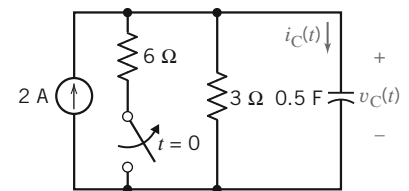
Por último, tome la transformada inversa de Laplace para obtener  $v(t)$

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{32}{(s + 2)^2} \right] = 32te^{-2t}u(t) \text{ V}$$

**EJERCICIO 14.7-1** Determine el voltaje  $v_C(t)$  y la corriente  $i_C(t)$  para  $t \geq 0$  para el circuito de la figura E 14.7-1.

**Sugerencia:**  $v_C(0) = 4 \text{ V}$

**Respuesta:**  $v_C(t) = (6 - 2e^{-0.67t})u(t) \text{ V}$  y  $i_C(t) = \frac{2}{3}e^{-0.67t}u(t) \text{ A}$



**FIGURA E 14.7-1**

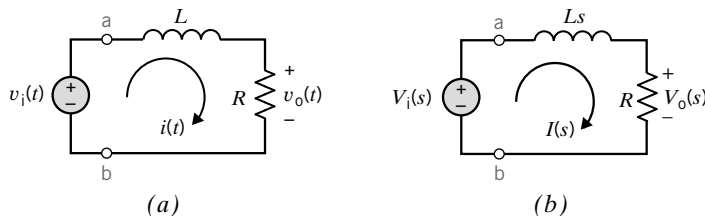
## 14.8 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA E IMPEDANCIA

La definición de **función de transferencia** de un circuito es la relación de la transformada de Laplace de la respuesta del circuito con la entrada del circuito cuando las condiciones iniciales son cero.

Para el circuito de la figura 14.8-1a, la entrada es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_1(t)$ , y la respuesta es el voltaje del resistor,  $v_o(t)$ . La función de transferencia de este circuito, indicada por  $H(s)$ , se expresa como

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_1(s)} \quad (14.8-1)$$

siempre que las condiciones iniciales sean iguales a cero. En este caso, la única condición inicial es la corriente del inductor, porque se requiere  $i(0) = 0$ .



**FIGURA 14.8-1** Un circuito, representado (a) en el dominio de tiempo, y (b) en el dominio de frecuencia, utilizando la transformada de Laplace.

Podemos escribir la ecuación 14.8-1 como

$$V_o(s) = H(s)V_1(s) \quad (14.8-2)$$

la cual dice que la transformada de Laplace de la respuesta es igual a la función de transferencia por la transformada de Laplace de la entrada, “siempre que las condiciones iniciales sean iguales a cero”. Una respuesta sujeta al requerimiento de que todas las condiciones iniciales sean igual a cero se denomina respuesta de estado cero. Con esta terminología podemos leer la ecuación 14.8-1 como “la función de transferencia es la relación de la transformada de Laplace de la respuesta de estado cero con la transformada de Laplace de la entrada”. Del mismo modo, podemos leer la ecuación 14.8-2 como “la transformada de Laplace de respuesta de estado cero es el producto de la función de transferencia y la transformada de Laplace de la entrada”.

Hay dos casos especiales muy significativos. Cuando la entrada es una función escalón unitario, entonces

$$V_1(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$$

y la ecuación 14.8-2 se vuelve

$$V_o(s) = \frac{H(s)}{s}$$

En este caso, a la respuesta de estado cero se le llama respuesta escalón, es decir

$$\text{respuesta escalón} = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{H(s)}{s} \right] \quad (14.8-3)$$

Cuando la entrada es una función de impulso, entonces

$$V_1(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

y la ecuación 14.8-2 se vuelve

$$V_o(s) = H(s)$$

En este caso, a la respuesta de estado cero se le llama respuesta de impulso, es decir,

$$\text{respuesta de impulso} = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] \quad (14.8-4)$$

Es importante observar que la respuesta escalón y la respuesta de impulso son respuestas de estado cero; es decir, todas las condiciones iniciales están establecidas a cero.

La entrada a un circuito y la respuesta del circuito pueden ser una corriente o un voltaje. Cuando la entrada es una corriente y la respuesta es un voltaje, la función de transferencia se denomina impedancia. Del mismo modo, cuando la entrada es un voltaje y la respuesta es una corriente, la función de transferencia se denomina admitancia. Esta terminología es consistente con nuestro uso anterior del término *impedancia*. Por ejemplo, considere la fila de la tabla 14.7-1 que corresponde al condensador. Considere la representación en el dominio de frecuencia del condensador que contiene una fuente de voltaje. La restricción de que la condición inicial sea cero,  $v(0) = 0$ , hace que la fuente de voltaje sea una fuente de voltaje cero, es decir, un cortocircuito. La representación en el dominio de frecuencia del condensador se reduce, de nuevo, a un elemento único. Una vez más, la impedancia del condensador está dada por la ecuación 14.8-5.

$$Z_C(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs} \quad (14.8-5)$$

A continuación, considere la representación de dominio de frecuencia del capacitor que contiene una fuente de corriente. La condición de que la condición inicial sea cero,  $v(0) = 0$ , hace que la fuente de corriente sea una fuente de corriente cero, es decir, un circuito abierto. La representación de dominio de frecuencia del capacitor se reduce de nuevo a un elemento único. Una vez más, la impedancia del capacitor la da la ecuación 14.8-5.

Un argumento parecido muestra que establecer las condiciones iniciales a cero simplifica la representación en el dominio de frecuencia del inductor a la impedancia única,

$$Z_L(s) = Ls \quad (14.8-6)$$

### EJEMPLO 14.8-1 Función de transferencia

Para el circuito en la figura 14.8-1a, la entrada es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_1(t)$ , y la respuesta es el voltaje del resistor,  $v_o(t)$ . Encuentre la función de transferencia del circuito.

#### Solución

La figura 14.8-1b muestra la representación en el dominio de frecuencia del circuito cuando todas las condiciones iniciales son cero. En este caso, la única condición inicial es la corriente del inductor, por lo que requerimos  $i(0) = 0$ . El requerimiento de que  $i(0) = 0$  reduce la representación en el dominio de frecuencia del inductor a la impedancia del inductor.

Aplicar la KVL al enlace del circuito en la figura 14.8-1b resulta

$$V_1(s) = LsI(s) + RI(s)$$

Despejar  $I(s)$  nos da

$$I(s) = \frac{V_1(s)}{Ls + R}$$

La transformada de Laplace de la respuesta es

$$V_o(s) = RI(s) = \frac{R}{Ls + R} V_1(s)$$

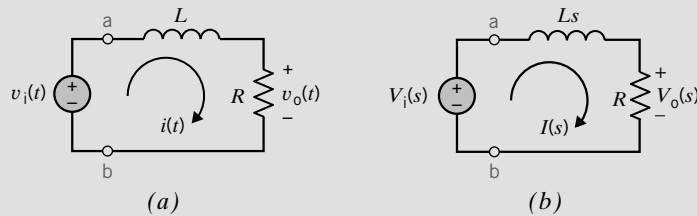
Este resultado se podría haber obtenido aplicando la división de voltajes. Por último, la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_1(s)} = \frac{R}{Ls + R}$$



**EJEMPLO 14.8-2** Respuesta escalón

Determine la respuesta escalón del circuito que se muestra en la figura 14.8-2a.



**FIGURA 14.8-2** El circuito del ejemplo 14.8-2 representado (a) en el dominio del tiempo, y (b) en el dominio de frecuencia, utilizando las transformadas de Laplace.

**Solución**

La figura 14.8-2b muestra la representación en el dominio de frecuencia del circuito cuando todas las condiciones iniciales son cero.

Indique los voltajes de nodos en los nodos a y b como  $V_a$  y  $V_b$ . Las ecuaciones nodales son

$$\frac{V_a - V_i}{0.5 \text{ s}} - \frac{V_b - V_a}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad (4 + s)V_a - sV_b = 4V_i$$

y

$$\frac{V_b - V_a}{2} + 1.5(V_b - V_a) + 2sV_b = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 + s)V_b = V_a$$

Despejamos  $V_b$  y nos da

$$V_b = \frac{4}{(s + 2)^2} V_i$$

La respuesta es  $V_s = V_b$ , de modo que la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{V_b(s)}{V_i(s)} = \frac{4}{(s + 2)^2}$$

La respuesta escalón es

$$v_o(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{H(s)}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{4}{s(s + 2)^2} \right] = (1 - (1 + 2t)e^{-2t})u(t)$$

**EJEMPLO 14.8-3** Respuesta de impulso

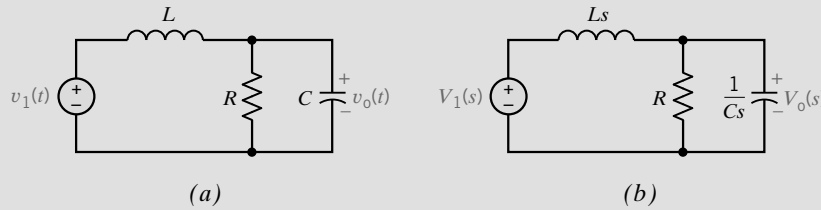
Diseñe el circuito de la figura 14.8-3a para tener un respuesta de impulso igual a

$$h(t) = 2(e^{-t} - e^{-2t}) \quad t \geq 0$$

**Solución**

A partir de la respuesta de impulso dada, tenemos

$$H(s) = \mathcal{L}^{-1} [2(e^{-t} - e^{-2t})] = 2 \left( \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right) = 2 \frac{(s+2) - (s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} \quad (14.8-7)$$



**FIGURA 14.8-3** El circuito del ejemplo 14.8-3 representado (a) en el dominio de tiempo, y (b) en el dominio de frecuencia, utilizando transformadas de Laplace.

La figura 14.8-3b muestra el circuito representado en el dominio de frecuencia, utilizando la transformada de Laplace. Aplicando el principio del divisor de voltaje, determinamos que la función de transferencia del circuito sea

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{R \frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}}}{\frac{R \frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} + Ls} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} \quad (14.8-8)$$

Comparando las ecuaciones 14.8-7 y 14.8-8 resulta que  $1/LC = 2$  y  $1/RC = 3$ . Estas ecuaciones no tienen una solución única y sola. Para obtener una solución, elija  $C = 1/12$  F. Entonces los valores requeridos son  $L = 6$  H y  $R = 4 \Omega$ . Se pueden obtener otras soluciones cambiando el valor de  $C$  y recalculando  $L$  y  $R$ .

**EJERCICIO 14.8-1** La función de transferencia de un circuito es  $H(s) = \frac{-5s}{s^2 + 15s + 50}$ . Determine la respuesta de impulso y la respuesta escalón de este circuito.

**Respuestas:** (a) respuesta de impulso =  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{5}{s+5} - \frac{10}{s+10} \right] = (5e^{-5t} - 10e^{-10t})u(t)$

(b) respuesta escalón =  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s+10} - \frac{1}{s+5} \right] = (e^{-10t} - e^{-5t})u(t)$

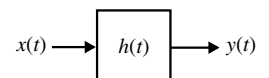
**EJERCICIO 14.8-2** La respuesta de impulso de un circuito es  $h(t) = 5e^{-2t} \sin(4t)u(t)$ . Determine la respuesta escalón de este circuito.

**Sugerencia:**  $H(s) = \mathcal{L}[5e^{-2t} \sin(4t)u(t)] = \frac{5(4)}{(s+2)^2 + 4^2} = \frac{20}{s^2 + 4s + 20}$

**Respuesta:** respuesta escalón =  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{H(s)}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} - \frac{s+4}{s^2 + 4s + 20} \right]$   
 $= \left( 1 - e^{-2t} \left( \cos 4t + \frac{1}{2} \sin 4t \right) \right) u(t)$

## 14.9 CONVOLUCIÓN

En esta sección consideramos el problema de determinar la respuesta de un circuito lineal invariante en tiempo para una entrada arbitraria,  $x(t)$ . Esta situación se ilustra en la figura 14.9-1, en la cual  $x(t)$  es la entrada al circuito,  $y(t)$  es la salida del circuito y  $h(t)$  es la respuesta de impulso del circuito. Asumiremos que  $x(t) = 0$  cuando  $t < 0$  porque  $t = 0$  es el



**FIGURA 14.9-1** Circuito lineal de tiempo invariante.

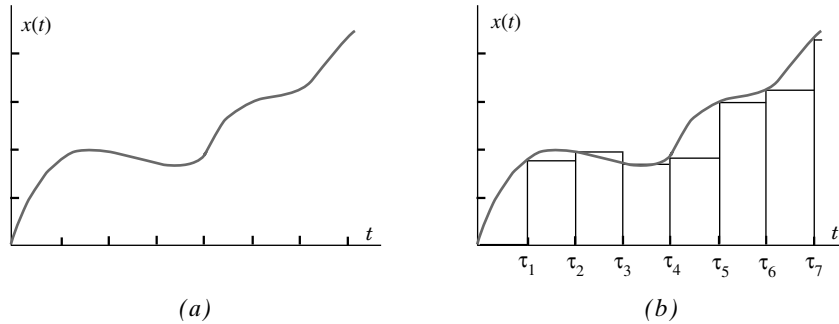


FIGURA 14.9-2 La forma de onda de entrada arbitraria que se muestra en (a) puede ser aproximada, una secuencia de pulsos como se muestra en (b).

tiempo en el cual la entrada se aplica primero al circuito y que  $h(t) = 0$  cuando  $t < 0$  porque la respuesta de impulso no puede ir antes del impulso que la ocasionó.

Es importante para nosotros que el circuito sea lineal e invariante en tiempo. Para ver porqué, utilicemos la notación

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

para indicar que la entrada  $x(t)$  ocasiona la salida  $y(t)$ . Sea  $k$  cualquier constante. Dado que el circuito es lineal,

$$k x(t) \rightarrow k y(t)$$

(Suponga que  $k = 2$ . La entrada  $2x(t)$  es tan grande dos veces como la entrada  $x(t)$ , y hace que la salida sea tan grande dos veces como la salida ocasionada por  $x(t)$ .) A continuación, sea  $\tau$  cualquier constante. Puesto que el circuito es invariante en tiempo, tenemos

$$x(t - \tau) \rightarrow y(t - \tau)$$

(Suponga que  $\tau = 4$  s. La entrada  $x(t - 4)$  está retrasada 4 s con respecto a  $x(t)$  y ocasiona una salida retrasada en 4 s con respecto a  $y(t)$ .) Dado que el circuito es lineal y no variable con el tiempo, tenemos

$$k x(t - \tau) \rightarrow k y(t - \tau)$$

Luego, aprovechamos el hecho de que  $h(t)$  es la respuesta de impulso del circuito. En consecuencia, cuando la entrada al circuito es  $x(t) = \delta(t)$ , la salida es  $y(t) = h(t)$ . Es decir,

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

Por último,

$$k \delta(t - \tau) \rightarrow k h(t - \tau) \quad (14.9-1)$$

Considere la forma de onda de entrada arbitraria  $x(t)$  que se muestra en la figura 14.9-2(a). Esta forma de onda se puede aproximar por una serie de pulsos como se muestra en la figura 14.9-2(b). Los tiempos  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$  están espaciados de manera uniforme, es decir,

$$\tau_{i+1} = \tau_i + \Delta\tau \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots$$

donde el incremento  $\Delta\tau$  es independiente del índice  $i$ . El error en la aproximación es pequeño cuando se elige que el incremento  $\Delta\tau$  sea pequeño.

La figura 14.9-3a muestra uno de los pulsos desde la aproximación de la forma de onda de la entrada. Observe que el área del pulso es  $x(\tau_i)\Delta\tau$ . Cuando se elige que el incremento  $\Delta\tau$  de tiempo sea pequeño, este pulso se puede aproximar por la función de impulso que tenga la misma área,  $x(\tau_i)\Delta\tau\delta(t - \tau_i)$ . Esa función de impulso se ilustra en la figura 14.9-3b.

La forma de onda de entrada se representa por la suma de las funciones de impulso que aproximan los pulsos en la figura 14.9-2b.

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x(\tau_i)\Delta\tau\delta(t - \tau_i) \quad (14.9-2)$$

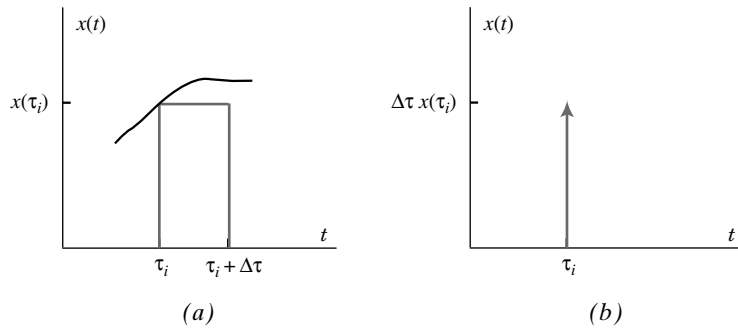


FIGURA 14.9-3 (a) Un pulso desde la aproximación de una forma de onda de entrada, y (b) el impulso correspondiente.

Como el circuito es lineal, la respuesta a esta suma de entradas de impulso es igual a la suma de las respuestas para las respuestas de las entradas de impulso individuales. De la figura 4.9-1, las respuestas a las entradas de impulsos individuales están dadas por

$$(x(\tau_i)\Delta\tau)\delta(t - \tau_i) \rightarrow (x(\tau_i)\Delta\tau)h(t - \tau_i) \text{ para } i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

La respuesta para el circuito es

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x(\tau_i)\Delta\tau h(t - \tau_i) = \sum_{i=0}^{\infty} x(\tau_i)h(t - \tau_i)\Delta\tau \tag{14.9-3}$$

En el límite, en cuanto  $\Delta\tau$  va a cero, la suma se vuelve una integral, y tenemos

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \tag{14.9-4}$$

A la integral en el lado derecho de la ecuación 14.9-4 se le llama integral de convolución y se indica como  $x(t)*h(t)$ . Es decir,

$$y(t) = x(t)*h(t) \tag{14.9-5}$$

La ecuación 14.9-5 indica que la salida del circuito lineal en la figura 14.9-1 se puede obtener como la convolución de la entrada y la respuesta de impulso.

MATLAB provee una función llamada conv, la cual ejecuta la convolución. El ejemplo siguiente utiliza esta función de MATLAB para obtener un trazo de la salida de un circuito lineal, invariante en tiempo.

### EJEMPLO 14.9-1 Convolución

Diagrame la salida  $y(t)$  para el circuito que se muestra en la figura 14.9-1 cuando la entrada  $x(t)$  es la forma de onda triangular que se muestra en la figura 14.9-4 y la respuesta de impulso del circuito es

$$h(t) = \frac{5}{4}(e^{-t} - e^{-5t})u(t)$$

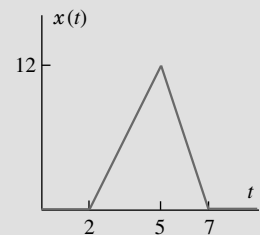


FIGURA 14.9-4 La entrada para el ejemplo 14.9-1.

#### Solución

La figura 14.9-5 muestra un gui3n de MATLAB que produce el trazo requerido.

Los comentarios incluidos en el guión de MATLAB indican que el problema se resuelve en cuatro pasos:

1. Obtener una lista de instantes espaciados igualmente.
2. Obtener la entrada  $x(t)$  y la respuesta de impulso  $h(t)$ .

```
% convolution.m - plots the output for Example 14.9-1
% -----
% Obtain a list of equally spaced instants of time
% -----
t0 = 0; % begin
tf = 12; % end
N = 5000; % number of points plotted
dt = (tf-t0)/N; % increment
t = t0:dt:tf; % time in seconds

% -----
% Obtain the input x(t) and the impulse response h(t)
% -----
for k = 1 : length(t)
    if t(k) < 2
        x(k) = 0;
    elseif t(k) < 5
        x(k) = -8 + 4*t(k); %
    elseif t(k) < 7
        x(k) = 42 - 6*t(k); %
    else
        x(k) = 0;
    end
end
x=x*dt;
h=1.25*exp(-t)-1.25*exp(-5*t);

% -----
%                               Perform the convolution
% -----
y=conv(x,h);

% -----
%                               Plot the output y(t)
% -----
plot(t,y(1:length(t)))
axis([t0, tf, 0, 9])
xlabel('t')
ylabel('y(t)')
```

FIGURA 14.9-5 El guión de MATLAB para el ejemplo 14.9-1.

3. Ejecute la convolución.
4. Trace la salida  $y(t)$ .

Un par de comentarios ayudan a entender el gui3n de MATLAB. El primero, que utilizar las ecuaciones de las rectas que comprenden la forma de onda de entrada triangular nos permite escribir

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } t \leq 2 \\ 4t - 8 & \text{cuando } 2 \leq t \leq 5 \\ -4t + 42 & \text{cuando } 5 \leq t \leq 7 \\ 0 & \text{cuando } t \geq 7 \end{cases}$$

Esta ecuaci3n se complementa con un bloque “y si...” del gui3n de MATLAB. Para todo tiempo,  $\tau_i$ , esta ecuaci3n produce el valor correspondiente  $x(\tau_i)$ . De la ecuaci3n 14.9-2, observamos que las fuerzas del impulso de entrada son  $x(\tau_i)\Delta t$  contrario que  $x(\tau_i)$ . Se necesita multiplicar los valores  $x(\tau_i)$  por el incremento de tiempo, y eso se complementa con la l3nea “ $x = x*dt$ ” en el gui3n de MATLAB.

El segundo, la funci3n de trazo de MATLAB requiere dos listas de valores,  $t$  y  $y$ , en nuestro caso. Estas listas se requieren para tener el mismo n3mero de valores, pero en nuestro caso  $y$  es m3s grande que  $t$ . La expresi3n de MATLAB “(1:length(t))” trunca la lista  $y$ , de modo que esa lista truncada es de la misma extensi3n que  $t$ .

Por 3ltimo, el trazo producido por el gui3n de MATLAB se muestra en la figura 14.9-6.

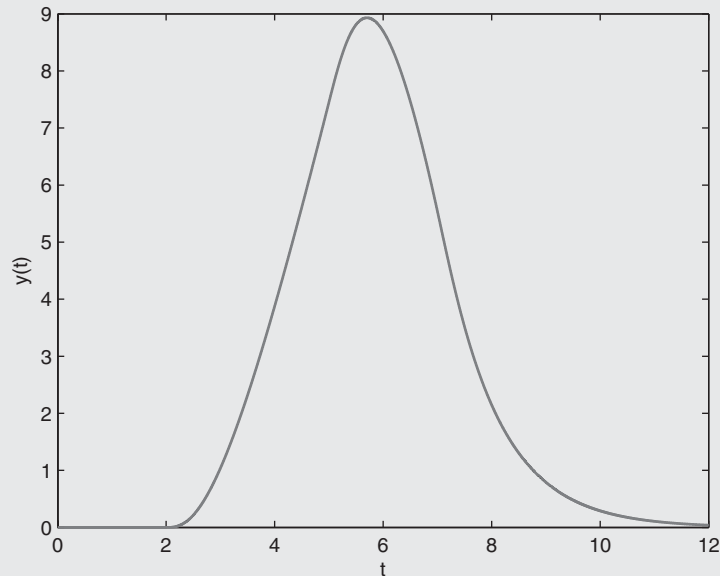


FIGURA 14.9-6 La salida para el ejemplo 14.9-1.

## 14.10 ESTABILIDAD

Se dice de un circuito que debe ser *estable* cuando la respuesta a una se3al de entrada limitada es una se3al de salida limitada. Se dice que un circuito que no es estable debe ser *inestable*.

Producir una respuesta limitada para una entrada limitada es un comportamiento excelente y razonable. Como regla general de oro, los circuitos estables son potencialmente 3tiles, as3 como los circuitos inestables son potencialmente peligrosos. Cuando analizamos un circuito para ver si es estable, quiz3s

estemos tratando de una de dos cosas. La primera, podríamos estar verificando un circuito para saber si es útil. Si es inestable, lo rechazaremos. La segunda, que podríamos tratar de especificar valores de los parámetros del circuito de tal forma de lograr que el circuito sea estable.

Considere un circuito representado por la función de transferencia,  $H(s)$ . Descomponiendo el denominador de la función de transferencia nos da

$$H(s) = \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_N)}$$

Las  $p_i$  son los polos de la función de transferencia, también llamados polos del circuito. Los polos pueden tener valores reales o valores complejos. Los polos complejos aparecen en pares de conjugada compleja; por ejemplo, si  $-2 + j3$  es un polo, entonces  $-2 - j3$  también debe ser un polo.

Un circuito es **estable** si, y sólo si, todos sus polos tienen partes reales negativas.

(Los polos reales deben tener valores negativos.) Otra forma de decir lo mismo es que un circuito es estable si, y sólo si, todos sus polos permanecen en la mitad izquierda del plano  $s$ .

También podemos utilizar la respuesta de impulso,  $h(t)$ , para determinar si un circuito es estable. Un circuito es estable si, y sólo si, su respuesta de impulso satisface la ecuación

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |h(t)| = 0$$

Comprobemos que nuestras dos pruebas de estabilidad, una en términos de  $H(s)$  y otra en términos de  $h(t)$ , sean equivalentes. Por conveniencia, suponga que todos los polos de  $H(s)$  tienen valores reales. La respuesta de impulso correspondiente está dada por

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_N)} \right] = \sum_{i=1}^N A_i e^{p_i t} u(t)$$

Si el circuito es inestable, al menos uno de los polos tiene un valor positivo, por ejemplo,  $p_4 = 6$ . En consecuencia, la respuesta de impulso incluye el término  $A_4 e^{6t}$  y  $|A_4 e^{6t}| \rightarrow \infty$  en cuanto  $t \rightarrow \infty$ , de modo que  $\lim_{t \rightarrow \infty} |h(t)| = \infty$ . Por otra parte, si el circuito es estable, todos los polos tienen valores negativos. Cada  $|A_i e^{p_i t}| \rightarrow 0$  en cuanto  $t \rightarrow \infty$ , de modo que  $\lim_{t \rightarrow \infty} |h(t)| = 0$ .

La función de red,  $\mathbf{H}(\omega)$  de un circuito estable se puede obtener desde su función de transferencia,  $H(s)$ , con lo que  $s = j\omega$ .

$$\mathbf{H}(\omega) = |H(s)|_{s=j\omega}$$

(Esto es cierto sólo para circuitos estables. En general, los circuitos inestables no alcanzan un estado estable, por lo que no tienen respuestas de estado estable o funciones de red.)

### EJEMPLO 14.10-1 Estabilidad

La entrada al circuito que se muestra en la figura 14.10-1 es el voltaje,  $v_i(t)$ , de la fuente de voltaje independiente. La salida es el voltaje,  $v_o(t)$ , de la fuente de voltaje dependiente. La función de transferencia de este circuito es

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{k}{RC}s}{s^2 + \frac{4-k}{RC}s + \frac{2}{R^2C^2}} = \frac{ks}{s^2 + (4-k)s + 2}$$

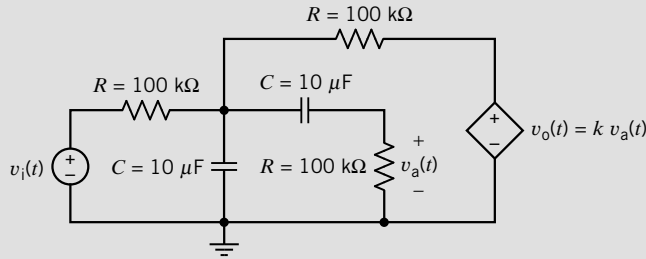


FIGURA 14.10-1 El circuito considerado en el ejemplo 14.10-1.

Determine lo siguiente:

- La respuesta de estado estable cuando  $v_i(t) = 5 \cos 2t$  V y la ganancia de la VCVS es  $k = 3$  V/V.
- La respuesta de impulso cuando  $k = 4 - 2\sqrt{2} = 1.17$  V/V.
- La respuesta de impulso cuando  $k = 4 + 2\sqrt{2} = 6.83$  V/V.

### Solución

Los polos de la función de transferencia son  $p_{1,2} = \frac{-(4-k) \pm \sqrt{(4-k)^2 - 8}}{2}$

- Cuando  $k = 3$  V/V, los polos son  $p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{7}}{2}$ , por lo que el circuito es estable. La función de transformación es

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{3s}{s^2 + s + 2}$$

El circuito es estable cuando  $k = 3$  V/V, por lo que podemos determinar la función de red a partir de la función de transferencia haciendo que  $s = j\omega$ .

$$\frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \mathbf{H}(\omega) = H(s)_{s=j\omega} = \left. \frac{3s}{s^2 + s + 2} \right|_{s=j\omega} = \frac{3j\omega}{(2 - \omega^2) + j\omega}$$

La entrada es  $v_i(t) = 5 \cos 2t$  V. El fasor de la respuesta de estado estable se determina al multiplicar la función de red evaluada en  $\omega = 2$  rad/s por el fasor de la entrada:

$$\mathbf{V}_o(\omega) = \mathbf{H}(\omega)|_{\omega=2} \times \mathbf{V}_i(\omega) = \left( \frac{3j\omega}{(2 - \omega^2) + j\omega} \right)_{\omega=2} (5 \angle 0^\circ) = \left( \frac{j6}{-2 + j2} \right) (5 \angle 0^\circ) = 10.61 \angle -45^\circ$$

La respuesta de estado estable es  $v_o(t) = 10.61 \cos(2t - 45^\circ)$  V.

- Cuando  $k = 4 - 2\sqrt{2}$ , los polos son  $p_{1,2} = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{2} = -\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ , por lo que el circuito es estable. La función de transferencia es

$$H(s) = \frac{1.17s}{(s + \sqrt{2})^2} = \frac{1.17}{(s + \sqrt{2})} - \frac{1.17\sqrt{2}}{(s + \sqrt{2})^2}$$

La respuesta de impulso es

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = 1.17e^{-\sqrt{2}t} (1 - \sqrt{2}t)u(t)$$

Vemos que cuando  $k = 4 - 2\sqrt{2}$ , el circuito es estable, y  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ .



- (c) Cuando  $k = 4 + 2\sqrt{2}$ , los polos son  $p_{1,2} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{2} = \sqrt{2}, \sqrt{2}$ , por lo que el circuito es estable. La función de transferencia es

$$H(s) = \frac{6.83s}{(s - \sqrt{2})^2} = \frac{6.83}{(s - \sqrt{2})} + \frac{6.83\sqrt{2}}{(s - \sqrt{2})^2}$$

La respuesta de impulso es

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = 6.83e^{\sqrt{2}t} (1 + \sqrt{2}t)u(t)$$

Vemos que cuando  $k = 4 + 2\sqrt{2}$ , el circuito es inestable, y  $\lim_{t \rightarrow \infty} |h(t)| = \infty$ .

**EJERCICIO 14.10-1** La entrada a un circuito es el voltaje  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje  $v_o(t)$ . La función de transferencia de este circuito es

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{ks}{s^2 + (3 - k)s + 2}$$

Determine lo siguiente:

- (a) La respuesta de estado estable cuando  $v_i(t) = 5 \cos 2t$  V y la ganancia de la VCVS es  $k = 2$  V/V.  
 (b) La respuesta de impulso cuando  $k = 3 - 2\sqrt{2} = 0.17$  V/V.  
 (c) La respuesta de impulso cuando  $k = 3 + 2\sqrt{2} = 5.83$  V/V.

**Respuestas:** (a)  $v_o(t) = 7.07 \cos(2t - 45^\circ)$  V

(b)  $h(t) = 0.17 e^{-\sqrt{2}t} (1 - \sqrt{2}t)u(t)$

(c)  $h(t) = 5.83 e^{\sqrt{2}t} (1 + \sqrt{2}t)u(t)$

## 14.11 EXPANSIÓN DE FRACCIÓN PARCIAL UTILIZANDO MATLAB

MATLAB provee una función llamada *residuo* que realiza la expansión de fracción parcial de una función de transferencia.

$$H(s) = \frac{b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s^1 + b_0s^0}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s^1 + a_0s^0} \quad (14.11-1)$$

En la ecuación 14.11-1, la función de transferencia se representa como una razón de dos polinomios en  $s$ . En MATLAB, la función de transferencia dada en la ecuación 14.11-1 se puede representar por dos listas. Una lista especifica los coeficientes del polinomio numerador, y la otra lista especifica los coeficientes del polinomio denominador. Por ejemplo,

$$\text{num} = [b_3 \quad b_2 \quad b_1 \quad b_0]$$

y

$$\text{den} = [a_3 \quad a_2 \quad a_1 \quad a_0]$$

(En este caso, ambos polinomios son polinomios de tercer orden, pero el orden de estos polinomios podría cambiarse.)

La expansión de fracción parcial  $H(s)$  se puede representar como

$$H(s) = \frac{R_1}{s - p_1} + \frac{R_2}{s - p_2} + \frac{R_3}{s - p_3} + k(s) \quad (14.11-2)$$

$R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  se denominan residuos y  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  son los polos. En general, los residuos y los polos pueden ser números compuestos. El término  $k(s)$  será, en general, un polinomio en  $s$ . MATLAB representa esta forma de la función de transferencia por tres listas:

$$R = [R_1 \quad R_2 \quad R_3]$$

es una lista de los residuos,

$$p = [p_1 \quad p_2 \quad p_3]$$

es una lista de los polos y

$$k = [c_2 \quad c_1 \quad c_0]$$

es una lista de los coeficientes del polinomio  $k(s)$ .

El comando de MATLAB

$$[R, p, k] = \text{residue}(\text{num}, \text{den})$$

realiza la expansión de fracción parcial, calculando los polos y residuos de los coeficientes de los polinomios numerador y denominador. El comando de MATLAB

$$[n, d] = \text{residue}(R, p, k)$$

realiza la operación inversa, calculando los coeficientes de los polinomios numerador y denominador a partir de los polos y residuos.

La figura 14.11-1 muestra una pantalla de MATLAB que ilustra este procedimiento. En este ejemplo,

$$H(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

```

MATLAB
File Edit Debug Desktop Window Help
>> num = [1 2 3 4];
>> den = [1 6 11 6];
>> [R, p, k] = residue(num, den)

R =

   -7.0000
    2.0000
    1.0000

p =

   -3.0000
   -2.0000
   -1.0000

k =

     1

>> [n, d] = residue(R, p, k)

n =

    1.0000    2.0000    3.0000    4.0000

d =

    1.0000    6.0000   11.0000    6.0000
  
```

FIGURA 14.11-1 Uso de MATLAB para realizar la expansión de fracción parcial.

está representada como

$$H(s) = \frac{-7}{s+3} + \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+1} + 1$$

al realizar la expansión de fracción parcial.

Los ejemplos siguientes ilustran el uso de MATLAB para encontrar la transformada inversa de Laplace de funciones que contengan polos complejos o repetidos.

### EJEMPLO 14.11-1 Polos reales repetidos

Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$V(s) = \frac{12}{s(s^2 + 8s + 16)}$$

#### Solución

Primero trabajaremos en este problema sin utilizar MATLAB. Si observamos que  $s^2 + 8s + 16 = (s + 4)^2$ , empezamos la expansión de fracción parcial:

$$V(s) = \frac{12}{s(s^2 + 8s + 16)} = \frac{12}{s(s+4)^2} = \frac{k}{s+4} + \frac{-3}{(s+4)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{s}$$

Luego, se evalúa la constante  $k$  multiplicando ambos lados de la última ecuación por  $s(s+4)^2$ .

$$12 = ks(s+4) - 3s + \frac{3}{4}(s+4)^2 = \left(\frac{3}{4} + k\right)s^2 + (3 + 4k)s + 12 \Rightarrow k = -\frac{3}{4}$$

Por último

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-\frac{3}{4}}{s+4} + \frac{-3}{(s+4)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{s} \right] = \left( \frac{3}{4} - e^{-4t} \left( \frac{3}{4} + 3t \right) \right) u(t) \text{ V}$$

A continuación, efectuamos la expansión de fracción parcial utilizando la función residuo de MATLAB:

```
>>num = [12];
>>den = [1 8 16 0];
>>[r, p] = residue(num, den)
```

MATLAB responde

```
r =
-0.7500
-3.0000
 0.7500
```

```
P =
-4
-4
 0
```

Un polo repetido de multiplicidad  $m$  se lista  $m$  veces en correspondencia con  $m$  términos

$$\frac{r_1}{s-p}, \frac{r_2}{(s-p)^2}, \dots, \frac{r_m}{(s-p)^m}$$

listados en orden de potencias que se incrementan de  $s-p$ . Las constantes  $r_1, r_2, \dots, r_m$  son los residuos correspondientes, listados de nuevo en orden de potencias que se incrementan de  $s-p$ . En nuestro presente caso, el polo  $p = -4$  tiene multiplicidad 2, y los primeros dos términos de la expansión de fracción parcial son

$$\frac{-0.75}{s-(-4)} + \frac{-3}{(s-(-4))^2} = \frac{-0.75}{s+4} + \frac{-3}{(s+4)^2}$$

La expansión de fracción parcial total es

$$\frac{-0.75}{s-(-4)} + \frac{-3}{(s-(-4))^2} + \frac{0.75}{s-(0)} = \frac{-0.75}{s+4} + \frac{-3}{(s+4)^2} + \frac{0.75}{s}$$

Por último, como antes,

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-0.75}{s+4} + \frac{-3}{(s+4)^2} + \frac{0.75}{s} \right] = (0.75 - e^{-4t}(0.75 + 3t))u(t) \text{ V}$$

### EJEMPLO 14.11.2 Polos complejos

Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$V(s) = \frac{12s + 78}{s^2 + 8s + 52}$$

#### Solución

Primero realizaremos este problema sin utilizar MATLAB. Observe que el denominador no descompone ninguno más de los números reales. Completamos el cuadrado en el denominador

$$V(s) = \frac{12s + 78}{s^2 + 8s + 52} = \frac{12s + 78}{(s^2 + 8s + 16) + 36} = \frac{12s + 78}{(s+4)^2 + 36} = \frac{12(s+4) + 30}{(s+4)^2 + 36} = \frac{12(s+4)}{(s+4)^2 + 6^2} + \frac{5(6)}{(s+4)^2 + 6^2}$$

Ahora, utilice la propiedad  $e^{-at}f(t) \leftrightarrow F(s+a)$  y los pares de la transformada de Laplace

$$\text{sen } \omega t \text{ para } t \geq 0 \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \text{ y } \cos \omega t \text{ para } t \geq 0 \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

para encontrar la transformada inversa de Laplace:

$$v(t) = e^{-4t} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{12s}{s^2 + 6^2} + \frac{5(6)}{s^2 + 6^2} \right] = e^{-4t} [12 \cos(6t) + 5 \text{ sen}(6t)] \text{ para } t > 0$$

A continuación, utilizaremos MATLAB para hacer la expansión de fracción parcial. Primero, introduzca los polinomios numerador y denominador como vectores listando los coeficientes en orden de potencia en disminución de  $s$ .

```
>>num = [ 12 78 ];
>>den = [ 1 8 52 ];
```

Ahora el comando

```
>>[r, p] = residue(num, den)
```

le indica a MATLAB que efectúe la expansión de fracción parcial de retorno p, una lista de polos de  $V(s)$ , y r, una lista de los residuos correspondientes. En el presente caso, MATLAB devuelve

r =

$$6.0000 - 2.5000i$$

$$6.0000 + 2.5000i$$

p =

$$-4.0000 + 6.0000i$$

$$-4.0000 - 6.5000i$$

lo que indica

$$V(s) = \frac{6 - j2.5}{s - (-4 + j6)} + \frac{6 + j2.5}{s - (-4 - j6)}$$

Observe que el primer residuo corresponde al primer polo y el segundo residuo corresponde al segundo polo. (Incluso, esperamos que los polos complejos ocurran en pares de conjugadas complejas y que los residuos correspondientes a los polos de conjugadas complejas sean de suyo conjugadas complejas.) Tomamos la transformada inversa de Laplace y obtenemos

$$v(t) = (6 - j2.5)e^{-(4+j6)t} + (6 + j2.5)e^{-(4-j6)t}$$

Esta expresión, que contiene en cuanto forma números compuestos, no es muy conveniente. Por fortuna podemos utilizar la identidad de Euler para obtener una expresión equivalente que no contiene números compuestos. Dado que los polos complejos ocurren con frecuencia, vale la pena considerar el caso general:

$$V(s) = \frac{a + jb}{s - (c + jd)} + \frac{a - jb}{s - (c - jd)}$$

La transformada inversa de Laplace es

$$\begin{aligned} v(t) &= (a + jb)e^{(c+jd)t} + (a - jb)e^{(c-jd)t} \\ &= e^{ct} [(a + jb)e^{jdt} + (a - jb)e^{-jdt}] = e^{ct} \left[ 2a \left( \frac{e^{jdt} + e^{-jdt}}{2} \right) - 2b \left( \frac{e^{jdt} - e^{-jdt}}{2j} \right) \right] \end{aligned}$$

La identidad de Euler dice

$$\frac{e^{jdt} + e^{-jdt}}{2} = \cos(dt) \quad \text{y} \quad \frac{e^{jdt} - e^{-jdt}}{2j} = \text{sen}(dt)$$

En consecuencia,

$$v(t) = e^{ct} [2a \cos(dt) - 2b \text{sen}(dt)]$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente par de transformadas de Laplace

$$e^{ct} [2a \cos(dt) - 2b \text{sen}(dt)] \leftrightarrow \frac{a + jb}{s - (c + jd)} + \frac{a - jb}{s - (c - jd)}$$

En el presente caso,  $a = 6$ ,  $b = -2.5$ ,  $c = -4$  y  $d = 6$ , por lo tanto tenemos

$$v(t) = e^{-4t} [12 \cos(6t) + 5 \text{sen}(6t)] \quad \text{para } t > 0$$

A veces conviene expresar esta respuesta de una forma diferente. Primero, exprese el término seno como un coseno equivalente:

$$v(t) = e^{-4t} [12 \cos(6t) + 5 \cos(6t - 90^\circ)] \quad \text{para } t > 0$$

A continuación, utilice fasores para combinar los términos de cosenos

$$\mathbf{V}(\omega) = 12 \angle 0^\circ + 5 \angle -90^\circ = 12 - j5 = 13 \angle -22.62^\circ$$

Ahora  $v(t)$  se expresa como

$$v(t) = 13e^{-4t} \cos(6t - 22.62^\circ) \quad \text{para } t > 0$$

**EJEMPLO 14.11-3** Polos reales y complejos

Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$V(s) = \frac{105s+840}{(s^2 + 9.5s + 17.5)(s^2 + 8s + 80)}$$

**Solución**

Utilizando MATLAB

```
>> num=[ 105 840];
>> den=conv([ 1 9.5 17.5],[ 1 8 80]);
>> [r,p] = residue (num, den)
r =
    -0.8087 + 0.2415i
    -0.8087 - 0.2415i
    -0.3196
    1.9371
P =
    -4.0000 + 8.0000i
    -4.0000 - 8.0000i
    -7.0000
    -2.5000
```

En consecuencia,

$$V(s) = \frac{-0.8087 + j0.2415}{s - (-4 + j8)} + \frac{-0.8087 - j0.2415}{s - (-4 - j8)} + \frac{-0.3196}{s - (-7)} + \frac{1.9371}{s - (-2.5)}$$

Utilizando el par de transformadas de Laplace

$$e^{ct}[2a \cos(dt) - 2b \operatorname{sen}(dt)] \leftrightarrow \frac{a + jb}{s - (c + jd)} + \frac{a - jb}{s - (c - jd)}$$

con  $a = -0.8087$ ,  $b = 0.2415$ ,  $c = -4$  y  $d = 8$ , tenemos

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-0.8087 + j0.2415}{s - (-4 + j8)} + \frac{-0.8087 - j0.2415}{s - (-4 - j8)} \right] = e^{-4t}[-1.6174 \cos(8t) + 0.483 \operatorname{sen}(8t)]$$

Si tomamos la transformada inversa de Laplace de los términos que restan de  $V(s)$ , obtenemos

$$v(t) = e^{-4t}[-1.6174 \cos(8t) + 0.483 \operatorname{sen}(8t)] - 0.3196e^{-7t} + 1.9371e^{-2.5t} \quad \text{para } t > 0$$

**14.12 ¿CÓMO LO PODEMOS COMPROBAR...?**

A los ingenieros se les suele solicitar comprobar que la solución de un problema sea la correcta. Por ejemplo, las soluciones propuestas para problemas de diseño se deben comprobar para confirmar que se ha cumplido con todas las especificaciones. Además, se deben revisar los resultados de la computadora para protegerse contra errores de captura de datos, así como las exigencias de los comerciantes, las cuales se deben analizar a fondo.

También a los estudiantes de ingeniería se les pide que verifiquen la exactitud de sus trabajos. Por ejemplo, tomarse un breve lapso antes de terminar un examen permitiría dar una vista rápida e identificar esas soluciones que podrían requerir un poco más de aplicación.

Los ejemplos siguientes ilustran técnicas útiles para comprobar las soluciones a los diversos problemas analizados en este capítulo.

### EJEMPLO 14.12-1 ¿Cómo podemos comprobar las funciones de transferencia?

Se ha especificado que un circuito tenga una función de transferencia de

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_1(s)} = \frac{25}{s^2 + 10s + 125} \quad (14.12-1)$$

y una respuesta escalón de

$$v_o(t) = 0.1(2 - e^{-5t}(3 \cos 10t + 2 \operatorname{sen} 10t))u(t) \quad (14.12-2)$$

¿Cómo podemos comprobar que estas especificaciones son consistentes?

#### Solución

Si las especificaciones son consistentes, entonces la respuesta escalón unitario y la función de transferencia se relacionarán por

$$\mathcal{L}[v_o(t)] = H(s) \frac{1}{s} \quad (14.12-3)$$

donde  $V_1(s) = 1/s$ .

Esta ecuación se puede verificar ya sea calculando la transformada de Laplace de  $v_o(t)$ , o bien calculando la transformada inversa de Laplace de  $H(s)/s$ . Ambos cálculos implican un poco de álgebra. Los teoremas del valor inicial y del valor final proporcionan una comprobación más pronta, aunque tal vez menos conclusiva. (Si no se cumple con alguno de los teoremas del valor inicial o del valor final, entonces sabemos que la respuesta escalón no es consistente con la función de transferencia. La respuesta escalón podría ser inconsistente con la función de transferencia incluso si se satisficieran los teoremas del valor inicial y del valor final.) Veamos qué nos dicen los teoremas del valor inicial y del valor final.

El teorema del valor final requiere que

$$v_o(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ H(s) \frac{1}{s} \right] \quad (14.12-4)$$

Si en la ecuación 14.12-1 sustituimos  $H(s)$ , obtendremos

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{25}{s^2 + 10s + 125} \times \frac{1}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{25}{s^2 + 10s + 125} \right] = \frac{25}{125} = 0.2 \quad (14.12-5)$$

De la ecuación 14.12-2 evaluamos en  $t = \infty$ , obtenemos

$$v_o(\infty) = 0.1(2 - e^{-\infty}(2 \cos \infty + \operatorname{sen} \infty)) = 0.1(2 - 0) = 0.2 \quad (14.12-6)$$

por lo que el teorema del valor final se satisface.

Luego, el teorema del valor inicial requiere que

$$v_o(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left[ H(s) \frac{1}{s} \right] \quad (14.12-7)$$

Si en la ecuación 14.12-1 sustituimos  $H(s)$ , obtendremos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \left[ \frac{25}{s^2 + 10s + 125} \times \frac{1}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{25/s^2}{1 + 10/s + 125/s^2} = \frac{0}{1} = 0 \quad (14.12-8)$$

De la ecuación 14.12-1 evaluamos en  $t = 0$  para obtener

$$\begin{aligned} v_o(0) &= 0.1(2 - e^{-0}(3 \cos 0 + 2 \operatorname{sen} 0)) \\ &= 0.1(2 - 1(3 + 0)) \\ &= -0.1 \end{aligned} \quad (14.12-9)$$

El teorema del valor inicial no se satisfizo, de modo que la respuesta escalón no es consistente con la función de transferencia.

**EJEMPLO 14.12-2** ¿Cómo podemos comprobar las funciones de transferencia?

Se especifica que un circuito tenga una función de transferencia de

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_1(s)} = \frac{25}{s^2 + 10s + 125} \quad (14.12-10)$$

y una respuesta escalón unitario de

$$v_o(t) = 0.1(2 - e^{-5t}(2 \cos 10t + 3 \sin 10t))u(t) \quad (14.12-11)$$

¿**Cómo podemos comprobar** que estas especificaciones son consistentes? (Esta respuesta escalón es una versión ligeramente modificada de la respuesta escalón considerada en el ejemplo 14.12-1).

**Solución**

Está invitado a verificar que ambos teoremas del valor inicial y del valor final se satisfacen. Esto indica, pero no garantiza, que la función de transferencia y la respuesta escalón sean consistentes. Para garantizar la consistencia es necesario verificar que

$$\mathcal{L}[v_o(t)] = H(s) \frac{1}{s} \quad (14.12-12)$$

ya sea calculando la transformada de Laplace de  $v_o(t)$  o calculando la transformada inversa de Laplace de  $H(s)/s$ . Recuerde que la entrada es un escalón unitario, de modo que  $V_1(s) = 1/s$ . Calcularemos la transformada de Laplace de  $v_o(t)$  como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[0.1(2 - e^{-5t}(2 \cos 10t + 3 \sin 10t))u(t)] &= 0.1 \left[ \frac{2}{s} - \frac{2(s+5)}{(s+5)^2 + 10^2} - 3 \frac{10}{(s+5)^2 + 10^2} \right] \\ &= 0.1 \left[ \frac{2}{s} - \frac{2s+40}{s^2 + 10s + 125} \right] \\ &= \frac{-2s + 25}{s(s^2 + 10s + 125)} \end{aligned}$$

Dado que esto no es igual a  $H(s)/s$ , la ecuación 14.12-12 no se satisface. La respuesta escalón no es consistente con la función transferencia aun cuando los valores inicial y final de  $v_o(t)$  sean consistentes.

**EJERCICIO 14.12-1** Se especifica que un circuito tenga una función de transferencia de

$$H(s) = \frac{25}{s^2 + 10s + 125}$$

y una respuesta escalón unitaria de

$$v_o(t) = 0.1(2 - e^{-5t}(2 \cos 10t + \sin 10t))u(t)$$

Compruebe que estas especificaciones son consistentes.



## 14.13 EJEMPLO DE DISEÑO

COMPUERTA DE CARGA DEL  
TRANSBORDADOR ESPACIAL

El transbordador espacial estadounidense se acopló varias veces a la estación espacial rusa *Mir*. El electroimán para abrir una compuerta de carga en el transbordador de la NASA requiere 0.1 A antes de ser activado. La bobina del electroimán está representada por  $L$ , como se muestra en la figura 14.13-1. La corriente activadora está designada como  $i_1(t)$ . El intervalo requerido para que  $i_1$  llegue a 0.1 A está especificado a menos de 3 s. Elija un valor adecuado de  $L$ .

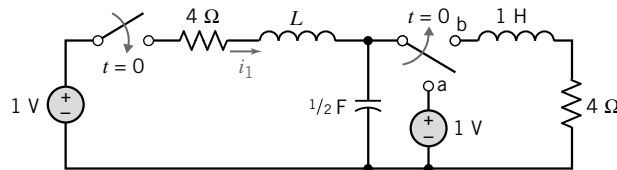


FIGURA 14.13-1 El circuito de control de una compuerta de carga en el transbordador espacial de la NASA.

**Describe la situación y los supuestos**

1. Los dos interruptores se disparan en  $t = 0$ , y el movimiento del segundo interruptor desde la terminal a hasta la terminal b ocurre de manera instantánea.
2. Los interruptores antes de  $t = 0$  estuvieron en posición mucho tiempo.

**Establezca el objetivo**

Determine un valor de  $L$  de modo que el periodo para que la corriente  $i_1(t)$  llegue a un valor de 0.1 A sea menor que 3 s.

**Genere un plan**

1. Determine las condiciones iniciales para las corrientes de dos inductores y el voltaje del condensador.
2. Diseñe dos corrientes de enlace y escriba las dos ecuaciones de enlaces de KVL, utilizando la transformada de Laplace de las variables y la impedancia de cada elemento.
3. Seleccione un valor de prueba de  $L$  y despeje  $I_1(s)$ .
4. Determine  $i_1(t)$ .
5. Bosqueje  $i_1(t)$  y determine el instante temporal  $t_1$  cuando  $i_1(t_1) = 0.1$  A.
6. Compruebe si  $t_1 < 3$  s; y si no, vuelva al paso 3 y seleccione otro valor de  $L$ .

OBJETIVO	ECUACIÓN	SE REQUIERE	INFORMACIÓN
Determine las condiciones iniciales en $t = 0$	$i(0) = i_1(0^-)$ $v_c(0) = v_c(0^-)$	Prepare un borrador del circuito en $t = 0^-$ . Encuentre $i_1(0^-)$ , $i_2(0^-)$ , $v_c(0^-)$ .	
Diseñe dos corriente de enlaces y escriba las ecuaciones de KVL de enlace.		$I_1(s)$ , $I_2(s)$ ; las condiciones iniciales $i_1(0)$ , $i_2(0)$	(continúa)

OBJETIVO	ECUACIÓN	SE REQUIERE	INFORMACIÓN
Despeje $I_1(s)$ y seleccione $L$ .			Regla de Cramer
Determine $i_1(t)$ .	$i_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[I_1(s)]$		Utilice una expansión de fracción parcial.
Bosqueje $i_1(t)$ y encuentre $t_1$ .	$i_1(t_1) = 0.1 \text{ A}$		

### Actúe sobre el plan

Primero, en la figura 14.13-2 se muestra el circuito con los interruptores en posición  $t = 0^-$ . Desde luego, las corrientes del inductor son  $i_1(0^-) = 0$ . Además, tenemos

$$v_c(0) = 1 \text{ V}$$

Segundo, trace nuevamente el circuito para  $t > 0$  como se muestra en la figura 14.3-3 y designe las dos corrientes de enlace  $i_1$  e  $i_2$  como se muestra.

Recuerde que la impedancia es  $Ls$  para un inductor y  $1/Cs$  para un condensador. Debemos tener en cuenta la condición inicial para el condensador. Recuerde que el voltaje del condensador se puede escribir como

$$v_c(t) = v_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_c(\tau) d\tau$$

La transformada de Laplace de esta ecuación es

$$V_c(s) = \frac{v_c(0)}{s} + \frac{1}{Cs} I_c(s)$$

donde  $I_c(s) = I_1(s) - I_2(s)$  en este caso. Ahora podemos escribir las dos ecuaciones de la KVL para los dos enlaces de  $t \geq 0$  con  $v_c(0) = 1 \text{ V}$  como

$$\text{enlace 1: } -V_1(s) + (4 + Ls)I_1(s) + V_c(s) = 0$$

$$\text{enlace 2: } (4 + 1s)I_2(s) - V_c(s) = 0$$

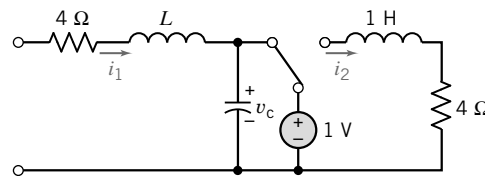


FIGURA 14.13-2 El circuito de la figura 14.13-1 en  $t = 0^-$ .

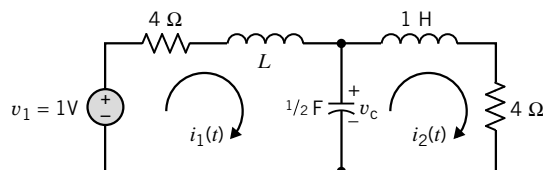


FIGURA 14.13-3 El circuito de la figura 14.13-1 para  $t > 0$ .

La transformada de Laplace del voltaje de entrada es

$$V_1(s) = \frac{1}{s}$$

Incluso, observe que para el condensador tenemos

$$V_c(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{Cs} (I_1(s) - I_2(s))$$

Sustituimos  $V_1$  y  $V_c$  en las ecuaciones de enlaces, y tenemos (cuando  $C = 1/2$  F)

$$\left(4 + Ls + \frac{2}{s}\right)I_1(s) - \left(\frac{2}{s}\right)I_2(s) = 0$$

y

$$-\left(\frac{2}{s}\right)I_1(s) + \left(4 + s + \frac{2}{s}\right)I_2(s) = \frac{1}{s}$$

El tercer paso requiere seleccionar el valor de  $L$  y luego despejar  $I_1(s)$ . Examine la figura 14.13-3; los dos enlaces son simétricos cuando  $L = 1$  H. Entonces, tratando este valor y aplicando la regla de Cramer, despejamos  $I_1(s)$  y obtenemos

$$I_1(s) = \frac{\left(\frac{2}{s}\right) \frac{1}{s}}{\left(4 + s + \frac{2}{s}\right)^2 - \left(\frac{2}{s}\right)^2} = \frac{2}{s(s^3 + 8s^2 + 20s + 16)}$$

Cuarto. Para determinar  $i_1(t)$ , utilizaremos un expansión de fracción parcial. Reordenamos y descomponemos el denominador de  $I_1(s)$  para determinar que

$$I_1(s) = \frac{2}{s(s+4)(s+2)^2}$$

De este modo, tenemos la expansión de fracción parcial

$$I_1(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{(s+2)^2} + \frac{D}{s+2}$$

Entonces, determinamos fácilmente que  $A = 1/8$ ,  $B = -1/8$  y  $C = 1/2$ . Para encontrar  $D$ , utilizamos la ecuación 14.4-9 y obtenemos

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{(2-1)!} \left[ \frac{d}{ds} (s+2)^2 I_1(s) \right]_{s=-2} \\ &= \frac{-2(2s+4)}{s^4 + 8s^3 + 16s^2} \Big|_{s=-2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por consiguiente, al utilizar la transformada de Laplace para cada término, obtenemos

$$i_1(t) = 1/8 - (1/8)e^{-4t} - (1/2)te^{-2t} \text{ A } \quad t \geq 0$$

### Verifique la solución propuesta

En la figura 14.13-4 se muestra el bosquejo de  $i_1(t)$ . Es claro que  $i_1(t)$  ha alcanzado esencialmente un valor de estado estable de 0.125 A por  $t = 4$  segundos.

Para encontrar  $t_1$  cuando

$$I_1(t_1) = 0.1 \text{ A}$$

estimamos que  $t_1$  es aproximadamente de 2 segundos. Luego de evaluar  $i_1(t)$  para unos pocos valores selectos de  $t$  cerca de 2 segundos, encontramos que  $t_1 = 1.8$  segundos. Por lo tanto, los requerimientos del diseño se satisfacen para  $L = 1$  H. Desde luego, se pueden determinar otros valores apropiados de  $L$  que satisfarán los requerimientos de diseño.

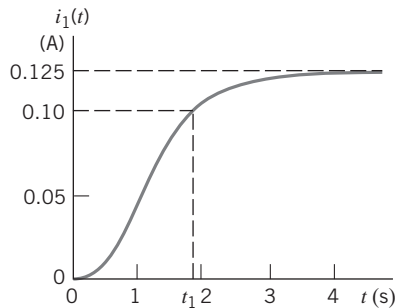


FIGURA 14.13-4 La respuesta de  $i_1(t)$ .

## 14.14 RESUMEN

- A Pierre Simon Laplace se acredita la transformación que lleva su nombre. La transformada de Laplace se define como

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

- La transformada de Laplace transforma las ecuaciones diferenciales que describen un circuito en el dominio de tiempo, a una ecuación algebraica en el dominio de frecuencia compleja. Luego de despejar la ecuación algebraica utilizamos la transformada inversa de Laplace para obtener la respuesta del circuito en el dominio de tiempo. La figura 14.2-1 ilustra este proceso.
- La tabla 14.2-1 sintetiza los pares de transformada de Laplace de uso frecuente. La tabla 14.2-2 conjunta algunas propiedades de la transformada de Laplace.
- La transformada inversa de Laplace se obtiene utilizando la expansión de fracción parcial.
- La tabla 14.7-1 muestra que los circuitos se pueden representar en el dominio de frecuencia en una forma que explica las condiciones iniciales de los condensadores y los inductores.
- Para encontrar la respuesta total de un circuito lineal, primero representamos el circuito en el dominio de frecuencia utilizando la transformada de Laplace. Luego analizamos el circuito, podría ser escribiendo ecuaciones de enlaces o nodales. Por último, utilizamos la transformada inversa de Laplace para representar la respuesta en el dominio de tiempo.

- La función de transferencia,  $H(s)$ , de un circuito se define como la relación de la respuesta  $Y(s)$  del circuito con una excitación  $X(s)$  expresada en el dominio de frecuencia compleja.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Esta relación se obtiene suponiendo que todas las condiciones iniciales son iguales a cero.

- La respuesta escalón es la respuesta de un circuito a una entrada escalón cuando todas las condiciones iniciales son cero. Entonces la respuesta escalón se relaciona con la función de transferencia por

$$\text{respuesta escalón} = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{H(s)}{s} \right]$$

- La respuesta de impulso es la respuesta de un circuito a una entrada de impulso cuando todas las condiciones iniciales son cero. La respuesta de impulso se relaciona con la función de transferencia por

$$\text{respuesta de impulso} = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

- Se dice que un circuito es *estable* cuando la respuesta a una señal de entrada limitada es una señal de salida limitada. Todos los polos de la función de transferencia de un circuito estable se encuentran en la mitad izquierda del plano  $s$ .
- MATLAB realiza la expansión de fracción parcial.

## PROBLEMAS

**Sección 14.2 Transformada de Laplace**

**P 14.2-1** Encuentre la transformada de Laplace,  $F(s)$ , cuando  $f(t) = A \cos \omega t$ ,  $t \geq 0$ .

$$\text{Respuesta: } f(s) = \frac{As}{s^2 + \omega^2}$$

**P 14.2-2** Encuentre la transformada de Laplace,  $F(s)$ , cuando  $f(t) = t$ ,  $t \geq 0$ .

**P 14.2-3** Utilizando la propiedad de linealidad, encuentre la transformada de Laplace, de  $f(t) = e^{-3t} + t$ ,  $t \geq 0$ .

**P 14.2-4** Utilizando la propiedad de linealidad, encuentre la transformada de Laplace,  $F(s)$ , cuando  $f(t) = A(1 - e^{-bt})u(t)$ .

$$\text{Respuesta: } F(s) = \frac{Ab}{s(s+b)}$$

**Sección 14.3 Entradas de pulso**

**P 14.3-1** Considere un pulso  $f(t)$  definido por

$$f(t) = A \quad 0 \leq t \leq T \\ = 0 \quad \text{todas las demás } t$$

Encuentre  $F(s)$ .

$$\text{Respuesta: } F(s) = \frac{A(1 - e^{-sT})}{s}$$

**P 14.3-2** Considere el pulso que se muestra en la figura P 14.3-2, donde la función de tiempo sigue a  $e^{at}$  para  $0 < t < T$ . Encuentre  $F(s)$  para el pulso.

$$\text{Respuesta: } F(s) = \frac{1 - e^{-(s-a)T}}{s - a}$$

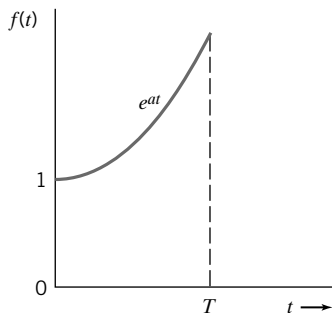


Figura P 14.3-2

**P 14.3-3** Encuentre la transformada de Laplace  $F(s)$  para

- (a)  $f(t) = t^2 e^{-3t}$ ,  $t \geq 0$
- (b)  $f(t) = \delta(t - T)$ ,  $t \geq 0$
- (c)  $f(t) = e^{-4t} \sin 5t$ ,  $t \geq 0$

**P 14.3-4** Encuentre la transformada de Laplace para  $g(t) = e^{-t}u(t - 0.5)$ .

**P 14.3-5** Encuentre la transformada de Laplace para

$$f(t) = \frac{-(t-T)}{T} u(t-T)$$

$$\text{Respuesta: } F(s) = \frac{-1e^{-sT}}{Ts^2}$$

**P 14.3-6** Determine la transformada de Laplace de  $f(t)$  que se muestra en la figura P 14.3-6.

$$\text{Sugerencia: } f(t) = \left(5 - \frac{5}{3}t\right)u(t) + \frac{5}{3}\left(t - \frac{21}{5}\right)u\left(t - \frac{21}{5}\right)$$

$$\text{Respuesta: } F(s) = \frac{5e^{-4.2s} + 15s - 5}{3s^2}$$

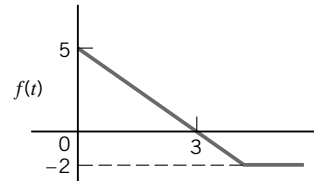


Figura P 14.3-6

**P 14.3-7** Utilice la transformada de Laplace para obtener la transformación de la señal  $f(t)$  que se muestra en la figura P 14.3-7.

$$\text{Respuesta: } F(s) = \frac{3(1 - e^{-2s})}{s}$$

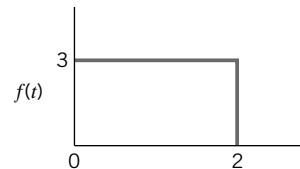


Figura P 14.3-7

**P 14.3-8** Determine la transformada de Laplace de  $f(t)$  que se muestra en la figura P 14.3-8.

$$\text{Respuesta: } F(s) = \frac{5}{2s^2} (1 - e^{-2s} - 2se^{-2s})$$

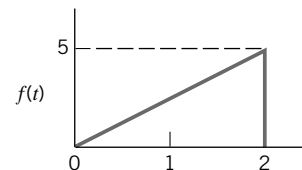


Figura P 14.3-8

**Sección 14.4 Transformada inversa de Laplace**

**P 14.4-1** Encuentre  $f(t)$  cuando

$$F(s) = \frac{s+3}{s^3 + 3s^2 + 6s + 4}$$

$$\text{Respuesta: } f(t) = \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-t} \cos \sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t} \times \text{sen } \sqrt{3}t, \quad t \geq 0$$

**P 14.4-2** Encuentre  $f(t)$  cuando

$$F(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}$$

**P 14.4-3** Encuentre  $f(t)$  cuando

$$F(s) = \frac{5s - 1}{s^3 - 3s - 2}$$

**Respuesta:**  $f(t) = -e^{-t} + 2te^{-t} + e^{2t}, t \geq 0$

**P 14.4-4** Encuentre la transformada inversa de

$$Y(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}$$

**Respuesta:**  $y(t) = e^{-t}(1 - \cos t), t \geq 0$

**P 14.4-5** Encuentre la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{2s + 6}{(s + 1)(s^2 + 2s + 5)}$$

**P 14.4-6** Encuentre la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{2s + 6}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

**Respuesta:**  $f(t) = [3 - 4e^{-t} + e^{-2t}]u(t)$

**P 14.4-7** Pruebe que

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{cs + (ca - \omega d)}{(s + a)^2 + \omega^2} \right]$$

es  $f(t) = me^{-at} \cos(\omega t + \theta)$  donde  $m = \sqrt{c^2 + d^2}$  y  $\theta = \tan^{-1}(d/c)$ .

**P 14.4-8** Encuentre la transformada inversa de  $F(s)$ , expresando  $f(t)$  en formas de coseno y ángulo.

$$(a) F(s) = \frac{8s - 3}{s^2 + 4s + 13} \quad (b) F(s) = \frac{3e^{-s}}{s^2 + 2s + 17}$$

**Respuestas:** (a)  $f(t) = 10.2e^{-2t} \cos(3t + 38.4^\circ), t \geq 0$

$$(b) f(t) = \frac{3}{4}e^{-(t-1)} \text{sen}[4(t-1)], t \geq 1$$

**P 14.4-9** Encuentre la transformada inversa de  $F(s)$ .

$$(a) F(s) = \frac{s^2 - 5}{s(s + 1)^2} \quad (b) F(s) = \frac{4s^2}{(s + 3)^3}$$

**Respuestas:** (a)  $f(t) = -5 + 6e^{-t} + 4te^{-t}, t \geq 0$

$$(b) f(t) = 4e^{-3t} - 24te^{-3t} + 18t^2e^{-3t}, t \geq 0$$

### Sección 14.5 Teoremas de los valores inicial y final

**P 14.5-1** Una función de tiempo está representada por

$$F(s) = \frac{2s^2 - 3s + 4}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

- (a) Encuentre el valor inicial de  $f(t)$  en  $t = 0$ .  
 (b) Encuentre el valor de  $f(t)$  en cuanto  $t$  se aproxima a infinidad.

**P 14.5-2** Encuentre los valores inicial y final de  $v(t)$  cuando

$$V(s) = \frac{(s + 16)}{s^2 + 4s + 12}$$

**Respuestas:**  $v(0) = 1, v(\infty) = 0$  V

**P 14.5-3** Encuentre los valores inicial y final de  $v(t)$  cuando

$$V(s) = \frac{(s + 10)}{(3s^3 + 2s^2 + 1s)}$$

**Respuestas:**  $v(0) = 0, v(\infty) = 10$  V

**P 14.5-4** Encuentre los valores inicial y final de  $f(t)$  cuando

$$F(s) = \frac{-2(s + 7)}{s^2 - 2s + 10}$$

**Respuestas:** valor inicial =  $-2$ , el valor final no existe

**P 14.5-5** Dado que  $\mathcal{L}[v(t)] = \frac{as + b}{s^2 + 8s}$  donde  $v(t)$  es el voltaje que se muestra en la figura P 14.5-5, determine los valores de  $a$  y  $b$ .

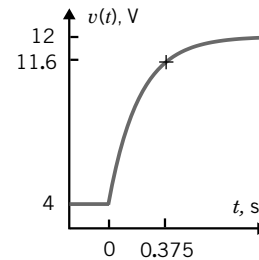


Figura P 14.5-5

**P 14.5-6** Dado que  $\mathcal{L}[v(t)] = \frac{as + b}{2s^2 + 40s}$  donde  $v(t)$  es el voltaje que se muestra en la figura P 14.5-6, determine los valores de  $a$  y  $b$ .

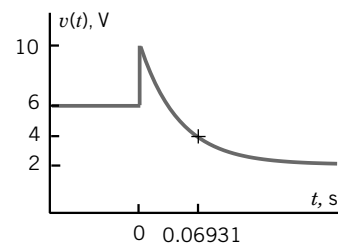


Figura P 14.5-6

### Sección 14.6 Solución de ecuaciones diferenciales que describen un circuito

**P 14.6-1** Encuentre  $i(t)$  para el circuito de la figura P 14.6-1 cuando  $i(0) = 1$  A,  $v(0) = 8$  V y  $v_1 = 2e^{-at}u(t)$  donde  $a = 2 \times 10^4$ .

**Respuestas:**  $i(t) = \frac{1}{15}(-10e^{-bt} + 3e^{-2bt} + 22e^{-4bt})A, t \geq 0, b = 10^4$

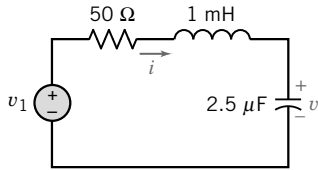


Figura P 14.6-1

**P 14.6-2** Se ha solicitado que en toda casa nueva se instale un dispositivo denominado interruptor de falla de circuito de tierra (GFCI) que dará protección contra choque. Al monitorear la corriente que va y viene desde un receptáculo, un GFCI siente cuando el flujo normal se interrumpe y cambia la potencia en  $1/40$  de segundo. Esto es de particular importancia si usted empuña algún electrodoméstico que esté en cortocircuito entre su cuerpo y la tierra. En la figura P14.6-2 se muestra un modelo de circuito del GFCI en acción para interrumpir un cortocircuito. Encuentre la corriente que fluye a través de la persona y el electrodoméstico,  $i(t)$ , para  $t \geq 0$  cuando el cortocircuito se inicia en  $t = 0$ . Suponga que  $v = 160 \cos 400t$  V y que el condensador está descargado inicialmente.

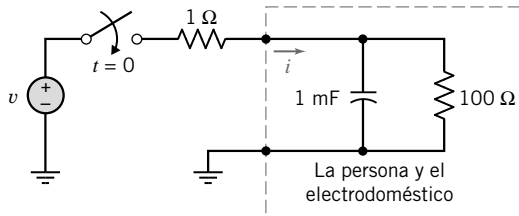


Figura P 14.6-2 Modelo de circuito de una persona y un electrodoméstico en cortocircuito a tierra.

**P 14.6-3** Utilizando la transformada de Laplace, encuentre  $v_c(t)$  para  $t > 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 14.6-3. Las condiciones iniciales son cero.

**Sugerencia:** Utilice una transformación de fuente para obtener un circuito de enlace único.

**Respuesta:**  $v_c = -5e^{-2t} + 5(\cos 2t + \sen 2t)$  V

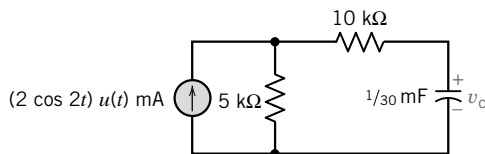


Figura P 14.6-3

**P 14.6-4** Utilizando transformadas de Laplace, encuentre  $v_c(t)$  para  $t > 0$  para el circuito de la figura P 14.6-4 cuando (a)  $C = 1/18$  F y (b)  $C = 1/10$  F.

**Respuestas:** (a)  $v_c(t) = -8 + 8e^{-3t} + 24te^{-3t}$  V  
(b)  $v_c(t) = -8 + 10e^{-t} - 2e^{-5t}$  V

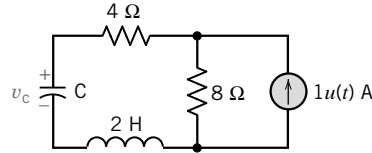


Figura P 14.6-4

**P 14.6-5** Encuentre  $i(t)$  para el circuito de la figura P 14.6-5. Suponga que el interruptor ha estado abierto mucho tiempo.

**Respuesta:**  $i = -0.025e^{-200t} \sen 400t$  A,  $t > 0$

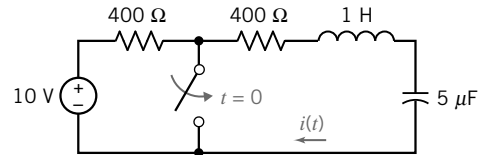


Figura P 14.6-5

**P 14.6-6** Determine la corriente del inductor  $i(t)$  en el circuito que se muestra en la figura P 14.6-6.

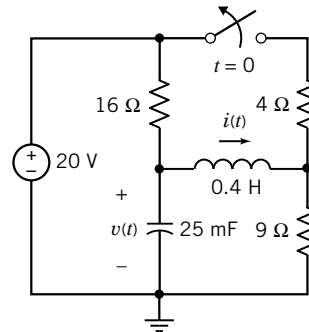


Figura P 14.6-6

**P 14.6-7** Encuentre  $i(t)$  para el circuito de la figura P 14.6-7 cuando  $i_1(t) = 7e^{-6t}$  A para  $t \geq 0$  e  $i(0) = 0$ .

**Respuesta:**  $i(t) = -\frac{35}{16}e^{-6t} + \frac{35}{16}e^{-2t}$  A  $t \geq 0$

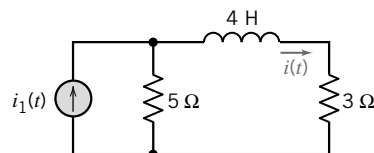


Figura P 14.6-7

**P 14.6-8** Encuentre  $v_2(t)$  para el circuito de la figura P 14.6-8 para  $t \geq 0$ .

**Sugerencia:** Escriba ecuaciones nodales en a y b en términos de  $v_1$  y  $v_2$ . Las condiciones iniciales son  $v_1(0) = 10$  V y  $v_2(0) = 25$  V. La fuente es  $v_s = 50 \cos 2t$  u(t) V.

**Respuesta:**  $v_2(t) = \frac{23}{3}e^{-t} + \frac{16}{3}e^{-4t} + 12 \cos 2t + 12 \sen 2t$  V  $t \geq 0$

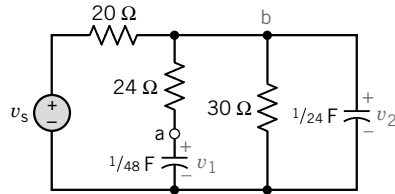


Figura P 14.6-8

**P 14.6-9** Utilizando transformadas de Laplace, encuentre  $v(t)$  para  $t > 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 14.6-9.

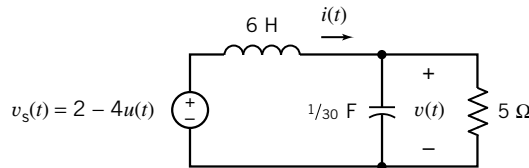


Figura P 14.6-9

**P 14.6-10** Utilizando transformadas de Laplace, encuentre  $v_o(t)$  para  $t > 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 14.6-10.

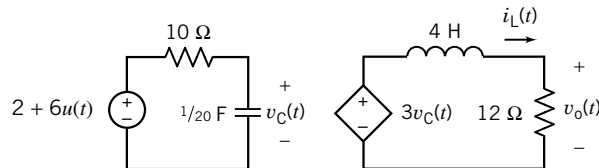


Figura P 14.6-10

**Sección 14.7 Análisis de circuitos utilizando impedancias y condiciones iniciales**

**P 14.7-1** Utilizando transformadas de Laplace, encuentre la respuesta  $i_L(t)$  para  $t > 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 14.7-1.

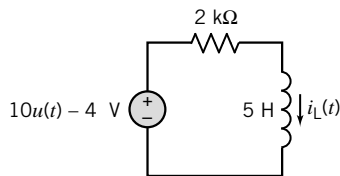


Figura P 14.7-1

**P 14.7-2** Utilizando transformadas de Laplace, encuentre la respuesta  $i_L(t)$  para  $t > 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 14.7-2.

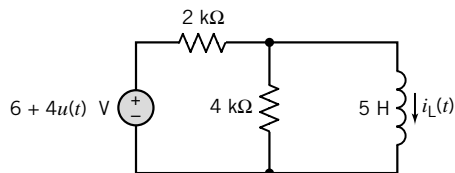


Figura P 14.7-2

**P 14.7-3** Utilizando transformadas de Laplace, encuentre la respuesta  $v_C(t)$  para  $t > 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 14.7-3.

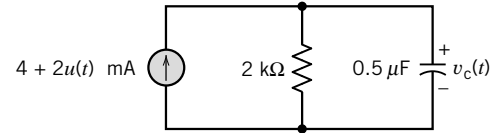


Figura P 14.7-3

**P 14.7-4** Utilizando transformadas de Laplace, encuentre la respuesta  $v_C(t)$  para  $t > 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 14.7-4.

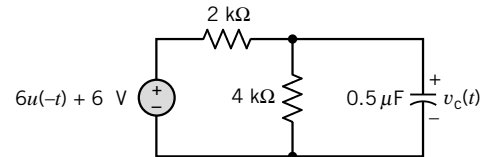


Figura P 14.7-4

**P 14.7-5** Utilizando transformadas de Laplace, encuentre la respuesta  $v(t)$  para  $t > 0$  para el circuito de la figura P 14.7-3 cuando  $v_s = 6e^{-3t}u(t)$  V.

*Respuesta:*  $v = \frac{44}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-5t} - 9e^{-3t}$  V

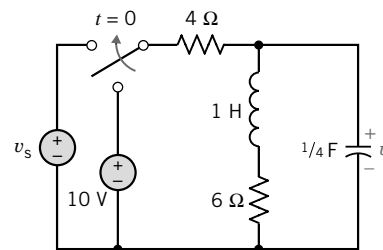


Figura P 14.7-5

**P 14.7-6** Determine  $v_C(t)$  cuando la capacitancia tiene un voltaje inicial  $v(0^-) = 5$  V, como se muestra en la figura P 14.7-6.

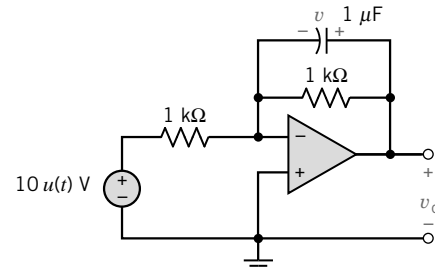


Figura P 14.7-6

**P 14.7-7** El circuito de motor para conducir el esnórquel que se muestra en la figura P 14.7-7a se muestra en la figura P 14.7-7b. Encuentre la corriente del motor  $I_2(s)$  cuando las condiciones iniciales son  $i_1(0^-) = 2$  A e  $i_2(0^-) = 3$  A. Determine  $i_2(t)$  y bosquejelo para 10 s. ¿La corriente del motor conduce suavemente el esnórquel?



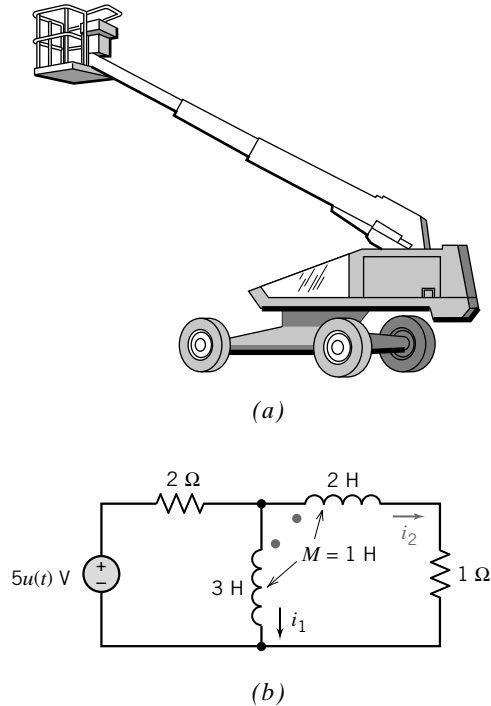


Figura P 14.7-7 Circuito de conducción del motor para el dispositivo de esnórquel.

**P 14.7-8** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 14.7-8 es el voltaje de la fuente de voltaje, 12 V. La salida de este circuito es el voltaje  $v_o(t)$ , a través del condensador. Determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .

*Respuesta:*  $v_o(t) = -4(1 + 2e^{-t/2})$  V para  $t > 0$

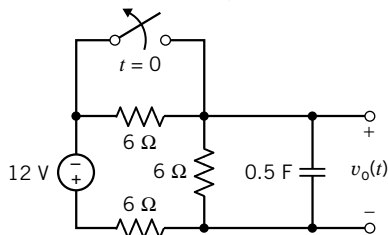


Figura P 14.7-8

**P 14.7-9** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 14.7-9 es el voltaje de la fuente de voltaje, 12 V. La salida de este circuito es la corriente  $i(t)$  en el inductor. Determine  $i(t)$  para  $t > 0$ .

*Respuesta:*  $i(t) = -3(1 + e^{-0.8t})$  A para  $t > 0$

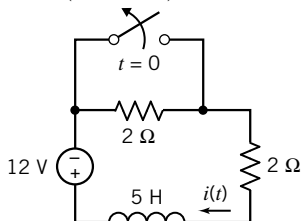


Figura P 14.7-9

**P 14.7-10** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 14.7-10 es el voltaje de la fuente de voltaje, 18 V. La salida de este circuito, el voltaje a través del condensador, está dado por

$$v_o(t) = 6 + 12e^{-2t} \text{ V cuando } t > 0$$

Determine el valor de la capacitancia,  $C$ , y el valor de la resistencia,  $R$ .

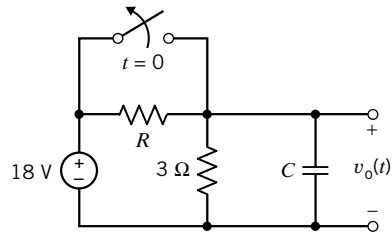


Figura P 14.7-10

**P 14.7-11** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 14.7-11 es el voltaje de la fuente de voltaje

$$v_s(t) = 3 - u(t) \text{ V}$$

La salida es el voltaje

$$v_o(t) = 10 + 5e^{-100t} \text{ V para } t > 0$$

Determine los valores de  $R_1$  y  $R_2$ .

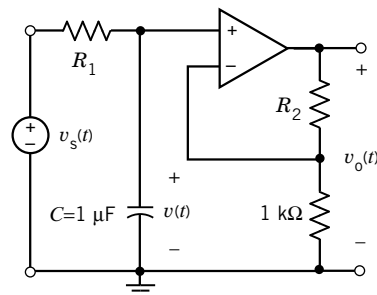


Figura P 14.7-11

**P 14.7-12** Determine la corriente del inductor,  $i_L(t)$ , en el circuito que se muestra en la figura P 14.7-12 para cada uno de los casos siguientes:

- (a)  $R = 2 \Omega$ ,  $L = 4.5 \text{ H}$ ,  $C = 1/9 \text{ F}$ ,  $A = 5 \text{ mA}$ ,  $B = -2 \text{ mA}$   
 (b)  $R = 1 \Omega$ ,  $L = 0.4 \text{ H}$ ,  $C = 0.1 \text{ F}$ ,  $A = 1 \text{ mA}$ ,  $B = -2 \text{ mA}$   
 (c)  $R = 1 \Omega$ ,  $L = 0.08 \text{ H}$ ,  $C = 0.1 \text{ F}$ ,  $A = 0.2 \text{ mA}$ ,  $B = -2 \text{ mA}$

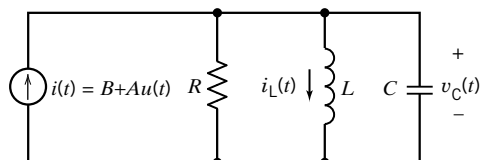


Figura P 14.7-12

**P 14.7-13** Determine la corriente del condensador,  $i_C(t)$ , en el circuito que se muestra en la figura P 14.7-13 para cada uno de los casos siguientes:

- (a)  $R = 3 \Omega, L = 2 \text{ H}, C = 1/24 \text{ F}, A = 12 \text{ V}$
- (b)  $R = 2 \Omega, L = 2 \text{ H}, C = 1/8 \text{ F}, A = 12 \text{ V}$
- (c)  $R = 10 \Omega, L = 0.08 \text{ H}, C = 1/40 \text{ F}, A = 12 \text{ V}$

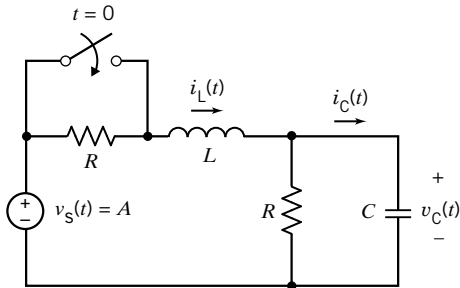


Figura P 14.7-13

**P 14.7-14** El voltaje de fuente en el circuito que se muestra en la figura P 14.7-14 es

$$v_s(t) = 12 = 6u(t) \text{ V}$$

Determine  $v(t)$  para  $t \geq 0$ .

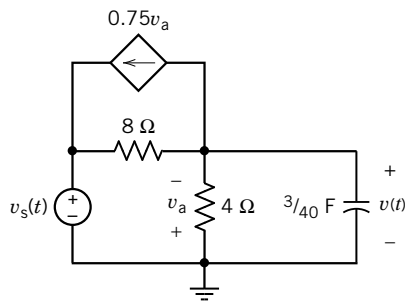


Figura P 14.7-14

**P 14.7-15** Determine el voltaje de salida,  $v_o(t)$ , en el circuito que se muestra en la figura P 14.7-15.

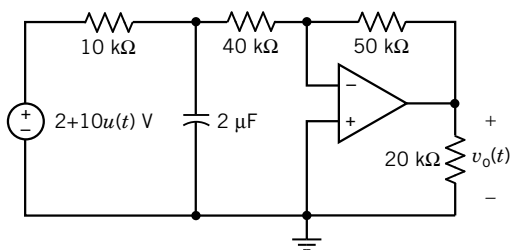


Figura P 14.7-15

**P 14.7-16** Determine el voltaje del condensador,  $v(t)$ , en el circuito que se muestra en la figura P 14.7-16.

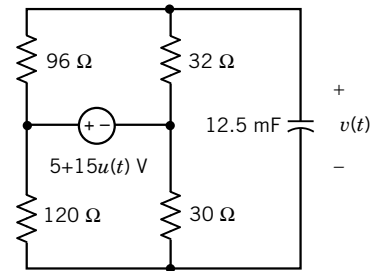


Figura P 14.7-16

**P 14.7-17** Determine el voltaje  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$  para el circuito que se muestra en la figura P 14.7-17.

*Sugerencia:*  $v_C(0) = 4 \text{ V}$

*Respuesta:*  $v_o(t) = 24e^{0.75t} u(t) \text{ V}$  (Este circuito es inestable.)

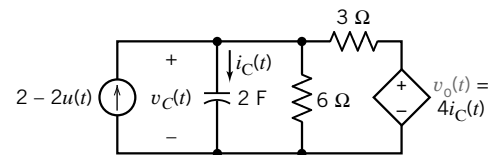


Figura P 14.7-17

**P 14.7-18** Determine la corriente  $i_L(t)$  para  $t \geq 0$  para el circuito de la figura P 14.7-18.

*Sugerencia:*  $v_C(0) = 8 \text{ V}$  e  $i_L(0) = 1 \text{ A}$

*Respuesta:*  $i_L(t) = \left( e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t \right) u(t) \text{ A}$

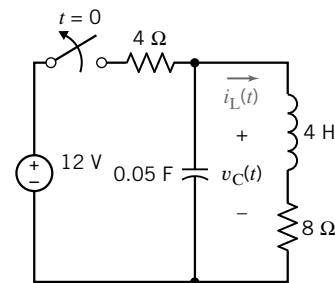
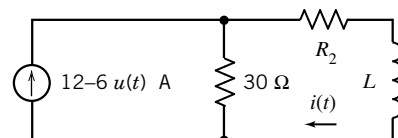
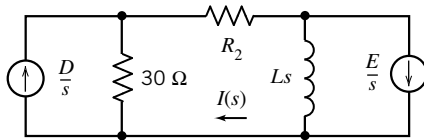


Figura P 14.7-18

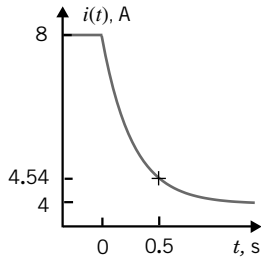
**P 14.7-19** La figura P 14.7-19a muestra un circuito representado en el dominio de tiempo. La figura P 14.7-19b muestra el mismo circuito, representado ahora en el dominio de frecuencia compleja. La figura P 14.7-19c muestra un diagrama de la corriente del inductor.



(a)



(b)

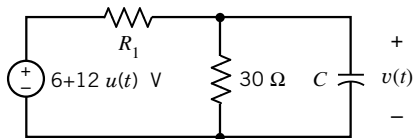


(c)

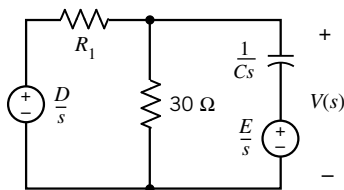
Figura P 14.7-19

Determine los valores de  $D$  y  $E$ , utilizados para representar el circuito en el dominio de frecuencia compleja. Determine los valores de la resistencia  $R_2$  y de la inductancia  $L$ .

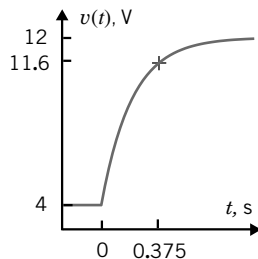
**P 14.7-20** La figura P 14.7-20a muestra un circuito representado en el dominio de tiempo. La figura P 14.7-20b muestra el mismo circuito, representado ahora en el dominio de frecuencia compleja. La figura P 14.7-20c muestra un diagrama de la corriente del inductor.



(a)



(b)

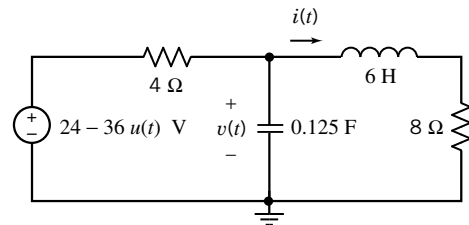


(c)

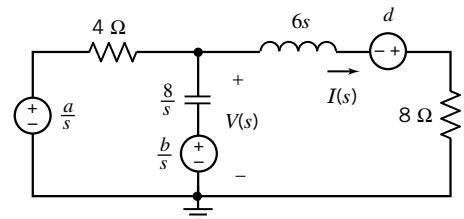
Figura P 14.7-20

Determine los valores de  $D$  y  $E$  utilizados para representar el circuito en el dominio de frecuencia compleja. Determine los valores de la resistencia  $R_1$  y de la capacitancia  $C$ .

**P 14.7-21** La figura P 14.7-21a muestra un circuito representado en el dominio de tiempo. La figura P 14.7-21b muestra el mismo circuito, representado ahora en el dominio de frecuencia compleja. Determine los valores de  $a$ ,  $b$  y  $d$ , utilizados para representar el circuito en el dominio de frecuencia compleja.



(a)



(b)

Figura P 14.7-21

**P 14.7-22** El circuito que se muestra en la figura P 14.7-22 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se abra en tiempo  $t = 0$ . Determine el voltaje del inductor  $v(t)$  para  $t > 0$ .

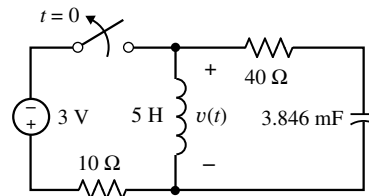


Figura P 14.7-22

**P 14.7-23** El circuito que se muestra en la figura P 14.7-23 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se abra en tiempo  $t = 0$ . Determine el voltaje  $v(t)$  para  $t > 0$ .

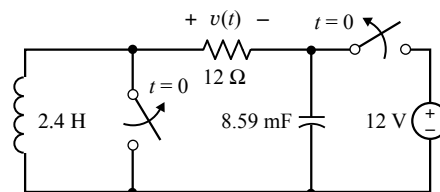


Figura P 14.7-23

**P 14.7-24** El circuito que se muestra en la figura P 14.7-24 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se abra en tiempo  $t = 0$ . Determine el voltaje  $v(t)$  para  $t > 0$ .

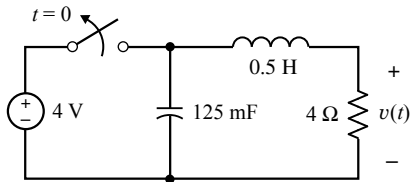


Figura P 14.7-24

**P 14.7-25** El circuito que se muestra en la figura P 14.7-25 se encuentra en estado estable antes del tiempo  $t = 0$ . Determine el voltaje  $v(t)$  para  $t > 0$ .

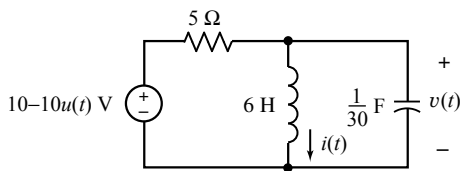


Figura P 14.7-25

**P 14.7-26** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 14.7-26 es el voltaje de la fuente de voltaje

$$v_i(t) = 10 + 5u(t) \text{ V} = \begin{cases} 10 \text{ V} & \text{cuando } t < 0 \\ 15 \text{ V} & \text{cuando } t > 0 \end{cases}$$

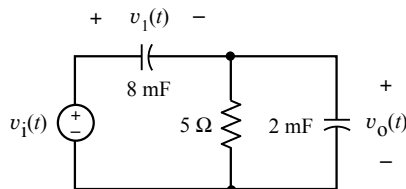


Figura P 14.7-26

Determine la respuesta,  $v_o(t)$ . Suponga que el circuito se encuentra en estado estable cuando  $t < 0$ . Bosqueje  $v_o(t)$  como una función de  $t$ .

**P 14.7-27** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 14.7-27 es la corriente de la fuente de corriente

$$i(t) = 25 - 15u(t) \text{ mA} = \begin{cases} 25 \text{ mA} & \text{cuando } t < 0 \\ 10 \text{ mA} & \text{cuando } t > 0 \end{cases}$$

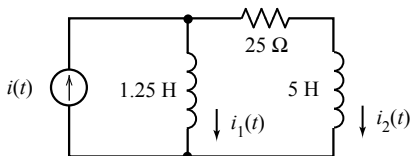


Figura P 14.7-27

Determine la respuesta,  $i_2(t)$ . Suponga que el circuito se encuentra en estado estable cuando  $t < 0$ . Bosqueje  $i_2(t)$  como una función de  $t$ .

### Sección 14.8 Función de transferencia e impedancia

**P 14.8-1** Considere el circuito de la figura P 14.8-1, donde la combinación de  $R_2$  y  $C_2$  representa la entrada de un osciloscopio. La combinación de  $R_1$  y  $C_1$  se agrega a la prueba del osciloscopio para dar forma a la respuesta  $v_o(t)$  de modo que sea igual a  $v_1(t)$  lo más cercano posible. Encuentre la relación necesaria para los resistores y condensadores de modo que  $v_o = av_1$  donde  $a$  es una constante.

**Sugerencia:** Encuentre la función de transferencia  $V_o(s)/V_1(s)$ . Elija  $R_1$  y  $C_1$  de modo que la función de transferencia no dependa de  $s$ .

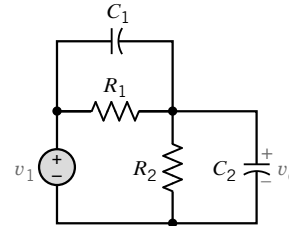


Figura P 14.8-1 Circuito para la prueba del osciloscopio.

**P 14.8-2** Considere el circuito que se muestra en la figura P 14.8-2. Muestre que por la adecuada elección de  $L$ , la impedancia de entrada  $Z = V_1(s)/I_1(s)$  se puede hacer independiente de  $s$ . ¿Qué valor de  $L$  satisface esta condición? ¿Cuál es el valor de  $Z$  cuando es independiente de  $s$ ?

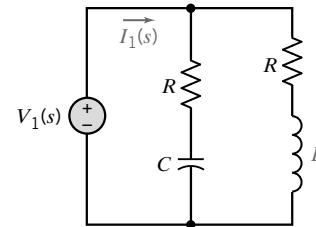


Figura P 14.8-2

**P 14.8-3** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 14.8-3 es el voltaje  $v_1(t)$  de la fuente de voltaje independiente. La salida es el voltaje  $v_o(t)$  a través del condensador. Determine la función de transferencia, respuesta de impulso y respuesta escalón de este circuito.

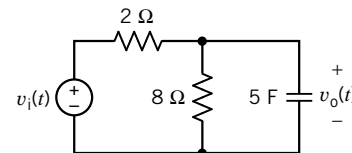


Figura P 14.8-3

**P 14.8-4** La entrada a un circuito lineal es el voltaje  $v_1(t)$  y la respuesta es el voltaje  $v_o(t)$ . La respuesta de impulso,  $h(t)$  de este circuito es:

$$h(t) = 12te^{-4t}u(t) \text{ V}$$

Determine la respuesta escalón del circuito.

**Respuesta:**  $\left(\frac{3}{4} - e^{-4t}\left(3t + \frac{3}{4}\right)\right)u(t) \text{ V}$

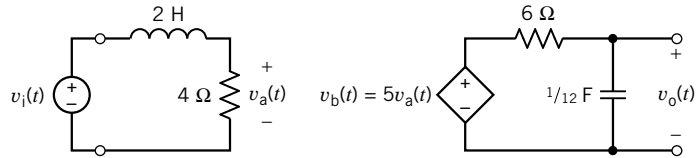


Figura P 14.8-7

**P 14.8-5** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 14.8-5 es el voltaje,  $v_i(t)$  de la fuente de voltaje independiente. La salida es el voltaje  $v_o(t)$ , a través del resistor de  $5 \text{ k}\Omega$ . Especifique valores de la resistencia,  $R$ , la capacitancia,  $C$ , y la inductancia,  $L$ , de modo que la función de transferencia de este circuito esté dada por

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{15 \times 10^6}{(s + 2000)(s + 5000)}$$

**Respuestas:**  $R = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 0.5 \text{ mF}$  y  $L = 1 \text{ H}$  (una posible solución)

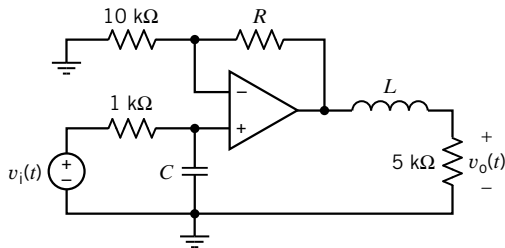


Figura P 14.8-5

**P 14.8-6** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 14.8-6 es el voltaje,  $v_i(t)$  de la fuente de voltaje independiente. La salida es el voltaje  $v_o(t)$ , a través del resistor de  $10 \text{ k}\Omega$ . Especifique valores de las resistencias,  $R_1$  y  $R_2$ , de modo que la respuesta escalón de este circuito esté dada por

$$v_o(t) = -4(1 - e^{-250t})u(t) \text{ V}$$

**Respuestas:**  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$  y  $R_2 = 40 \text{ k}\Omega$

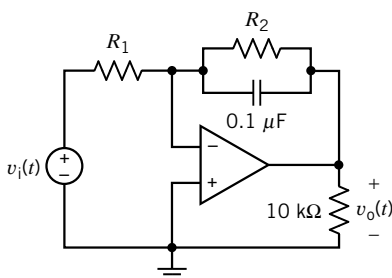


Figura P 14.8-6

**P 14.8-7** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 14.8-7 es el voltaje,  $v_i(t)$  de la fuente de voltaje independiente. La salida es el voltaje  $v_o(t)$ , a través del condensador. Determine la respuesta escalón de este circuito.

**Respuesta:**  $v_o(t) = [5 - 5e^{-2t}(1 + 2t)]u(t) \text{ V}$

**P 14.8-8** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 14.8-8 es el voltaje  $v_i(t)$  de la fuente de voltaje independiente.

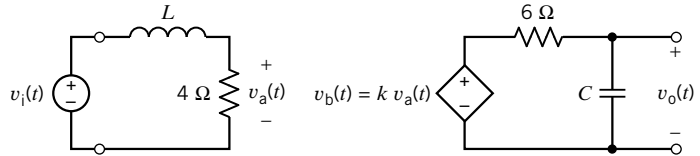


Figura P 14.8-8

La salida es el voltaje,  $v_o(t)$ , a través del condensador. La respuesta escalón de este circuito es

$$v_o(t) = (2 + 4e^{-3t} - 6e^{-2t})u(t) \text{ V}$$

Determine los valores de la inductancia,  $L$ , la capacitancia,  $C$ , y la ganancia de la VCVS,  $k$ .

**Respuestas:**  $L = 2 \text{ H}$ ,  $C = 1/18 \text{ F}$  y  $k = 2 \text{ V/V}$  (una posible solución)

**P 14.8-9** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 14.8-9 es el voltaje  $v_i(t)$  de la fuente de voltaje independiente. La salida es el voltaje,  $v_o(t)$ . La respuesta escalón de este circuito es

$$v_o(t) = 0.5(1 + e^{-4t})u(t) \text{ V}$$

Determine los valores de la inductancia,  $L$ , y de la resistencia,  $R$ .

**Respuestas:**  $L = 6 \text{ H}$ ,  $R = 12 \Omega$

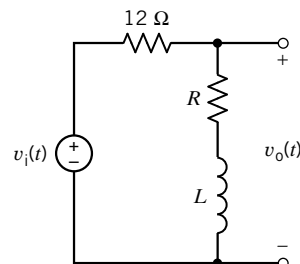


Figura P 14.8-9

**P 14.8-10** Un micrófono eléctrico y su circuito asociado se pueden representar por el circuito que se muestra en la figura P 14.8-10. Determine la función de transferencia  $H(s) = V_o(s)/V(s)$ .

**Respuesta:** 
$$\frac{V_o(s)}{V(s)} = \frac{RCs}{(R_1Cs + 2)(2RCs + 1) - 1}$$

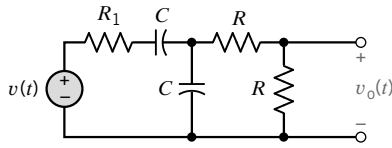


Figura P 14.8-10 Circuito de micrófono.

**P 14.8-11** Los ingenieros han evitado la inductancia en circuitos de larga distancia porque hace lenta la transmisión. Oliver Heaviside probó que la adición de inductancia a un circuito podría permitirle transmitir sin distorsión. George A. Campbell, de la Bell Telephone Company, diseñó las primeras bobinas prácticas de carga de inductancia, en las cuales el campo inducido de cada devanado de cable reforzaba el de sus vecinas de tal modo que la bobina alimentaba proporcionalmente más inductancia que resistencia. Cada una de las 300 bobina de prueba de Campbell agregaba 0.11 H y 12 Ω a intervalos regulares a lo largo de 35 millas de cable telefónico (Nahin, 1990). La bobina de carga balanceaba el efecto de dispersión entre los cables telefónicos representados por  $R$  y  $C$  en la figura P 14.8-11. Determine la función de transferencia  $V_2(s)/V_1(s)$ .

**Respuesta:** 
$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R}{RLCs^2 + (L + R_xRC)s + R_x + R}$$

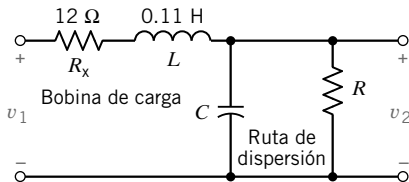


Figura P 14.8-11 Circuito de teléfono y bobina de carga.

**P 14.8-12** En la figura P 14.8-12 se muestra un circuito de amplificador operacional para un filtro de pasa banda. Determine  $V_o(s)/V(s)$ . Suponga amplificadores operacionales ideales.

**Respuesta:** 
$$\frac{V_o(s)}{V(s)} = \frac{-\frac{1}{R_2C_2}s}{s^2 + \frac{1}{R_1C_1}s + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

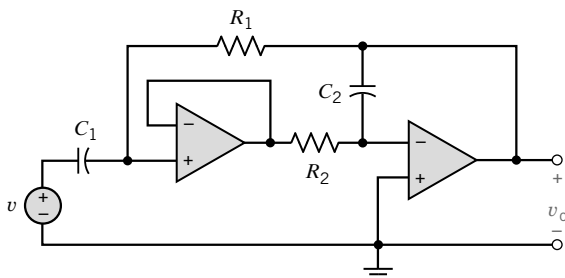


Figura P 14.8-12

**P 14.8-13** Un convertidor de digital a analógico (DAC) utiliza un circuito de filtro de amplificador operacional que se muestra en la figura P 14.8-13. El filtro recibe la salida de pulso desde el DAC y produce el voltaje analógico,  $v_o$ . Determine la función de transferencia del filtro,  $V_o(s)/V(s)$ . Suponga un amplificador operacional ideal.

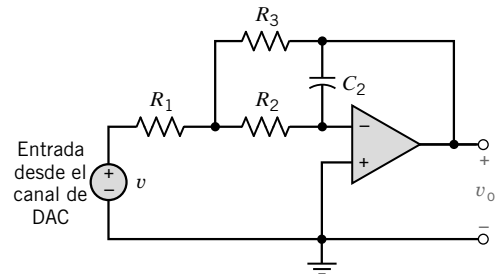


Figura P 14.8-13 Filtro de convertidor de digital a analógico.

**P 14.8-14** En la figura P 14.8-14 se muestra un circuito  $RLC$  en serie. Determine (a) la función de transferencia  $H(s)$ ; (b) la respuesta de impulso, y (c) la respuesta escalón para cada conjunto de valores del parámetro dado en la tabla siguiente.

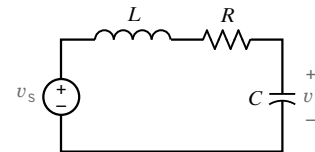


Figura P 14.8-14

	L	C	R
a	2 H	0.025 F	18 Ω
b	2 H	0.025 F	8 Ω
c	1 H	0.391 F	4 Ω
d	2 H	0.125 F	8 Ω

**P 14.8-15** Un circuito se describe por la función de transferencia.

$$\frac{V_o}{V_1} = H(s) = \frac{9s + 18}{3s^3 + 18s^2 + 39s}$$

Encuentre la respuesta escalón y la respuesta de impulso del circuito.

**P 14.8-16** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 14.8-16 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ , y la salida es el voltaje  $v_o(t)$  a través del resistor de 15 kΩ.

- (a) Determine la respuesta de estado estable,  $v_o(t)$ , de este circuito cuando la entrada es  $v_i(t) = 1.5$  V.
- (b) Determine la respuesta de estado estable,  $v_o(t)$ , de este circuito cuando la entrada es  $v_i(t) = 4 \cos(100t + 30^\circ)$  V.
- (c) Determine la respuesta escalón,  $v_o(t)$ , de este circuito.

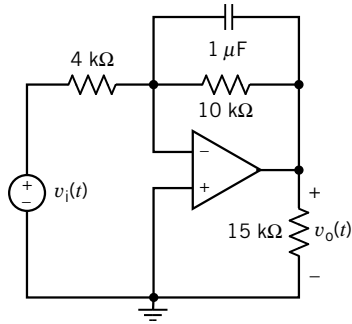


Figura P 14.8-16

**P 14.8-17** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 14.8-17 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ , y la salida es el voltaje del condensador,  $v_o(t)$ . Determine la respuesta escalón de este circuito.

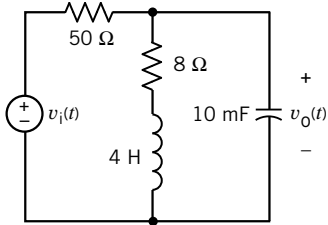


Figura P 14.8-17

**P 14.8-18** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 14.8-18 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ , y la salida es el voltaje del resistor,  $v_o(t)$ . Especifique valores para  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $R$  y  $K$  que hagan que la respuesta escalón del circuito sea

$$v_o(t) = (1 + 0.667e^{-50t} - 1.667e^{-20t})u(t) \text{ V}$$

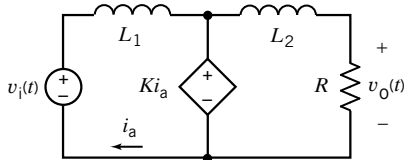


Figura P 14.8-18

**P 14.8-19** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 14.8-19 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ , y la salida es el voltaje del condensador,  $v_o(t)$ . Determine la respuesta escalón de este circuito.

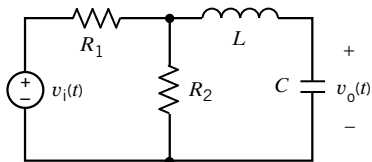


Figura P 14.8-19

**P 14.8-20** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 14.8-20 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ , y la salida es la corriente del inductor,  $i_o(t)$ . Especifique valores para  $L$ ,  $C$  y  $K$  que hagan que la respuesta escalón del circuito sea

$$v_s(t) = (3.2 - (3.2e^{-5t} + 16te^{-5t}))u(t) \text{ V}$$

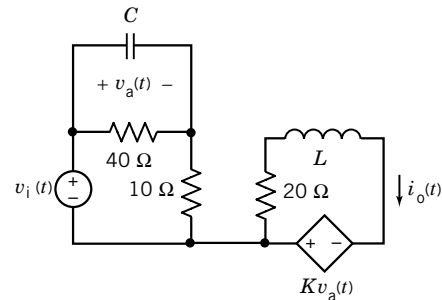


Figura P 14.8-20

**P 14.8-21** La entrada a un circuito es el voltaje,  $v_i(t)$ , y la salida es el voltaje  $v_o(t)$ . La respuesta de impulso del circuito es

$$v_o(t) = 6.5e^{-2t} \cos(2t + 22.6^\circ)u(t) \text{ V}$$

Determine la respuesta de impulso de este circuito.

**P 14.8-22** La entrada a un circuito es el voltaje  $v_i(t)$ , y la salida es el voltaje  $v_o(t)$ . La respuesta escalón del circuito es

$$v_o(t) = [1 - e^{-t}(1 + 3t)]u(t) \text{ V}$$

Determine la respuesta de impulso de este circuito.

**P 14.8-23** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 14.8-23 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ , y la salida es el voltaje,  $v_o(t)$ . Determine la respuesta escalón del circuito.

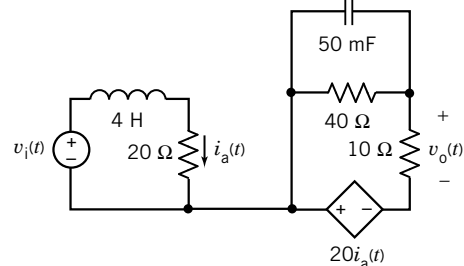


Figura P 14.8-23

**P 14.8-24** La función de transferencia de un circuito es  $H(s) = \frac{12}{s^2 + 8s + 16}$ . Determine la respuesta escalón de este circuito.

**P 14.8-25** La función de transferencia de un circuito es  $H(s) = \frac{80s}{s^2 + 8s + 25}$ . Determine la respuesta escalón de este circuito.

### Sección 14.9 Convolución

**P 14.9-1** Sea  $f(t)$  la que indique el pulso 1 s dado por  $f(t) = u(t) - u(t - 1)$ . Determine la convolución  $f(t) * f(t)$ , la cual es la convolución del pulso consigo mismo.

**Respuesta:**  $f(t) * f(t) = tu(t) - 2(t - 1)u(t - 1) + (t - 2)u(t - 2)$

**P 14.9-2** Considere un pulso de amplitud 2 y una duración de 2 s con su punto de inicio en  $t = 0$ . Encuentre la convolución de este pulso consigo mismo.

**P 14.9-3** Un circuito se muestra en la figura P 14.-9-3. Determine (a) la función de transferencia  $V_2(s)/V_1(s)$  y (b) la respuesta  $v_2(t)$  cuando  $v_1 = tu(t)$ .

*Respuesta:*  $v_2 = t - 1 (1 - e^{-t/RC})/RC, t \geq 0$

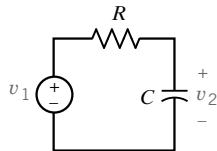


Figura P 14.9-3

**P 14.9-4** Encuentre la convolución de  $h(t) = t u(t)$  y  $f(t) = e^{-at} u(t)$  para  $t > 0$  utilizando la convolución integral y la transformada inversa de  $H(s)F(s)$ .

*Respuesta:*  $\frac{at - 1 + e^{-at}}{a^2}, t > 0$

**Sección 14.10 Estabilidad**

**P 14.10-1** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 14.-10-1 es el voltaje  $v_i(t)$ , de la fuente de voltaje independiente. La salida es el voltaje,  $v_o(t)$ , a través del resistor etiquetado  $R$ . La respuesta escalón de este circuito es

$$v_o(t) = (3/4)(1 - e^{-100t})u(t) \text{ V}$$

- (a) Determine el valor de la inductancia,  $L$  y el valor de la resistencia,  $R$ .
- (b) Determine la respuesta de impulso de este circuito.
- (c) Determine la respuesta de estado estable del circuito cuando la entrada es,  $v_i(t) = 5 \cos 100 t \text{ V}$ .

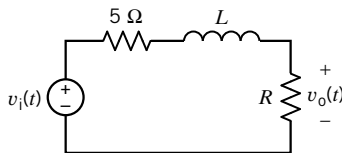


Figura P 14.10-1

**P 14.10-2** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 14.-10-2 es el voltaje  $v_i(t)$  de la fuente de voltaje indepen-

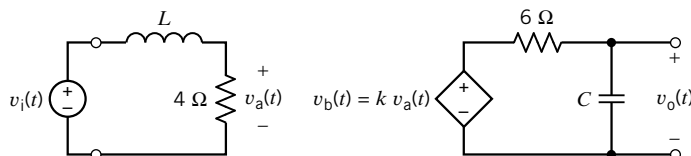


Figura P 14.10-2

diente. La salida es el voltaje,  $v_o(t)$ , a través del condensador. La respuesta escalón de este circuito es

$$v_o(t) = [5 - 5e^{-2t}(1 + 2t)]u(t) \text{ V}$$

Determine la respuesta de estado estable de este circuito cuando la entrada es

$$v_i(t) = 5 \cos (2t + 45^\circ) \text{ V}$$

*Respuesta:*  $v_o(t) = 12.5 \cos (2t - 45^\circ) \text{ V}$

**P 14.10-3** La entrada a un circuito lineal es el voltaje  $v_i(t)$  y la respuesta es el voltaje  $v_o(t)$ . La respuesta de impulso,  $h(t)$ , de este circuito es

$$h(t) = 30e^{-5t}u(t)\text{V}$$

Determine la respuesta de estado estable de este circuito cuando la entrada es

$$v_i(t) = 10 \cos (3t) \text{ V}$$

*Respuesta:*  $v_o(t) = 8.82 \cos (3t - 62^\circ) \text{ V}$

**P 14.10-4** La entrada a un circuito es el voltaje  $v_s$ . La salida es el voltaje  $v_o$ . La respuesta escalón del circuito es

$$v_o(t) = (40 + 1.03e^{-8t} - 41e^{-320t})u(t)$$

Determine la función de red

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)}$$

del circuito y bosqueje el diagrama de Bode de magnitud asintótica.

**P 14.10-5** La entrada a un circuito es el voltaje  $v_s$ . La salida es el voltaje,  $v_o$ . La respuesta escalón del circuito es

$$v_o(t) = 60(e^{-2t} - e^{-6t})u(t)$$

Determine la función de red

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)}$$

del circuito y bosqueje el diagrama de Bode de magnitud asintótica.

**P 14.10-6** La entrada a un circuito es el voltaje  $v_s$ . La salida es el voltaje,  $v_o$ . La respuesta escalón del circuito es

$$v_o(t) = (4 + 32e^{-90t})u(t)$$

Determine la función de red

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_s(\omega)}$$

del circuito y bosqueje el diagrama de Bode de magnitud asintótica.



**P 14.10-7** La entrada a un circuito es el voltaje  $v_s$ . La salida es el voltaje  $v_o$ . La respuesta escalón del circuito es

$$v_o(t) = \frac{5}{3}(e^{-5t} - e^{-20t})u(t) \text{ V}$$

Determine la respuesta de estado estable del circuito cuando la entrada es

$$V_s(t) = 12 \cos(30t) \text{ V}$$

**P 14.10-8** La entrada a un circuito es el voltaje  $v_s$ . La salida es el voltaje  $v_o$ . La respuesta de impulso del circuito es

$$v_o(t) = e^{-5t}(10 - 50t)u(t) \text{ V}$$

Determine la respuesta de estado estable del circuito cuando la entrada es

$$V_s(t) = 12 \cos(10t) \text{ V}$$

**P 14.10-9** La entrada a un circuito es el voltaje  $v_s$ . La salida es el voltaje  $v_o$ . La respuesta escalón del circuito es

$$v_o(t) = (1 - e^{-20t}(\cos(4t) + 0.5 \sin(4t)))u(t) \text{ V}$$

Determine la respuesta de estado estable del circuito cuando la entrada es

$$v_s(t) = 12 \cos(4t) \text{ V}$$

**P 14.10-10** La función de transferencia de un circuito es, si  $H(s) = \frac{20}{s+8}$ . Cuando la entrada de este circuito es senoidal, la salida también es senoidal. Sea  $\omega_1$  la frecuencia a la cual la senoide de salida sea dos veces las dimensiones de la senoide de entrada, y sea  $\omega_2$  la frecuencia a la que la senoide de salida se retarde un lapso de una décima con respecto a la senoide de entrada. Determine los valores de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

**P 14.10-11** La entrada a un circuito lineal es el voltaje  $v_i$ . La salida es el voltaje  $v_o$ . La función de transferencia del circuito es

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

Los polos y los ceros de  $H(s)$  se muestran en el diagrama de polos y ceros de la figura P 14.10-11. (No hay ceros.) La ganancia de cd del circuito es

$$H(0) = 5$$

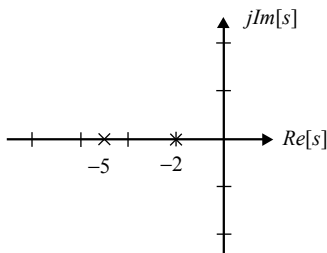


Figura P 14.10-11

Determine la respuesta escalón del circuito.

**P 14.10-12** La entrada a un circuito lineal es el voltaje  $v_i$ . La salida es el voltaje  $v_o$ . La función de transferencia del circuito es

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

Los polos y los ceros de  $H(s)$  se muestran en el diagrama de polos y ceros de la figura P 14.10-12. En  $\omega = 5$  rad/s, la ganancia del circuito es

$$H(5) = 10$$

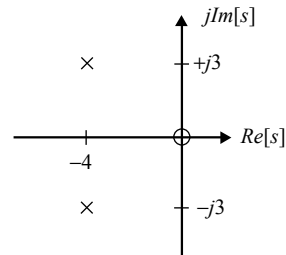


Figura P 14.10-12

Determine la respuesta escalón del circuito.

**P 14.10-13** La entrada a un circuito lineal es el voltaje  $v_i$ . La salida es el voltaje  $v_o$ . La función de transferencia del circuito es

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

Los polos y los ceros de  $H(s)$  se muestran en el diagrama de polos y ceros de la figura P 14.10-13. (Hay un polo doble en  $s = -4$ .) La ganancia de cd del circuito es

$$H(0) = 5$$

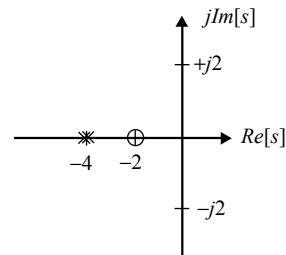


Figura P 14.10-13

Determine la respuesta escalón del circuito.

**P 14.10-14** La entrada a un circuito es el voltaje  $v_i$ . La respuesta escalón del circuito es

$$v_o = 5e^{-4t} \sin(2t)u(t) \text{ V}$$

Bosquee el diagrama de polos y ceros para este circuito.

**P 14.10-15** La entrada a un circuito es el voltaje  $v_i$ . La respuesta escalón del circuito es

$$v_o = 5te^{-4t}u(t) \text{ V}$$

Bosquee el diagrama de polos y ceros para este circuito.

**Sección 14.11 Expansión de fracción parcial utilizando MATLAB**

**P 14.11-1** Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$V(s) = \frac{11.6s^2 + 91.83s + 186.525}{s^3 + 10.95s^2 + 35.525s + 29.25}$$

**P 14.11-2** Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$V(s) = \frac{8s^3 + 139s^2 + 774s + 1471}{s^4 + 12s^3 + 77s^2 + 296s + 464}$$

**P 14.11-3** Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$V(s) = \frac{s^2 + 6s + 11}{s^3 + 12s^2 + 48s + 64} = \frac{s^2 + 6s + 11}{(s + 4)^3}$$

**P 14.11-4** Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$V(s) = \frac{-60}{s^2 + 5s + 48.5}$$

**P 14.11-5** Encuentre la transformada inversa de Laplace de

$$V(s) = \frac{-30}{s^2 + 25}$$

**Sección 14.12 ¿Cómo podemos comprobar...?**

**P 14.12-1** El análisis por computadora del circuito de la figura P 14.12-1 indica que

$$v_C(t) = 6 + 3.3e^{-2.1t} + 2.7e^{-15.9t} \text{ V}$$

e

$$i_L(t) = 2 + 0.96e^{-2.1t} + 0.04e^{-15.9t} \text{ A}$$

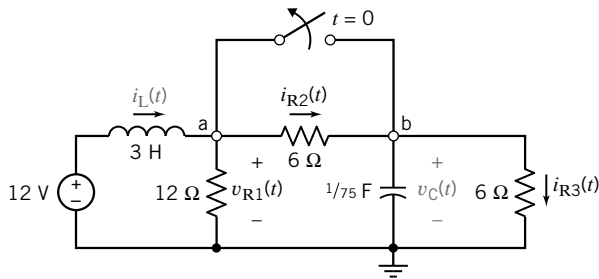


Figura P 14.12-1

después de que el interruptor se abre en tiempo  $t = 0$ . Compruebe que ese análisis es correcto, verificando que (a) satisface la KVL para el enlace que consta de fuente de voltaje, inductor, y resistor de  $12\text{-}\Omega$ , y que (b) satisface la KVL en el nodo b.

*Sugerencia:* Emplee las expresiones dadas para  $i_L(t)$  y  $v_C(t)$  para determinar expresiones para  $v_L(t)$ ,  $i_C(t)$ ,  $v_{R1}(t)$ ,  $i_{R2}(t)$  e  $i_{R3}(t)$ .

**P 14.12-2** El análisis del circuito de la figura P 14.12-2 cuando  $v_C(0) = -12 \text{ V}$  indica que

$$i_1(t) = 18e^{0.75t} \text{ A} \quad \text{e} \quad i_2(t) = 20e^{0.75t} \text{ A}$$

después de que  $t = 0$ . Verifique si este análisis es correcto mediante la representación de este circuito, incluyendo  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$ , en el dominio de frecuencia, utilizando transformadas de Laplace. Utilice  $I_1(s)$  e  $I_2(s)$  para calcular los voltajes de elementos y verifique que estos voltajes satisfacen la KVL para ambos enlaces.

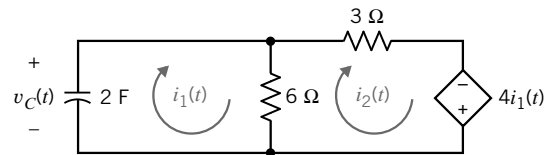


Figura P 14.12-2

**P 14.12-3** La figura P 14.12-3 muestra un circuito representado (a) en el dominio de tiempo, y (b) en el dominio de frecuencia, utilizando transformadas de Laplace. Un análisis incorrecto de este circuito indica que

$$I_L(s) = \frac{s + 2}{s^2 + s + 5} \quad \text{y} \quad V_C(s) = \frac{-20(s + 2)}{s(s^2 + s + 5)}$$

(a) Aplique los teoremas del valor inicial y final para identificar el error en el análisis. (b) Corrija el error.

*Sugerencia:* Al parecer, el error ocurrió al calcular  $V_C(s)$  a partir de  $I_L(s)$ .

*Respuesta:*  $V_C(s) = -\frac{20}{s} \left( \frac{s + 2}{s^2 + s + 5} \right) + \frac{8}{s}$

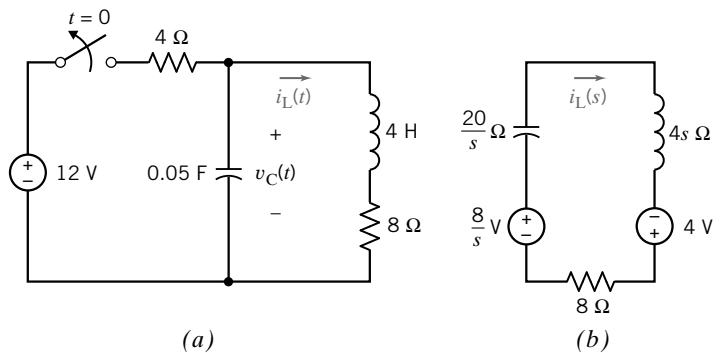


Figura P 14.12-3

## Problemas de PSpice

**PS 14-1** La entrada al circuito que se muestra en la figura PS 14.1 es el voltaje  $v_i(t)$  de la fuente de voltaje. La salida es el voltaje  $v_o(t)$  a través del condensador. La entrada es la señal de pulso especificada de manera gráfica por el diagrama. Utilice PSpice para trazar la salida  $v_o(t)$  como una función de  $t$ .

**Sugerencia:** Represente la fuente de voltaje utilizando la parte llamada VPULSE de PSpice.

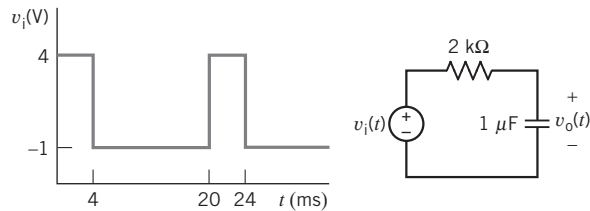


Figura PS 14.1

**PS 14-2** El circuito que se muestra en la figura PS 14.2 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre en tiempo  $t = 0$ . La entrada al circuito es el voltaje de la fuente de voltaje, 12 V. La salida de este circuito es el voltaje a través del condensador  $v(t)$ . Utilice PSpice para trazar la salida  $v(t)$  como una función de  $t$ . Trabaje con el diagrama para obtener una representación analítica de  $v(t)$  para  $t > 0$ .

**Sugerencia:** Esperamos que  $v(t) = A + B e^{-t/\tau}$  para  $t > 0$ , donde  $A$ ,  $B$  y  $\tau$  sean constantes que se deben determinar.

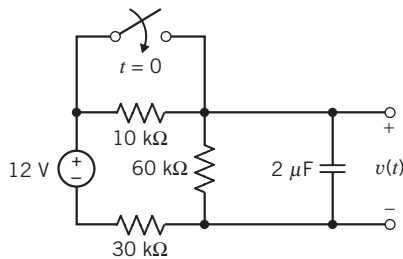


Figura PS 14.2

**PS 14-3** El circuito que se muestra en la figura PS 14.3 se encuentra en estado estable antes de que el interruptor se cierre en tiempo  $t = 0$ . La entrada al circuito es la corriente de la fuente de corriente 4 mA. La salida de este circuito es la corriente en el inductor  $i(t)$ . Utilice PSpice para trazar la salida  $i(t)$  como una función de  $t$ . Trabaje con el diagrama para obtener una representación analítica de  $i(t)$  para  $t > 0$ .

**Sugerencia:** Esperamos que  $i(t) = A + B e^{-t/\tau}$  para  $t > 0$ , donde  $A$ ,  $B$  y  $\tau$  sean constantes que se deben determinar.

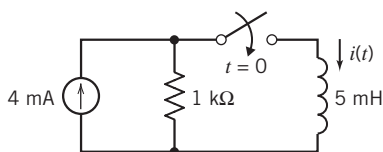


Figura PS 14.3

**PS 14-4** La entrada al circuito que se muestra en la figura PS 14.4 es el voltaje de la fuente de voltaje  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje a través del condensador  $v_o(t)$ . La entrada es la señal de pulso especificada de manera gráfica por el diagrama. Utilice PSpice para trazar la salida  $v_o(t)$  como una función de  $t$  para cada uno de los casos siguientes:

- (a)  $C = 1 \text{ F}$ ,  $L = 0.25 \text{ H}$ ,  $R_1 = R_2 = 1.309 \Omega$
- (b)  $C = 1 \text{ F}$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $R_1 = 3 \Omega$ ,  $R_2 = 1 \Omega$
- (c)  $C = 0.125 \text{ F}$ ,  $L = 0.5 \text{ H}$ ,  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$

Diagrame en el mismo eje la salida para estos tres casos.

**Sugerencia:** Represente la fuente de voltaje utilizando la parte de PSpice denominada VPULSE.

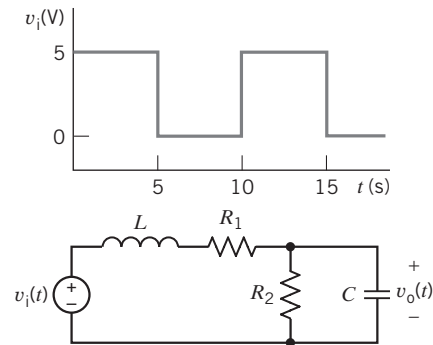


Figura PS 14.4

**PS 14-5** La entrada al circuito que se muestra en la figura PS 14.5 es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida es el voltaje  $v_o(t)$  a través del resistor  $R_2$ . La entrada es la señal de pulso especificada de manera gráfica por el diagrama. Utilice PSpice para trazar la salida  $v_o(t)$  como una función de  $t$  para cada uno de los casos siguientes:

- (a)  $C = 1 \text{ F}$ ,  $L = 0.25 \text{ H}$ ,  $R_1 = R_2 = 1.309 \Omega$
- (b)  $C = 1 \text{ F}$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $R_1 = 3 \Omega$ ,  $R_2 = 1 \Omega$
- (c)  $C = 0.125 \text{ F}$ ,  $L = 0.5 \text{ H}$ ,  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$

Diagrame en el mismo eje la salida para estos tres casos.

**Sugerencia:** Represente la fuente de voltaje utilizando la parte de PSpice denominada VPULSE.

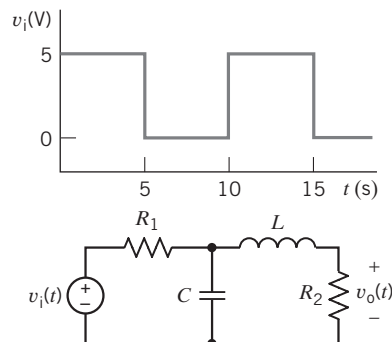


Figura PS 14.5

## Problemas de diseño

**PD 14-1** Diseñe el circuito de la figura PD 14-1 para tener una respuesta escalón igual a

$$v_o = 5te^{-4t}u(t)V$$

**Sugerencia:** Determine la función de transferencia del circuito de la figura PD 14-1 en términos de  $k$ ,  $R$ ,  $C$  y  $L$ . Luego determine la transformada de Laplace de la respuesta escalón del circuito en la figura PD 14-1. A continuación, determine la transformada de Laplace de la respuesta escalón dada. Por último, determine valores de  $k$ ,  $R$ ,  $C$  y  $L$  que hagan que las dos respuestas escalón sean iguales.

**Respuesta:** Tome  $L = 1$  H, luego  $k = 0.625$  V/V,  $R = 8 \Omega$  y  $C = 0.625$  F. (Esta respuesta no es la única.)

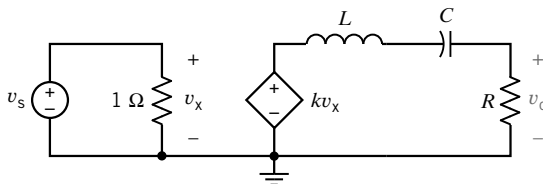


Figura PD 14-1

**PD 14-2** Diseñe el circuito de la figura PD 14-2 para tener una respuesta escalón igual a

$$v_o = 5e^{-4t}\text{sen}(2t)u(t) V$$

**Sugerencia:** Determine la función de transferencia del circuito de la figura PD 14-1 en términos de  $k$ ,  $R$ ,  $C$  y  $L$ . Luego determine la transformada de Laplace de la respuesta escalón del circuito en la figura PD 14-1. A continuación, determine la transformada de Laplace de la respuesta escalón dada. Por último, determine valores de  $k$ ,  $R$ ,  $C$  y  $L$  que hagan que las dos respuestas escalón sean iguales.

**Respuesta:** Tome  $L = 1$  H, luego  $k = 1.25$  V/V,  $R = 8 \Omega$  y  $C = 0.05$  F. (Esta respuesta no es la única.)

**PD 14-3** Diseñe el circuito de la figura PD 14-1 para tener una respuesta escalón igual a

$$v_o = 5(e^{-2t} - e^{-4t})u(t) V$$

**Sugerencia:** Determine la función de transferencia del circuito de la figura PD 14-1 en términos de  $k$ ,  $R$ ,  $C$  y  $L$ . Luego determine la transformada de Laplace de la respuesta escalón del circuito en la figura PD 14-1. A continuación, determine la transformada de Laplace de la respuesta escalón dada. Por último, determine valores de  $k$ ,  $R$ ,  $C$  y  $L$  que hagan que las dos respuestas escalón sean iguales.

**Respuesta:** Tome  $L = 1$  H, luego  $k = 1.667$  V/V,  $R = 6 \Omega$  y  $C = 0.125$  F. (Esta respuesta no es la única.)

**PD 14-4** Demuestre que el circuito de la figura PD 14-1 no se puede diseñar para tener una respuesta escalón igual a

$$v_o = 5(e^{-2t} + e^{-4t})u(t) V$$

**Sugerencia:** Determine la función de transferencia del circuito de la figura PD 14-1 en términos de  $k$ ,  $R$ ,  $C$  y  $L$ . Luego determine la transformada de Laplace de la respuesta escalón del circuito en la figura PD 14-1. A continuación, determine la transformada

de Laplace de la respuesta escalón dada. Observe que estas dos funciones tienen formas diferentes y por lo tanto no se pueden hacer iguales por ninguna elección de valores de  $k$ ,  $R$ ,  $C$  y  $L$ .

**PD 14-5** El circuito que se muestra en la figura PD 14-5 representa una prueba de osciloscopio conectada a un osciloscopio. Los componentes  $C_2$  y  $R_2$  representan la circuitería de entrada del osciloscopio, y  $C_1$  y  $R_1$  representan la prueba. Determine la función de transferencia  $H(s) = V_o(s)/V(s)$ . Determine la relación requerida de modo que la respuesta natural de la prueba sea cero. Determine la relación requerida, de modo que la respuesta escalón sea igual a la entrada escalón dentro de una ganancia constante. ¿Es posible físicamente este logro?

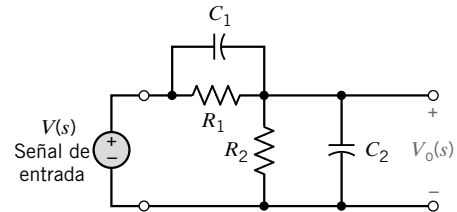


Figura PD 14-5 Circuito de prueba de osciloscopio.

**PD 14-6** Una lámpara de bicicleta es un accesorio útil si se realiza un largo recorrido nocturno. Al iluminar el camino y hacerle visible a los automóviles, reduce las posibilidades de que sufra un accidente. Aun cuando las luces incandescentes producidas por un generador son del tipo más común que se utiliza en las bicicletas, hay una buena cantidad de razones para que las luces fluorescentes sean más convenientes. Una de ellas es que las luces fluorescentes brillan con mayor intensidad e iluminan todo el camino, al ciclista y a la bicicleta, y en realidad captan mejor la atención de los conductores. Dado que están confinadas en tubos angostos que se pueden colocar a lo largo del cuadro de la bicicleta, las luces fluorescentes ofrecen menos resistencia al viento que una lámpara de cara plana. Cuando se utiliza con un generador, una luz fluorescente ofrece ventajas adicionales sobre una luz incandescente convencional; la primera, porque es más eficiente al dar más luz con el mismo esfuerzo de pedaleo y, segunda, porque no se quema por una sobrecarga producida por el generador al ir cuesta abajo. Las luces fluorescentes también son más durables que los bulbos incandescentes, sobre todo en una bicicleta, en la cual las vibraciones tienden a romper el filamento del bulbo incandescente.

Un modelo de luz fluorescente para una bicicleta se muestra en la figura PD 14.6. Seleccione  $L$  de modo que la corriente del bulbo se eleve rápidamente a su valor de estado estable y exceda su valor final sólo en menos de 10 por ciento.

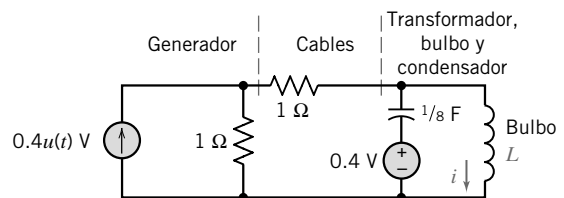


Figura PD 14.6 Circuito de luz fluorescente de bicicleta.

# CAPÍTULO 15

## *Serie y transformada de Fourier*

### EN ESTE CAPÍTULO

- |       |   |       |   |
|-------|---|-------|---|
| 15.1  | Introducción                                      | 15.11 | Espectro de señales                                       |
| 15.2  | Serie de Fourier                                  | 15.12 | Convolución y respuesta del circuito                      |
| 15.3  | Simetría de la función $f(t)$                     | 15.13 | Transformada de Fourier y transformada de Laplace         |
| 15.4  | Serie de Fourier de formas de onda seleccionadas  | 15.14 | ¿Cómo podemos comprobar...?                               |
| 15.5  | Forma exponencial de la serie de Fourier          | 15.15 | <b>EJEMPLO DE DISEÑO</b> — Alimentación de potencia de CD |
| 15.6  | Espectro de Fourier                               | 15.16 | Resumen   |
| 15.7  | Circuitos y serie de Fourier                      |       | Problemas   |
| 15.8  | Uso de PSpice para determinar la serie de Fourier |       | Problemas de PSpice                                       |
| 15.9  | Transformada de Fourier                           |       | Problemas de diseño                                       |
| 15.10 | Propiedades de la transformada de Fourier         |       |   |

### 15.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo presenta las series de Fourier y la transformada de Fourier. Las series de Fourier representan una forma de onda periódica no senoidal como una suma de formas de onda senoidales. Las series de Fourier son útiles en dos formas:

- Las series de Fourier muestran que una forma de onda periódica comprende componentes senoidales a frecuencias diferentes. Eso nos hace pensar en cómo se distribuye la forma de onda en la frecuencia. Por ejemplo, podemos entender el significado de expresiones como “la parte de alta frecuencia de una onda rectangular”.
- Podemos valernos de la superposición para encontrar la respuesta de estado estable de un circuito para una entrada representada por una serie de Fourier y, así, determinar la respuesta de estado estable del circuito a la forma de onda periódica.

Obtenemos la transformada de Fourier como una generalización de la serie de Fourier, tomando el límite como el periodo de una onda periódica que se vuelve infinita. La transformada de Fourier nos es útil de dos maneras:

- La transformada de Fourier representa una forma de onda periódica en el dominio de frecuencia. Eso nos hace pensar en la manera que se distribuye la forma de onda en la frecuencia. Por ejemplo, podemos entender qué significa la expresión “la parte de alta frecuencia de un pulso”.
- Podemos representar la entrada a un circuito y el circuito en sí mismo en el dominio de frecuencia: la entrada representada por su transformada de Fourier y el circuito representado por su función de red. La representación en el dominio de frecuencia de la salida del circuito se obtiene como el producto de la transformada de Fourier de la entrada y la función de red del circuito.

## 15.2 SERIE DE FOURIER

En 1807, el barón Jean-Baptiste-Joseph Fourier propuso que cualquier función periódica podría expresarse como una suma infinita de sinusoides simples. Esta sorprendente afirmación pronostica que formas de onda periódicas discontinuas pares, como las ondas rectangulares, se pueden representar utilizando solamente sinusoides. En 1807, la aseveración de Fourier fue controversial. Matemáticos famosos como Pierre Simon de Laplace y Joseph Louis Lagrange dudaban de la validez de la representación de funciones periódicas de Fourier. En 1828, Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet presentó un conjunto de condiciones suficientes para garantizar la convergencia de las series de Fourier. Hoy, las series de Fourier son una herramienta común para científicos e ingenieros.

Veamos en qué consisten las funciones periódicas. La función  $f(t)$  es periódica si hay un retraso  $\tau$  de modo que

$$f(t) = f(t - \tau) \quad (15.2-1)$$

para cualquier valor de  $t$ . Este valor de  $\tau$  no es único. En particular, si  $\tau$  satisface la ecuación 15.2-1, entonces cualquier múltiplo entero de  $\tau$  satisface la ecuación 15.2-1. En otras palabras, si  $\tau$  satisface la ecuación 15.2-1 y  $k$  es cualquier entero, entonces

$$f(t) = f(t - \tau)$$

para cualquier valor de  $t$ . Para definir de manera singular el **periodo**,  $T$ , de la función periódica  $f(t)$ , dejamos que  $T$  sea el valor positivo más pequeño de  $\tau$  que satisfaga la ecuación 15.2-1.

A continuación, utilizamos el periodo  $T$  para definir la **frecuencia fundamental**,  $\omega_0$ , de la función periódica  $f(t)$ ,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (15.2-2)$$

La frecuencia fundamental tiene unidades de rad/s. Los múltiplos enteros de la frecuencia fundamental se denominan frecuencias armónicas.

Una función periódica  $f(t)$  se puede representar por una serie infinita de sinusoides relacionadas armónicamente, llamadas series (trigonométricas) de Fourier, como sigue

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sen n \omega_0 t \quad (15.2-3)$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia fundamental y los coeficientes (reales), y  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  se denominan **coeficientes trigonométricos de Fourier**. Los coeficientes trigonométricos de Fourier se pueden calcular utilizando

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) dt = \text{el valor medio de } f(t) \quad (15.2-4)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \cos n \omega_0 t dt \quad n > 0 \quad (15.2-5)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \sen n \omega_0 t dt \quad n > 0 \quad (15.2-6)$$

Las condiciones presentadas por Dirichlet son suficientes para garantizar la convergencia de las series trigonométricas de Fourier dadas en la ecuación 15.2-3. Las condiciones de Dirichlet requieren que la función periódica  $f(t)$  satisfaga las siguientes propiedades matemáticas:

1. Que  $f(t)$  sea una función valuada única excepto en un posible número finito de puntos.
2. Que  $f(t)$  sea absolutamente integrable, es decir  $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)| dt < \infty$  para cualquier  $t_0$ .
3. Que  $f(t)$  tenga un número finito de discontinuidades dentro del periodo  $T$ .
4. Que  $f(t)$  tenga un número finito de máximos y mínimos dentro del periodo  $T$ .

Para nuestros propósitos,  $f(t)$  representará una forma de onda de corriente o de voltaje, y cualquier forma de onda de corriente o de voltaje que podamos producir realmente, satisfará de cierto las condiciones de Dirichlet. Debemos suponer que las condiciones de Dirichlet antes listadas siempre se satisficieron para formas de onda periódicas de voltajes o corrientes.

Una **serie de Fourier** es una representación precisa de una señal periódica y consiste en la suma de sinusoides en las frecuencias fundamental y armónica.

Dada una forma de onda periódica de voltaje o de corriente, podemos obtener la representación de Fourier de esos voltaje o corriente en cuatro pasos:

- Paso 1** Determine el periodo  $T$  y la frecuencia fundamental  $\omega_0$ .
- Paso 2** Represente la forma de onda del voltaje o la corriente como una función de  $t$  durante un periodo completo.
- Paso 3** Utilice las ecuaciones 15.2-4, 15.2-5 y 15.2-6 para determinar los coeficientes trigonométricos de Fourier  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$ .
- Paso 4** Sustituya los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $a_b$  obtenidos en el paso 3 en la ecuación 15.2-3.

El ejemplo siguiente ilustra este procedimiento de cuatro pasos.

### EJEMPLO 15.2-1 Serie de Fourier de un coseno rectificado de onda completa

La figura 15.2-1 muestra un rectificador de onda completa que contiene una entrada de coseno. La salida de una entrada de onda completa es el valor absoluto de su entrada, que se muestra en la figura 15.2-2. Un rectificador de onda completa es un circuito electrónico de uso frecuente como un componente de diversos productos, como alimentadores de potencia y receptores de radio de AM. Determine la serie de Fourier de la forma de onda periódica que se muestra en la figura 15.2-2.

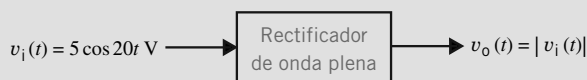


FIGURA 15.2-1 El circuito considerado en el ejemplo 15.2-1.

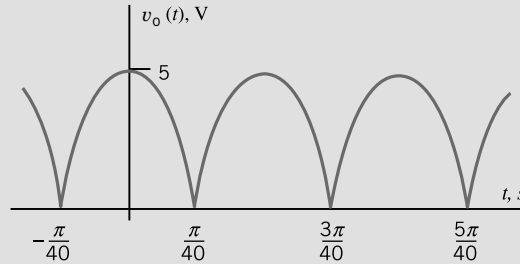


FIGURA 15.2-2 Un coseno rectificado de onda plena.

## Solución

**Paso 1:** A partir de la figura 15.2-2 podemos ver que el periodo de  $v_o(t)$  es

$$T = \frac{3\pi}{40} - \frac{\pi}{40} = \frac{\pi}{20} \text{ s}$$

La frecuencia fundamental en radianes es

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 40 \text{ rad/s}$$

**Paso 2:** Las ecuaciones 15.2-4, 15.2-5 y 15.2-6 requieren integración durante un periodo completo de  $v_o(t)$ . Tenemos libertad de elegir el punto de inicio de ese periodo,  $t_0$ , para hacer que la integración sea lo más sencillo posible. A veces elegimos integrar ya sea desde 0 a  $T$  o desde  $-T/2$  a  $T/2$ . En este ejemplo, la forma de onda periódica se puede representar como

$$v_o(t) = \begin{cases} 5 \cos(20t) & \text{cuando } -\frac{\pi}{40} \leq t \leq \frac{\pi}{40} \\ -5 \cos(20t) & \text{cuando } \frac{\pi}{40} \leq t \leq \frac{3\pi}{40} \end{cases}$$

Considere el cálculo de  $a_0$  utilizando la ecuación 15.2-4. Si elegimos integrar de 0 a  $T$ , tenemos

$$a_0 = \frac{20}{\pi} \int_0^{\pi/20} v_o(t) dt = \frac{20}{\pi} \int_0^{\pi/40} 5 \cos(20t) dt + \frac{20}{\pi} \int_{\pi/40}^{\pi/20} -5 \cos(20t) dt$$

Por otra parte, si elegimos integrar de  $-T/2$  a  $T/2$ , tenemos

$$a_0 = \frac{20}{\pi} \int_{-\pi/40}^{\pi/40} v_o(t) dt = \frac{20}{\pi} \int_{-\pi/40}^{\pi/40} 5 \cos(20t) dt$$

La segunda ecuación es más sencilla, por lo que por conveniencia escogemos integrar a partir de  $-T/2$  a  $+T/2$ .

**Paso 3:** Ahora utilizaremos las ecuaciones 15.2-4, 15.2-5 y 15.2-6 para determinar los coeficientes trigonométricos de Fourier  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$ . Primero,

$$a_0 = \frac{20}{\pi} \int_{-\pi/40}^{\pi/40} 5 \cos(20t) dt = \frac{100}{\pi} \left( \frac{1}{20} \sin(20t) \Big|_{-\pi/40}^{\pi/40} \right) = \frac{5}{\pi} \left( \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{10}{\pi}$$

Luego,

$$a_n = \frac{40}{\pi} \int_{-\pi/40}^{\pi/40} 5 \cos(20t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{40}{\pi} \int_{-\pi/40}^{\pi/40} 5 \cos(20t) \cos(40nt) dt$$



Utilizando una identidad trigonométrica,

$$\begin{aligned}\cos(20t)\cos(40nt) &= \frac{1}{2}(\cos(20t+40nt) + \cos(20t-40nt)) \\ &= \frac{1}{2}(\cos((1+2n)20t) + \cos((1-2n)20t))\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{100}{\pi} \int_{-\pi/40}^{\pi/40} (\cos((1+2n)20t) + \cos((1-2n)20t)) dt \\ &= \frac{100}{\pi} \left( \frac{\sin((1+2n)20t)}{(1+2n)20} \Big|_{-\pi/40}^{\pi/40} + \frac{\sin((1-2n)20t)}{(1-2n)20} \Big|_{-\pi/40}^{\pi/40} \right) \\ &= \frac{5}{\pi} \left( \frac{\sin\left((1+2n)\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-(1+2n)\frac{\pi}{2}\right)}{(1+2n)} + \frac{\sin\left((1-2n)\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-(1-2n)\frac{\pi}{2}\right)}{(1-2n)} \right) \\ &= \frac{5}{\pi} \left( \frac{2(-1)^n}{(1+2n)} + \frac{2(-1)^n}{(1-2n)} \right) = \frac{20(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}\end{aligned}$$

Del mismo modo,

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{40}{\pi} \int_{-\pi/40}^{\pi/40} 5 \cos(20t) \sin(40nt) dt \\ &= \frac{100}{\pi} \int_{-\pi/40}^{\pi/40} (\sin((2n+1)20t) + \sin((2n-1)20t)) dt \\ &= \frac{100}{\pi} \left( \frac{-\cos((1+2n)20t)}{(1+2n)20} \Big|_{-\pi/40}^{\pi/40} + \frac{-\cos((1-2n)20t)}{(1-2n)20} \Big|_{-\pi/40}^{\pi/40} \right) = 0\end{aligned}$$

En resumen,

$$a_0 = \frac{10}{\pi}, \quad a_n = \frac{20(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} \quad \text{y} \quad b_n = 0 \quad (15.2-7)$$

**Paso 4:** Sustituya en la ecuación 15.2-3 los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  dados en la ecuación 15.2-7,

$$v_o(t) = \frac{10}{\pi} + \frac{20}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} \cos(40nt) \quad (15.2-8)$$

La ecuación 15.2-8 representa el coseno rectificad por su serie de Fourier, pero esta ecuación es lo bastante complicada como para preguntarnos qué hemos realizado. ¿Cómo podemos estar seguros de que la ecuación 15.2-8 representa realmente un coseno rectificad? La figura 15.2-3 muestra un gui3n de MATLAB que traza las series de Fourier dadas en la ecuaci3n 15.2-8. En particular, observe c3mo se utilizan en el diagrama de MATLAB los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  determinados en el paso 3. El diagrama producido por este gui3n de MATLAB se muestra en la figura 15.2-4. La forma de onda en la figura 15.2-4 es en verdad un coseno rectificad que tiene la amplitud correcta, 5 voltios, y el periodo correcto,  $\frac{\pi}{20} \cong 0.16$  segundos. Por lo tanto, vemos que la ecuaci3n 15.2-8 representa en realidad el coseno rectificad.

```

% Ex15_2_1.m - full-wave rectified cosine Fourier series
% -----
%           Describe the periodic waveform, v(t)
% -----
T=pi/20;           % period
a0=10/pi;         % average value

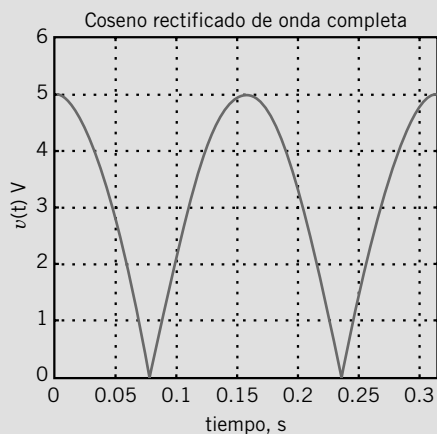
% -----
% Obtain a list of equally spaced instants of time
% -----
w0=2*pi/T;        % fundamental frequency, rad/s
tf=2*T;           % final time
dt=tf/200;        % time increment
t=0:dt:tf;        % time, s

% -----
% Approximate v(t) using the trig Fourier series.
% -----
v = a0*ones(size(t)); % initialize v(t) as vector
for n=1:100
    an = 20*((-1)^n)/(pi*(1-4*n^2));
    bn = 0;
    v = v + an*cos(n*w0*t) + bn*sin(n*w0*t);
end

% -----
%           Plot the Fourier series
% -----
plot(t, v)
axis([0 tf 0 6])
grid
xlabel('time, s')
ylabel('v(t) V')
title('Full-wave Rectified Cosine')

```

**FIGURA 15.2-3**  
Guión de MATLAB  
para el diagrama del  
coseno rectificado.



**FIGURA 15.2-4** Diagramas de MATLAB del coseno  
rectificado de onda completa.

A continuación, obtenemos una representación alterna de las series trigonométricas de Fourier. Las series de Fourier dadas en la ecuación 15.2-3 se pueden escribir como:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega_0 t + b_n \sen n \omega_0 t) \quad (15.2-9)$$

Utilizando una identidad trigonométrica, el  $n$ -ésimo término de esta serie se puede escribir como

$$a_n \cos n \omega_0 t + b_n \sen n \omega_0 t = a_n \cos n \omega_0 t + b_n \cos (n \omega_0 t - 90^\circ) \quad (15.2-10)$$

Utilizando fasores, podemos representar el lado derecho de la ecuación 15.2-10 en el dominio de frecuencia. Realizando una conversión rectangular a polar obtenemos

$$a_n \angle 0 + b_n \angle -90^\circ = a_n - j b_n = c_n \angle \theta_n$$

donde

$$c_n - \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{y} \quad \theta_n = \begin{cases} -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) & \text{si } a_n > 0 \\ 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) & \text{si } a_n < 0 \end{cases} \quad (15.2-11)$$

y

$$a_n = c_n \cos \theta_n \quad \text{y} \quad b_n = -c_n \sen \theta_n$$

Volviendo al dominio de tiempo, la senoide correspondiente es

$$c_n \cos (n \omega_0 t + \theta_n)$$

Después de definir que  $c_0$  sea

$$c_0 = a_0 = \text{valor medio de } f(t) \quad (15.2-12)$$

Las series de Fourier se representan como

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos (n \omega_0 t + \theta_n) \quad (15.2-13)$$

Para distinguir entre las dos formas de las series trigonométricas de Fourier, nos referiremos a la serie dada en la ecuación 15.2-3 como la serie de seno y coseno de Fourier y a la serie dada en la ecuación 15.2-13 como la serie de Fourier de amplitud de fase.

En general, es más fácil calcular  $a_n$  y  $b_n$  que calcular los coeficientes  $c_n$  y  $\theta_n$ . En la sección 15.3 veremos que esto es en particular verdadero cuando  $f(t)$  es simétrico. Por otra parte, la serie de Fourier que implica  $c_n$  es más conveniente para calcular la respuesta de estado estable de un circuito lineal para una entrada periódica.

### EJEMPLO 15.2-2 Serie de Fourier de una forma de onda de pulso

Determine la serie de Fourier de la forma de onda de pulso en la figura 15.2-5.

#### Solución

**Paso 1:** De la figura 15.2-5, vemos que el periodo de  $v_o(t)$  es

$$T = \frac{\pi}{10} \text{ s}$$

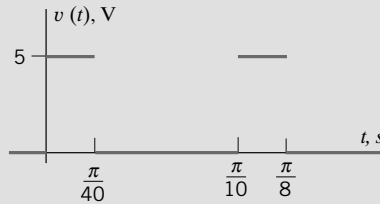


FIGURA 15.2-5 Una forma de onda de pulso.

La frecuencia fundamental es

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 20 \text{ rad/s}$$

**Paso 2:** Durante el periodo de 0 a  $\pi/10$ , la forma de onda de pulso está dada por

$$v(t) = \begin{cases} 5 & \text{cuando } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{40} \\ 0 & \text{cuando } \frac{\pi}{40} \leq t \leq \frac{\pi}{10} \end{cases}$$

**Paso 3:** A continuación determinaremos los coeficientes de Fourier  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$ . Primero calcularemos  $a_0$  como el valor medio de  $v(t)$ :

$$a_0 = \frac{\text{área bajo la curva para el periodo uno}}{\text{periodo uno } T} = \frac{5\left(\frac{\pi}{40}\right) + 0\left(\frac{3\pi}{40}\right)}{\frac{\pi}{10}} = 1.25 \text{ V}$$

Luego,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{20}{\pi} \int_0^{\pi/40} 5 \cos(n\omega_0 t) dt + \frac{20}{\pi} \int_{\pi/40}^{\pi/10} 0 \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{20}{\pi} \int_0^{\pi/40} 5 \cos(20nt) dt \\ &= \frac{20(5)}{\pi} \left( \frac{\sin(20nt)}{20n} \Big|_0^{\pi/40} \right) = \frac{5}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Del mismo modo,

$$b_n = \frac{20}{\pi} \int_0^{\pi/40} 5 \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{20}{\pi} \int_0^{\pi/40} 5 \sin(20nt) dt = \frac{20(5)}{\pi} \left( \frac{-\cos(20nt)}{20n} \Big|_0^{\pi/40} \right) = \frac{5}{n\pi} \left( 1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)$$

En resumen,

$$a_0 = 1.25, \quad a_n = \frac{5}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{y} \quad b_n = \frac{5}{n\pi} \left( 1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \quad (15.2-14)$$

**Paso 4:** Sustituya en la ecuación 15.2-3 los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  dados en la ecuación 15.2-7,

$$v_o(t) = 1.25 + \frac{5}{n\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(20nt) + \left( 1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \sin(20nt) \right) \quad (15.2-15)$$

La figura 15.2-6 muestra un guión de MATLAB que traza la serie de Fourier dada en la ecuación 15.2-15. En particular, observe cómo se utilizan en el guión de MATLAB los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  dados en la ecuación 15.2-14. El diagrama producido por este guión de MATLAB se muestra en la figura 15.2-7. La forma de onda en la figura 15.2-7 es, en verdad, una forma de onda de pulso que tiene la amplitud correcta, 5 voltios, y el periodo correcto,  $\frac{\pi}{10} \cong 0.32$  segundos.

```

% Ex15_2_2.m - pulse waveform Fourier series
% -----
%           Describe the periodic waveform, v(t)
% -----
T=pi/10;           % period
a0=1.25;          % average value

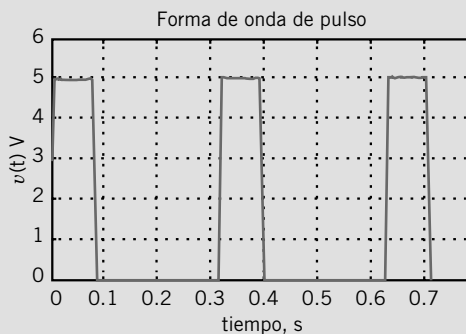
% -----
% Obtain a list of equally spaced instants of time
% -----
w0=2*pi/T;        % fundamental frequency, rad/s
tf=2.5*T;         % final time
dt=tf/200;        % time increment
t=0:dt:tf;        % time, s

% -----
% Approximate v(t) using the trig Fourier series.
% -----
v = a0*ones(size(t)); % initialize v(t) as vector
for n=1:500
    an = (5/n/pi)*sin(n*pi/2);
    bn = (5/n/pi)*(1-cos(n*pi/2));
    cn = abs(an - j*bn);
    thetan = angle(an - j*bn);
    v = v + cn*cos(n*w0*t + thetan);
end

% -----
%           Plot the Fourier series
% -----
plot(t, v)
axis([0 tf 0 6])
grid
xlabel('time, s')
ylabel('v(t) V')
title('Pulse Waveform')

```

**FIGURA 15.2-6**  
Guión de MATLAB  
para el diagrama de  
la forma de onda  
de pulso.



**FIGURA 15.2-7** Diagrama de MATLAB del coseno  
rectificado de onda completa.

**EJERCICIO 15.2-1** Suponga que  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  son funciones periódicas que tienen el mismo periodo,  $T$ . Entonces  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  se pueden representar por las series de Fourier.

$$f_1(t) = a_{10} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{1n} \cos(n\omega_0 t) + b_{1n} \sin(n\omega_0 t))$$

y

$$f_2(t) = a_{20} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} \cos(n\omega_0 t) + b_{2n} \sin(n\omega_0 t))$$

Determine las series de Fourier de la función

$$f(t) = k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$$

**Respuesta:**  $f(t) = (k_1 a_{10} + k_2 a_{20}) + \sum_{n=1}^{\infty} ((k_1 a_{1n} + k_2 a_{2n}) \cos(n\omega_0 t) + (k_1 b_{1n} + k_2 b_{2n}) \sin(n\omega_0 t))$

**EJERCICIO 15.2-2** Determine las series de Fourier cuando  $f(t) = K$ , una constante.

**Respuesta:**  $a_0 = K$  y  $a_n = b_n = 0$  para  $n \geq 1$

**EJERCICIO 15.2-3** Determine las series de Fourier cuando  $f(t) = A \cos \omega_0 t$ .

**Respuesta:**  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = A$ ,  $a_n = 0$  para  $n > 1$  y  $b_n = 0$

### 15.3 SIMETRÍA DE LA FUNCIÓN $f(t)$

Se pueden reconocer fácilmente cuatro tipos de simetría y luego utilizarlos para simplificar la tarea de calcular los coeficientes de Fourier. Son los siguientes:

1. Simetría de función par.
2. Simetría de función impar.
3. Simetría de media onda.
4. Simetría de cuarto de onda.

Una función es *par* cuando  $f(t) = f(-t)$ , y una función es *impar* cuando  $f(t) = -f(-t)$ . La función que se muestra en la figura 15.2-2 es una función par. Para funciones pares, todo  $b_n = 0$  y

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

Para funciones impares, todo  $a_n = 0$  y

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

Un ejemplo de una función impar es  $\sin \omega_0 t$ . En la figura 15.3-1 se muestra otra función impar.

La *simetría de media onda* para una función  $f(t)$  se obtiene cuando

$$f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right) \quad (15.3-1)$$

En estas formas de onda simétricas de media onda, la segunda mitad de cada periodo se parece a la primera mitad invertida de arriba hacia abajo. La función que se muestra en la figura 15.3-2 tiene simetría de media onda. Si una función tiene simetría de media onda, entonces tanto  $a_n$  como  $b_n$  son

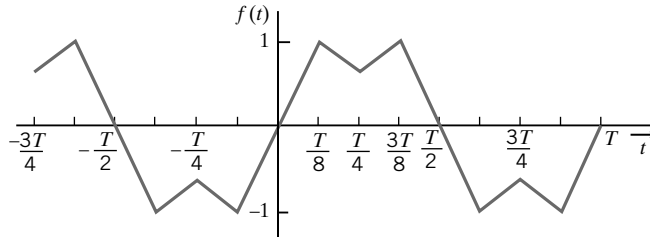


FIGURA 15.3-1 Una función impar con simetría de un cuarto de onda.

cero para valores pares de  $n$ . Vemos que  $a_0 = 0$  para simetrías de media onda porque el valor medio de la función durante un periodo es cero.

La *simetría de cuarto de onda* describe una función que tiene una simetría de media onda y, además, tiene simetría alrededor del punto céntrico de los ciclos medios positivo y negativo. En la figura 15.3-1 se muestra un ejemplo de una función impar con simetría de un cuarto de onda. Si una función es impar y tiene simetría de cuarto de onda, entonces  $a_0 = 0$ ,  $a_n = 0$  para toda  $n$ ,  $b_n = 0$  para par  $n$ . Para impares  $n$ ,  $b_n$  está dada por

$$b_n = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt$$

Si una función es par y tiene simetría de cuarto de onda, entonces  $a_0 = 0$ ,  $b_n = 0$  para toda  $n$  y  $a_n = 0$  para par  $n$ . Para impares  $n$ ,  $a_n$  está dada por

$$a_n = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \operatorname{cos} n\omega_0 t \, dt$$

En la tabla 15.3-1 se resumen el cálculo de los coeficientes de Fourier y los efectos asociados de simetría de la forma de onda  $f(t)$ . Con frecuencia, el cálculo de las series de Fourier se puede simplificar por una juiciosa selección del origen ( $t = 0$ ) porque el analista suele tener la opción de seleccionar este punto de manera arbitraria.

Tabla 15.3-1 Series de Fourier y simetría

SIMETRÍA	COEFICIENTES DE FOURIER
1. Función impar $f(t) = -f(-t)$	$a_n = 0$ para toda $n$ $b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt$
2. Función par $f(t) = f(-t)$	$b_n = 0$ para toda $n$ $a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \operatorname{cos} n\omega_0 t \, dt$
3. Simetría de media onda $f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right)$	$a_0 = 0$ $a_n = 0$ para pares $n$ $b_n = 0$ para pares $n$ $a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \operatorname{cos} n\omega_0 t \, dt$ para impares $n$ $b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt$ para impares $n$
4. Simetría de cuarto de onda, simetría de media onda y simetría alrededor del punto céntrico de los ciclos medios positivo y negativo	A. Función impar: $a_0 = 0$ , $a_n = 0$ para toda $n$ $b_n = 0$ para pares $n$ $b_n = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt$ para impares $n$ B. Función par: $a_0 = 0$ , $b_n = 0$ para toda $n$ $a_n = 0$ para pares $n$ $a_n = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \operatorname{cos} n\omega_0 t \, dt$ para impares $n$

**EJEMPLO 15.3-1** Simetría y series de Fourier

Determine la serie de Fourier para la forma de onda triangular  $v(t)$  que se muestra en la figura 15.3-2.

**Solución**

**Paso 1:** De la figura 15.3-2 vemos que el periodo de  $v_o(t)$  es

$$T = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ s}$$

La frecuencia fundamental es

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 4 \text{ rad/s}$$

**Paso 2:** Si no aprovechamos la simetría de la forma de onda triangular, determinar los coeficientes de Fourier  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  requerirá una integración durante un periodo completo, ya sea de 0 a  $T$ , o de  $-T/2$  a  $T/2$ . En consecuencia, podemos representar  $v(t)$  desde el tiempo  $-T/2$  hasta  $T$ , es decir, de  $-\pi/8$  a  $\pi/2$  segundos. Escribiendo ecuaciones para los diversos segmentos rectos que comprenden la forma de onda triangular podemos representar  $v(t)$  como

$$v(t) = \begin{cases} -\frac{32}{\pi}t - 8 & \text{cuando } -\frac{3\pi}{8} \leq t \leq \frac{\pi}{8} \\ \frac{32}{\pi}t & \text{cuando } -\frac{\pi}{8} \leq t \leq \frac{\pi}{8} \\ -\frac{32}{\pi}t + 8 & \text{cuando } \frac{\pi}{8} \leq t \leq \frac{3\pi}{8} \\ \frac{32}{\pi}t - 16 & \text{cuando } \frac{3\pi}{8} \leq t \leq \frac{5\pi}{8} \end{cases}$$

Si aprovechamos la simetría, necesitaremos integrar solamente desde 0 hasta  $T/2$ , es decir, de 0 a  $\pi/8$  segundos. Si sólo necesitamos representar  $v(t)$  desde 0 hasta  $\pi/8$  segundos, no tenemos que escribir ecuaciones para tantos segmento de líneas. En este caso, necesitamos escribir la ecuación sólo para una recta que represente  $v(t)$  como

$$v(t) = \frac{32}{\pi}t \quad \text{cuando } -\frac{\pi}{8} \leq t \leq \frac{\pi}{8}$$

**Paso 3:** Continuaremos determinando los coeficientes de Fourier  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$ . Primero, el valor medio de la forma de onda triangular es 0 voltios

$$a_0 = \text{el valor medio de } v(t) = 0$$

La forma de onda triangular tiene simetría impar. De la entrada 1 de la tabla 15.3-1,  $a_n = 0$  para toda  $n$  y

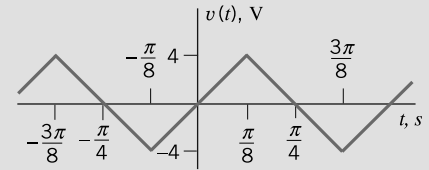
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} v(t) \text{sen}n\omega_0 t \, dt = \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi/4} v(t) \text{sen}4nt \, dt \\ &= \frac{8}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/8} \left(\frac{32}{\pi}t\right) \text{sen}4nt \, dt + \int_{\pi/8}^{\pi/4} \left(-\frac{32}{\pi}t + 8\right) \text{sen}4nt \, dt \right] \end{aligned}$$

Si observamos que la forma de onda triangular tiene simetría de un cuarto de onda, proporciona una ecuación más sencilla para determinar  $b_n$ . Utilizando la entrada 4 A de la tabla 15.3-1, vemos que  $b_n = 0$  para pares  $n$ . Para impares  $n$ ,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{8}{T} \int_0^{T/4} v(t) \text{sen}n\omega_0 t \, dt = \frac{512}{\pi^2} \int_0^{\pi/8} t \text{sen}4nt \, dt = \frac{512}{\pi^2} \left[ \frac{\text{sen}4nt - 4nt \cos 4nt}{16n^2} \right]_0^{\pi/8} \\ &= \frac{32}{\pi^2 n^2} \left( \text{sen} \left( n \frac{\pi}{2} \right) - 0 - n \frac{\pi}{2} \cos \left( n \frac{\pi}{2} \right) + 0 \right) \end{aligned}$$

Dado que  $\cos \left( n \frac{\pi}{2} \right) = 0$  para impar  $n$ , obtenemos

$$b_n = \frac{32}{\pi^2 n^2} \text{sen} \left( n \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{para impar } n$$



**FIGURA 15.3-2** Una función impar con simetría de media onda.



En resumen,

$$a_0 = 0, a_n = 0 \text{ para toda } n \quad \text{y } b_n = \begin{cases} \frac{32}{\pi^2 n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) & \text{para impar } n \\ 0 & \text{para par } n \end{cases}$$

**Paso 4:** La serie de Fourier es

$$v(t) = \frac{32}{\pi^2} \sum_{\text{odd } n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{sen}(4nt) \quad (15.3-2)$$

Observe la notación utilizada en la ecuación 15.3-2 para indicar que la suma incluye sólo términos que corresponden a los valores impares de  $n$ .

La figura 15.3-3 muestra un guión de MATLAB que diagrama las series de Fourier dadas en la ecuación 15.3-2. El diagrama producido por este guión de MATLAB se muestra en la figura 15.2-3. La forma de onda en la

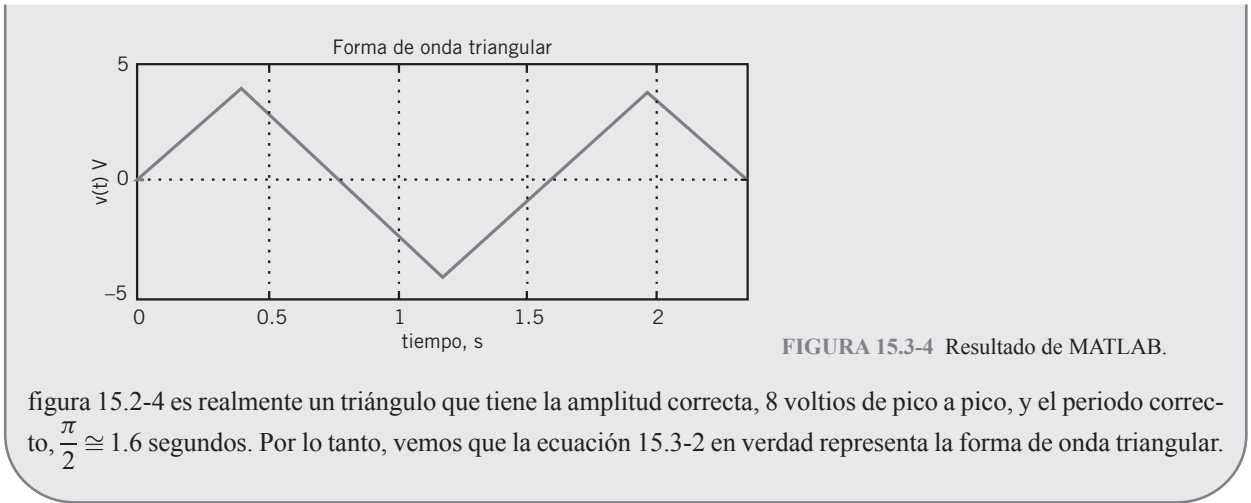
```
% Ex15_3_1.m - triangle waveform Fourier series
% -----
%           Describe the periodic waveform, v(t)
% -----
T=pi/2;           % period
a0=0;            % average value

% -----
% Obtain a list of equally spaced instants of time
% -----
w0=2*pi/T;       % fundamental frequency, rad/s
tf=1.5*T;        % final time
dt=tf/500;       % time increment
t=0:dt:tf;       % time, s

% -----
% Approximate v(t) using the trig Fourier series.
% -----
v = a0*ones(size(t)); % initialize v(t) as vector
for n=1:2:200
    an = 0;
    bn = (32/n/n/pi/pi)*sin(n*pi/2);
    v = v + bn*sin(n*w0*t);
end

% -----
%           Plot the Fourier series
% -----
plot(t, v)
axis([0 tf -5 5])
grid
xlabel('time, s')
ylabel('v(t) V')
title('Triangle Waveform')
```

**FIGURA 15.3-3**  
Archivo m de  
MATLAB.



**EJERCICIO 15.3-1** Determine la serie de Fourier para la forma de onda  $f(t)$  que se muestra en la figura E 15.3-1. Cada incremento de tiempo en el eje horizontal es  $\pi/8$  s, y el máximo y mínimo son +1 y -1, respectivamente.

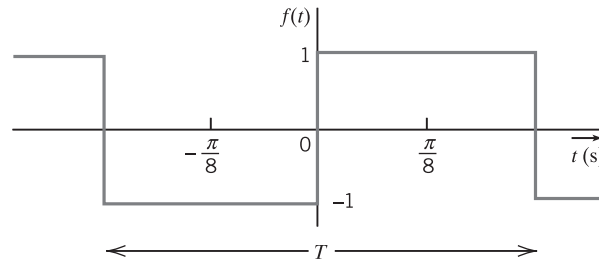


FIGURA E 15.3-1 El periodo  $T = \frac{\pi}{2}$  s.

**Respuesta:**  $f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \text{sen } n\omega_0 t$  y  $n$  impar,  $\omega_0 = 4$  rad/s

**EJERCICIO 15.3-2** Determine la serie de Fourier para la forma de onda  $f(t)$  que se muestra en la figura E 15.3-2. Cada incremento de tiempo en la malla horizontal es de  $\pi/6$  s, y los valores máximo y mínimo de  $f(t)$  son 2 y -2 respectivamente.

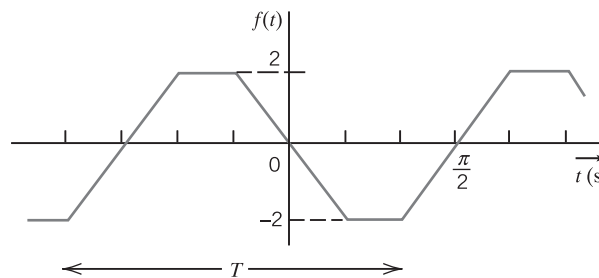


FIGURA E 15.3-2 El periodo  $T = \pi$  s.

**Respuesta:**  $f(t) = \frac{-24}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \text{sen}(n\pi/3) \text{sen } n\omega_0 t$  y  $n$  impar,  $\omega_0 = 2$  rad/s

**EJERCICIO 15.3-3** Para la señal periódica  $f(t)$  que se muestra en la figura E 15.3-3, determine si la serie de Fourier contiene (a) términos de seno y coseno y (b) armónicos pares, y (c) calcule el valor de cd.

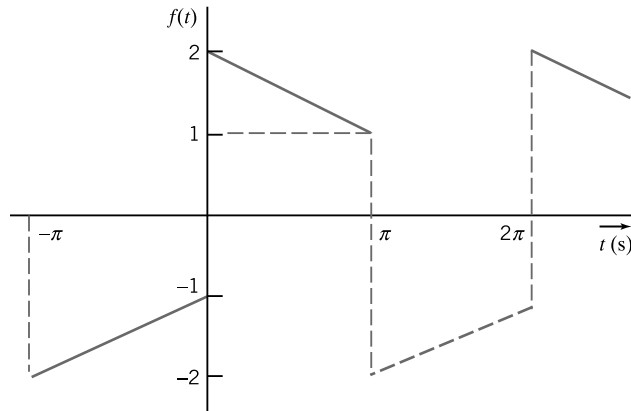


FIGURA E 15.3-3

**Respuestas:** (a) Sí, contiene ambos términos de seno y coseno; (b) no hay armónicos pares; (c)  $a_0 = 0$

## 15.4 SERIE DE FOURIER DE FORMAS DE ONDA SELECCIONADAS

La tabla 15.4-1 provee la serie trigonométrica de Fourier para varias formas de onda con que solemos encontrarnos. Cada una de las formas de onda de la tabla 15.4-1 está representada utilizando dos parámetros:  $A$  es la amplitud de la forma de onda, y  $T$  es el periodo de la forma de onda.

La figura 15.4-1 muestra una forma de onda de voltaje que es semejante, pero no exactamente la misma, que una forma de onda de la tabla 15.4-1. Para obtener una serie de Fourier para la forma de onda de voltaje, seleccionamos la serie de Fourier semejante a la forma de onda de la tabla 15.4-1 y luego hay que hacer cuatro cosas:

1. Establecer el valor de  $A$  igual a la amplitud de la forma de onda de voltaje.
2. Agregar una constante a la serie de Fourier de la forma de onda de voltaje para ajustar su valor medio.

**Tabla 15.4-1 Serie de Fourier de formas de onda seleccionadas**

FUNCIÓN	SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER
	<p>Onda cuadrada: <math>\omega_0 = \frac{2\pi}{T}</math></p> $f(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2n-1)\omega_0 t)}{2n-1}$
	<p>Onda de impulso: <math>\omega_0 = \frac{2\pi}{T}</math></p> $f(t) = \frac{Ad}{T} + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{n} \cos(n\omega_0 t)$

(continúa)

Tabla 15.4-1 (Continúa)

FUNCIÓN	SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER
	<p>Onda de seno rectificada de media onda: <math>\omega_0 = \frac{2\pi}{T}</math></p> $f(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \operatorname{sen} \omega_0 t - \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\omega_0 t)}{4n^2 - 1}$
	<p>Onda de seno rectificada de onda completa: <math>\omega_0 = \frac{2\pi}{T}</math></p> $f(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\omega_0 t)}{4n^2 - 1}$
	<p>Onda dentada: <math>\omega_0 = \frac{2\pi}{T}</math></p> $f(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 t)}{n}$
	<p>Onda triangular: <math>\omega_0 = \frac{2\pi}{T}</math></p> $f(t) = \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)\omega_0 t)}{(2n-1)^2}$

3. Establecer el valor de  $T$  igual al periodo de la forma de onda de voltaje.
4. Reemplazar  $t$  por  $t - t_0$  cuando la forma de onda de voltaje se retarde por el tiempo  $t_0$  respecto de la forma de onda en la tabla 15.4-1. Con elementos de álgebra, vemos que el retardo se puede representar como un cambio de fase en la serie de Fourier de la forma de onda de voltaje.

## EJEMPLO 15.4-1

Determine la serie de Fourier de la forma de onda de voltaje que se muestra en la figura 15.4-1.

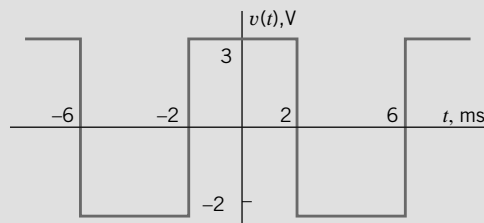


FIGURA 15.4-1 Forma de onda de voltaje.

## Solución

La forma de onda de voltaje es semejante a la onda rectangular en la tabla 15.4-1. La serie de Fourier de la onda rectangular es

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2n-1)\omega_0 t)}{2n-1}$$

**Paso 1:** La amplitud de la forma de onda de voltaje es  $3 - (-2) = 5$  V. Luego de establecer  $A = 5$ , la serie de Fourier se vuelve

$$2.5 + \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2n-1)\omega_0 t)}{2n-1}$$

**Paso 2:** El valor medio de la serie de Fourier es 2.5, el valor del término constante. El valor medio de la forma de onda de voltaje es  $(3 + (-2))/2 = 0.5$  V. Cambiamos el término constante de la serie de Fourier de 2.5 a 0.5 para ajustar el valor medio. Esto equivale a restar 2 de la serie de Fourier, correspondiente al cambio de forma de onda descendente en 2 V.

$$0.5 + \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2n-1)\omega_0 t)}{2n-1}$$

**Paso 3:** El periodo de la forma de onda de voltaje es  $T = 6 - (-2) = 8$  ms. La frecuencia fundamental correspondiente es

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{0.008} = 250 \pi \text{ rad/s}$$

Luego de establecer  $\omega_0 = 250 \pi$  rad/s, la serie de Fourier se vuelve

$$0.5 + \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2n-1)250 \pi t)}{2n-1}$$

**Paso 4:** La onda cuadrada en la tabla 15.4-1 tiene un extremo ascendente en tiempo 0. El extremo ascendente correspondiente de la forma de onda de voltaje ocurre en  $-2$  ms. La forma de onda de voltaje está 2 ms adelante o, de manera equivalente, se retrasa  $-2$  ms. En consecuencia, en la serie de Fourier reemplazamos  $t$  por  $t - (-0.002) = t + 0.002$ . Observamos que

$$\text{sen}((2n-1)250 \pi(t + 0.002)) = \text{sen}\left((2n-1)\left(250 \pi t + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \text{sen}((2n-1)(250 \pi t + 90^\circ))$$

Después de reemplazar  $t$  por  $t + 0.002$ , la serie de Fourier se vuelve

$$v(t) = 0.5 + \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2n-1)(250 \pi t + 90^\circ))}{2n-1}$$

## 15.5 FORMA EXPONENCIAL DE LA SERIE DE FOURIER

Si aplicamos la identidad de Euler, podemos derivar la forma exponencial de las series de Fourier a partir de la serie trigonométrica de Fourier. Recuerde por la ecuación 15.2-13 que la forma de amplitud de fase de la serie de Fourier está dada por

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (15.5-1)$$

La identidad de Euler es

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \text{sen } \theta \quad (15.5-2)$$

Una consecuencia de la identidad de Euler es

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \quad (15.5-3)$$

Utilizando la identidad de Euler, el  $n$ -ésimo término de la serie de Fourier se escribe como

$$c_n \cos (n\omega_0 t + \theta_n) = c_n \left( \frac{e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)} + e^{-j(n\omega_0 t + \theta_n)}}{2} \right) = \frac{c_n}{2} (e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)} + e^{-j(n\omega_0 t + \theta_n)}) \quad (15.5-4)$$

Utilizando la ecuación 15.5-4 en la ecuación 15.5-1 nos da

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2} (e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)} + e^{-j(n\omega_0 t + \theta_n)}) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{c_n}{2} e^{j\theta_n} \right) e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{c_n}{2} e^{-j\theta_n} \right) e^{-jn\omega_0 t} \quad (15.5-5)$$

Defina

$$C_0 = c_0, \quad C_n = \frac{c_n}{2} e^{j\theta_n} \quad \text{y} \quad C_{-n} = \frac{c_n}{2} e^{-j\theta_n} \quad (15.5-6)$$

Entonces  $f(t)$  se puede expresar como

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \quad (15.5-7)$$

Introducimos la notación

$$C_0 = C_0 e^{j0} = C_0$$

y podemos escribir la ecuación 15.5-7 como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (15.5-8)$$

La ecuación 15.5-8 representa  $f(t)$  como una **serie exponencial de Fourier**. Los coeficientes complejos  $C_n$  de la serie exponencial de Fourier se pueden calcular directamente desde  $f(t)$  utilizando

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (15.5-9)$$

Refiriéndonos a la ecuación 15.5-6, observamos que  $C_{-n}$  es la conjugada compleja de  $C_n$ , es decir,  $C_n = C_{-n}^*$ . Utilizamos las ecuaciones 15.5-6 y 15.2-11, y vemos que los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se obtienen a partir de los coeficientes de la serie de Fourier de seno y coseno, utilizando

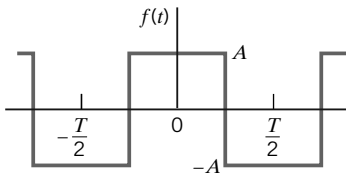
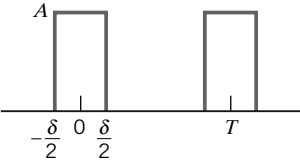
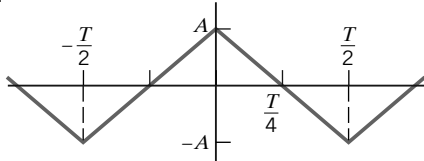
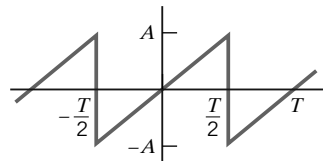
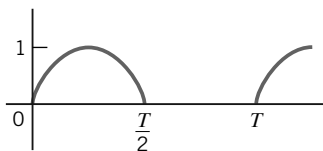
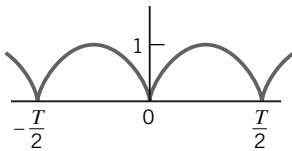
$$C_n = \frac{c_n e^{j\theta_n}}{2} = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad \text{y} \quad C_{-n} = \frac{c_n e^{-j\theta_n}}{2} = \frac{a_n + jb_n}{2} \quad (15.5-10)$$

De manera equivalente, los coeficientes de la serie de Fourier de seno y coseno se obtienen de los coeficientes de la serie exponencial de Fourier, utilizando

$$a_n = C_n + C_{-n} \quad \text{y} \quad b_n = j(C_n - C_{-n}) \quad (15.5-11)$$

En la tabla 15.5-1 se dan los coeficientes de la serie exponencial de Fourier de formas de onda seleccionadas. Recuerde que  $b_n = 0$  cuando  $f(t)$  es una función par. En consecuencia,  $C_{-n} = C_n$  cuando  $f(t)$  es una función par. Del mismo modo,  $C_{-n} = -C_n$  cuando  $f(t)$  es una función impar.

Tabla 15.5-1 Coeficientes complejos de Fourier para formas de onda seleccionadas

FORMA DE ONDA	NOMBRE DE FORMA DE ONDA Y ECUACIÓN	SIMETRÍA	$C_n$
1. 	<b>Onda cuadrada</b> $f(t) = \begin{cases} A, & -T/4 < t < T/4 \\ -A, & T/4 < t < 3T/4 \end{cases}$	Par	$= A \frac{\text{sen } n\pi/2}{n\pi/2}, n \text{ impar}$ $= 0, n = 0 \text{ y } n \text{ par}$
2. 	<b>Pulso rectangular</b> $f(t) = A, \quad -\frac{\delta}{2} < t < \frac{\delta}{2}$	Par	$= A \frac{\delta \text{sen}(n\pi\delta/T)}{T(n\pi\delta/T)}$
3. 	<b>Onda triangular</b>	Par	$= A \frac{\text{sen}^2(n\pi/2)}{(n\pi/2)^2}, n \neq 0$ $= 0, n = 0$
4. 	<b>Onda dentada</b> $f(t) = 2At/T, \quad -T/2 < t < T/2$	Impar	$= Aj(-1)^n/n\pi, n \neq 0$ $= 0, n = 0$
5. 	<b>Sinusoide rectificada de media onda</b> $f(t) = \begin{cases} \text{sen } \omega_0 t, & 0 \leq t \leq T/2 \\ 0, & -T/2 \leq t \leq 0 \end{cases}$	Ninguna	$= 1/\pi(1 - n^2), n \text{ par}$ $= -j/4, n = \pm 1$ $= 0, \text{ otro}$
6. 	<b>Sinusoide rectificada de onda completa</b> $f(t) =  \text{sen } \omega_0 t $	Par	$= 2/\pi(1 - n^2), n \text{ par}$ $= 0, \text{ otro}$

**EJEMPLO 15.5-1** Serie exponencial de Fourier

Determine la serie exponencial de Fourier para la función  $v(t)$  que se muestra en la figura 15.5-1

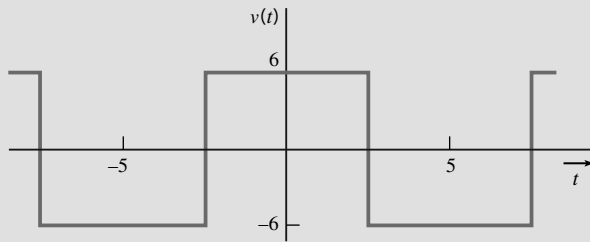


FIGURA 15.5-1 Onda rectangular.

```
% Ex15_5_1.m - Exponential Fourier Series - square wave
% -----
%           Describe the periodic waveform, v(t)
% -----
A=6;
T=10;           % period
c0=0;          % average value

% -----
% Obtain a list of equally spaced instants of time
% -----
w0=2*pi/T;     % fundamental frequency, rad/s
t0=-T;         % initial time
tf=1.5*T;     % final time
dt=tf/500;    % time increment
t=-T:dt:tf;   % time, s

% -----
% Approximate v(t) using the exp Fourier series.
% -----
v = c0*ones(size(t)); % initialize v(t) as vector
for n=1:2:200
    Cn = (2*A/pi/n)*sin(n*pi/2);
    v = v + Cn*exp(j*n*w0*t) + Cn'*exp(-j*n*w0*t);
end

% -----
%           Plot the Fourier series
% -----
plot(t, v)
axis([t0 tf -(A+1) A+1])
grid
xlabel('time, s')
ylabel('v(t) V')
title('Square Wave')
```

FIGURA 15.5-2  
Archivo m de  
MATLAB utilizado  
en el ejemplo 15.5-1.



### Solución

El valor medio de  $v(t)$  es cero, por lo que  $C_0 = 0$ . Entonces, utilizando la ecuación 15.5-9, con  $t_0 = -T/2$ , obtenemos

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{-T/4} -Ae^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} Ae^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \int_{T/4}^{T/2} -Ae^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{A}{jn\omega_0 T} \left( e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-T/2}^{-T/4} - e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{-T/4}^{T/4} + e^{-jn\omega_0 t} \Big|_{T/4}^{T/2} \right) \\ &= \frac{A}{jn\omega_0 T} \left( 2e^{jn\pi/2} - 2e^{-jn\pi/2} + e^{-jn\pi} - e^{jn\pi} \right) \\ &= \frac{A}{2\pi n} \left( 4 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) - 2 \operatorname{sen} (n\pi) \right) = \begin{cases} 0 & \text{para par } n \\ \frac{2A}{n\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) & \text{para impar } n \end{cases} \end{aligned}$$

Observe que  $f(t)$  es una función par, por lo que esperamos que  $C_{-n} = C_n$ . En particular, calculamos

$$C_{-1} = C_1 = \frac{A \operatorname{sen} \pi/2}{\pi/2} = \frac{2A}{\pi}, \quad C_{-2} = C_2 = A \frac{\operatorname{sen} \pi}{\pi} = 0 \quad \text{y} \quad C_{-3} = C_3 = \frac{A \operatorname{sen} (3\pi/2)}{3\pi/2} = \frac{-2A}{3\pi}$$

La figura 15.5-2 muestra un guión de MATLAB que traza  $v(t)$  utilizando la serie exponencial de Fourier. El diagrama producido por este guión de MATLAB se muestra en la figura 15.5-3. Por lo tanto, la forma de onda de la figura 15.5-3 es cuadrada pues contiene la amplitud correcta y los periodos correctos.

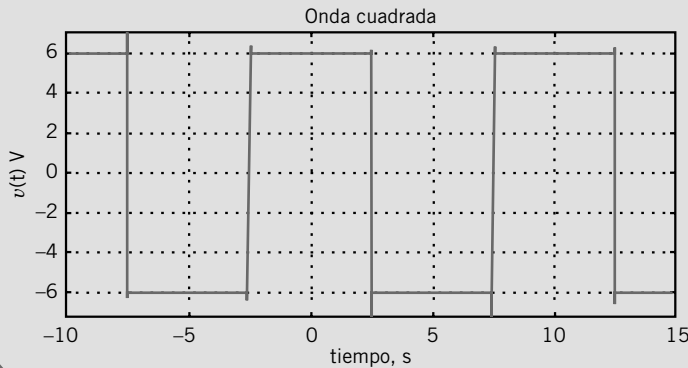


FIGURA 15.5-3 Resultado de MATLAB.

MATLAB tiene una función integrada, denominada FFT (Trasformada Rápida de Fourier), que se puede utilizar para calcular los coeficientes de la serie exponencial de Fourier. La figura 15.5-4 muestra una función de MATLAB denominada EFS (Serie Exponencial de Fourier) que FFT utiliza para calcular los coeficientes de la serie exponencial de Fourier de una función periódica. (La EFS sigue muy de cerca la exposición de las series de Fourier en el capítulo 22 de Hanselmann y Littlefield, 2005.) Observe que la EFS no incluye una descripción de la función periódica. En vez de ello, invoca una función de MATLAB llamada `my_periodic_function`. En la función `my_periodic_function` de MATLAB describimos nuestra función periódica,  $f(t)$ . El resultado es que EFS se puede utilizar, sin cambio alguno, para encontrar los coeficientes de las series de Fourier de diversas funciones periódicas cuando efectuamos los cambios apropiados a `my_periodic_function`.

La palabra *función* se empieza a utilizar de dos maneras diferentes. La primera, como una función matemática, por ejemplo  $f(t)$  como una función de  $t$ . La segunda, como una función de MATLAB, un tipo de programa de computadora. Aunque diferentes, estos dos tipos de función se pueden relacionar. En el caso presente, la función `my_periodic_function` de MATLAB pone en ejecución la función matemática  $f(t)$  proporcionando el valor de  $f$  que corresponde a cualquier valor particular de  $t$ .

Los ejemplos siguientes muestran cómo usar la función EFS de MATLAB para encontrar la serie exponencial de Fourier de funciones periódicas.

```

function [C0, Cn] = EFS(N, T)
%EFS Exponential Fourier Series
% returns the coefficients of the exponential Fourier
% Series of a periodic function described in the
% MATLAB function named my_periodic_function.m
%
% N = the number of harmonic frequencies
% T = the period of the periodic function
%
% C0=average value
% Cn(1)=C1, Cn(2)=C2, ..., Cn(N)=CN

% -----
% Obtain a list of equally spaced instants of time
% -----
n=2*N;
t=linspace(0,T,n+1);
t(end)=[];
% -----
% Obtain values of f(t) at those instants of time
% -----
f=my_periodic_function(t,T);
% -----
% Obtain the Fourier coef and do required bookkeeping
% -----
Cn=fft(f);
Cn=[conj(Cn(N+1)) Cn(N+2:end) Cn(1:N+1)];
Cn=Cn/n;
C0=Cn(N+1);
Cn=[Cn(N+2:end)];

```

FIGURA 15.5-4 Función de MATLAB para calcular el coeficiente de la serie exponencial de Fourier.

### EJEMPLO 15.5-2 Serie exponencial de Fourier utilizando MATLAB

Determine, utilizando MATLAB, la serie exponencial de Fourier para la función  $f(t)$  que se muestra en la figura 15.5-1.

#### Solución

Necesitamos escribir la función `my_periodic_function` de MATLAB, que se muestra en la figura 15.5-5. Las entradas a esta función son  $t$ , una lista de tiempos distribuida equitativamente durante un periodo, y  $T$ , el periodo. Dejemos que  $t(k)$  indique la  $k$ -ésima vez en la lista  $t$ , y que  $f(k)$  indique el valor de la función periódica en el tiempo  $t(k)$ . El resultado de la función `my_periodic_function` es una lista  $f$  de los  $k$  valores  $f(k)$ . El bucle `for` en la figura 15.5-5 hace un índice a lo largo de  $k$  tiempos,  $t(k)$ , y el bloque `if` determina el valor de  $f(k)$  que corresponde a cada  $t(k)$ .

```
function f = my_periodic_function(t, T)
% squarewave with amplitude A and period T

A=6;
for k=1:length(t)
    if (t(k)<T/4 | t(k)>3*T/4) f(k)=A;
    elseif (t(k)>T/4 & t(k)<3*T/4) f(k)=-A;
    else f(k)= 0;
    end
end
```

FIGURA 15.5-5 my\_periodic\_function para el ejemplo 15.5-2.

```
% testEFS.m
% -----
% Obtain a list of equally spaced instants of time
% -----
T=10; % period
w0=2*pi/T; % fundamental frequency, rad/s
t0=-T; % initial time
tf=1.5*T; % final time
dt=tf/512; % time increment
t=-T:dt:tf; % time, s
% -----
% Call EFS to get exponential Fourier coefficients
% -----
N=256; %Number of harmonic frequencies
[C0, Cn] = EFS(N,T);
% -----
% Approximate the function by its Fourier series
% -----
v = C0*ones(size(t)); % initialize v(t) as vector
for n=1:N
    v = v + Cn(n)*exp(j*n*w0*t) + Cn(n) '*exp(-j*n*w0*t);
end
% -----
% Plot the Fourier series
% -----
plot(t, v)
axis([t0 tf -8 8])
grid
xlabel('time, s')
ylabel('v(t) V')
title('Square Wave')
```

FIGURA 15.5-6 Guión de MATLAB para el trazo de  $f(t)$ , utilizando los coeficientes de la serie exponencial de Fourier.

Los valores de  $f(t)$  en tiempos  $T/4$  y  $3T/4$  no son claros porque  $f(t)$  es discontinua en estos tiempos. En general, cuando  $f(t)$  es discontinua en tiempo  $\tau$ , tomaremos  $f(\tau)$  para que sea el promedio de los límites de  $f(t)$  en cuanto  $t$  se aproxime a  $\tau$  desde arriba y desde abajo. En el presente caso,

$$f(\tau) = \frac{\lim_{t \rightarrow \tau^+} f(t) + \lim_{t \rightarrow \tau^-} f(t)}{2} = \frac{A - A}{2} = 0 \quad \text{cuando } \tau = \frac{T}{4} \text{ o } \frac{3T}{4}$$

Entonces, de la figura 15.5-1,

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{cuando } t < T/4 \text{ o } t > 3T/4 \\ -A & \text{cuando } t > T/4 \text{ y } t < 3T/4 \\ 0 & \text{otro} \end{cases}$$

Esta ecuación se realiza por la función de MATLAB, `my_periodic_function`, que se muestra en la figura 15.5-5.

La figura 15.5-6 muestra un guión de MATLAB que traza  $f(t)$ , utilizando los coeficientes de la serie exponencial de Fourier. Colocar `EFS.m`, `my_periodic_function.m`, y `testEFS.m` en el directorio del taller de MATLAB y ejecutar `testEFS.m` produce el mismo diagrama obtenido en el ejemplo 15.5-1 y que se muestra en la figura 15.5-3.

### EJEMPLO 15.5-3 Serie exponencial de Fourier utilizando MATLAB

Determine la serie exponencial de Fourier para el seno rectificado de media onda que se muestra en la figura 15.5-7, utilizando MATLAB.

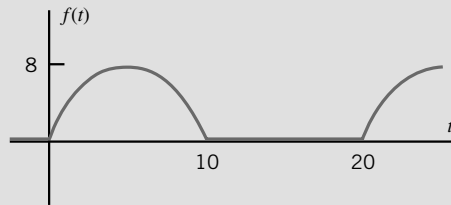


FIGURA 15.5-7 La función periódica para el ejemplo 15.5-3.

#### Solución

Solamente necesitamos un par de cosas por hacer: reescribir la función de MATLAB `my_periodic_function` que se muestra en la figura 15.5-8, cambiar el valor del periodo  $T$  en `testEFS.m` y luego ejecutar `testEFS.m` para obtener el diagrama que se muestra en la figura 15.5-9.

```
function f = my_periodic_function(t, T)
% half-wave rectified sine with amplitude A
% and period T

w=2*pi/T;
A=8;
for k=1:length(t)
    if (t(k)<T/2) f(k)=A*sin(w*t(k));
    else f(k)=0;
    end
end
```

FIGURA 15.5-8 La función `my_periodic_function` para el ejemplo 15.5-3.

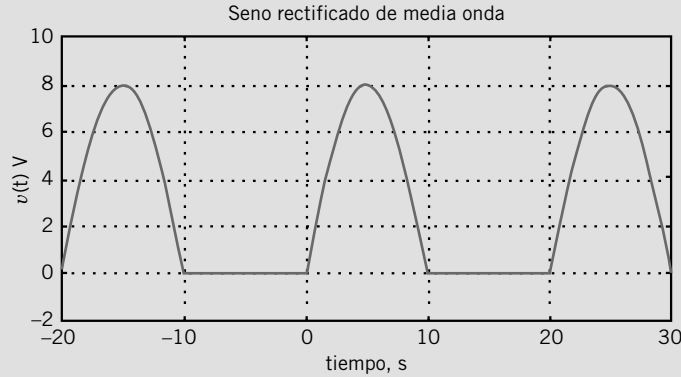


FIGURA 15.5-9 Resultado de MATLAB para el ejemplo 15.5-3.

**EJERCICIO 15.5-1** Encuentre los coeficientes exponenciales de Fourier para la función que se muestra en la figura E 15.5-1.

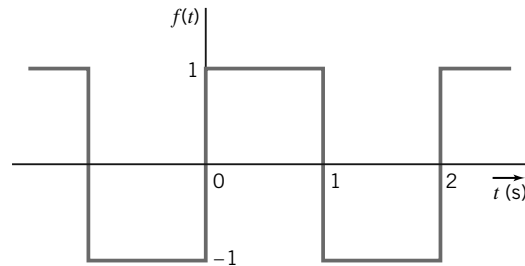


FIGURA E 15.5-1

**Respuesta:**  $C_n = 0$  para par  $n$  y  $C_n = \frac{2}{jn\pi}$  para impar  $n$

**EJERCICIO 15.5-2** Determine los coeficientes complejos de Fourier para la forma de onda mostrada en la figura E 15.5-2.

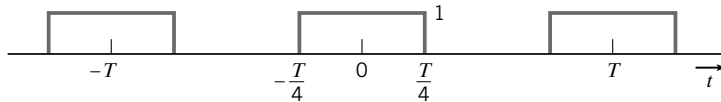


FIGURA E 15.5-2

## 15.6 ESPECTRO DE FOURIER

Si diagramamos los coeficientes complejos de Fourier  $C_n$  como una función de frecuencia angular,  $\omega = n\omega_0$ , obtenemos un *espectro de Fourier*. Como  $C_n$  puede ser compleja, tenemos

$$C_n = |C_n| \angle \theta_n \quad (15.6-1)$$

y diagramamos  $|C_n|$  y  $\angle \theta_n$  como el *espectro de amplitud* y el *espectro de fase*, respectivamente. El espectro de Fourier existe sólo en las frecuencias fundamental y armónica y, por lo tanto, se le

denomina como un espectro discreto o de línea. El espectro de amplitud aparece en una gráfica como una serie de líneas verticales espaciadas equitativamente con alturas proporcionales a las amplitudes de los componentes de frecuencia respectivas. Del mismo modo, el espectro de fase aparece como una serie de líneas espaciadas igualmente con altura proporcionales al valor de la fase en la frecuencia apropiada. La palabra *espectro* la presentó Isaac Newton en física (1664) para describir el análisis de la luz al pasar por un prisma en sus diferentes componentes de colores o componentes de frecuencia.

El **espectro de Fourier** es un despliegue gráfico de la amplitud y la fase de los coeficientes complejos de Fourier en las frecuencias fundamental y armónica.

### EJEMPLO 15.6-1 Espectro de Fourier

Determine el espectro de Fourier para la forma de onda de pulso  $v(t)$  que se muestra en la figura 15.6-1.

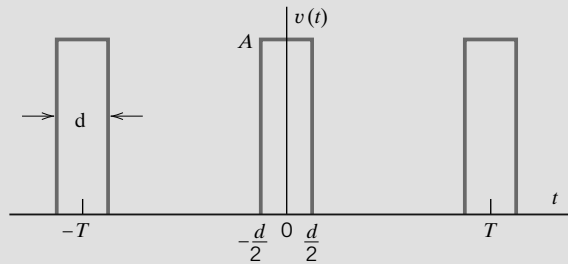


FIGURA 15.6-1 Forma de onda de pulso.

#### Solución

Los coeficientes de Fourier son

$$\mathbf{C}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (15.6-2)$$

Para  $n \neq 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_n &= \frac{A}{T} \int_{-d/2}^{d/2} e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{-A}{jn\omega_0 T} \left( e^{-jn\omega_0 d/2} - e^{jn\omega_0 d/2} \right) \\ &= \frac{2A}{n\omega_0 T} \operatorname{sen} \left( \frac{n\omega_0 d}{2} \right) = \frac{A\delta}{T} \operatorname{sen} \left( \frac{n\omega_0 d/2}{\delta} \right) = \frac{Ad \operatorname{sen} x}{T x} \end{aligned}$$

donde  $x = (n\omega_0 d/2)$  y  $n \neq 0$ . Cuando  $n = 0$ , tenemos

$$\mathbf{C}_0 = \frac{1}{T} \int_{-d/2}^{d/2} A dt = \frac{Ad}{T}$$

También se podría mostrar que  $(\operatorname{sen} x)/x = 1$  para  $x = 0$  aplicando la regla de L'Hôpital. En suma,

$$\mathbf{C}_n = \frac{Ad \operatorname{sen}(n\omega_0 d/2)}{T n\omega_0 d/2} \quad \text{para toda } n \quad (15.6-3)$$

Los coeficientes  $C_n$  corresponden a las frecuencias discretas  $n\omega_0$  donde  $\omega_0$  es la frecuencia fundamental, determinada desde el periodo  $T$  de la función periódica. El espectro de amplitud aparece en la gráfica como una serie de líneas verticales espaciadas equitativamente, que corresponden a las frecuencias espaciadas a distancias iguales  $n\omega_0$ . La altura de cada línea representa la amplitud

$$|C_n| = \left| \frac{Ad \operatorname{sen}(n\omega_0 d/2)}{T n\omega_0 d/2} \right|$$

El espectro de amplitud, un diagrama  $|C_n|$  versus  $\omega = n\omega_0$ , se muestra en la figura 15.6-2a para  $n$  hasta  $\pm 15$ . Incluso,  $|\operatorname{sen} x/x|$  se muestra en gris en la figura 15.6-2a. Observe que  $(\operatorname{sen} x)/x$  es cero cada vez que  $x$  es un múltiplo entero de  $\pi$ , es decir,

$$\frac{\operatorname{sen}(n\pi)}{n\pi} = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

En la figura 15.6-2b se muestra el espectro de fase, un diagrama de  $\theta_n = \angle C_n$  versus  $\omega = n\omega_0$ . El espectro de fase aparece en una gráfica como una serie de líneas verticales espaciadas igualmente que corresponden a  $n\omega_0$ . La altura de cada línea representa el ángulo  $\theta_n$ . En general, los coeficientes  $C_n$  tienen valores complejos, pero en la ecuación 15.6-3 vemos que, en este caso, los coeficientes  $C_n$  tienen valores reales. En consecuencia,  $\theta_n = 0$  cuando  $C_n$  es positivo y  $\theta_n = \pi$  radianes =  $180^\circ$  cuando  $C_n$  es negativo.

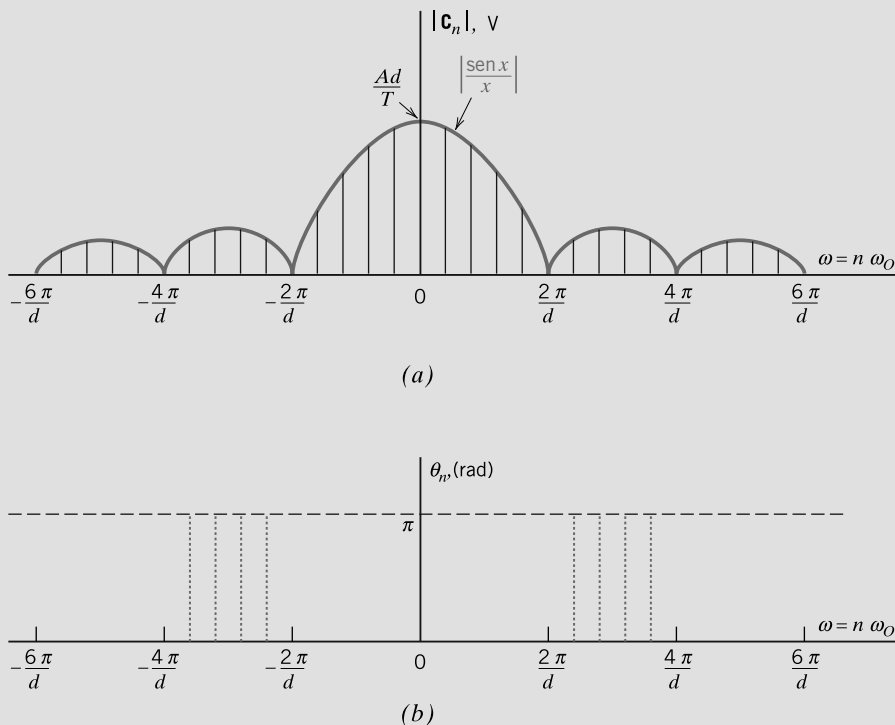


FIGURA 15.6-2 (a) La amplitud y (b) la fase de los espectros de Fourier de la forma de onda.

```

% Spectrum.m
T=20;      % period
N=64;      % Number of harmonic frequencies
% -----
% Obtain a list of equally spaced instants of time
% -----
n=2*N;
t=linspace(0,T,n+1);
t(end)=[];
% -----
% Obtain values of f(t) at those instants of time
% -----
f=my_periodic_function(t,T);
% -----
% Obtain the Fourier coef and do required bookkeeping
% -----
Cn=fft(f);
Cn=[conj(Cn(N+1)) Cn(N+2:end) Cn(1:N+1)];
Cn=Cn/n;

% -----
%                               Plot the Fourier spectrum
% -----
stem(-N:N,abs(Cn))
xlabel('n')
ylabel('|Cn|')
title('Magnitude Spectrum of a Pulse Train')
axis tight

```

FIGURA 15.6-3 Programa de MATLAB para el espectro de Fourier.

La figura 15.6-3 muestra un programa de MATLAB que utiliza la FFT para diagramar el espectro de Fourier de una función periódica (Hanselman y Littlefield, 2005)

### EJEMPLO 15.6-2 Uso de MATLAB para diagramar el espectro de Fourier

Utilice MATLAB para diagramar el espectro de amplitud para la forma de onda de pulso  $v(t)$  en la figura 15.6-1 cuando  $A = 8$  V,  $T = 20$  segundos y  $d = T/10$ .

#### Solución

Podemos emplear el programa de MATLAB que se muestra en la figura 15.6-3 para diagramar el espectro, luego de realizar las tres cosas siguientes:

- 1 **Especificar los valores de T y N en la segunda y tercera líneas.** T es el periodo en segundos y N determina la cantidad de frecuencias armónicas utilizadas al diagramar el espectro. La  $n$  en  $n\omega_0$  varía de  $-N$  a  $N$ . Los valores dados en la figura 15.6-3 no requieren cambios.



```

function f = my_periodic_function(t, T)
d=T/10;
A=8;
for k=1:length(t)
    if (t(k)<d/2 | t(k)>T-d/2) f(k)=A;
    elseif (t(k)>d/2 & t(k)<T-d/2) f(k)=0;
    else f(k)= A/2;
    end
end

```

FIGURA 15.6-4 my\_periodic\_function para el ejemplo 15-6-4.

2. **Proporcionar una función de MATLAB llamada my\_periodic\_function** que describe el tren de pulsos que se muestra en la figura 15.6-1. La función de MATLAB requerida la proporciona la figura 15.6-4. Las entradas para esta función son  $t$ , una lista de tiempo distribuido con igualdad durante un periodo, y  $T$ , el periodo. Dejemos que  $t(k)$  indique la  $k$ -ésima vez en la lista  $t$  y que  $f(k)$  indique el valor de la función periódica en el tiempo  $t(k)$ . El resultado de my\_periodic\_function es una lista  $f$  de los  $k$  valores  $f(k)$ . El bucle hace un índice a través de los  $k$  tiempos  $t(k)$ , y el bloque *if* determina el valor de  $f(k)$  que corresponde a cada  $t(k)$ . (Cuando  $f(t)$  sea discontinuo en tiempo  $\tau$ , tomaremos  $f(\tau)$  para que sea el promedio de los límites de  $f(t)$  en cuanto  $t$  se aproxime a  $\tau$  desde arriba y desde abajo.)
3. **Realizar algunos cambios deseados a los enunciados de la diagramación** hacia el final del programa. El enunciado

```
stem (-N : N, abs(Cn))
```

traza el espectro de amplitud. Cambie `abs(Cn)` a `angle(Cn)` para trazar el espectro angular. Además, las etiquetas del diagrama se pueden cambiar como se desee. En este caso no se requieren cambios.

La figura 15.6-5 muestra el espectro de amplitud que se diagramó utilizando MATLAB.

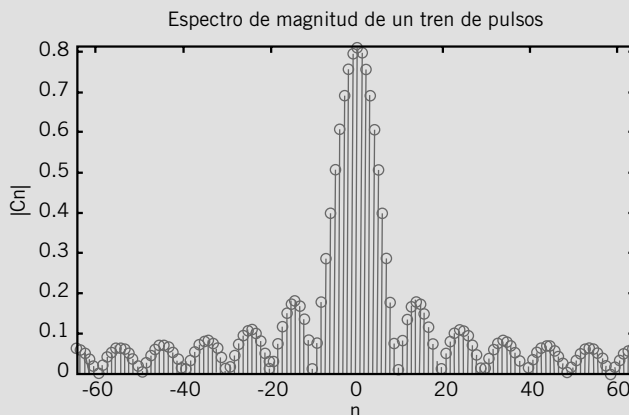


FIGURA 15.6-5 Resultado de MATLAB para el ejemplo 15.6-2.

## 15.7 CIRCUITOS Y SERIE DE FOURIER

Con frecuencia se desea determinar la respuesta de un circuito excitado por una señal  $v_f(t)$  de entrada periódica. Podemos representar  $v_s(t)$  por una serie de Fourier y luego encontrar la respuesta del circuito al fundamental y a cada armónico. Suponiendo que el circuito es lineal y que se mantiene el principio de superposición, podemos considerar que la respuesta total es la suma de la respuesta al término de cd, al fundamental y a cada armónico.

**EJEMPLO 15.7-1** Respuesta de estado estable a una entrada periódica

Encuentre la respuesta de estado estable,  $v_o(t)$ , del circuito  $RC$  que se muestra en la figura 15.7-1b. La entrada,  $v_s(t)$ , es la onda cuadrada que se muestra en la figura 15.7-1a.

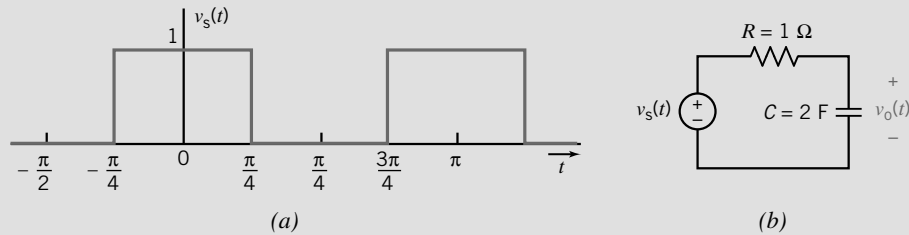


FIGURA 15.7-1 (a) Onda cuadrada y (b) circuito considerado en el ejemplo 15.7-1.

**Solución**

Con los datos de la tabla 15.4-1 y procediendo como en el ejemplo 15.4-1, representamos  $v_s(t)$  con la serie de Fourier

$$v_s(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2n-1)(2t+90^\circ))}{2n-1}$$

En este ejemplo representaremos esta onda rectangular por el primero de los cuatro términos de su serie de Fourier

$$v_s(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos 2t - \frac{2}{3\pi} \cos 6t + \frac{2}{5\pi} \cos 10t$$

Encontraremos la respuesta de estado estable,  $v_o(t)$ , con ayuda de la superposición. Será útil que  $v_{sn}(t)$  indique el término de  $v_s(t)$  que corresponda a  $n$ . En este ejemplo,  $v_s(t)$  tiene cuatro términos que corresponden a  $n = 0, 1, 3$  y  $5$ . Entonces,

$$v_s(t) = v_{s0}(t) + v_{s1}(t) + v_{s3}(t) + v_{s5}(t)$$

donde

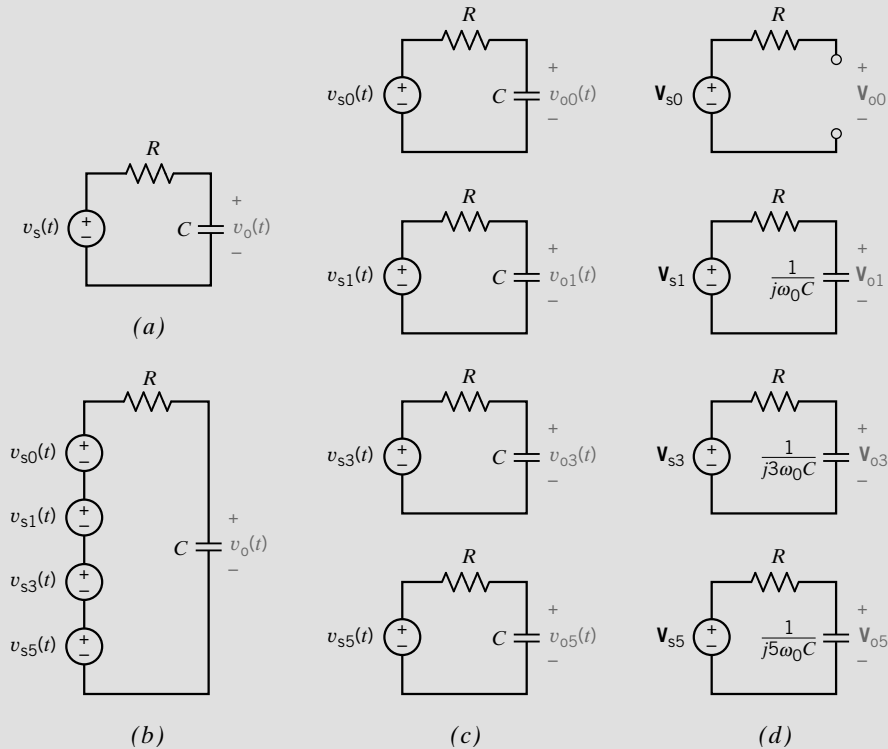
$$v_{s1}(t) = \frac{1}{2} v_{s1}(t) = \frac{2}{\pi} \cos 2t,$$

$$v_{s3}(t) = \frac{2}{3\pi} \cos 6t \quad \text{y} \quad v_{s5}(t) = \frac{2}{5\pi} \cos 10t$$

La figura 15.7-2 ilustra cómo se utiliza la superposición en este ejemplo. Primero, dado que la conexión en serie de las fuentes de voltaje con los voltajes  $v_{s0}(t)$ ,  $v_{s1}(t)$ ,  $v_{s3}(t)$  y  $v_{s5}(t)$  equivale a una fuente única de voltaje que tiene los voltajes  $v_s(t) = v_{s0}(t) + v_{s1}(t) + v_{s3}(t) + v_{s5}(t)$ , el circuito que se muestra en la figura 15.7-2b es equivalente al que se muestra en la figura 15.7-2a.

A continuación se invoca el principio de la superposición para desmenuzar el problema en cuatro problemas más sencillos, como se muestra en la figura 15.7-2c. Cada circuito en la figura 15.7-2c se utiliza para calcular la respuesta de estado estable a una sola de las fuentes de voltaje de la figura 15.7-2b. (Cuando se calcula la respuesta a una fuente de voltaje, las demás fuentes de voltaje se establecen a cero; es decir, son reemplazadas por cortocircuitos.) Por ejemplo, el voltaje  $v_{o3}(t)$  es la respuesta estable a  $v_{s3}(t)$  sola. La superposición nos enseña que la respuesta a las cuatro fuentes de voltaje que funcionan en conjunto es la suma de las respuestas a las cuatro fuentes que funcionan por separado, es decir,

$$V_o(t) = v_{o0}(t) + v_{o1}(t) + v_{o3}(t) + v_{o5}(t)$$



**FIGURA 15.7-2** (a) Circuito  $RC$  excitado por un voltaje periódico  $v_s(t)$ . (b) Circuito equivalente. Cada fuente de voltaje es un término de la serie de Fourier de  $v_s(t)$ . (c) Uso de superposición. Cada entrada es una senoide. (d) Uso de fasores para encontrar las respuestas de estado estable a las sinusoides.

La ventaja de fraccionar el problema en cuatro problemas más sencillos es que la entrada de cada uno de los cuatro circuitos en la figura 15.7.2c es una senoide. El problema de encontrar la respuesta de estado estable a una entrada periódica se ha reducido al problema más sencillo de encontrar la respuesta de estado estable a una entrada senoidal. La respuesta de estado estable de un circuito lineal a una entrada senoidal se puede encontrar utilizando fasores. En la figura 15.7-2d se han dibujado de nuevo, utilizando fasores e impedancias, los cuatro circuitos de la figura 15.7-2c. La impedancia del condensador es

$$\mathbf{Z}_c = \frac{1}{jn\omega_0 C} \quad \text{para } n = 0, 1, 3, 5$$

Cada uno de los cuatro circuitos corresponde a un valor diferente de  $n$ , de modo que la impedancia del condensador es diferente en cada circuito. (La frecuencia de la senoide de entrada es  $n\omega_0$ , por lo que cada circuito corresponde a una frecuencia diferente.) Observe que cuando  $n = 0$ ,  $Z_c = \infty$  y, por consiguiente, el condensador actúa como un circuito abierto. Los cuatro circuitos que se muestran en la figura 15.7-2d son muy semejantes. En cada caso se puede utilizar la división de voltaje para escribir

$$\mathbf{V}_{on} = \frac{1/(jn\omega_0 C)}{R + 1/(jn\omega_0 C)} \mathbf{V}_{sn} \quad \text{para } n = 0, 1, 3, 5$$

donde  $\mathbf{V}_{sn}$  es el fasor que corresponde a  $v_{sn}(t)$  y  $\mathbf{V}_{on}$  es el fasor que corresponde a  $v_{on}(t)$ . Por lo tanto,

$$\mathbf{V}_{on} = \frac{\mathbf{V}_{sn}}{1 + jn\omega_0 CR} \quad \text{para } n = 0, 1, 3, 5$$

En este ejemplo,  $\omega_0 CR = 4$ , por lo que

$$\mathbf{V}_{on} = \frac{\mathbf{V}_{sn}}{1 + j4n} \quad \text{para } n = 0, 1, 3, 5$$

A continuación, la respuesta de estado estable se puede escribir como

$$\begin{aligned} v_{on}(t) &= |\mathbf{V}_{on}| \cos(n\omega_0 t + \angle \mathbf{V}_{on}) \\ &= \frac{|\mathbf{V}_{sn}|}{\sqrt{1 + 16n^2}} \cos(n\omega_0 t + \angle \mathbf{V}_{sn} - \tan^{-1} 4n) \end{aligned}$$

En este ejemplo,

$$\begin{aligned} |\mathbf{V}_{s0}| &= \frac{1}{2} \\ |\mathbf{V}_{sn}| &= \frac{2}{n\pi} \quad \text{para } n = 0, 1, 3, 5 \\ \angle \mathbf{V}_{sn} &= 0 \quad \text{para } n = 0, 1, 5 \quad \text{y} \quad \angle \mathbf{V}_{sn} = 180^\circ \quad \text{para } n = 3 \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} v_{o0}(t) &= \frac{1}{2} \\ v_{on}(t) &= \frac{2}{n\pi\sqrt{1 + 16n^2}} \cos(n2t + \angle \mathbf{V}_{sn} - \tan^{-1} 4n) \quad \text{para } n = 1, 3, 5 \end{aligned}$$

Aplicando aritmética resulta

$$\begin{aligned} v_{o0}(t) &= \frac{1}{2} \\ v_{o1}(t) &= 0.154 \cos(2t - 76^\circ) \\ v_{o3}(t) &= 0.018 \cos(6t + 95^\circ) \\ v_{o5}(t) &= 0.006 \cos(10t - 87^\circ) \end{aligned}$$

Por último, la respuesta de estado estable del circuito original,  $v_o(t)$  se encuentra agregando las respuestas parciales,

$$v_o(t) = \frac{1}{2} + 0.154 \cos(2t - 76^\circ) + 0.018 \cos(6t + 95^\circ) + 0.006 \cos(10t - 87^\circ)$$

Es importante tener en cuenta que la superposición justifica la adición de las funciones de tiempo,  $v_{o0}(t)$ ,  $v_{o1}(t)$ ,  $v_{o3}(t)$  y  $v_{o5}(t)$  para obtener  $v_o(t)$ . Los fasores  $\mathbf{V}_{o0}$ ,  $\mathbf{V}_{o1}$ ,  $\mathbf{V}_{o3}$  y  $\mathbf{V}_{o5}$  corresponden cada uno a una frecuencia diferente. Una suma de estos fasores no tiene sentido alguno.

**EJERCICIO 15.7-1** Encuentre la respuesta del circuito de la figura 15.7-2 cuando  $R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 0.4 \text{ mF}$  y  $v_s$  es la onda triangular considerada en el ejemplo 15.3-1 (figura 15.3-3). Incluya todos los términos que excedan 2% del término fundamental.

**Respuesta:**  $v_o(t) \approx 0.20 \sin(4t - 86^\circ) - 0.008 \sin(12t - 89^\circ) \text{ V}$

## 15.8 USO DE PSPICE PARA DETERMINAR LA SERIE DE FOURIER

El programa de simulación de circuitos de PSpice (Perry, 1998) provee procedimientos integrados que pueden hacer que sea fácil encontrar las series de Fourier de cualquier voltaje o corriente periódicos en un circuito simulado. Para encontrar una serie de Fourier utilizando PSpice, necesitamos hacer cinco pasos:

- Paso 1** Representar el circuito y sus entradas en el taller de PSpice.
- Paso 2** Especificar una simulación de dominio de tiempo con una duración suficiente para incluir un periodo completo después de que todos los transitorios hayan desaparecido.
- Paso 3** Solicitar que los coeficientes de la serie de Fourier se calculen e impriman en el archivo de salida de PSpice.
- Paso 4** Simular el circuito.
- Paso 5** Interpretar el resultado de PSpice.

El ejemplo siguiente ilustra este procedimiento.

### EJEMPLO 15.8-1 Series de Fourier utilizando PSpice

Considere el circuito que se muestra en la figura 15.8-1a. La entrada a este circuito es el voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ . La salida del circuito es el voltaje,  $v_o(t)$ , a través del resistor de 10-k $\Omega$ . La entrada,  $v_i(t)$ , es el voltaje periódico que se muestra en la figura 15.8-1b. La salida,  $v_o(t)$ , también será un voltaje periódico. Utilice PSpice para representar a  $v_i(t)$  y a  $v_o(t)$  por series de Fourier.

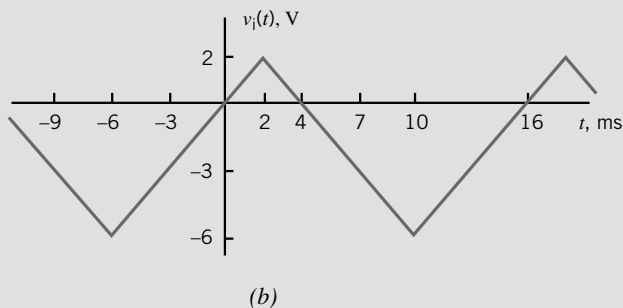
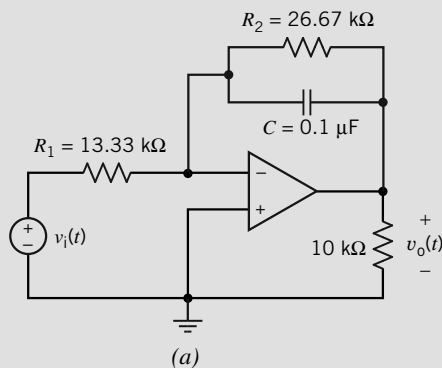


FIGURA 15.8-1 (a) Un circuito y (b) un voltaje de entrada periódico.

### Solución

**Paso 1:** Represente el circuito y su entrada en el taller de PSpice.

PSpice se refiere a los elementos de circuito como partes. Abra un nuevo proyecto en PSpice. Coloque las partes en el taller de PSpice, ajuste los valores de capacitancia y resistencia, y enlace las partes entre sí (Svoboda, 2007). El circuito de PSpice resultante se muestra en la figura 15.8-2. La fuente de voltaje en la figura 15.8-1a

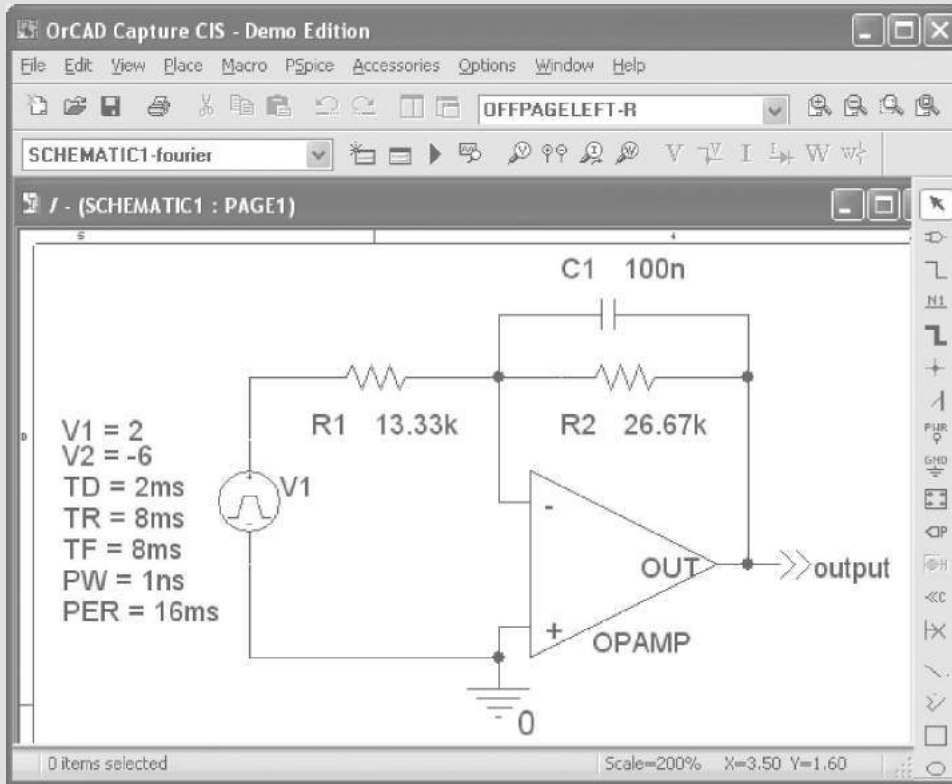


FIGURA 15.8-2 El circuito como se describe en el taller de PSpice.

corresponde a una parte de PSpice denominada VPULSE. La figura 15.8-3 muestra el símbolo para esta parte junto con la forma de onda del voltaje que la produce. Una parte VPULSE se especifica al proporcionar valores para los parámetros  $v1$ ,  $v2$ ,  $td$ ,  $tr$ ,  $tf$ ,  $pw$  y  $per$ . El significado de cada parámetro se ve al examinar la figura 15.8-3b. La forma de onda de pulso simulará la onda triangular cuando  $pw$  se especifique para hacer que el tiempo que el voltaje permanezca sea igual a  $v2$  ligeramente insignificante, y que  $per$  se especifique para hacer que el tiempo que el voltaje permanezca sea igual a  $v1$  ligeramente insignificante. Un conjunto adecuado de valores de parámetros para simular el voltaje de entrada,  $v_i(t)$ , es

$$v1 = 2 \text{ V}, v2 = -6 \text{ V}, td = 2 \text{ ms}, tr = 8 \text{ ms}, tf = 8 \text{ ms}, pw = 1 \text{ ns y } per = 16 \text{ ms.}$$

(PSpice requiere que  $pw > 0$  por lo que no podemos utilizar  $pw = 0$ . En cambio, se utiliza un valor mucho más pequeño que  $tr$  y  $tf$ .)

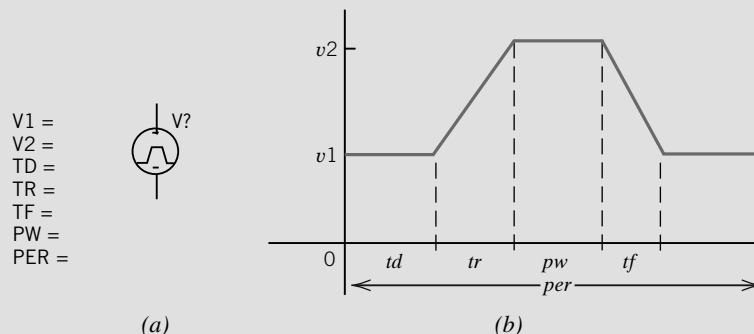


FIGURA 15.8-3 (a) El símbolo y (b) la forma de onda de voltaje de una parte VPULSE.

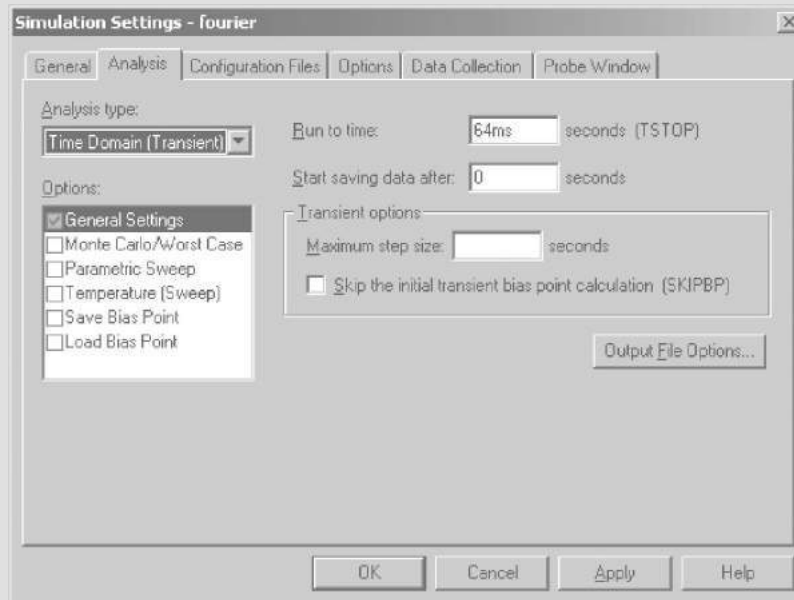


FIGURA 15.8-4 Cuadro de diálogo Simulation Settings.

**Paso 2:** Especifique una simulación de dominio de tiempo que tenga una duración lo bastante grande para incluir un periodo completo después de que todos los transitorios hayan desaparecido.

De la barra de menús de PSpice seleccione el menú PSpice/New Simulation Profile para que se despliegue el cuadro de diálogo New Simulation. Especifique un nombre para la simulación y luego seleccione Create para que se despliegue el cuadro de diálogo Simulation Settings como se muestra en la figura 15.8-4. Luego, como tipo de análisis, seleccione Time Domain (Transient) en el botón Analysis type. Especifique 64 ms en el cuadro Run to time para ejecutar la simulación para cuatro periodos completos de la forma de onda de entrada.

**Paso 3:** Solicite que los coeficientes de la serie de Fourier se calculen e impriman en el archivo de salida de PSpice.

Haga clic en el botón Output Files Options para desplegar el cuadro de diálogo Transient Output File Options como se muestra en la figura 15.8-5. Seleccione el cuadro de la opción Perform Fourier Analysis. PSpice representa la serie trigonométrica de Fourier utilizando el seno en vez del coseno, es decir

$$v(t) = c_0 + \sum_{n=1}^N c_n \text{sen}(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (15.8-1)$$

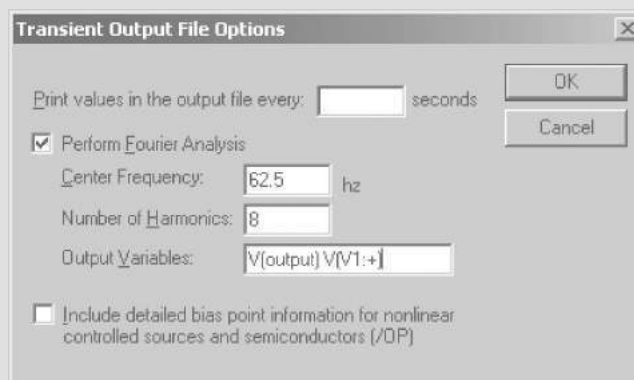


FIGURA 15.8-5 Solicitud del cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier.

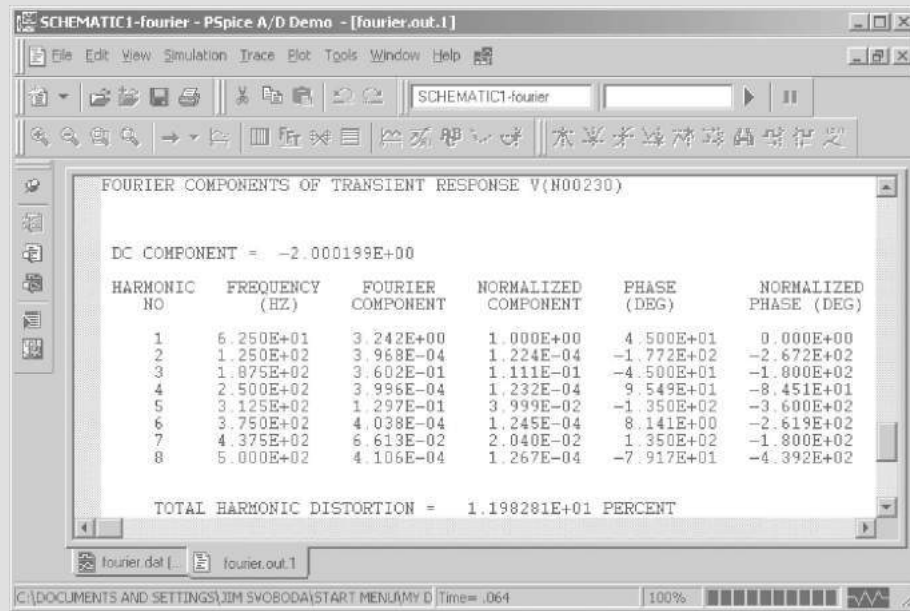


FIGURA 15.8-6 Los coeficientes de la serie de Fourier de  $v_i(t)$ .

Ingrese la frecuencia fundamental,  $f_0 = \omega_0/2\pi$ , utilizando unidades de Hertz en el cuadro de texto Center Frequency y  $N$  en el cuadro de texto Number of Harmonics. Ingrese los nombres de PSpice para voltajes o corrientes que se vayan a representar por sus series de Fourier en el cuadro de texto Output Variables. Haga clic en el botón OK para cerrar el cuadro de diálogo Transient Output File Options, y luego haga clic en el botón OK para cerrar el cuadro de diálogo Simulation Settings; vuelva al taller de PSpice.

**Paso 4:** Simule el circuito.

De la barra de menús de PSpice, seleccione el menú PSpice/Run para ejecutar la simulación.

**Paso 5:** Interprete el resultado de PSpice.

Luego de una simulación exitosa de Time Domain (Transient), Probe, el procesador gráfico de postproducción de PSpice, se abrirá automáticamente en una ventana Schematics. En el menú de Schematics seleccione View/Output File. Desplácese a través del archivo de resultado para encontrar los coeficientes de Fourier del voltaje de entrada que se muestra en la figura 15.8-6. (PSpice cambió el nombre del voltaje de entrada. Utilizamos el nombre V(V1:+) en el cuadro de texto Output Variables del cuadro de diálogo Transient Output File Options en la figura 15.8-5. Sin embargo, PSpice utilizó el nombre V(N00230) en la figura 15.8-6.) La tabla en la figura 15.8-6 tiene seis columnas y ocho filas. Éstas corresponden a los ocho coeficientes,  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_8$ . (Hay ocho filas porque  $N = 8$  fue el número que se ingresó en el cuadro de texto Number of Harmonics en el cuadro de diálogo Transient Output File Options en la figura 15.8-5.) La primera columna etiqueta las filas con los subíndices,  $n$ , de estos coeficientes. La segunda columna lista las frecuencias,  $n\omega_0$ , utilizando unidades de Hertz. La tercera columna lista los coeficientes  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_8$ . La cuarta columna lista los coeficientes regularizados  $c_1/c_1 = 1, c_2/c_1, c_3/c_1, \dots, c_8/c_1$ . La quinta columna lista los ángulos de fase  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_8$ . La sexta columna lista los coeficientes regularizados,  $\theta_1 - \theta_1 = 0, \theta_2 - \theta_1, \theta_3 - \theta_1, \dots, \theta_8 - \theta_1$ .

Esperamos que los coeficientes pares,  $c_2, c_4, c_6, \dots, c_8$ , sean cero. Hay muchos más pequeños que los coeficientes impares, de modo que interpretaremos que son cero. El coeficiente  $c_0$  es el componente de la serie de Fourier y está escrito sobre la tabla en la figura 15.8-5. Por último, PSpice representa la serie de Fourier utilizando seno en vez de coseno, por lo que los coeficientes en la figura 15.8-6 indican que  $v_i(t)$  está representada por la serie de Fourier

$$v_i(t) = -2.000199 + 3.242 \sin(393t + 45^\circ) + 0.3602 \sin(1178t - 45^\circ) + 0.1279 \sin(1963t - 135^\circ) + 0.6613 \sin(2749t + 135^\circ) + \dots$$



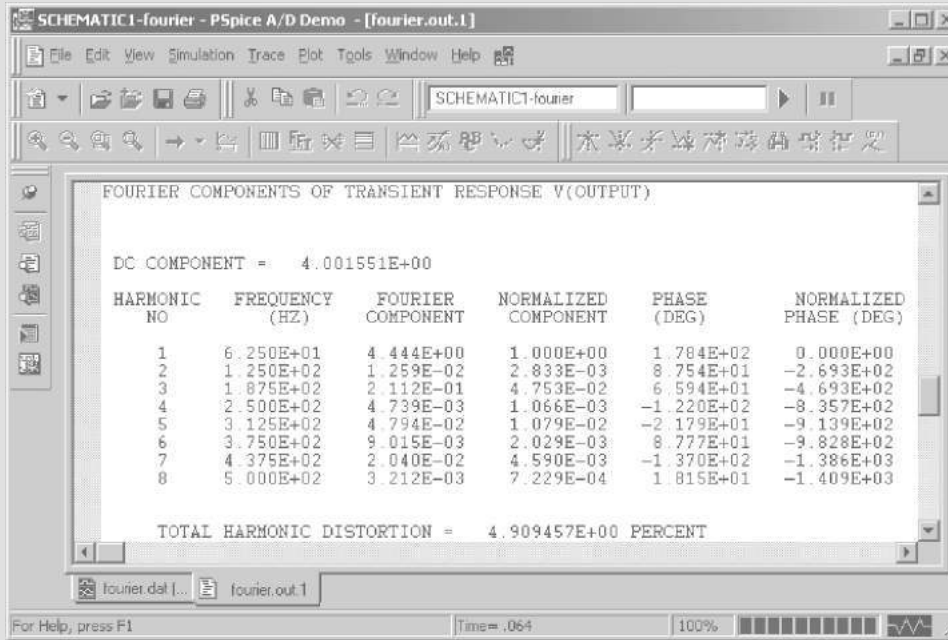


FIGURA 15.8-7 Los coeficientes de la serie de Fourier de  $v_o(t)$ .

Podemos representar la serie utilizando cosenos, restando  $90^\circ$  a cada ángulo de fase. Entonces

$$v_i(t) = -2.000199 + 3.242 \cos(393t - 45^\circ) + 0.3602 \cos(1178t - 135^\circ) + 0.1297 \cos(1963t - 225^\circ) + 0.06613 \cos(2749t + 45^\circ) + \dots \quad (15.8-2)$$

Desplácese a través del archivo de resultados para encontrar los coeficientes de Fourier del voltaje de salida que se muestran en la figura 15.8-7. Esta figura indica que la serie de Fourier de  $v_o(t)$  es

$$v_o(t) = 4.001551 + 4.444 \cos(393t + 88.4^\circ) + 0.2112 \cos(1178t - 24.06^\circ) + 0.04794 \cos(1963t - 118.8^\circ) + 0.02040 \cos(2749t - 227^\circ) + \dots \quad (15.8-3)$$

## 15.9 TRANSFORMADA DE FOURIER

La transformada de Fourier está estrechamente relacionada con las series de Fourier y la transformada de Laplace. Recuerde que una forma de onda periódica  $f(t)$  posee una serie de Fourier. En cuanto incrementamos el periodo  $T$ , la frecuencia fundamental  $\omega_0$  se hace más pequeña porque

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

La diferencia entre dos frecuencias armónicas consecutivas es  $\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 = 2\pi/T$ . Por lo tanto, en cuanto  $T$  se aproxima al infinito,  $\Delta\omega$  se acerca a  $d\omega$ , un incremento de frecuencia infinitesimal. Además, el número de frecuencias en cualquier intervalo de frecuencia dada se incrementa en la proporción en que  $\Delta\omega$  disminuye. De este modo, en el límite,  $n\omega_0$  se acerca a la variable continua,  $\omega$ .

Considere la serie exponencial de Fourier,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \tag{15.9-1}$$

y

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \tag{15.9-2}$$

Si multiplicamos la ecuación 15.9-2 por  $T$  y dejamos que se aproxime al infinito  $T$ , tenemos

$$C_n T = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \tag{15.9-3}$$

Sea  $C_n T$  igual a una nueva función de frecuencia  $F(j\omega)$  de modo que

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \tag{15.9-4}$$

donde  $F(j\omega)$  es la transformada de Fourier de  $f(t)$ . El proceso inverso se encuentra a partir de la ecuación 15.9-1, donde dejamos que  $C_n T = F(j\omega)$  de modo que

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n T e^{jn\omega_0 t} \frac{1}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{jn\omega_0 t} \frac{\omega_0}{2\pi}$$

porque  $1/T = \omega_0/2\pi$ . Puesto que  $T \rightarrow \infty$ , la suma se vuelve un entero, y el incremento  $\Delta\omega = \omega_0$  se transforma en  $d\omega$ . Entonces, tenemos

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{15.9-5}$$

La ecuación 15.9-5 se denomina *transformada inversa de Fourier*. Este par de ecuaciones (15.9-4 y 15.9-5), denominadas par de transformada de Fourier, nos permiten completar la transformada de Fourier a la frecuencia de dominio y el proceso inverso al dominio de tiempo.

Una función de tiempo dada  $f(t)$  tiene una transformada de Fourier si

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt < \infty$$

y si el número de discontinuidades en  $f(t)$  es finito. Desde un punto de vista práctico, todos los pulsos de duración finita que nos interesan tienen transformadas de Fourier.

El par de transformada de Fourier se resume en la tabla 15.9-1.

**Tabla 15.9-1 Par de transformada de Fourier**

ECUACIÓN	NOMBRE	PROCESO
$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$	Transformada	Del dominio de tiempo al dominio de frecuencia Conversión de $f(t)$ a $F(j\omega)$
$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$	Transformada inversa	Del dominio de frecuencia al dominio de tiempo Conversión de $F(j\omega)$ a $f(t)$

**EJEMPLO 15.9-1** Transformada de Fourier de un pulso

Derive la transformada de Fourier del pulso no periódico que se muestra en la figura 15.9-1.

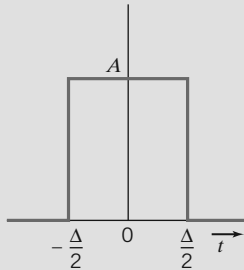


FIGURA 15.9-1 Un pulso no periódico.

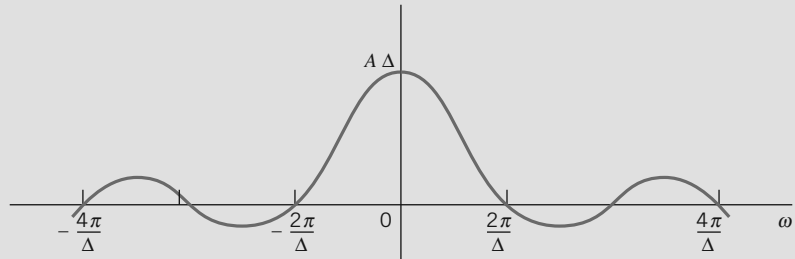


FIGURA 15.9-2 La transformada de Fourier para el pulso no periódico rectangular se muestra como una función de  $\omega$ .

**Solución**

Utilizando la transformada tenemos

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} A e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \\ &= \frac{A}{-j\omega} (e^{-j\omega\Delta/2} - e^{j\omega\Delta/2}) = A\Delta \frac{\text{sen}(\omega\Delta/2)}{\omega\Delta/2} \end{aligned} \quad (15.9-6)$$

Así, la transformada de Fourier es de la forma  $(\text{sen } x)/x$ , donde  $x = \omega\Delta/2$ , como se muestra en la figura 15.9-2. Observe que  $(\text{sen } x)/x = 0$  cuando  $x = \omega\Delta/2 = n\pi$ , u  $\omega = 2n\pi/\Delta$ , como se muestra en la figura 15.9-2. Indicaremos que  $(\text{sen } x)/x = Sa(x)$ .

Consideremos la versión cambiada del pulso rectangular de la figura 15.9-1 donde  $A = 1/\Delta$  y el ancho del pulso se aproxima a cero,  $\Delta \rightarrow 0$ , mientras el área del rectángulo se mantiene igual a 1. Entonces tenemos el *impulso unitario*  $\delta(t - t_0)$  de modo que

$$\int_a^b \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} 1 & a \leq t_0 \leq b \\ 0 & \text{otro más} \end{cases} \quad (15.9-7)$$

Obtenemos la transformada de Fourier para un impulso unitario en  $t_0$  como

$$F(j\omega) = \int_{t_0-}^{t_0+} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \quad (15.9-8)$$

Cuando  $t_0 = 0$ , tenemos el caso especial,

$$F(j\omega) = 1 \quad (15.9-9)$$

Por consiguiente, observamos que  $F(j\omega) = 1$  de un impulso unitario ubicado en el origen es constante e igual a 1 para todas las frecuencias.

**EJERCICIO 15.9-1** Determine la transformada de Fourier de  $f(t) = e^{-at}u(t)$ , donde  $u(t)$  es la función escalón unitario.

*Respuesta:*  $F(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$

## 15.10 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Podemos derivar algunas propiedades de la transformada de Fourier si escribimos  $F(j\omega)$  en la forma compleja de

$$F(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$$

Como alternativa tenemos

$$F(j\omega) = |F(\omega)|e^{j\theta}$$

donde  $\theta = \tan^{-1}(Y/X)$ . Observe que utilizamos  $F(j\omega) = F(\omega)$  de manera intercambiable. Además,

$$F(-\omega) = F^*(\omega)$$

donde  $F^*(\omega)$  es la conjugada compleja de  $F(j\omega)$ .

Si tenemos la transformada de Fourier de  $f(t)$ , escribimos

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$$

donde la escritura  $\mathcal{F}$  implica la transformada de Fourier. Entonces la transformada inversa se escribe como

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t)$$

Repitiendo la ecuación de la transformación tenemos (tabla 15.9-1)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (15.10-1)$$

Entonces, si  $\mathcal{F}[af_1(t)] = aF_1(\omega)$  y  $\mathcal{F}[bf_2(t)] = bF_2(\omega)$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[af_1 + bf_2] &= \int_{-\infty}^{\infty} [af_1 + bf_2]e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} af_1e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} bf_2e^{-j\omega t} dt \\ &= aF_1(\omega) + bF_2(\omega) \end{aligned}$$

Esto se conoce como la propiedad de la *linealidad*.

Ahora utilizamos la definición de la transformada de Fourier, ecuación 15.10-1, en los siguientes ejemplos para encontrar otras propiedades más.

### EJEMPLO 15.10-1 Propiedad de la transformada de Fourier

Encuentre la transformada de Fourier de una función de tiempo cambiado  $f(t - t_0)$ .

#### Solución

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-j\omega t} dt$$

Si dejamos que  $x = t - t_0$ , tenemos

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega(x + t_0)} dx = e^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

donde  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ .

Las propiedades seleccionadas de la transformada de Fourier se resumen en la tabla 15.10-1. Podemos utilizar estas propiedades para derivar los pares de transformada de Fourier.

Tabla 15.10-1 Propiedades seleccionadas de la transformada de Fourier

NOMBRE DE LA PROPIEDAD	FUNCIÓN DE TIEMPO	TRANSFORMADA DE FOURIER
1. Definición	$f(t)$	$F(\omega)$
2. Multiplicación por constante	$Af(t)$	$AF(\omega)$
3. Linealidad	$af_1 + bf_2$	$aF_1(\omega) + bF_2(\omega)$
4. Cambio de tiempo	$f(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} F(\omega)$
5. Graduación en el tiempo	$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
6. Modulación	$e^{j\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
7. Diferenciación	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(\omega)$
8. Convolución	$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx$	$F_1(\omega)F_2(\omega)$
9. Multiplicación en el tiempo	$t^n f(t)$	$(j)^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$
10. Inversión en el tiempo	$f(-t)$	$F(-\omega)$
11. Integración	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$

Con la ayuda de las propiedades de la transformada de Fourier y la definición de la ecuación original, podemos derivar pares de transformada útiles y desarrollar una tabla de estas relaciones. Ya hemos derivado las primeras tres entradas de la tabla 15.10-2, y agregaremos algunas más utilizando las propiedades de la tabla 15.10-1 y/o la definición original de la transformación.

### EJEMPLO 15.10-2 Transformada de Fourier

Encuentre la transformada de Fourier de  $f(t) = Ae^{-a|t|}$ , la cual se muestra en la figura 15.10-1.

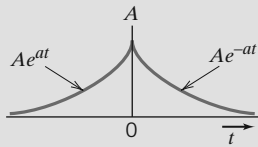


FIGURA 15.10-1 Forma de onda del ejemplo 15.10-2.

### Solución

Dividiremos la función en dos formas de onda simétricas y utilizaremos la propiedad linealidad. Entonces,

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = Ae^{-at}u(t) + Ae^{at}u(-t)$$

De la entrada 3 de la tabla 15.10-2 tenemos

$$F_1(\omega) = \frac{A}{a + j\omega}$$

De la propiedad 10 de la tabla 15.10-1 obtenemos

$$F_2(\omega) = F_1(-\omega) = \frac{A}{a - j\omega}$$

Utilizando la propiedad linealidad tenemos

$$F(\omega) = F_1(\omega) + F_2(\omega) = \frac{A}{a + j\omega} + \frac{A}{a - j\omega} = \frac{2Aa}{a^2 + \omega^2} \quad (15.10-2)$$

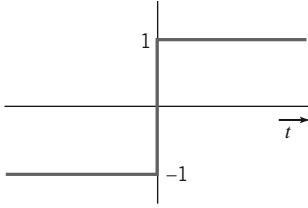
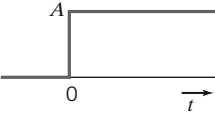
Este resultado es la entrada 4 de la tabla 15.10-2. Observe que  $F(\omega)$  es una función par.

**Tabla 15.10-2 Pares de transformada de Fourier**

$f(t)$	FORMA DE ONDA	$f(\omega)$
1. Pulso $f_1(t) = Au\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - Au\left(t - \frac{\Delta}{2}\right)$		$A\Delta Sa\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right)$
2. Impulso $\delta(t - t_0)$		$e^{-j\omega t_0}$
3. Exponencial de disminución $Ae^{-at}u(t)$		$\frac{A}{a + j\omega}$
4. Exponencial de disminución simétrica $Ae^{-a t }$		$\frac{2aA}{a^2 + \omega^2}$
5. Rotura de tono (coseno confinado) $Af_1(t) \cos \omega_0 t$		$\frac{A\Delta}{2} [Sa(\omega - \omega_0) + Sa(\omega + \omega_0)]$
6. Pulso triangular 		$A \Delta Sa^2\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right)$
7. $A Sa(bt) = A \frac{\text{sen } bt}{bt}$		$\begin{cases} \frac{A\pi}{b} &  \omega  < b \\ 0 &  \omega  > b \end{cases}$
8. cd constante $f(t) = A$		$2\pi A \delta(\omega)$
9. Onda de coseno $A \cos \omega_0 t$		$\pi A [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$

(continúa)

Tabla 15.10-2 (Continúa)

$f(t)$	FORMA DE ONDA	$f(\omega)$
10. Signo $f(t) = \begin{cases} +1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$		$\frac{2}{j\omega}$
11. Entrada de escalón $Au(t)$		$A \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right]$

Nota:  $Sa(x) = (\text{sen } x)/x$ .

### EJEMPLO 15.10-3 Transformada de Fourier

Encuentre la transformada de Fourier de la forma de onda de coseno confinado  $f(t) = f_1(t) \cos \omega_0 t$ , donde  $f_1(t)$  es el pulso rectangular que se muestra en la figura 15.9-1.

#### Solución

La transformada de Fourier del pulso rectangular es la entrada 1 de la tabla 15.10-2 y se escribe

$$F_1(\omega) = A\Delta (\text{sen } x)/x$$

donde  $x = \omega\Delta/2$ . La función coseno se puede escribir como

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

Por lo tanto,

$$f(t) = \frac{1}{2} f_1(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} f_1(t) e^{-j\omega_0 t}$$

Utilizando la propiedad modulación (entrada 6) de la tabla 15.10-1, obtenemos

$$F(\omega) = \frac{1}{2} F_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F_1(\omega + \omega_0)$$

Por consiguiente, si utilizamos  $F_1(\omega)$  de la ecuación 15.9-6, tenemos

$$F(\omega) = \frac{A\Delta}{2} \frac{\text{sen}[(\omega - \omega_0)\Delta/2]}{(\omega - \omega_0)\Delta/2} + \frac{A\Delta}{2} \frac{\text{sen}[(\omega + \omega_0)\Delta/2]}{(\omega + \omega_0)\Delta/2}$$

o bien, utilizando  $Sa(x) = (\text{sen } x)/x$ , tenemos

$$F(\omega) = \frac{A\Delta}{2} Sa\left[(\omega - \omega_0)\frac{\Delta}{2}\right] + \frac{A\Delta}{2} Sa\left[(\omega + \omega_0)\frac{\Delta}{2}\right]$$

**EJERCICIO 15.10-1** Encuentre la transformada de Fourier de  $f(at)$  para  $a > 0$  cuando  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ .

**Respuesta:**  $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

**EJERCICIO 15.10-2** Muestre que la transformada de Fourier de una forma de onda de cd constante  $f(t) = A$  para  $-\infty \leq t \leq \infty$  es  $F(\omega) = 2\pi A\delta(\omega)$  por la obtención de la transformada inversa de  $F(\omega)$ .

## 15.11 ESPECTRO DE SEÑALES

El *espectro*, también llamado *densidad espectral*, de una señal  $f(t)$  es su transformada de Fourier  $F(\omega)$ . Podemos trazar  $F(\omega)$  como una función de  $\omega$  para mostrar el espectro. Por ejemplo, para una señal de pulso rectangular de la figura 15.9-1, encontramos que

$$F(\omega) = A\Delta Sa(\omega\Delta/2)$$

la cual está trazada en la figura 15.9-2. El espectro del pulso rectangular es real.

La transformada de Fourier de un impulso  $\delta(t)$  es (entrada 2 de la tabla 15.10-2)

$$F(\omega) = 1$$

Por lo tanto, el espectro de un impulso contiene todas las frecuencias, y en la figura 15.11-1 se muestra un diagrama del espectro del impulso.

La transformada de Fourier de una señal de cd constante de magnitud  $A$  es

$$F(\omega) = 2\pi A\delta(\omega)$$

la cual tiene un espectro como se muestra en la figura 15.11-2. La integral del impulso  $\delta(\omega)$  tiene valor unitario. El símbolo para el impulso es una línea vertical con punta de flecha.

Por integridad, examinemos una función que tenga una transformada de Fourier que sea compleja. Cuando  $f(t) = Ae^{-at}u(t)$ ,

$$F(\omega) = \frac{A}{a + j\omega}$$

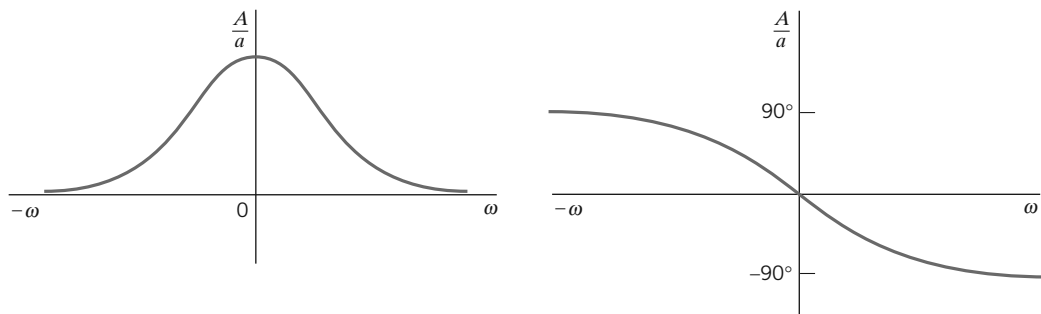
Para diagramar el espectro, calculamos la magnitud y la fase de  $F(\omega)$  como

$$|F(\omega)| = \frac{A}{(a^2 + \omega^2)^{1/2}}$$

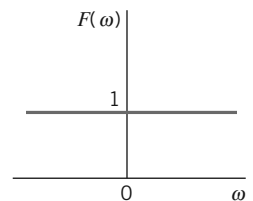
y

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}\omega/a$$

El espectro de Fourier se muestra en la figura 15.11-3.



**FIGURA 15.11-3** El espectro de Fourier para  $f(t) = Ae^{-at}u(t)$ .



**FIGURA 15.11-1**  
Espectro de impulso  $f(t) = \delta(t)$ .



**FIGURA 15.11-2**  
Espectro de señal de cd constante de magnitud  $A$ . El símbolo para un impulso es una línea vertical con una punta de flecha.



El **espectro de Fourier** de una señal es una gráfica de la magnitud y la fase de la transformada de Fourier de la señal.

**EJERCICIO 15.11-1** Calcule la transformada de Fourier y dibuje el espectro de Fourier para  $f(t)$  que se muestra en la figura E 15.11-1, donde  $f(t) = A \cos \omega_0 t$  para toda  $t$ .

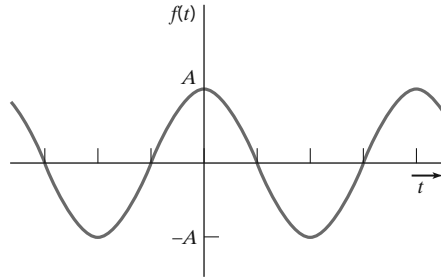


FIGURA E 15.11-1

**Respuesta:**  $F(\omega) = \pi A \delta(\omega + \omega_0) + \pi A \delta(\omega - \omega_0)$

## 15.12 CONVOLUCIÓN Y RESPUESTA DEL CIRCUITO

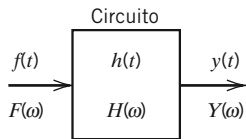


FIGURA 15.12-1  
Un circuito lineal.

Un circuito con una respuesta de impulso  $h(t)$  y una entrada  $f(t)$  tiene una respuesta  $y(t)$  que se puede determinar a partir de la integral de convolución. Para el circuito que se muestra en la figura 15.12-1, la integral de convolución es

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(t-x) dx$$

Si utilizamos la transformada de Fourier de la integral de convolución, tendremos

$$\begin{aligned} [y(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(t-x) dx e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) e^{-j\omega t} dt dx \end{aligned}$$

Sea  $u = t - x$  para obtener

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[y(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega(u+x)} du dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-j\omega x} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega u} du \end{aligned}$$

o bien

$$Y(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (15.12-1)$$

Así, la convolución en el dominio de tiempo corresponde a la multiplicación en el dominio de frecuencia. Cuando la entrada es un impulso,  $f(t) = \delta(t)$ , porque  $F(\omega) = 1$ , obtenemos la respuesta de impulso

$$Y(\omega) = H(\omega)$$

Cuando la entrada es una senoide, la transformada de Fourier de la salida es la respuesta de estado estable para esa función de impulso senooidal.

### EJEMPLO 15.12-1 Análisis de circuitos utilizando la transformada de Fourier

Encuentre la respuesta,  $v_o(t)$  del circuito  $RL$  que se muestra en la figura 15.12-2 cuando  $v(t) = 4e^{-2t}u(t)$  V. La condición inicial es cero.

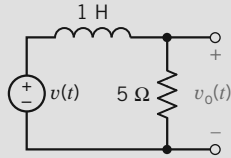


FIGURA 15.2-2 Circuito del ejemplo 15.12-1.

#### Solución

Como  $v(t) = 4e^{-2t}u(t)$ , obtenemos  $V(\omega)$  como

$$V(\omega) = \frac{4}{2 + j\omega}$$

El circuito está representado por  $H(\omega)$  y, aplicando el principio del divisor de voltaje, tenemos

$$H(\omega) = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{5}{5 + j\omega}$$

Entonces, tenemos

$$V_o(\omega) = H(\omega)V(\omega) = \frac{20}{(5 + j\omega)(2 + j\omega)}$$

Desarrolle, utilizando fracciones parciales, para obtener<sup>1</sup>

$$V_o(\omega) = \frac{-20/3}{5 + j\omega} + \frac{20/3}{2 + j\omega}$$

Utilizando la transformada inversa para cada término (entrada 3 de la tabla 15.10-2), tenemos

$$v_o(t) = \frac{20}{3}(e^{-2t} - e^{-5t})u(t) \text{ V}$$

Las respuestas en dominio de tiempo obtenidas de esta manera son respuestas de circuitos relajados inicialmente. (No hay energía inicial almacenada).

<sup>1</sup>Vea el capítulo 14, sección 14.4, para un repaso de la expansión de fracción parcial.

### EJEMPLO 15.12-2 Análisis de circuitos utilizando la transformada de Fourier

Determine y trace el espectro de la respuesta  $V_o(\omega)$  del circuito de la figura 15.12-3 cuando  $v = 10e^{-2t}u(t)$  V.

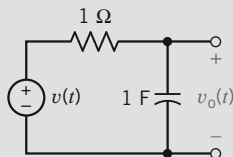


FIGURA 15.12-3 Circuito del ejemplo 15.12-2.

### Solución

La señal de entrada  $v(t)$  tiene una transformada de Fourier

$$V(\omega) = \frac{10}{2 + j\omega} = \frac{10}{(4 + \omega^2)^{1/2}} \angle -\tan^{-1} \omega/2$$

La función de transferencia del circuito es

$$H(j\omega) = \frac{1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{1}{1 + j\omega} = \frac{1}{(1 + \omega^2)^{1/2}} \angle -\tan^{-1} \omega$$

Entonces, la salida es

$$V_o(\omega) = H(\omega)V(\omega) = \frac{10}{(2 + j\omega)(1 + j\omega)}$$

Por consiguiente,

$$|V_o| = \frac{10}{[(4 + \omega^2)(1 + \omega^2)]^{1/2}}$$

y

$$\phi(\omega) = \angle V_o(\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{2} - \tan^{-1} \omega$$

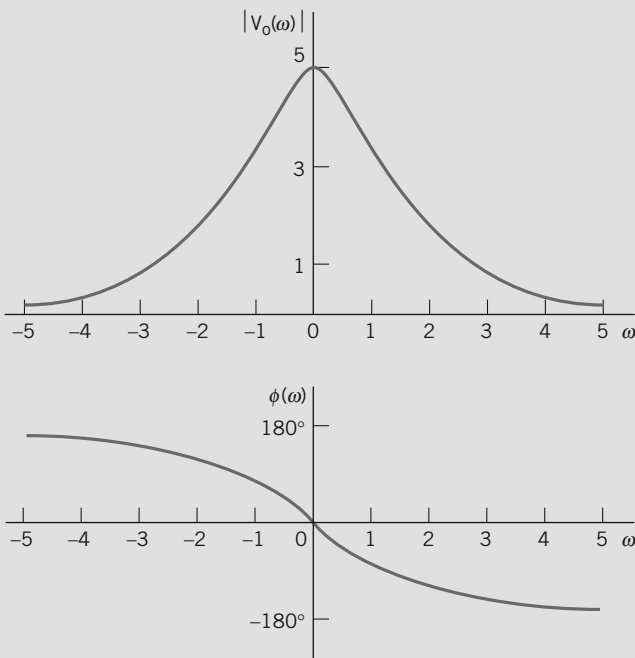
La magnitud y la fase calculadas para  $V_o(\omega)$  se registran en la tabla 15.12-1. Para  $\omega$  negativa,  $|V_o(\omega)| = |V_o(-\omega)|$  y

$$\phi(-\omega) = -\phi(\omega)$$

Por consiguiente, el espectro de Fourier de  $V_o(\omega)$  está representado por el diagrama que se muestra en la figura 15.12-4.

**Tabla 15.12-1 Respuesta de Fourier para el ejemplo 15.12-2**

$\omega$	0	1	2	3	5	$\infty$
$ V_o $	5	3.16	1.58	0.88	0.36	0
$\phi(\omega)$	$0^\circ$	$-71.6^\circ$	$-108.4^\circ$	$-127.9^\circ$	$-146.9^\circ$	$-180^\circ$



**FIGURA 15.12-4** Amplitud y fase comparados con  $\omega$  del voltaje de salida para el ejemplo 15.12-2.

**EJERCICIO 15.12-1** Un filtro de pasa banda ideal deja pasar todas las frecuencias entre 24 y 48 rad/s sin atenuación, y rechaza por completo todas las frecuencias fuera de esta pasa banda.

(a) Bosqueje  $|V_o|^2$  para el voltaje de salida del filtro cuando el voltaje de entrada es

$$v(t) = 120e^{-24t}u(t)\text{V}$$

(b) ¿Qué porcentaje de la energía de la señal de entrada está disponible en la señal de la salida del filtro ideal?

**Respuesta:** (b) 20.5%

### 15.13 TRANSFORMADA DE FOURIER Y TRANSFORMADA DE LAPLACE

Se puede utilizar la tabla 14.2-1 de transformadas de Laplace, desarrollada en el capítulo 14, para obtener la transformada de Fourier de una función  $f(t)$ . Desde luego, la transformada de Fourier existe sólo cuando converge la integral de Fourier, ecuación 15.9-4. Dicha integral convergerá cuando todos los polos de  $F(s)$  se encuentren en el plano  $s$  izquierdo, no en el eje  $j\omega$  o en el origen.

Si  $f(t)$  es cero para  $t \leq 0$  y  $\int_0^\infty f(t) dt < \infty$ , podemos obtener la transformada de Fourier desde la transformada de Laplace de  $f(t)$  reemplazando  $s$  por  $j\omega$ . Entonces

$$F(\omega) = F(s)|_{s=j\omega} \quad (15.13-1)$$

donde

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

Por ejemplo, si (entrada 3 de la tabla 15.10-2)

$$f(t) = Ae^{-at}u(t)$$

entonces, de la tabla 14.2-1

$$F(s) = \frac{A}{s+a}$$

Por lo tanto, con  $s = j\omega$  obtenemos la transformada de Fourier:

$$F(\omega) = \frac{A}{a+j\omega}$$

Si  $f(t)$  es una función real con un valor de no cero sólo para tiempo negativo, entonces podemos reflejar  $f(t)$  a tiempo positivo, encontrar la transformada de Laplace, y luego encontrar  $F(\omega)$  estableciendo  $s = j\omega$ . Por consiguiente, cuando  $f(t) = 0$  para  $t \geq 0$  y  $f(t)$  sólo existe para tiempo negativo, tenemos

$$F(\omega) = \mathcal{L}[f(-t)]|_{s=-j\omega} \quad (15.13-2)$$

Por ejemplo, considere la función exponencial

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 & t \geq 0 \\ &= e^{at} & t < 0 \end{aligned}$$

Entonces, invirtiendo la función de tiempo, tenemos

$$f(-t) = e^{-at} \quad t > 0$$

y, por consiguiente,

$$F(s) = \frac{1}{s+a}$$

De este modo, estableciendo  $s = -j\omega$ , obtenemos

$$F(\omega) = \frac{1}{a-j\omega}$$

**Tabla 15.13-1 Obtención de la transformada de Fourier mediante la transformada de Laplace**

CASO	MÉTODO
A. $f(t)$ es no cero sólo para tiempo positivo y $f(t) = 0, t < 0$	Paso 1. $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ 2. $F(\omega) = F(s) _{s=j\omega}$
B. $f(t)$ es no cero sólo para tiempo negativo y $f(t) = 0, t > 0$	Paso 1. $F(s) = \mathcal{L}[f(-t)]$ 2. $F(\omega) = F(s) _{s=-j\omega}$
C. $f(t)$ es no cero en todo tiempo	Paso 1. $f(t) = f^+(t) + f^-(t)$ 2. $F^+(s) = \mathcal{L}[f^+(t)]$ $F^-(s) = \mathcal{L}[f^-(t)]$ 3. $F(\omega) = F^+(s) _{s=j\omega} + F^-(s) _{s=-j\omega}$

*Nota:* Los polos de  $F(s)$  deben encontrarse en el lado izquierdo del plano  $s$ .

Las funciones que son no cero todo el tiempo se pueden dividir en funciones de tiempo positivo y tiempo negativo. Entonces utilizamos las ecuaciones 15.13-1 y 15.13-2 para obtener la transformada de Fourier de cada parte. La transformada de Fourier de  $f(t)$  es la suma de las transformadas de Fourier de las dos partes.

Por ejemplo, considere la función  $f(t)$  con un valor de no cero todo el tiempo donde

$$f(t) = Ae^{-a|t|}$$

que es la entrada 4 en la tabla 15.10-2. La porción de tiempo positivo de la función se llamará  $f^+(t)$  y la porción de tiempo negativo se llamará  $f^-(t)$ . Entonces,

$$f(t) = f^+(t) + f^-(t)$$

De donde

$$F(\omega) = \mathcal{L}[f^+(t)]_{s=j\omega} + \mathcal{L}[f^-(t)]_{s=-j\omega}$$

En este caso,

$$f^+(t) = Ae^{-at} \quad t > 0$$

y

$$f^-(t) = Ae^{at} \quad t < 0$$

Observe que  $f^-(t) = Ae^{-at}$ . Entonces,

$$F^+(s) = \frac{A}{s+a} \quad \text{y} \quad F^-(s) = \frac{A}{s+a}$$

Obtenemos la  $F(\omega)$  total como

$$F(\omega) = F^+(s)|_{s=j\omega} + F^-(s)|_{s=-j\omega} = \frac{A}{a+j\omega} + \frac{A}{a-j\omega} = \frac{2aA}{\omega^2 + a^2}$$

El uso de la transformada de Laplace para encontrar la transformada de Fourier se resumen en la tabla 15.13-1. Recuerde que el método resumido no se puede usar para  $\sin \omega t$ ,  $\cos \omega t$ , o  $u(t)$ , porque los polos de  $F(s)$  se encuentran en el eje  $j\omega$  o en el origen.

**EJERCICIO 15.13-1** Derive la transformada de Fourier para

$$\begin{aligned} f(t) &= te^{-at} \quad t \geq 0 \\ &= te^{at} \quad t \leq 0 \end{aligned}$$

*Respuesta:*  $\frac{-j4a\omega}{(a^2 + \omega^2)^2}$

## 15.14 ¿CÓMO LO PODEMOS COMPROBAR...?

A los ingenieros se les suele solicitar comprobar que la solución de un problema sea la correcta. Por ejemplo, las soluciones propuestas para problemas de diseño se deben comprobar para confirmar que se ha cumplido con todas las especificaciones. Además, se deben revisar los resultados de la computadora para protegerse contra errores de captura de datos, así como las exigencias de los comerciantes, las cuales se deben analizar a fondo.

También a los estudiantes de ingeniería se les pide que verifiquen la exactitud de sus trabajos. Por ejemplo, tomarse un breve lapso antes de terminar un examen permitiría dar una vista rápida e identificar esas soluciones que podrían requerir un poco más de aplicación.

El ejemplo siguiente ilustra técnicas útiles para comprobar las soluciones a los diversos problemas analizados en este capítulo.

### EJEMPLO 15.14-1 ¿Cómo podemos comprobar las series de Fourier?

La figura 15.14-1 muestra la característica transferencia de la no linealidad de saturación. Suponga que la entrada a esta no linealidad es

$$v_i(t) = A \text{ sen } \omega t$$

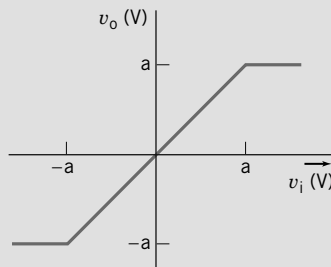


FIGURA 15.14-1 La no linealidad de saturación.

donde  $A > a$ . ¿Cómo podemos comprobar que la salida de la no linealidad será una función periódica que se pueda representar por las series de Fourier?

$$v_o(t) = b_1 \text{ sen } \omega t + \sum_{\substack{n=3 \\ \text{odd}}}^N b_n \text{ sen } n\omega t \quad (15.14-1)$$

donde (Graham, 1971)

$$B = \text{sen}^{-1} \left( \frac{a}{A} \right)$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi} A \left[ B + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left( \frac{a}{A} \right)^2} \right]$$

$$y \quad b_n = \frac{4A}{\pi(1-n^2)} \left[ \frac{a \cos(nB)}{A} - \frac{1}{n} \sqrt{1 - \left( \frac{a}{A} \right)^2} \text{ sen}(nB) \right]$$

### Solución

El voltaje de salida,  $v_o(t)$ , será una senoide sujeta. Necesitamos verificar que la ecuación 15.14-1 en realidad representa un senoide sujeta. Una forma directa, pero tediosa, de hacer esto es trazar  $v_o(t)$  en comparación con  $t$  directamente desde la ecuación 15.14-1. Varios programas de computadora, como hojas desplegadas y solucionadores de ecuaciones, están disponibles para reducir el trabajo que se requiere para producir este diagrama. Mathcad es uno de estos programas. En la figura 15.14-2 se utiliza Mathcad para trazar  $v_o(t)$  en comparación con  $t$ . Este diagrama comprueba que la serie de Fourier de la ecuación 15.14-1 representa realmente una senoide sujeta.

Plot a periodic signal from its coefficients.  
Define  $n$ , the index for the summation:

$$N := 25 \quad n := 3, 5, \dots, N$$

Define any parameters that are used to make it easier to enter the coefficient of the Fourier series:

$$A := 12.5 \quad a := 12 \quad B := \text{asin}\left(\frac{a}{A}\right)$$

Enter the fundamental frequency:

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot 1000$$

Define an increment of time. Set up an index to run over two periods of the periodic signal:

$$T := \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \quad dt := \frac{T}{200} \quad i := 1, 2, \dots, 400 \quad t_i := dt \cdot i$$

Enter the formulas for the coefficients of the Fourier series,

$$b_1 := \frac{2}{\pi} \cdot A \left[ B + \frac{a}{A} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right]$$

$$b_n := \frac{4 \cdot A}{\pi \cdot (1 - n^2)} \cdot \left[ \frac{a}{A} \cdot \frac{\cos(n \cdot B)}{n} - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \cdot \sin(n \cdot B) \right]$$

Enter the Fourier series:

$$v(i) := b_1 \cdot \sin(\omega \cdot t_i) + \sum_{n=3}^N b_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t_i)$$

Plot the periodic signal:

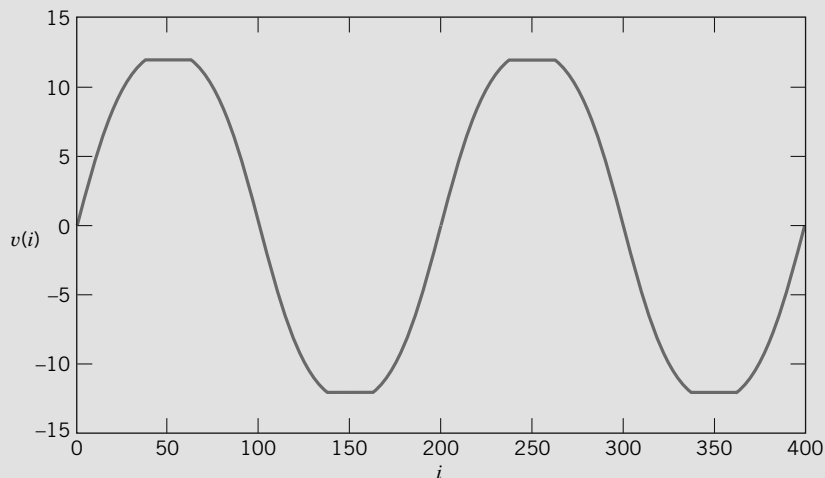


FIGURA 15.14-2 Cómo se utiliza Mathcad para verificar la serie de Fourier de una sinusoide sujeta.

## 15.15 EJEMPLO DE DISEÑO

### ALIMENTACIÓN DE POTENCIA DE CD

La alimentación de potencia de un laboratorio utiliza un circuito no lineal denominado rectificador para convertir una entrada de voltaje senoidal en un voltaje de cd. La entrada senoidal

$$v_{ac}(t) = A \text{ sen } \omega_0 t$$

viene desde el enchufe en la pared. En este ejemplo,  $A = 160 \text{ V}$  y  $\omega_0 = 377 \text{ rad/s}$  ( $f_0 = 60 \text{ Hz}$ ). La figura 15.15-1 muestra la estructura de la alimentación de potencia. La salida del rectificador es el valor absoluto de su entrada, es decir,

$$v_s(t) = |A \text{ sen } \omega_0 t|$$

El propósito del rectificador es convertir una señal que tenga un valor medio igual a cero en una señal cuyo valor medio sea de no cero. El valor medio de  $v_s(t)$  se utilizará para producir el voltaje de salida cd de la alimentación de potencia.

La salida del rectificador no es una senoide sino una señal periódica con frecuencia fundamental igual a  $2\omega_0$ . Las señales periódicas se pueden representar por series de Fourier. La serie de Fourier de  $v_s(t)$  contendrá un término constante, o cd, y algunos términos senoidales. El propósito del filtro mostrado en la figura 15.15-1 es pasar el término cd y atenuar los términos senoidales. La salida del filtro,  $v_o(t)$ , será una señal periódica y se puede representar por una serie de Fourier. Dado que estamos diseñando una alimentación de potencia de cd, los términos senoidales en la serie de Fourier de  $v_o(t)$  son indeseables. La suma de estos términos indeseables se denomina onda de  $v_o(t)$ .

El reto es diseñar un filtro sencillo de modo que el término cd de  $v_o(t)$  sea de al menos  $90 \text{ V}$ , y que las dimensiones de la onda no sean mayores de  $5\%$  del tamaño del término cd.

#### Describe la situación y los supuestos

1. De la tabla 15.4-1, la serie de Fourier de  $v_s(t)$  es

$$v_s(t) = \frac{320}{\pi} - \sum_{n=1}^N \frac{640}{\pi(4n^2 - 1)} \cos(2 \cdot n \cdot 377 \cdot t)$$

Dejemos que  $v_{sn}(t)$  indique el término de  $v_s(t)$  que corresponda al entero  $n$ . Con esta notación podemos escribir la serie de Fourier de  $v_s(t)$  como

$$v_s(t) = v_{s0} + \sum_{n=1}^N v_{sn}(t)$$

2. La figura 15.15-2 muestra un filtro sencillo. La resistencia  $R_s$  modela la resistencia de salida del rectificador. Suponemos que la resistencia de entrada del regulador es lo bastante grande para ser pasada por alto. (La resistencia de entrada del regulador estará en paralelo con  $R$  y probablemente sea mucho mayor que  $R$ . En este caso, la resistencia equivalente de la combinación en paralelo será casi igual a  $R$ .)

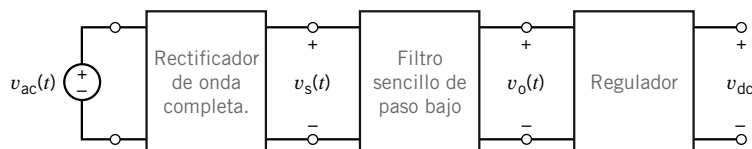


FIGURA 15.15-1 Diagrama de alimentación de potencia.



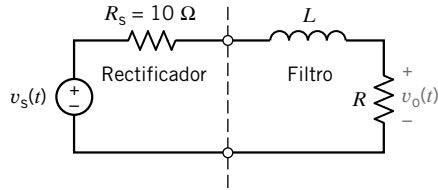


FIGURA 15.15-2 Un filtro  $RL$  sencillo de paso bajo conectado al rectificador.

3. La salida del filtro,  $v_o(t)$ , también será una señal periódica y la representará la serie de Fourier

$$v_o(t) = v_{s0} + \sum_{n=1}^N v_{on}(t)$$

4. Gran parte de la onda de  $v_o(t)$  se deberá a  $v_{o1}(t)$ , el término fundamental de la serie de Fourier. La especificación que hace referencia a la onda permisible se puede establecer como

$$\text{amplitud de onda} \leq 0.05 \cdot \text{salida de cd}$$

De manera equivalente, podemos establecer que requerimos

$$\text{máx} \left( \sum_{n=1}^N v_{on}(t) \right) \leq 0.05 \cdot v_{o0} \quad (15.15-1)$$

Para facilitar el cálculo, reemplazamos la ecuación 15.15-1 con la condición más simple

$$v_{o1}(t) \leq 0.04 \cdot v_{o0}$$

Es decir, la amplitud  $v_{o1}(t)$  debe ser menor que 4% del término de cd de la salida ( $v_{o0} = \text{cd término de la salida}$ ).

### Establezca el objetivo

Especifique valores de  $R$  y  $L$  de modo que

$$\text{salida de cd} = v_{o0} \geq 90 \text{ V}$$

y

$$v_{o1}(t) \leq 0.04 \cdot v_{o0}$$

### Genere un plan

Aplique el principio de la superposición al cálculo de la serie de Fourier de la salida del filtro. Primero, la especificación

$$\text{salida de cd} = v_{o0} \geq 90 \text{ V}$$

se puede utilizar para determinar el valor requerido de  $R$ . A continuación, la especificación

$$|v_{o1}(t)| \leq 0.04 \cdot v_{o0}$$

se puede aprovechar para calcular  $L$ .

### Actúe sobre el plan

Primero encontremos la respuesta al término cd de  $v_s(t)$ . Cuando la entrada del filtro sea una constante y el circuito se encuentre en estado estable, el inductor actuará como cortocircuito. Aplicamos la división de voltajes

$$v_{o0} = \frac{R}{R + R_s} v_{s0} = \frac{R}{R + 10} \times \frac{320}{\pi}$$

La especificación que  $v_{o0} \geq 90$  requiere

$$90 \leq \frac{R}{R + 10} \times \frac{320}{\pi}$$

o

$$R \geq 75.9$$

Seleccionemos

$$R = 80 \, \Omega$$

Cuando  $R = 80 \, \Omega$ ,

$$v_{o0} = 90.54 \, \text{V}$$

Luego, encontremos la respuesta de estado estable a un término senoidal,  $v_{sn}(t)$ . Se pueden utilizar fasores e impedancias para encontrar esta respuesta. Aplicando la división de voltajes,

$$\mathbf{V}_{on} = \frac{R}{R + R_s + j2n\omega_0 L} \mathbf{V}_{sn}$$

Nuestro interés en particular está en  $\mathbf{V}_{o1}$ :

$$\mathbf{V}_{o1} = \frac{R}{R + R_s + j2\omega_0 L} \mathbf{V}_{s1} = \frac{80}{90 + j754L} \times \frac{640}{\pi \times 3}$$

La amplitud de  $v_{o1}(t)$  es igual a la magnitud del fasor  $\mathbf{V}_{o1}$ . La especificación sobre la amplitud de  $v_{o1}(t)$  requiere que

$$\begin{aligned} \frac{80}{\sqrt{90^2 + 754^2 L^2}} \times \frac{640}{\pi \times 3} &\leq 0.04 v_{o1} \\ &\leq 0.04 \cdot 90.54 \end{aligned}$$

Es decir,

$$L \geq 1.986 \, \text{H}$$

Seleccionando

$$L = 2 \, \text{H}$$

se completa el diseño.

### Verifique la solución propuesta

La figura 15.15-3a despliega un diagrama de  $v_s(t)$  y  $v_o(t)$ , los voltajes de entrada y de salida del circuito de la figura 15.15-2. Por su parte, en la figura 15.15-3b se muestran los detalles del voltaje de salida. Este diagrama indica que el valor medio del voltaje de salida es mayor de 90 V y que la onda es no mayor de  $\pm 4$  V. Por consiguiente, se han satisfecho las especificaciones.

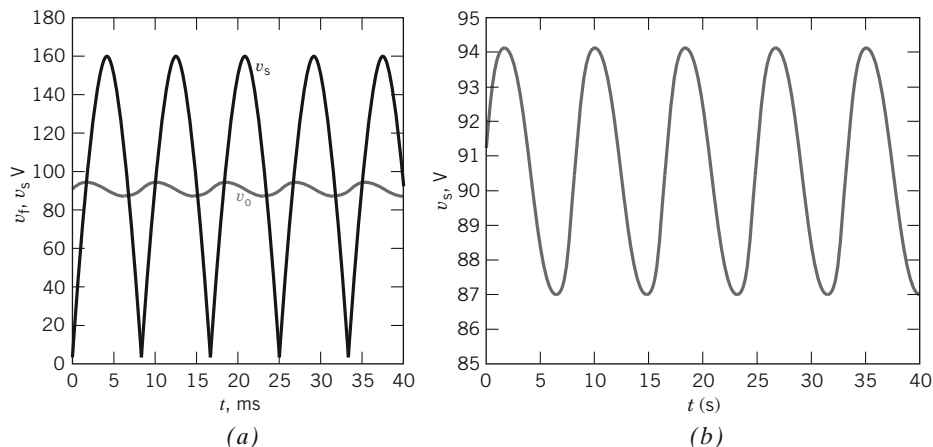
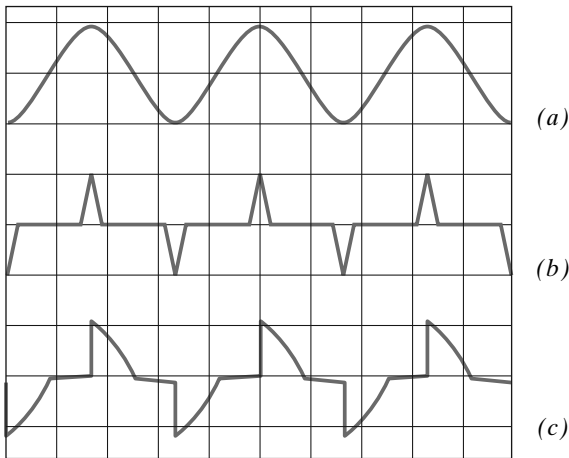


FIGURA 15.15-3 (a) Simulación con Mathcad del circuito que se muestra en la figura 15.15-2. (b) Diagrama ampliado del voltaje de salida.

## 15.16 RESUMEN

- Las formas de onda periódicas surgen en muchos circuitos. Por ejemplo, en la figura 15.16-1a se muestra la forma de las formas de onda de la corriente de carga para cargas seleccionadas. Aun cuando la corriente de carga para motores y lámparas incandescentes es de la misma forma que la del voltaje de fuente, está modificada de manera significativa para alimentadores de potencia, reductores de luz e impulsores de velocidad variable como se muestra en las figuras 15.16-1b y c. Desde hace mucho a los ingenieros electricistas les ha interesado el desarrollo de herramientas con las cuales analizar circuitos que incorporen formas de onda periódicas.



**FIGURA 15.16-1** Formas de onda de corriente de carga para (a) motores y lámparas incandescentes, (b) alimentadores de potencia del tipo interruptor y (c) reductores de luz e impulsores de velocidad variable. El eje vertical es la corriente y el eje horizontal es el tiempo. Fuente: Lamarre, 1991.

- En 1807, el ilustre ingeniero y matemático Jean-Baptiste-Joseph Fourier propuso que una forma de onda periódica podría representarse por una serie que contuviera términos de cosenos y senos con los coeficientes apropiados. Las frecuencias de múltiplos enteros de la fundamental se denominan **frecuencias armónicas** (o simplemente armónicas).
- La forma trigonométrica de la serie de Fourier es

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^N b_n \sin n\omega_0 t$$

Los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier se pueden obtener a partir de

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad n > 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad n > 0$$

- Una forma alterna de la forma trigonométrica de la serie de Fourier es

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^N c_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

donde  $c_0 = a_0 =$  valor medio de  $f(t)$  y

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ y } \theta_n = \begin{cases} -\tan^{-1} \left( \frac{b_n}{a_n} \right) & \text{si } a_n > 0 \\ 180^\circ - \tan^{-1} \left( \frac{b_n}{a_n} \right) & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

- Los coeficientes de Fourier de algunas señales periódicas comunes se especifican en la tabla 15.4-1.
- La simetría puede simplificar la tarea de calcular los coeficientes de Fourier.
- La forma exponencial de las series de Fourier es

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

donde  $C_n$  representa los coeficientes complejos definidos por

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- Los espectros de línea que constan de amplitud y fase de los coeficientes complejos de las series de Fourier cuando se diagraman contra frecuencias son útiles para reflejar las frecuencias que representan una forma de onda.
- La representación práctica de una forma de onda periódica consiste en un número finito de términos senoiales de la serie de Fourier. La serie finita de Fourier exhibe el fenómeno de Gibbs; es decir, aunque la convergencia ocurra en cuanto  $n$  crezca grande, siempre queda un error en los puntos de discontinuidad de la forma de onda.
- Para determinar la respuesta de un circuito excitado por una señal de entrada periódica  $v_s(t)$ , representamos  $v_s(t)$  por una serie de Fourier y luego encontramos la respuesta del circuito para la fundamental y cada armónico. Suponiendo que el circuito es lineal y que se cuenta con el principio de superposición, podemos considerar que la respuesta total es la suma de la respuesta al término de cd, la fundamental, y cada armónico.
- La transformada de Fourier provee una descripción de dominio de frecuencia de una función no periódica en el dominio de tiempo.
- Un circuito con una respuesta de impulso  $h(t)$  y una entrada  $f(t)$  tiene una respuesta  $y(t)$  que se puede determinar desde la integral de convolución.
- La tabla 14.12-1 de transformadas de Laplace, desarrollada en el capítulo 14, se puede utilizar para obtener la transformada de Fourier de una función  $f(t)$ .

**PROBLEMAS**

**Sección 15.2 Series de Fourier**

**P 15.2-1** Encuentre la serie trigonométrica de Fourier para una función periódica  $f(t)$ , que es igual a  $t^2$  durante el periodo de  $t = 0$  a  $t = 2$ .

**P 15.2-2** Una forma de onda tipo “escalinata” se describe por su primer ciclo como

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 0.25 \\ 2 & 0.25 < t < 0.5 \\ 0 & 0.5 < t < 1 \end{cases}$$

Encuentre la serie de Fourier para esta función.

**P 15.2-3** Determine la serie de Fourier para la función dentada que se muestra en la figura P 15.2-3.

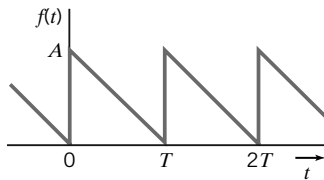


Figura P 15.2-3 Onda dentada.

**P 15.2-4** Encuentre la serie de Fourier para la función periódica  $f(t)$  que es igual a  $t$  durante el periodo de  $t = 0$  a  $t = 2$  s.

**Sección 15.3 Simetría de la función  $f(t)$**

**P 15.3-1** Determine la serie de Fourier de la forma de onda de voltaje que se muestra en la figura P 15.3-1.

*Respuesta:*  $v_d(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}t\right)$

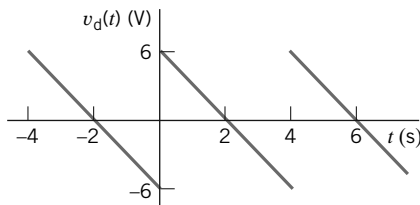


Figura P 15.3-1

**P 15.3-2** Determine la serie de Fourier de la forma de onda de voltaje que se muestra en la figura P 15.3-2.

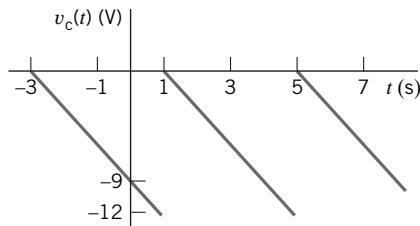


Figura P 15.3-2

*Sugerencia:*  $v_c(t) = v_d(t - 1) - 6$ , donde  $v_d(t)$  es el voltaje considerado en el problema de la figura P 15.3-1.

*Respuesta:*  $v_c(t) = -6 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n\pi} \sin\left(n\frac{\pi}{2}t - n\frac{\pi}{2}\right)$

**P 15.3-3** Determine la serie de Fourier de la forma de onda de voltaje que se muestra en la figura P 15.3-3.

*Respuesta:*  $v_a(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{n^2\pi^2} \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right) \cos\left(n\frac{1000\pi}{3}t\right)$

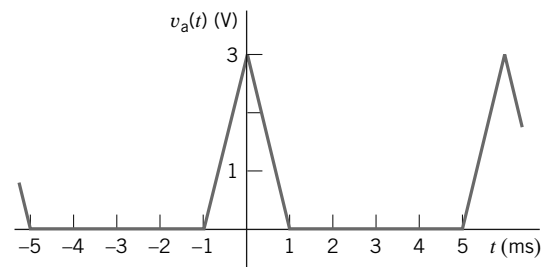


Figura P 15.3-3

**P 15.3-4** Determine la serie de Fourier de la forma de onda de voltaje que se muestra en la figura P 15.3-4.

*Sugerencia:*  $v_b(t) = v_a(t - 0.002) - 1$ , donde  $v_a(t)$  es el voltaje considerado en el problema P 15.4-3.

*Respuesta:*  $v_b(t) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{n^2\pi^2} \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right) \cos\left(n\frac{1000\pi}{3}t - n\frac{2\pi}{3}\right)$

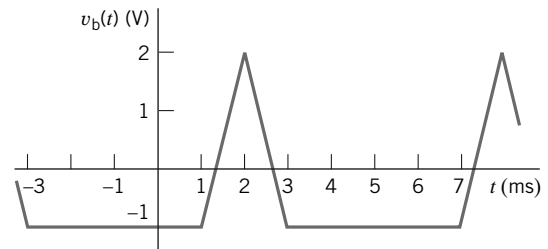


Figura P 15.3-4

**P 15.3-5** Encuentre la serie trigonométrica de Fourier de la forma dentada,  $f(t)$  que se muestra en la figura P 15.3-5.

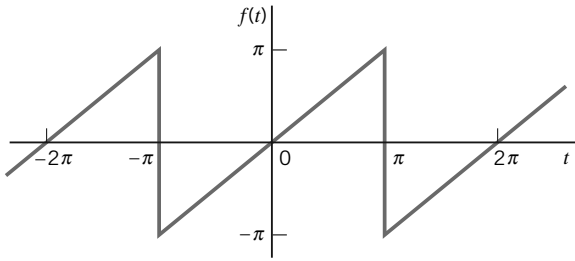


Figura P 15.3-5 Onda dentada.

**P 15.3-6** Determine la serie de Fourier para la forma de onda que se muestra en la figura P 15.3-6. Calcule  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$ .

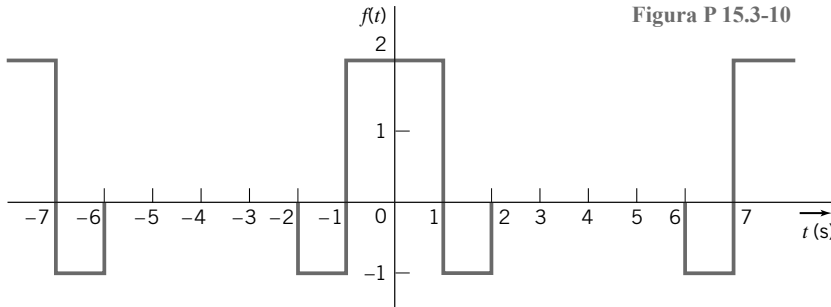


Figura P 15.3-6

**P 15.3-7** Determine la serie de Fourier para

$$f(t) = |A \cos \omega t|$$

**P 15.3-8** Encuentre la serie trigonométrica de Fourier para la función de la figura P 15.3-8. La función es la porción positiva de una onda de coseno.

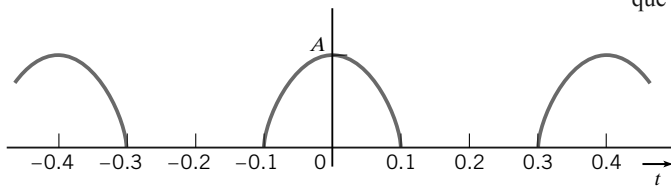


Figura P 15.3-8 Onda de coseno rectificada de media onda.

**P 15.3-9** Determine la serie de Fourier para  $f(t)$  que se muestra en la figura P 15.3-9.

**Respuesta:**  $a_n = a_0 = 0$ ,  $b_n = 0$  para  $n$  par,  $= 8/(n^2\pi^2)$ , para  $n = 1, 5, 9$  e  $= -8/(n^2\pi^2)$  para  $n = 3, 7, 11$ .

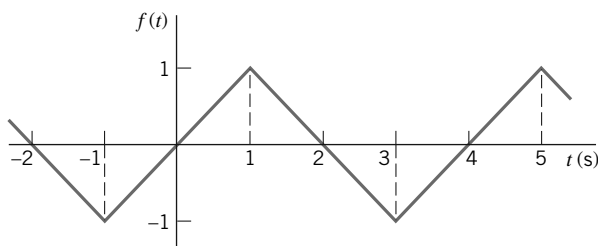


Figura P 15.3-9

**P 15.3-10** Determine la serie de Fourier para la señal periódica que se muestra en la figura P 15.3-10.

**Respuesta:**

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right)$$

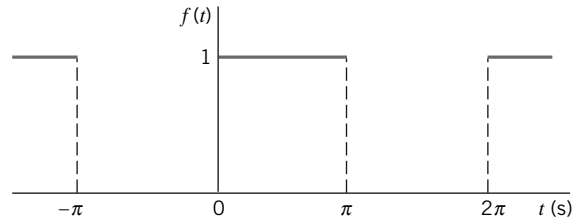


Figura P 15.3-10

## Sección 15.5 Forma exponencial de la serie de Fourier

**P 15.5-1** Determine la serie exponencial de Fourier de la función

$$f(t) = |A \sin(\pi t)|$$

que se muestra en la figura P 15.5-1.

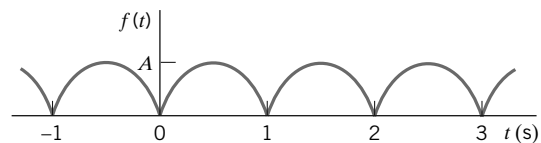


Figura P 15.5-1

**P 15.5-2** Determine la serie exponencial de Fourier de la función  $f(t)$  que se muestra en la figura P 15.5-2.

$$\text{Respuesta: } f(t) = \frac{A}{2} + j \frac{A}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{n=\infty} \frac{1}{n} e^{jn2\pi t/T}$$

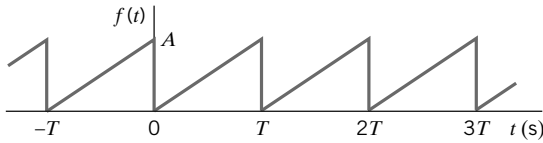


Figura P 15.5-2

**P 15.5-3** Determine la serie exponencial de Fourier de la función  $f(t)$  que se muestra en la figura P 15.5-3.

Respuesta:  $C_n = \left(\frac{Ad}{T}\right) \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi d}{T}\right)}{\frac{n\pi d}{T}}$

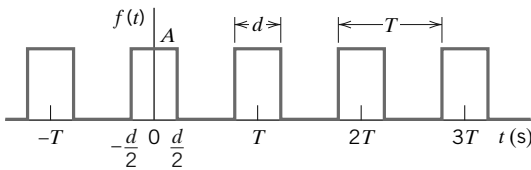


Figura P 15.5-3

**P 15.5-4** Considere dos funciones periódicas,  $\hat{f}(t)$  y  $f(t)$ , que tienen el mismo periodo y se relacionan por

$$\hat{f}(t) = af(t - t_d) + b$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $t_d$  son constantes reales. Sea  $\hat{C}_n$  y  $C_n$  las que indiquen los coeficientes de la serie exponencial de Fourier de  $\hat{f}(t)$ . Determine la relación entre  $\hat{C}_n$  y  $C_n$ .

Respuesta:  $\hat{C}_0 = aC_0 + b$  y  $\hat{C}_n = ae^{-jn\omega_0 t_d} C_n \quad n \neq 0$

**\*P 15.5-5** Determine la forma exponencial de la serie de Fourier para la forma de onda de la figura P 15.3-6.

**\*P 15.5-6** Determine la serie exponencial de Fourier para la forma de onda de la figura P 15.5-6.

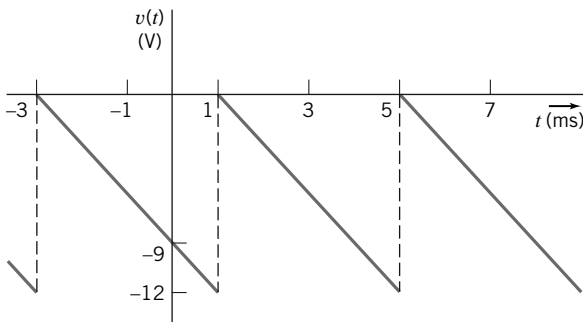


Figura P 15.5-6

**\*P 15.5-7** Una función periódica consiste en la elevación y decaimiento exponenciales de constantes de tiempo de 0.2 s cada una y duraciones de 1 s cada una, como se muestra en la figura P 15.5-7. Determine la serie exponencial de Fourier para esta función.

Respuesta:  $C_n = \frac{5}{(j\pi n)(5 + j\pi n)}, n = 1, 3, 5$

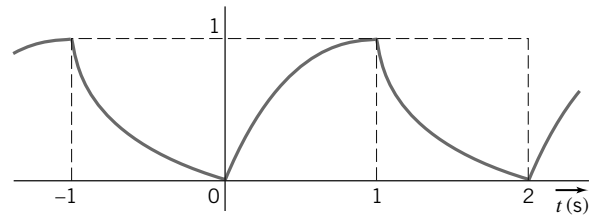


Figura P 15.5-7

### Sección 15.6 Espectro de Fourier

**P 15.6-1** Determine la serie de seno y coseno de Fourier para la forma de onda dentada que se muestra en la figura P 15.6-1. Dibuje los espectros de Fourier para los primeros cuatro términos, entre ellos magnitud y fase.

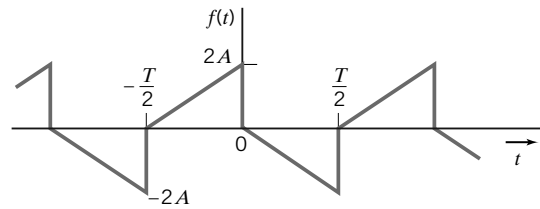


Figura P 15.6-1

**P 15.6-2** La forma de onda de corriente de carga del motor de impulso de velocidad variable descrita en la figura P 15.16-1c se muestra en la figura P 15.6-2. La forma de onda de la corriente es una porción de  $A \text{ sen } \omega_0 t$ . Determine la serie de Fourier de esta forma de onda y dibuje los espectros de línea de  $|C_n|$  para los primeros 10 términos.

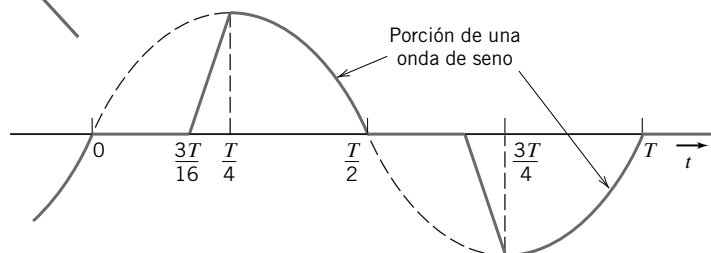


Figura P 15.6-2 La corriente de carga de un impulso de velocidad variable.

**P 15.6-3** La entrada a un filtro de paso bajo es

$$v_i(t) = 10 \cos t + 10 \cos 10t + 10 \cos 100t \text{ V}$$

La salida del filtro es el voltaje  $v_o(t)$ . La función de red del filtro de paso bajo es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{2}{\left(1 + j\frac{\omega}{5}\right)^2}$$

Diagrame el espectro de Fourier de la entrada y la salida del filtro de paso bajo.

**P 15.6-4** Dibuje los espectros de Fourier para la forma de onda que se muestra en la figura P 15.6-4.

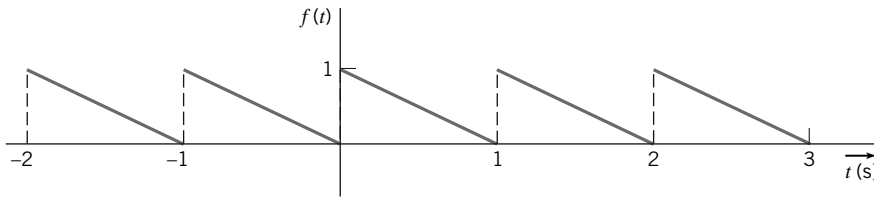


Figura P 15.6-4

### Sección 15.7 Circuitos y series de Fourier

**P 15.7-1** Determine la respuesta de estado estable,  $v_o(t)$ , para el circuito que se muestra en la figura P 15.7-1. La entrada a este circuito es el voltaje  $v_c(t)$  que se muestra en la figura P 15.3-2.

*Respuesta:*  $v_o(t) = -6 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{240}{n\pi\sqrt{400 + n^2\pi^2}} \sin\left(n\frac{\pi}{2}t - \left(n\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{n\pi}{20}\right)\right)\right)$

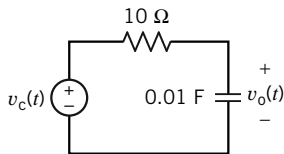


Figura P 15.7-1

**P 15.7-2** Determine la respuesta de estado estable,  $v_o(t)$ , para el circuito que se muestra en la figura P 15.7-2. La entrada a este circuito es el voltaje  $v_b(t)$  que se muestra en la figura P 15.3-4

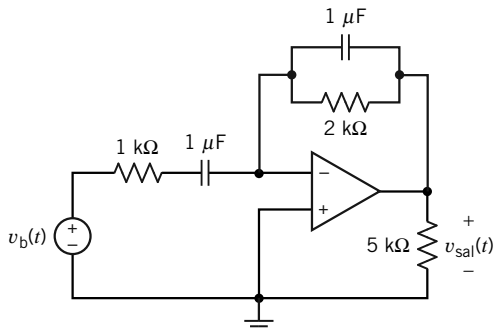


Figura P 15.7-2

**P 15.7-3** La entrada al circuito que se muestra en la figura P 15.7-3 es el voltaje de la fuente de voltaje

$$v_{\text{ent}}(t) = 2 + 4 \cos(100t) + 5 \cos(400t + 45^\circ) \text{ V}$$

La salida es el voltaje a través del resistor de 5-k $\Omega$

$$v_{\text{sal}}(t) = -5 + 7.071 \cos(100t + 135^\circ) + c_4 \cos(400t + \theta_4) \text{ V}$$

Determine los valores de la resistencia,  $R$ , la capacitancia,  $C$ , el coeficiente,  $c_4$ , y el ángulo de fase,  $\theta_4$ .

*Respuestas:*  $R = 25 \text{ k}\Omega$ ;  $C = 0.4 \text{ mF}$ ,  $c_4 = 3.032 \text{ V}$  y  $\theta_4 = 149^\circ$

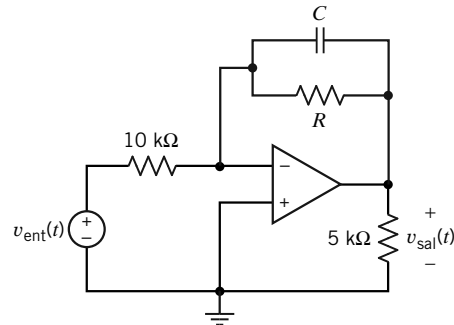


Figura P 15.7-3

**P 15.7-4** La entrada a un circuito es el voltaje

$$v_i(t) = 2 + 4 \cos(25t) + 5 \cos(100t + 45^\circ) \text{ V}$$

La salida es el voltaje

$$v_o(t) = 5 + 7.071 \cos(25t - 45^\circ) + c_4 \cos(\omega_4 t + \theta_4) \text{ V}$$

La función de red que representa este circuito es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = \frac{H_s}{1 + j\frac{\omega}{p}}$$

Determine los valores de la ganancia de cd,  $H_o$ , el polo,  $p$ , el coeficiente,  $c_4$ , y el ángulo de fase,  $\theta_4$ .

*Respuestas:*  $H_o = 2.5 \text{ V/V}$ ;  $p = 25 \text{ rad/s}$ ,  $c_4 = 3.032 \text{ V}$  y  $\theta_4 = -31^\circ$

**P 15.7-5** La entrada al circuito en la figura P 15.7-5 es el voltaje de la fuente de voltaje independiente

$$v_i(t) = 6 + 4 \cos(1000t) + 5 \cos(3000t + 45^\circ) \text{ V}$$

La salida es el voltaje a través del resistor de 500- $\Omega$

$$v_o(t) = 3.75 + 2.34 \cos(1000t - 20.5^\circ) + c_3 \cos(3000t + \theta_3) \text{ V}$$

Determine los valores de la resistencia,  $R_1$ , la capacitancia,  $C$ , el coeficiente,  $c_3$ , y el ángulo de fase,  $\theta_4$ .

**Respuestas:**  $R_1 = 300 \Omega$ ;  $C = 2 \text{ mF}$ ,  $c_3 = 2.076 \text{ V}$  y  $\theta_3 = -3.4^\circ$

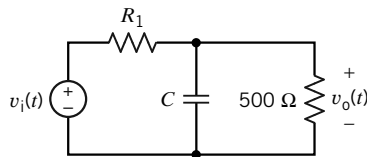


Figura P 15.7-5

**P 15.7-6** Encuentre la respuesta de estado estable para el voltaje de salida,  $v_o$ , para el circuito de la figura P 15.7-6 cuando  $v(t)$  es como se describe en la figura P 15.5-6.

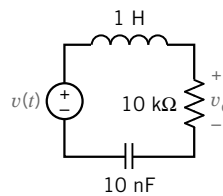
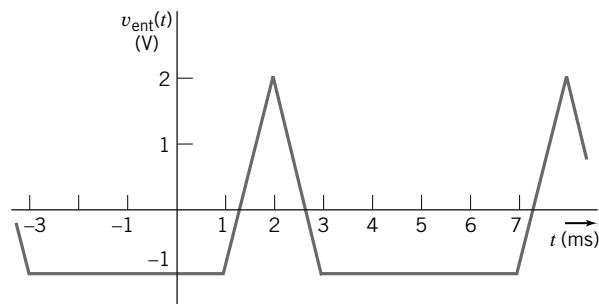
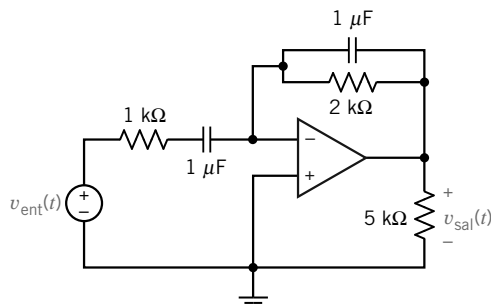


Figura P 15.7-6 Un circuito RLC.

**P 15.7-7** Determine el valor del voltaje,  $v_o(t)$ , en  $t = 4 \text{ ms}$  cuando  $v_{\text{ent}}$  se muestra en la figura P 15.7.7a y el circuito se muestra en la figura P 15.7-7b.



(a)



(b)

Figura P 15.7-7

**Sección 15.9 Transformada de Fourier**

**P 15.9-1** Encuentre la transformada de Fourier de la función

$$f(t) = -u(-t) + u(t)$$

como se muestra en la figura P 15.9-1. A esto se le llama función de signo.

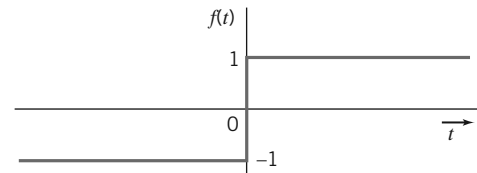


Figura P 15.9-1

**P 15.9-2** Encuentre la transformada de Fourier de  $f(t) = Ae^{-at}u(t)$  cuando  $a > 0$ .

**Respuesta:**  $F(\omega) = \frac{A}{a + j\omega}$

**P 15.9-3** Encuentre la transformada de Fourier de la forma de onda que se muestra en la figura P 15.9-3.

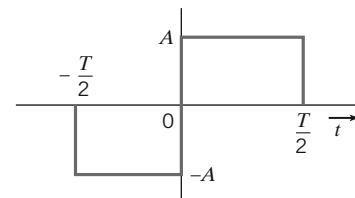


Figura P 15.9-3

**P 15.9-4** Determine la transformada de Fourier de  $f(t) = 10 \cos 50 t$ .

**Respuesta:**  $F(\omega) = 10\pi\delta(\omega - 50) + 10\pi\delta(\omega + 50)$

**P 15.9-5** Determine la transformada de Fourier del pulso que se muestra en la figura P 15.9-5.

**Respuesta:**  $F(j\omega) = \frac{2}{\omega} (\sin \omega - \sin 2\omega) + \frac{j2}{\omega} (\cos \omega - \cos 2\omega)$

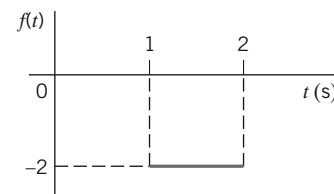


Figura P 15.9-5

**P 15.9-6** Determine la transformada de Fourier de una señal con  $f(t) = At/B$  entre  $t = 0$  y  $t = B$  y en otra parte  $f(t) = 0$ .

**Respuesta:**  $F(j\omega) = \frac{A}{B} \left[ \frac{-B}{j\omega} e^{-j\omega B} + \frac{1}{\omega^2} e^{-j\omega B} - \frac{1}{\omega^2} \right]$

**P 15.9-7** Determine la transformada de Fourier de la forma de onda que se muestra en la figura P 15.9-7.

**Respuesta:**  $F(j\omega) = \frac{2}{\omega} (\sin 2\omega - \sin \omega)$



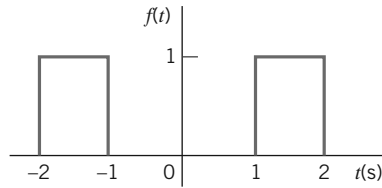


Figura P 15.9-7

**Sección 15.12 Convolución y respuesta del circuito**

**P 15.12-1** Encuentre la corriente  $i(t)$  en el circuito de la figura P 15.12-1 cuando  $i_s(t)$  es la función de signo, de modo que

$$i_s(t) = \begin{cases} +40 \text{ A} & t > 0 \\ -40 \text{ A} & t < 0 \end{cases}$$

Además, bosqueje  $i(t)$ .

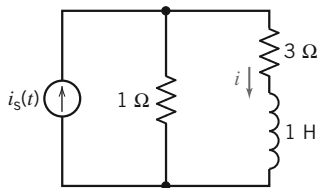


Figura P 15.12-1

**P 15.12-2** Repita el problema 15.12-1 cuando  $i_s = 100 \cos 3t$  A.

**P 15.12-3** La fuente de voltaje de la figura P 15.12-3 es  $v(t) = 10 \cos 2t$  para todo  $t$ . Calcule  $i(t)$  utilizando la transformada de Fourier.

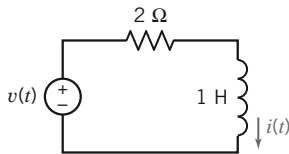


Figura P 15.12-3

**P 15.12-4** Encuentre el voltaje de salida  $v_o(t)$  utilizando la transformada de Fourier para el circuito de la figura P 15.12-4 cuando  $v(t) = e^t u(-t) + u(t)$  V.

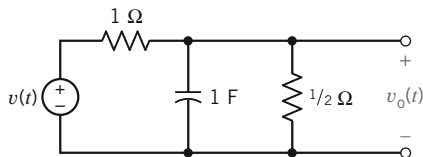


Figura P 15.12-4

**P 15.12-5** La fuente de voltaje del circuito de la figura P 15.12-5 es  $v(t) = 15e^{-5t}$  V. Encuentre la resistencia  $R$  cuando se sabe que la energía disponible en la señal de salida es dos tercios de la energía de la señal de entrada.

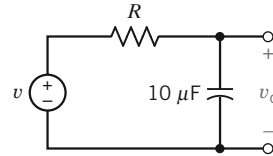
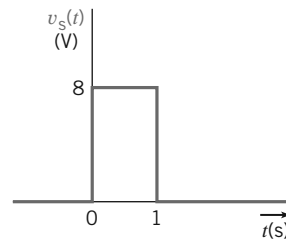
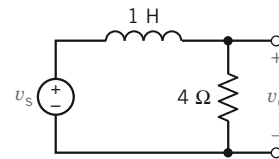


Figura P 15.12-5

**P 15.12-6** La señal de pulso que se muestra en la figura P 15.12-6a es la fuente  $v_s(t)$  para el circuito de la figura P 15.12-6b. Determine el voltaje de salida,  $v_o$ , utilizando la transformada de Fourier.



(a)



(b)

Figura P 15.12-6

**Sección 15.14 ¿Cómo lo podemos comprobar...?**

**P 15.14-1** La serie de Fourier de  $v_{\text{ent}}(t)$  que se muestra en la figura P 15.7-7 está dada como

$$v_{\text{ent}}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{n^2 \pi} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{3}\right) \cos \left(n \frac{\pi}{3} t - n \frac{2\pi}{3}\right) \text{ V}$$

¿Ésta es la serie de Fourier correcta?

**Sugerencia:** Compruebe el valor medio y la frecuencia fundamental.

**Respuesta:** La serie de Fourier dada no es la correcta.

**P 15.14-2** La serie de Fourier de  $v(t)$  que se muestra en la figura P 15.14-2 está dada como

$$v(t) = 9 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{5}\right) \cos \left(n \frac{\pi}{5} t - n \frac{\pi}{5}\right) \text{ V}$$

¿Ésta es la serie de Fourier correcta?

**Sugerencia:** Compruebe el valor medio y la frecuencia fundamental.

**Respuesta:** La serie de Fourier dada no es la correcta.

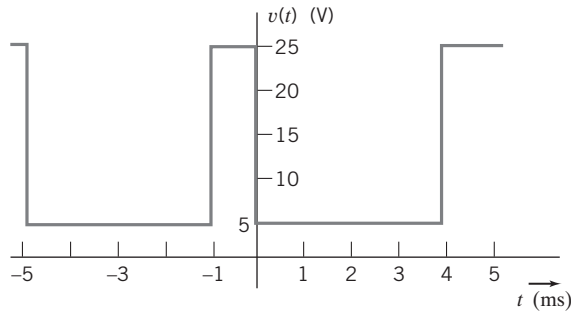


Figura P 15.14-2

**P 15.14-3** La serie de Fourier de  $v(t)$  que se muestra en la figura SP 15-2 de la sección siguiente está dada como

$$v(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} \cos(n2\pi t) \text{ V}$$

¿Ésta es la serie de Fourier correcta?

*Sugerencia:* Compruebe el valor medio y la frecuencia fundamental. También la simetría

*Respuesta:* La serie de Fourier dada no es la correcta.

## Problemas de PSpice

**PS 15.1** Utilice PSpice para determinar los coeficientes de Fourier para  $v(t)$  que se muestran en la figura PS 15-1.

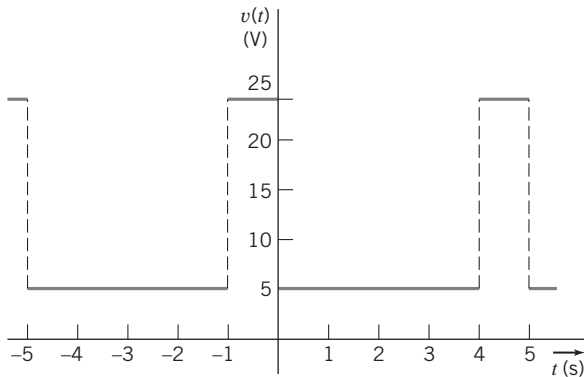


Figura PS 15-1

**PS 15.2** Utilice PSpice para determinar los coeficientes de Fourier para  $v(t)$  que se muestran en la figura PS 15-2.

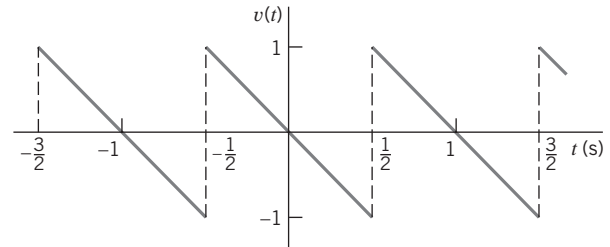
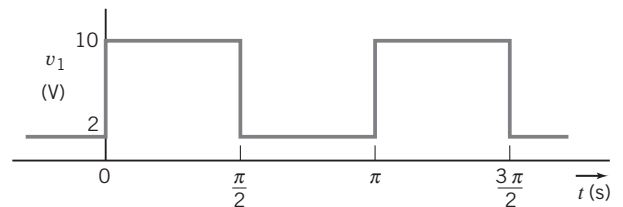


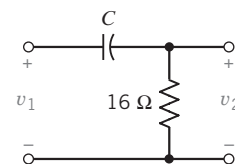
Figura PS 15-2

## Problemas de diseño

**PD 15-1** Una forma de onda periódica que se muestra en la figura PD 15-1a es la señal de entrada del circuito que se ve en la figura PD 15-1b. Seleccione la capacitancia  $C$  de modo que la magnitud del tercer armónico de  $v_2(t)$  sea de menos de 1.4 V y mayor de 1.3 V. Escriba la ecuación que describa el tercer armónico de  $v_2(t)$  para el valor de  $C$  seleccionada.



(a)



(b)

Figura PD 15-1

**PD 15-2** Una alimentador de potencia de cd de un laboratorio utiliza un circuito no lineal para convertir un voltaje senoidal obtenido de un contacto de pared para un voltaje de cd constante. El voltaje del contacto de pared es  $A \sin \omega_0 t$ , donde  $f_0 = 60 \text{ Hz}$  y  $A = 160 \text{ V}$ . Luego se rectifica el voltaje de modo que  $v_s = |A \sin \omega_0 t|$ . Utilizando el circuito de filtro de la figura PD 15-2, determine la inductancia requerida  $L$  a fin de que la magnitud de cada armónico (rizo) sea menor de 4% del componente de cd del voltaje de salida.

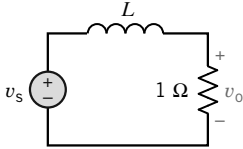


Figura PD 15-2 Un circuito  $RL$ .

**PD 15-3** En la figura PD 15-3 se muestra un filtro de paso bajo. La entrada,  $v_s$ , es una sinusoide rectificada de media onda con  $\omega_0 = 800\pi$  (elemento 5 de la tabla 15.4-1). Seleccione  $L$  y  $C$  de modo que el valor pico del primer armónico sea 1/20 del componente de cd para la salida,  $v_o$ .

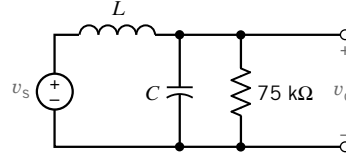


Figura PD 15-3 Un circuito  $RLC$ .

# Circuitos de filtro

# CAPÍTULO 16

## EN ESTE CAPÍTULO

- |      |   |      |  |
|------|---|------|--|
| 16.1 | Introducción  | 16.7 | ¿Cómo podemos comprobar...?                    |
| 16.2 | Filtro eléctrico                                    | 16.8 | <b>EJEMPLO DE DISEÑO</b> — Filtro antialiasing |
| 16.3 | Filtros   | 16.9 | Resumen  |
| 16.4 | Filtros de segundo orden                            |      | Problemas                                      |
| 16.5 | Filtros de alto orden                               |      | Problemas de PSpice                            |
| 16.6 | Simulación de circuitos de filtro utilizando PSpice |      | Problemas de diseño                            |

## 16.1 INTRODUCCIÓN

Las funciones de transferencia se utilizan para clasificar circuitos lineales. En un capítulo anterior aprendimos a analizar un circuito de modo que pudiéramos determinar su función de transferencia. Este problema de diseño no tiene una solución única. Hay muchas formas de obtener un circuito a partir de una función de transferencia especificada. Una estrategia muy común es diseñar el circuito de modo que sea una conexión en cascada de etapas de filtro de segundo orden. Esta estrategia es la que aplicaremos en este capítulo.

El problema de diseñar un circuito que tenga una función de transferencia especificada se denomina diseño de filtros. En este capítulo aprenderemos la terminología del diseño de filtros y describiremos las etapas de filtros de segundo orden. Por último, aprenderemos también a conectar estas etapas de filtro para obtener un circuito que cuente con una función de transferencia especificada.

## 16.2 FILTRO ELÉCTRICO

El concepto de un filtro se concibió desde los albores de la humanidad. Se utilizaba un filtro de papel para eliminar del agua y del vino impurezas y sustancias no deseadas. Un material poroso, como un papel, puede servir como un filtro mecánico. Los filtros mecánicos se utilizan para eliminar elementos no deseados como las partículas en suspensión de un líquido. De igual manera, un filtro eléctrico se puede utilizar para eliminar de una señal eléctrica elementos no deseados, como el ruido eléctrico.

El filtro eléctrico lo inventaron de manera independiente George Campbell en 1915 en Estados Unidos y K.W. Wagner en Alemania. Al surgir la radio entre 1910 y 1920, surgió también la necesidad de reducir el ruido estático en los radioreceptores. Cuando en la década de 1920 la difusión regular de radio fue cosa común, Campbell y otros más desarrollaron el filtro *RLC* utilizando inductores, condensadores y resistores. Estos filtros se llamaban *filtros pasivos* porque constaban de elementos pasivos. La teoría requerida para diseñar los filtros pasivos la desarrollaron S. Darlington, S. Butterworth, y E.A. Guillemin en la década de 1930 (Butterworth, 1930).

Cuando se incorporaron dispositivos activos, por lo regular amplificadores operacionales, a un filtro eléctrico, a éste se le llamó *filtro activo*. Puesto que los inductores son relativamente grandes y pesados, los filtros se suelen construir sin inductores y se utilizan, por ejemplo, sólo amplificadores operacionales, resistores y condensadores. Los primeros filtros *RC* activos prácticos se desarrollaron durante la II Guerra Mundial y se registraron en un documento clásico de R.P. Sallen y E.L. Key (Sallen y Key, 1955).

## 16.3 FILTROS

Empezamos con un **filtro ideal**. Por conveniencia, suponga que la entrada y la salida de este filtro son voltajes. Este filtro ideal separa su voltaje de entrada en dos partes. Una parte se pasa sin cambio alguno a la salida, la otra se elimina. En otras palabras, la salida de un filtro ideal es una copia exacta de parte de la entrada del filtro.

Éste es un uso común de la palabra **filtro**. Por ejemplo, esperamos de un aceite automotriz que separe una mezcla de aceite e impurezas en dos partes: aceite e impurezas. Idealmente, el filtro deja pasar una parte de su entrada, el aceite, a su salida sin cambio alguno. La otra parte de la entrada, las impurezas, se deben eliminar por completo. El filtro de aceite impide que las impurezas lleguen a la salida.

Para entender cómo funciona un filtro eléctrico, considere un voltaje de entrada:

$$v_i(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t + \cos \omega_3 t$$

La entrada consta de una suma de sinusoides, cada una en diferente frecuencia. (Por ejemplo, los voltajes periódicos se pueden representar de este modo por medio de las series de Fourier.) El filtro separa el voltaje de entrada en dos partes, utilizando la frecuencia como base para la separación. Hay varias formas de separar esta entrada en dos partes y, en correspondencia, varios tipos de filtro ideal. La tabla 16.3-1 ilustra los tipos comunes de filtros. Considere el **filtro de paso bajo** ideal que se muestra en la fila 1 de la tabla. La función de red del filtro de paso bajo ideal es

$$\mathbf{H}(\omega) = \begin{cases} 1 \angle 0^\circ & \omega < \omega_c \\ 0 & \omega > \omega_c \end{cases} \quad (16.3-1)$$

La frecuencia  $\omega_c$  se denomina **frecuencia de corte**. La frecuencia de corte separa el rango de frecuencia  $\omega < \omega_c$ , llamada de **pasa banda**, desde el rango de frecuencia  $\omega > \omega_c$ , llamada de **rechazo de banda**. Esos componentes de la entrada que tienen frecuencias en la pasa banda experimentan ganancia unitaria y cambio de fase cero. Estos términos se pasan, sin cambio alguno, a la salida del filtro. Los componentes de la entrada que tienen frecuencias en el rechazo de banda experimentan una ganancia igual a cero. Estos términos se eliminan o rechazan. Un filtro ideal separa su entrada en dos partes:

TIPO DE FILTRO	RESPUESTA DE FRECUENCIA IDEAL	ENTRADA Y SALIDA DEL FILTRO
Paso bajo		$v_i(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t + \cos \omega_3 t$ $v_o(t) = \cos \omega_1 t$
Paso alto		$v_i(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t + \cos \omega_3 t$ $v_o(t) = \cos \omega_3 t$
Pasa banda		$v_i(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t + \cos \omega_3 t$ $v_o(t) = \cos \omega_2 t$
Rechazo de banda (corte)		$v_i(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t + \cos \omega_3 t$ $v_o(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_3 t$

**Tabla 16.3-2 Denominadores de filtros de paso bajo de Butterworth con una frecuencia de corte  $\omega_c = 1$  rad/s**

ORDEN	DENOMINADOR, $D(s)$
1	$s + 1$
2	$s^2 + 1.414s + 1$
3	$(s + 1)(s^2 + s + 1)$
4	$(s^2 + 0.765s + 1)(s^2 + 1.848s + 1)$
5	$(s + 1)(s^2 + 0.618s + 1)(s^2 + 1.618s + 1)$
6	$(s^2 + 0.518s + 1)(s^2 + 1.414s + 1)(s^2 + 1.932s + 1)$
7	$(s + 1)(s^2 + 0.445s + 1)(s^2 + 1.247s + 1)(s^2 + 1.802s + 1)$
8	$(s^2 + 0.390s + 1)(s^2 + 1.111s + 1)(s^2 + 1.663s + 1)(s^2 + 1.962s + 1)$
9	$(s + 1)(s^2 + 0.347s + 1)(s^2 + s + 1)(s^2 + 1.532s + 1)(s^2 + 1.879s + 1)$
10	$(s^2 + 0.313s + 1)(s^2 + 0.908s + 1)(s^2 + 1.414s + 1)(s^2 + 1.782s + 1)(s^2 + 1.975s + 1)$

aquellos términos que tienen frecuencias en la pasa banda y los que tienen frecuencias en el rechazo de banda. La salida del filtro consta de aquellos términos con frecuencias en la pasa banda.

Por desgracia, los circuitos de filtro ideales no existen. (Este hecho se puede probar calculando la respuesta de impulso del filtro ideal si tomamos la transformada inversa de Laplace de la función de transferencia. La respuesta de impulso de un filtro ideal debería darse antes del impulso en sí. Es decir, la respuesta debería ocurrir antes de la entrada que provocó la respuesta. Como eso no puede suceder, los circuitos de filtro ideales no existen.) Los filtros son circuitos que se aproximan a los filtros ideales. Los filtros dividen su entradas en dos partes, los términos en pasa banda y los términos en rechazo de banda. Los términos en pasa banda experimentan una ganancia que es de aproximadamente 1 y un ligero cambio de fase. Estos términos se pasan a la salida, pero han sufrido un ligero cambio. Los términos en rechazo de banda experimentan una pequeña ganancia que no llega a cero. Como estos términos no se eliminan del todo, algunos pequeños residuos de ellos se muestran en la salida del filtro.

Las funciones de transferencia de **Butterworth** tienen respuesta de frecuencia de magnitud que se aproximan a la respuesta de frecuencia de un filtro ideal. Las funciones de transferencia de paso bajo de Butterworth están dadas por

$$H_L(s) = \frac{\pm 1}{D(s)} \quad (16.3-2)$$

Para el numerador de  $H_L(s)$  podemos elegir  $+1$  o  $-1$ . El polinomio  $D(s)$  depende de la frecuencia de corte y del orden del filtro. Estos polinomios, denominados polinomios de Butterworth, están resumidos en la tabla 16.3-2 por  $\omega_c = 1$  rad/s. Hay un intercambio que implica el orden del filtro. Cuanto más alto es el orden, con mayor precisión se aproxima la respuesta de frecuencia a la respuesta de frecuencia de un filtro ideal; eso es bueno. Cuanto más alto es el orden, más complicado es el circuito requerido para construir el filtro; eso no es bueno.

### EJEMPLO 16.3-1 Orden del filtro

Lo que deseamos es diseñar un filtro de paso bajo que se aproxime a un filtro ideal de paso bajo con  $\omega_c = 1$  rad/s. Compare el filtro de paso bajo de cuarto orden de Butterworth con el filtro de paso bajo de octavo orden de Butterworth.

#### Solución

La cuarta fila de la tabla 16.3-2 indica que la transferencia del filtro de Butterworth de cuarto orden es

$$H_4(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.765s + 1)(s^2 + 1.848s + 1)} = \frac{1}{(s^2 + 0.765s + 1)} \times \frac{1}{(s^2 + 1.848s + 1)}$$

Del mismo modo, la octava fila de la tabla 16.3-2 indica que la función de transferencia del filtro de octavo orden es

$$H_8(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.390s + 1)(s^2 + 1.111s + 1)(s^2 + 1.663s + 1)(s^2 + 1.962s + 1)}$$

$$= \frac{1}{(s^2 + 0.390s + 1)} \times \frac{1}{(s^2 + 1.111s + 1)} \times \frac{1}{(s^2 + 1.663s + 1)} \times \frac{1}{(s^2 + 1.962s + 1)}$$

La figura 16.3-1 muestra los trazos de la respuesta de frecuencia de magnitud para estos dos filtros. Ambas respuestas de frecuencia muestran ganancia unitaria cuando  $\omega \ll 1$  y una ganancia de cero cuando  $\omega \gg 1$ . Por lo tanto, ambos filtros se aproximan a un filtro de paso bajo ideal con  $\omega_c = 1$  rad/s. El filtro de octavo orden hace que la transición de pasa banda a rechazo de banda sea más rápida, proveyendo una mejor aproximación al filtro de paso bajo ideal.

La función de transferencia del filtro de cuarto orden se ha expresado como el producto de dos funciones de transferencia de segundo orden, mientras que la función de transferencia del filtro de octavo orden se ha expresado como el producto de cuatro funciones de transferencia de segundo orden. Cada una de estas funciones de transferencia de segundo orden se implementarán por un circuito de segundo orden. Dado que todos estos circuitos de segundo orden serán semejantes de algún modo, es razonable esperar que el circuito de octavo orden tendrá alrededor de dos veces las dimensiones del filtro de cuarto orden. Eso implica que hay dos veces la cantidad de partes, dos veces el consumo de potencia, dos veces el costo de ensamble, dos veces el espacio, etcétera.

El filtro de octavo orden se desempeña mejor, aunque cuesta más. En algunas aplicaciones el desempeño mejorado de un filtro de octavo orden justifica el costo adicional, mientras que en otras no.

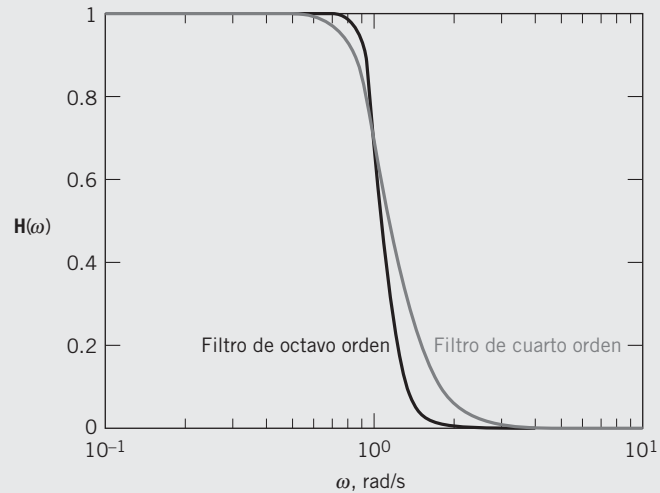


FIGURA 16.3-1 Comparación de las respuestas de frecuencia de filtros de paso bajo de Butterworth de cuarto y octavo orden con  $\omega_c = 1$  rad/s.

### EJEMPLO 16.3-2 Escalamiento de frecuencias

Determine la función de transferencia de un filtro de paso bajo de Butterworth de tercer orden, que tenga una frecuencia de corte igual a 500 rad/s.

#### Solución

La ecuación 16.3-2 y la tabla 16.3-2 proporcionan un filtro de paso bajo de Butterworth de tercer orden con una frecuencia de corte igual a 1 rad/s.:

$$H_n(s) = \frac{1}{(s + 1)(s^2 + s + 1)}$$

Para ajustar la frecuencia de corte a  $\omega_c = 500$  rad/s, hay una técnica denominada **escalamiento de frecuencia**. Esta técnica se puede complementar reemplazando cada  $s$  en  $H_n(s)$  por  $s/\omega_c$ ; es decir,

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c} + 1\right) \left(\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + \frac{s}{\omega_c} + 1\right)}$$

En este caso,  $\omega_c = 500$  rad/s, por lo tanto,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{\left(\frac{s}{500} + 1\right) \left(\left(\frac{s}{500}\right)^2 + \frac{s}{500} + 1\right)} \\ &= \frac{500^3}{(s + 500)(s^2 + 500s + 500^2)} \\ &= \frac{125\,000\,000}{(s + 500)(s^2 + 500s + 250\,000)} \end{aligned}$$

$H(s)$  es la función de transferencia de un filtro de paso bajo de Butterworth de tercer orden que tiene una frecuencia de corte igual a 500 rad/s.

**EJERCICIO 16.3-1** Encuentre la función de transferencia de un filtro de paso bajo de Butterworth de tercer orden que tenga una frecuencia de corte igual a 1 250 rad/s.

*Respuesta:* 
$$H(s) = \frac{1}{\frac{s}{1\,250} \Omega 1} = \frac{1\,250}{s \Omega 1\,250}$$

## 16.4 FILTROS DE SEGUNDO ORDEN

Los filtros de segundo orden son importantes por dos razones. La primera es que proporcionan una aproximación de bajo costo a filtros ideales. La segunda, que se les utiliza como estructuras para filtros más costosos que proporcionan aproximaciones más precisas a filtros ideales.

La respuesta de frecuencia de filtros de segundo orden se caracteriza por tres parámetros de filtros: la ganancia  $k$ , la frecuencia de ganancia  $\omega_0$  y el **factor de calidad**  $Q$ . Los circuitos de filtros están diseñados mediante la elección de valores de elementos de circuito de manera que se obtengan los valores requeridos de  $k$ ,  $\omega_0$  y  $Q$ .

Un filtro de paso bajo de segundo orden es un circuito que tiene una función de transferencia de la forma

$$H_L(s) = \frac{k\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad (16.4-1)$$

Esta función de transferencia se caracteriza por los tres parámetros, la ganancia  $k$ , la frecuencia de ángulo  $\omega_0$  y el factor de calidad  $Q$ . Cuando este circuito es estable, es decir, cuando  $\omega_0 > 0$  y  $Q > 0$ , la función de red se puede obtener con  $s = j\omega$ .

$$\mathbf{H}_L(\omega) = \frac{k\omega_0^2}{-\omega^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega + \omega_0^2}$$

La ganancia del filtro la da

$$\begin{aligned} |\mathbf{H}_L(\omega)| &= \frac{k\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\omega\right)^2}} \\ &\cong \begin{cases} k & \omega \ll \omega_0 \\ 0 & \omega \gg \omega_0 \end{cases} \end{aligned}$$



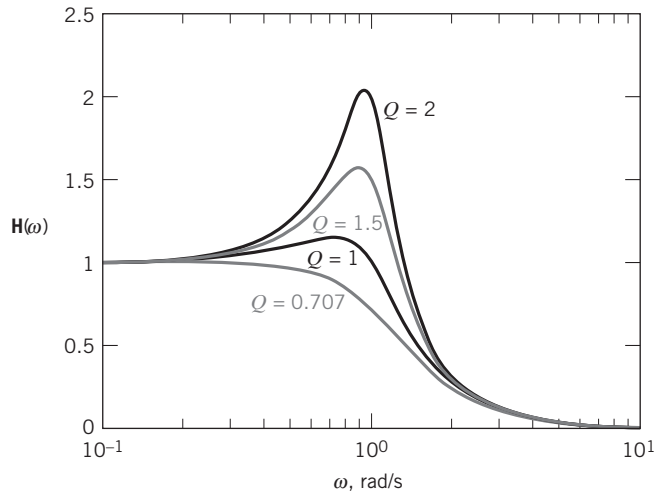


FIGURA 16.4-1 Respuestas de frecuencia de filtros de paso bajo de segundo orden con cuatro valores de  $Q$  ( $\omega_c = 1$  rad/s).

Cuando  $k = 1$ , esta respuesta de frecuencia se aproxima a la respuesta de frecuencia de un filtro de paso bajo ideal con una frecuencia de corte de  $\omega_c = \omega_0$ . Cuando  $k \neq 1$ , el filtro de paso bajo se aproxima al filtro de paso bajo ideal junto con un amplificador que tiene una ganancia igual a  $k$ . El factor de calidad,  $Q$ , controla la figura de la respuesta de frecuencia durante la transición de paso de banda a rechazo de banda. La figura 16.4-1 muestra la respuesta de frecuencia del filtro de paso bajo ( $k = 1$  y  $\omega_c = \omega_0 = 1$ ) para varias elecciones de  $Q$ . Una aproximación de Butterworth al filtro de paso bajo ideal se obtiene seleccionando  $Q = 0.707$ .

Tabla 16.4-1 Filtros *RLC* de segundo orden

TIPO DE FILTRO	CIRCUITO	FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA	ECUACIONES DE DISEÑO
Paso bajo		$H(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ $k = 1$
Alto paso		$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ $k = 1$
Pasa banda		$H(s) = \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ $k = 1$
Rechazo de banda (notch)		$H(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ $k = 1$

La tabla 16.4-1 proporciona circuitos  $RLC$  que se pueden utilizar como filtros de segundo orden. Considere el filtro de paso bajo que se muestra en la primera fila de la tabla. La función de transferencia de este circuito es

$$H(s) = \frac{1}{LC} \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (16.4-2)$$

La relación entre los parámetros de circuito  $R$ ,  $L$  y  $C$  y los circuitos de filtro  $k$ ,  $\omega_0$  y  $Q$ , se obtiene de la comparación de la ecuación 16.4-2 con la ecuación 16.4-1. Primero, compare los términos constantes en los denominadores para ver que la frecuencia de corte del filtro esté dada por

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Luego, compare los coeficientes de  $s$  en los denominadores para ver que

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

Despejando estas dos ecuaciones de  $Q$  obtenemos

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Por último, comparar los numeradores nos da

$$k\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

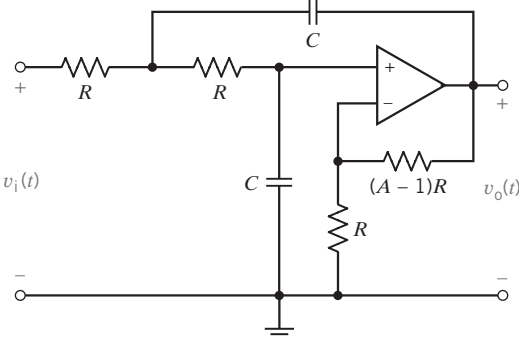
De modo que la ganancia de cd es

$$k = 1$$

Observe que  $\omega_0$  y  $Q$  están determinados por los valores de  $R$ ,  $L$  y  $C$  pero que  $k$  siempre es 1.

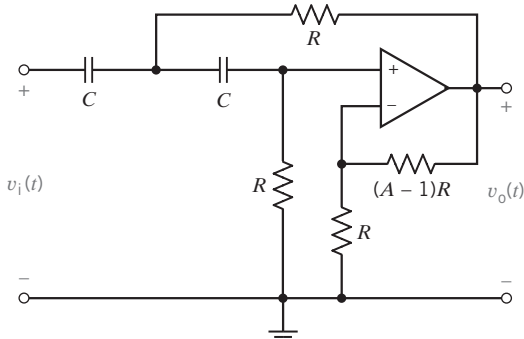
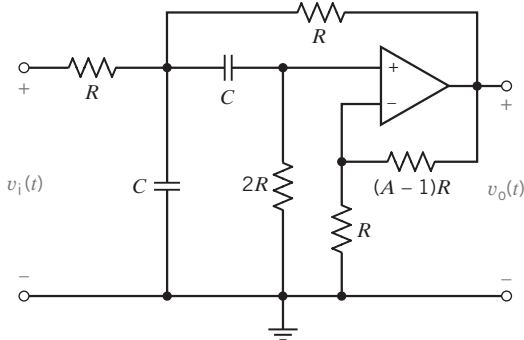
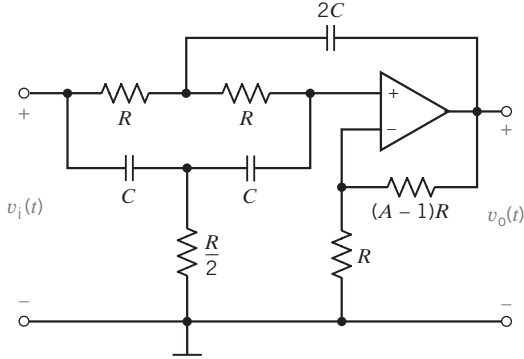
Para construir filtros de segundo orden se utilizan muchos y diferentes circuitos. Uno de los más conocidos es el **filtro Sallen-Key**. La tabla 16.4-2 provee la información requerida para diseñar filtros Sallen-Key.

**Tabla 16.4-2 Filtros Sallen-Key**

TIPO DE FILTRO	CIRCUITO	ECUACIONES DE DISEÑO
Paso bajo		$\omega_0 = \frac{1}{RC}$ $Q = \frac{1}{3-A}$ $k = A$

(continúa)

Tabla 16.4-2 (Continúa)

TIPO DE FILTRO	CIRCUITO	ECUACIONES DE DISEÑO
Alto paso		$\omega_0 = \frac{1}{RC}$ $Q = \frac{1}{3-A}$ $k = A$
Pasa banda		$\omega_0 = \frac{1}{RC}$ $Q = \frac{1}{3-A}$ $k = AQ$
Rechazo de banda (notch)		$\omega_0 = \frac{1}{RC}$ $Q = \frac{1}{4-2A}$ $k = A$

### EJEMPLO 16.4-1 Filtro de paso bajo RLC

Diseñe un filtro de paso bajo de segundo orden de Butterworth con una frecuencia de corte de 1 000 hertz.

#### Solución

Los filtros de Butterworth de segundo orden tienen  $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ . La frecuencia de ángulo es igual a la frecuencia de corte, es decir

$$\omega_0 = \omega_c = 2\pi \times 1\,000 = 6\,283 \text{ rad/s}$$

El circuito  $RLC$  que se muestra en la primera fila de la tabla 16.4-1 se puede utilizar para diseñar el filtro de paso bajo requerido. Las ecuaciones de diseño son

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 = 6\,283 \text{ rad/s}$$

y

$$\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

La tercera ecuación de diseño indica que  $k = 1$ . Esta última ecuación de diseño no restringe los valores de  $R$ ,  $L$  y  $C$ . Como tenemos dos ecuaciones en tres incógnitas, la solución no es única. Una manera de proceder es elegir un valor conveniente para un elemento de circuito, digamos  $C = 0.1 \mu\text{F}$ , y luego calcular los valores restantes de los demás elementos de circuito

$$L = 1/(\omega_0^2 C) = 0.253 \text{ H}$$

y

$$R = \sqrt{\frac{2L}{C}} = 2\,251 \Omega$$

Si esta solución nos satisface, el filtro de diseño está completo. Por otra parte, ajustamos lo que elegimos del valor de  $C$  y calculamos de nuevo  $L$  y  $R$ . Por ejemplo, si la inductancia es demasiado grande, digamos  $L = 1\,000 \text{ H}$ , o que la resistencia sea pequeñísima, de  $R = 0.03 \Omega$ , será difícil obtener las partes para construir estos circuitos. Pero como no hay tal problema en este ejemplo, concluimos que el circuito de la primera fila de la tabla 16.4-1 con  $C = 0.1 \mu\text{F}$ ,  $L = 0.253 \text{ H}$  y  $R = 2\,251 \Omega$  es el filtro de paso bajo requerido.

### EJEMPLO 16.4-2 Filtro de pasa banda Sallen-Key

Diseñe un filtro de pasa banda Sallen-Key de segundo orden con una frecuencia de centro de 500 hertz y un ancho de banda de 100 hertz.

#### Solución

La función de transferencia del filtro de pasa banda de segundo orden es

$$H(s) = \frac{k \frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

La función de red que le corresponde es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{jk \frac{\omega_0}{Q} \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0}{Q} \omega}$$

Dividir numerador y denominador entre  $j \frac{\omega_0}{Q} \omega$  nos da

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{k}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Ya antes hemos visto funciones de red como la anterior, cuando estudiamos los circuitos resonantes (capítulo 13). La ganancia  $|\mathbf{H}(\omega)|$  estará al máximo en la frecuencia de ángulo,  $\omega_0$ . En el caso de esta función de transferencia

de pasa banda, a  $\omega_0$  también se le denomina frecuencia de centro y frecuencia resonante. La ganancia de la frecuencia de centro será

$$|\mathbf{H}(\omega_0)| = k$$

A estas dos frecuencias,  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , las identifica la propiedad

$$|\mathbf{H}(\omega_1)| = |\mathbf{H}(\omega_2)| = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

Estas frecuencias se denominan *frecuencias de mitad de potencia* o *frecuencias de 3 dB*. Las frecuencias de mitad de potencia resultan de

$$\omega_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2 + \omega_0^2} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2 + \omega_0^2}$$

El ancho de banda del filtro se calcula a partir de las frecuencias de mitad de potencia

$$BW = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

El filtro de pasa banda Sallen-Key se ve en la tercera fila de la tabla 16.4-2. Nuestras especificaciones requieren que

$$\omega_0 = 2\pi \times 500 = 3142 \text{ rad/s}$$

y

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = 5$$

La tabla 16.4-2 precisa que las ecuaciones de diseño para el filtro de pasa banda Sallen-Key son

$$\frac{1}{RC} = \omega_0 = 3142$$

y

$$A = 3 - \frac{1}{Q} = 2.8$$

Tome  $C = 0.1 \mu\text{F}$ . Entonces

$$R = \frac{1}{C\omega_0} = 3183 \Omega$$

Como  $k = AQ$ , la ganancia de este filtro de pasa banda en la frecuencia de centro es 14. Además, una de las resistencias la da

$$(A - 1)R = 5729 \Omega$$

En la figura 16.4-2 se muestra el filtro de pasa banda Sallen-Key.

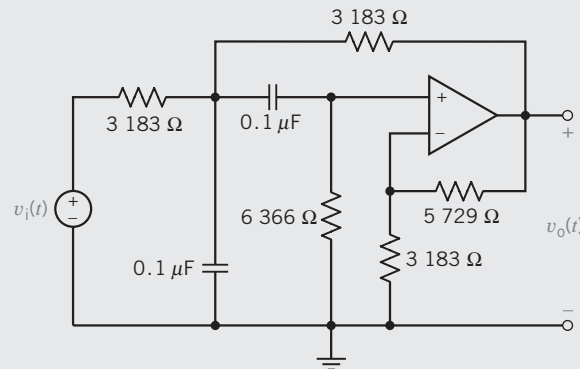


FIGURA 16.4-2 Un filtro de pasa banda Sallen-Key.

### EJEMPLO 16.4-3 Filtro de rechazo de banda Sallen-Key

Diseñe un filtro de rechazo de banda de segundo orden con una frecuencia de 1000 rad/s y un ancho de banda de 100 rad/s.

#### Solución

La función de transferencia del filtro de rechazo de banda de segundo orden es

$$H(s) = \frac{k(s^2 + \omega_0^2)}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

Observe que las funciones de transferencia de los filtros de pasa banda y rechazo de banda de segundo orden están relacionados por

$$\frac{k(s^2 + \omega_0^2)}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} = k - \frac{k \frac{\omega_0}{Q}s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

La función de red del filtro de rechazo de banda es

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{k(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega}$$

Cuando  $\omega \ll \omega_0$  u  $\omega \gg \omega_0$ , la ganancia es  $|\mathbf{H}(\omega)| = k$ . En  $\omega = \omega_0$ , la ganancia es cero. Las frecuencias de mitad de potencia,  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se identifican por la propiedad

$$|\mathbf{H}(\omega_1)| = |\mathbf{H}(\omega_2)| = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

El ancho de banda del filtro resulta de

$$BW = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

El filtro de rechazo de banda Sallen-Key se muestra en la última fila de la tabla 16.4-2. Nuestras especificaciones requieren que  $\omega_0 = 1\,000$  rad/s y

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = 10$$

La tabla 16.4-2 indica que las ecuaciones de diseño para el filtro de rechazo de banda Sallen-Key son

$$\frac{1}{RC} = \omega_0 = 1\,000$$

y

$$A = 2 - \frac{1}{2Q} = 1.95$$

Tome  $C = 0.1\ \mu\text{F}$ . Entonces

$$R = \frac{1}{C\omega_0} = 10\ \text{k}\Omega$$

En la figura 16.4-3 se muestra el filtro de rechazo de banda Sallen-Key.

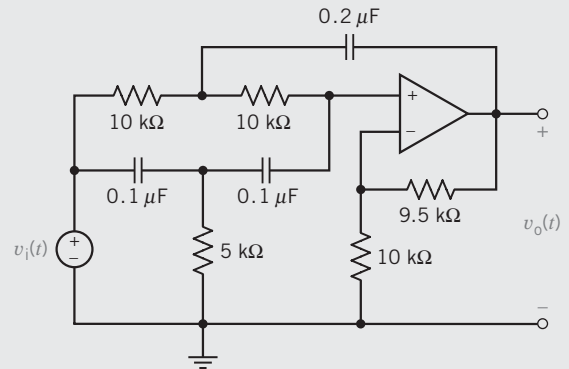


FIGURA 16.4-3 Un filtro de rechazo de banda Sallen-Key.

#### EJEMPLO 16.4-4 Filtro Tow-Thomas

La figura 16.4-4 muestra otro circuito que se puede utilizar para construir un filtro de segundo orden. Este circuito se denomina *filtro Tow-Thomas*. Este filtro se puede utilizar como filtro de paso bajo y filtro de pasa banda. Cuando la salida es el voltaje  $v_1(t)$  la función de transferencia es

$$H_L(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{1}{R_Q C}s + \frac{1}{R^2 C^2}} \quad (16.4-3)$$

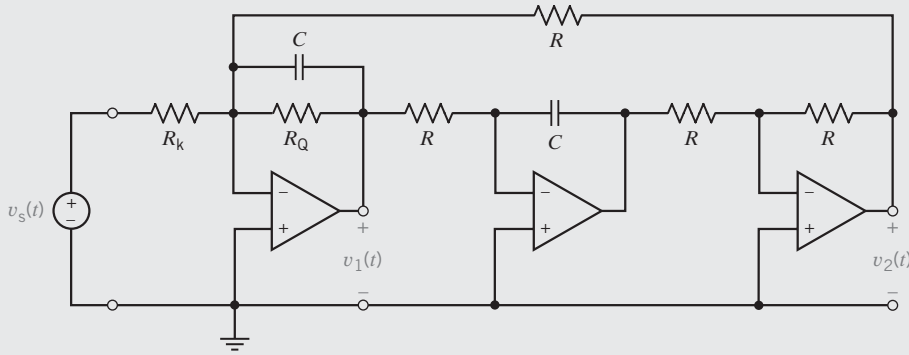


FIGURA 16.4-4 Filtro Tow-Thomas.

y el filtro es un filtro de paso bajo. Si, por el contrario, el voltaje  $v_2(t)$  se usara como salida de filtro, la función de red sería

$$H_B(s) = \frac{-\frac{1}{R_k C} s}{s^2 + \frac{1}{R_Q C} s + \frac{1}{R^2 C^2}} \quad (16.4-4)$$

y el filtro Tow-Thomas funciona como un filtro de pasa banda. Diseñe un filtro de paso bajo Tow-Thomas Butterworth con una ganancia de cd de 5 y una frecuencia de corte de 1 250 hertz.

### Solución

Puesto que el filtro Tow-Thomas se usará como un filtro de paso bajo, la función de transferencia la da la ecuación 16.4-3. Las ecuaciones de diseño se obtienen por comparación de esta función de transferencia con la forma estándar de la función de transferencia de paso bajo de segundo orden que se da en la ecuación 16.4-1. Primero, compare los términos constantes (es decir, los coeficientes de  $s^0$ ) en los denominadores de estas funciones de transferencia para obtener

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (16.4-5)$$

Luego, compare los coeficientes de  $s^1$  en los denominadores de estas funciones de transferencia para obtener

$$Q = \frac{R_Q}{R} \quad (16.4-6)$$

Por último, compare los numeradores para obtener

$$k = \frac{R}{R_k} \quad (16.4-7)$$

Diseñar el filtro Tow-Thomas requiere que  $R$ ,  $C$ ,  $R_Q$  y  $R_k$  obtengan los valores. Como hay cuatro incógnitas y sólo tres ecuaciones de diseño, empezamos por seleccionar un valor que le convenga a una de las incógnitas, que suele ser la capacitancia. Sea  $C = 0.01 \mu\text{F}$ . Entonces,

$$R = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{(2\pi)(1\,250)(0.01)(10^{-6})} = 12\,732$$

Un filtro de Butterworth de segundo orden necesita que  $Q = 0.707$ , por lo tanto,

$$R_Q = QR = (0.707)(12\,732) = 9\,003 \Omega$$

Finalmente,

$$R_k = \frac{R}{k} = 2\,546 \Omega$$

y el diseño está terminado.

### EJEMPLO 16.4-5 Filtro de paso alto Tow-Thomas

Utilice el circuito Tow-Thomas para diseñar un filtro de paso alto de Butterworth con una ganancia de frecuencia alta de 5 y una frecuencia de corte de 1 250 hertz.

#### Solución

El circuito Tow Thomas no implementa el filtro de paso alto, pero sí el filtro de paso bajo y el filtro de pasa banda. Las funciones de transferencia de los filtros de paso alto, de pasa banda y de paso bajo de segundo orden, se relacionan por

$$H_H(s) = \frac{ks^2}{s^2 + \frac{1}{R_Q C}s + \frac{1}{R^2 C^2}} = k + \frac{-\frac{1}{R_k C}s}{s^2 + \frac{1}{R_Q C}s + \frac{1}{R^2 C^2}} + \frac{-\frac{1}{R_k R C^2}}{s^2 + \frac{1}{R_Q C}s + \frac{1}{R^2 C^2}} \quad (16.4-8)$$

$$= k + H_B(s) + H_L(s)$$

Un filtro de paso alto se puede construir utilizando un filtro Tow-Thomas y un sumando amplificador. Se utilizan las dos salidas de paso banda y de paso bajo del filtro Tow-Thomas. La ecuación 14.6-8 indica que los filtros de pasa banda y de paso bajo deben tener los mismos valores que  $k$ ,  $Q$  y  $\omega_0$ , como el filtro de paso alto. Así, requerimos un filtro Tow-Thomas que tenga  $k = 5$ ,  $Q = 0.707$  y  $\omega_0 = 7854$  rad/s. Un filtro semejante se diseñó en el ejemplo 16.4-4. El filtro de paso alto se obtuvo agregando un sumando amplificador como se muestra en la figura 16.4-5.

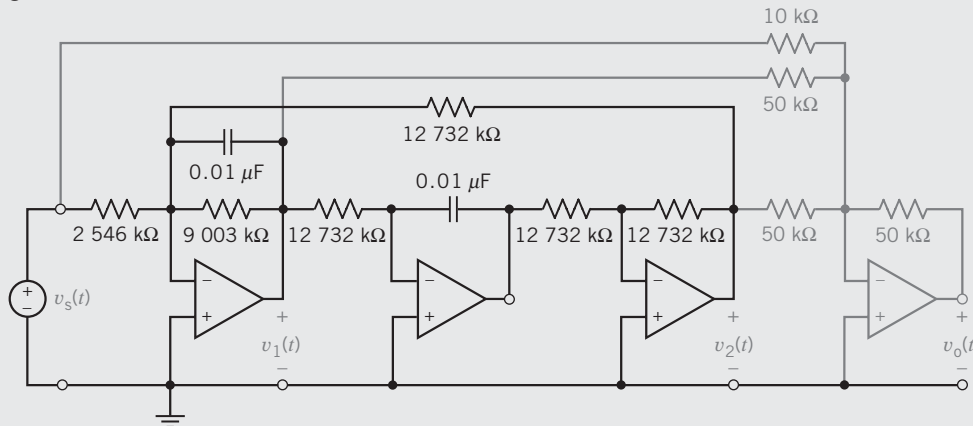


FIGURA 16.5-4  
Un filtro de paso alto Tow-Thomas.

## 16.5 FILTROS DE ALTO ORDEN

En esta sección volvemos la atención a los filtros que tienen un orden mayor de 2. A estos filtros se les llama **filtros de alto orden**. Una estrategia muy común para diseñar filtros de alto orden se vale de una conexión en cascada de filtros de segundo orden. La conexión en cascada se muestra en la figura 16.5-1, en la cual las funciones de transferencia  $H_1(s)$ ,  $H_2(s)$ , ...,  $H_n(s)$  representan filtros de segundo orden que están conectados entre sí para construir un filtro de alto orden. Nos referimos al filtro de segundo orden como etapas de filtro para distinguirlos del filtro de alto orden. Es decir, el filtro de alto orden es una conexión en cascada de etapas de filtro de segundo orden. (Cuando el orden del filtro de alto orden es impar, se requiere una etapa de filtro de primer orden. No obstante, hablamos de diseñar filtros de alto orden como una cascada de etapas de segundo orden.)

La conexión en cascada se caracteriza por el hecho de que la salida de una etapa de filtro se utiliza como la entrada de la etapa siguiente. Por desgracia, el comportamiento de una etapa cambiará a veces cuando otra etapa esté conectada a ella. A este fenómeno le llamamos **carga**, y decimos que la segunda etapa cargó a la primera. Por lo general, la carga es indeseable y tratamos de evitarla. La



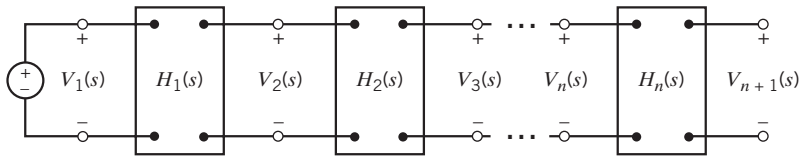
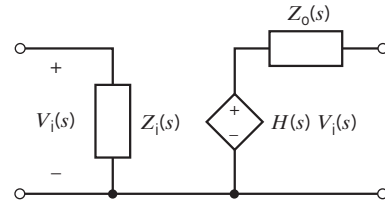
FIGURA 16.5-1 Un circuito en cascada de  $n$  etapas.

FIGURA 16.5-2 Modelo de una etapa de filtro.

figura 16.5-2 muestra un modelo de una etapa de filtro apropiada para investigar la carga. Este modelo incluye la impedancia de entrada y salida de la etapa de filtro al igual que la función de transferencia.

La figura 16.5-3 muestra un filtro de alto orden que consiste en la conexión en cascada de dos etapas de filtro. Calculemos la función de transferencia del filtro de alto orden. Empezamos en la salida del filtro de alto orden, y observamos que no hay corriente en la impedancia de salida,  $Z_{o2}(s)$  de la etapa segunda. En consecuencia, no hay voltaje a través de  $Z_{o2}(s)$ , por lo que

$$V_3(s) = H_2(s)V_2(s) \quad (16.5-1)$$

A continuación, utilizamos la división de voltaje para hallar  $V_2(s)$ ,

$$V_2(s) = \frac{Z_{i2}}{Z_{o1} + Z_{i2}} H_1(s)V_1(s) \quad (16.5-2)$$

Al conectar la segunda etapa de filtro a la primera se modificó la salida de la etapa primera. Sin la etapa segunda, no habría corriente en  $Z_{o1}(s)$ . En consecuencia, no habría voltaje a través de  $Z_{o1}(s)$  y la salida de la etapa primera sería  $V_2(s) = H_1(s)V_1(s)$ . Se dice que la etapa segunda carga a la primera. Esta carga se puede eliminar haciendo que la impedancia de entrada de la etapa segunda sea infinita,  $Z_{i2}(s) = \infty$ , o que la impedancia de entrada de la primera etapa sea cero,  $Z_{o1}(s) = 0$ .

Combinar las ecuaciones 16.5-1 y 16.5-2 nos da

$$V_3(s) = H_2(s) \frac{Z_{i2}}{Z_{o1} + Z_{i2}} H_1(s)V_1(s)$$

Por último, la función de transferencia del filtro de alto orden es

$$H(s) = \frac{V_3(s)}{V_1(s)} = H_2(s) \frac{Z_{i2}}{Z_{o1} + Z_{i2}} H_1(s) \quad (16.5-3)$$

Ecuación que se simplifica a

$$H(s) = H_2(s)H_1(s) \quad (16.5-4)$$

cuando la impedancia de entrada de la etapa segunda es infinita,  $Z_{i2}(s) = \infty$ , o cuando la impedancia de salida de la primera etapa es cero,  $Z_{o1}(s) = 0$ . En otras palabras, la ecuación 16.5-4 se puede utilizar cuando la etapa segunda no carga a la primera, pero se debe utilizar la ecuación 16.5-3 cuando la etapa segunda carga a la etapa primera. Probaremos que los filtros Sallen-Key tienen impedancias de salida iguales a cero. Por lo tanto, no hay carga cuando las etapas del filtro Sallen-Key están en cascada. La función de transferencia del filtro de alto orden es el producto de las funciones de transferencia de las etapas de filtro Sallen-Key individuales. En contraste, los filtros basados en los circuitos  $RLC$  en serie que se muestran en la tabla 16.4-1 no tienen impedancias de salida que sean iguales a cero o impedancias de entrada que sean infinitas. Si estas etapas de filtro estuvieran en cascada, la función de transferencia del filtro de alto orden no sería igual al producto de las funciones de transferencia de las etapas de filtro individuales. Por lo tanto, podemos utilizar las etapas de filtro Sallen-Key en cascada para diseñar filtros de alto orden sin introducir carga.

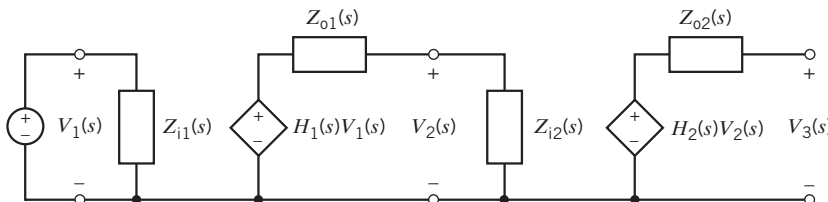
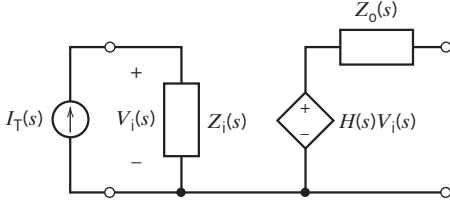
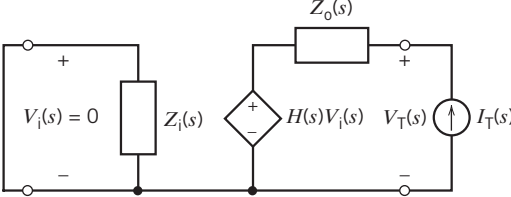
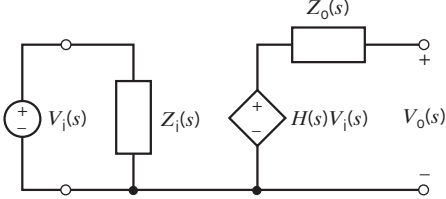


FIGURA 16.5-3 Conexión en cascada de dos etapas de filtro.

Tabla 16.5-1 Medición de parámetros de una etapa de filtro

PARÁMETRO	DEFINICIÓN	MEDICIONES
Impedancia de entrada	$Z_i(s) = \frac{V_i(s)}{I_T(s)}$	
Impedancia de salida	$Z_o(s) = \frac{V_T(s)}{I_T(s)}$	
Función de transferencia	$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$	

A continuación consideremos calcular la impedancia de la salida de un filtro de pasa banda Sallen-Key. La tabla 16.5-1 muestra cómo se pueden medir o calcular los parámetros del modelo de una etapa de filtro. La segunda fila de esta tabla indica que para calcular la impedancia de la salida se deben conectar un cortocircuito a la entrada del filtro, y una fuente de corriente a la salida del filtro. Se calcula el voltaje a través de la fuente de corriente, y la relación de este voltaje con la corriente de la fuente de corriente es la impedancia de la salida. La figura 16.5-4 muestra un filtro Sallen-Key con un cortocircuito a través de su entrada y una fuente de corriente conectada a su salida. Este circuito se puede analizar escribiendo ecuaciones nodales en los nodos 1, 2 y T:

$$\frac{V_1}{R} + CsV_1 + \frac{V_1 - V_T}{R} + (V_1 - V_2)Cs = 0$$

$$-(V_1 - V_2)Cs + \frac{V_2}{2R} = 0$$

$$\frac{V_2}{R} + \frac{V_2 - V_T}{(A-1)R} = 0$$

Despejando estas ecuaciones nodales para  $V_T$  nos da

$$[(RCs)^2 + (3-A)RCs + 1] V_T = 0$$

Dado que el factor entre llaves es de no cero, esta ecuación indica que  $V_T = 0$ . La impedancia de salida del filtro de pasa banda Sallen-Key es

$$Z_o = \frac{V_T}{I_T} = \frac{0}{I_T} = 0$$

Del mismo modo, cada uno de los filtros Sallen-Key que se muestran en la tabla 16.4-2 tiene una impedancia de salida igual a cero.

Los filtros de alto orden se pueden diseñar como una conexión en cascada de etapas de filtro de segundo orden. Las etapas de filtro que tienen una impedancia de entrada igual a cero se usan de modo que la función de transferencia del filtro de alto orden sea el producto de las funciones de transferencia de las etapas de filtro en cascada.

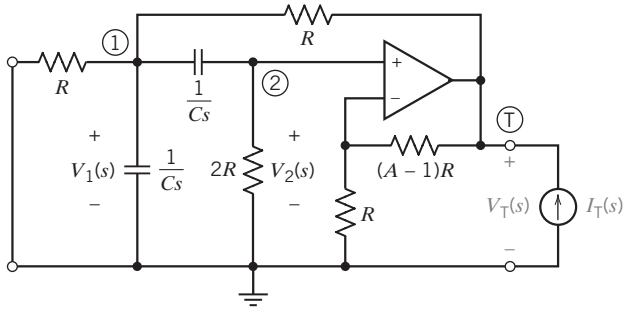


FIGURA 16.5-4 Cálculo de la salida de un filtro de pasa banda Sallen-Key. Los números circulos son números enteros.

Tabla 16.5-2 Etapas de filtro de primer orden

TIPO DE FILTRO	CIRCUITO DE PRIMER ORDEN	ECUACIÓN DE DISEÑO
Paso bajo		$H(s) = \frac{-k}{s + p}$ <p>donde</p> $p = \frac{1}{R_2 C}$ <p>y</p> $k = \frac{1}{R_1 C}$
Paso alto		$H(s) = \frac{-ks}{s + p}$ <p>donde</p> $p = \frac{1}{R_1 C}$ <p>y</p> $k = \frac{R_2}{R_1}$

### EJEMPLO 16.5-1 Conexión en cascada de etapas de filtro

Diseñe un filtro de paso bajo de Butterworth de tercer orden que tenga una frecuencia de corte de  $\omega_c = 500$  rad/s, y una ganancia de cd igual a 1.

#### Solución

La ecuación 16.3-2 y la tabla 16.3-2 proveen un filtro de paso bajo de Butterworth de tercer orden que tiene una frecuencia de corte igual a 1 rad/s.

$$H_n(s) = \frac{1}{(s + 1)(s^2 + s + 1)}$$

El escalamiento de frecuencia se utiliza para ajustar la frecuencia de corte de modo que  $\omega_c = 500$  rad/s.

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{\left(\frac{s}{500} + 1\right) \left(\left(\frac{s}{500}\right)^2 + \frac{s}{500} + 1\right)} \\ &= \frac{500^3}{(s + 500)(s^2 + 500s + 500^2)} \end{aligned}$$

$H(s)$  es la función de transferencia de un filtro de paso bajo de Butterworth de tercer orden que tiene una frecuencia de corte igual a 500 rad/s. Esta función de transferencia se puede expresar como

$$H(s) = \frac{-250\,000}{s^2 + 500s + 250\,000} \times \frac{-500}{s + 500} = H_1(s) \times H_2(s) \quad (16.5-5)$$

Un filtro de paso bajo Sallen-Key se puede diseñar para implementar la función de transferencia  $H_1(s)$  de paso bajo de segundo orden. La tabla 16.5-2 proporciona circuitos y ecuaciones de diseño para etapas de filtro de primer orden. El circuito que se muestra en la primera fila de esta tabla se puede utilizar para implementar  $H_2(s)$ . Las etapas de filtro de primer orden en la tabla 16.5-2 tienen impedancias de salida iguales a cero. Si estas etapas de filtro se colocan en cascada no se ocasionará carga. El colocar en cascada el filtro Sallen-Key con la etapa de filtro de primer orden producirá un filtro de tercer orden con la función de transferencia  $H(s)$ .

Primero, diseñemos el filtro Sallen-Key con función de transferencia

$$H_1(s) = \frac{-250\,000}{s^2 + 500s + 250\,000}$$

Los valores de los parámetros de filtros  $k$ ,  $\omega_0$  y  $Q$  se determinan por comparación de  $H_1(s)$  con la forma estándar de la función de transferencia de paso bajo de segundo orden que se da en la ecuación 16.4-1. A partir del término constante en el denominador,

$$\omega_0^2 = 250\,000$$

Luego, a partir del coeficiente de  $s$  en el denominador,

$$\frac{\omega_0}{Q} = 500$$

Finalmente, a partir del numerador,

$$k \times \omega_0^2 = 250\,000$$

Por lo tanto,  $\omega_0 = 500$  rad/s,  $Q = 1$  y  $k = 1$ . El filtro de paso bajo Sallen-Key se muestra en la fila 1 de la tabla 16.4-2. Diseñar este filtro requiere encontrar valores de  $R$ ,  $C$  y  $A$ . Las ecuaciones de diseño dadas en la fila 1 indican que

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (16.5-6)$$

$$Q = \frac{1}{3 - A} \quad (16.5-7)$$

$$k = A \quad (16.5-8)$$

La ecuación 16.5-7 da

$$A = 3 - \frac{1}{Q} = 3 - \frac{1}{1} = 2$$

Pero la ecuación 16.5-8 resulta en

$$A = k = 1$$

Aparentemente, podemos seleccionar  $A$  para obtener el valor correcto de  $Q$ , o bien seleccionar  $A$  para obtener el valor correcto de  $k$ , pero no ambos. Es fácil ajustar luego la ganancia de cd, de modo que tomamos  $A = 2$  para que  $Q = 1$  y asentar  $k = 2$ . La ecuación 16.5-6 se satisface si tomamos  $C = 0.1 \mu\text{F}$  y

$$R = \frac{1}{C\omega_0} = \frac{1}{(0.1 \times 10^{-6})(500)} = 20 \text{ k}\Omega$$

En la figura 16.5-5a se muestra la etapa de filtro Sallen-Key. La función de transferencia de esta etapa es

$$H_3(s) = \frac{-500\,000}{s^2 + 500s + 250\,000}$$

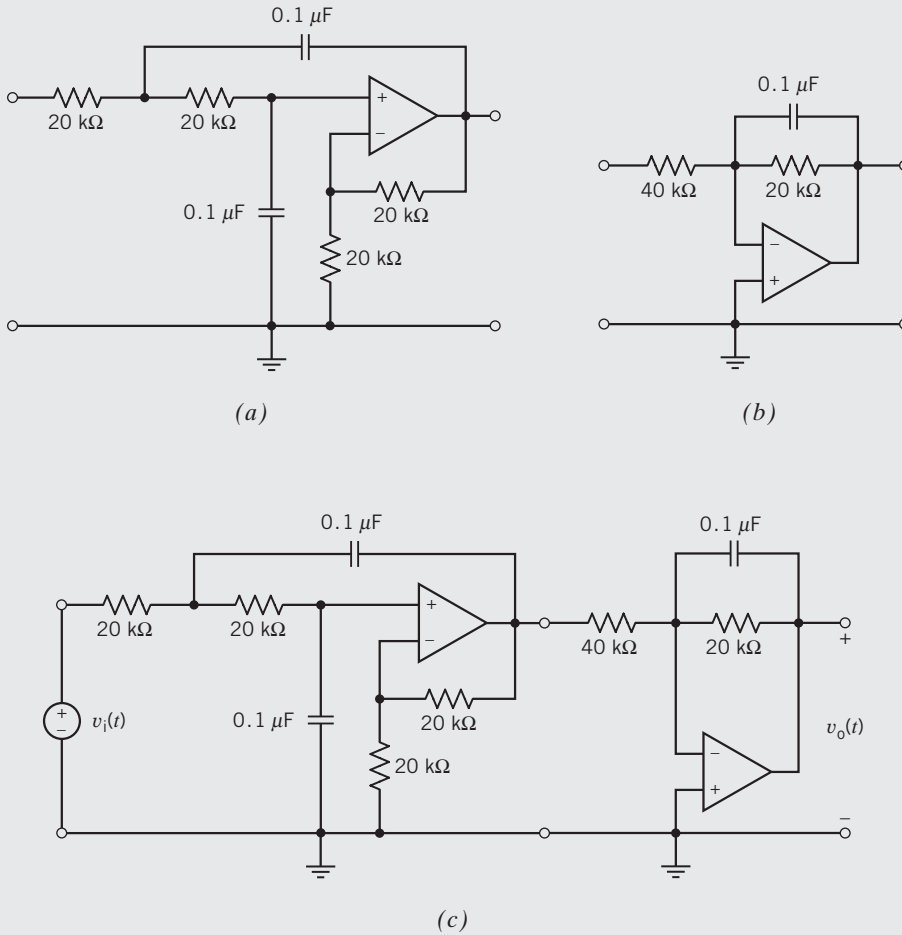


FIGURA 16.5-5 (a) Etapa de filtro Sallen-Key; (b) etapa de filtro de primer orden y (c) filtro de Butterworth de primer orden.

La etapa de filtro Sallen-Key logró los valores deseados de  $\omega_0$  y  $Q = 1$  pero no el valor deseado de la ganancia de cd. En compensación, ajustaremos la ganancia de cd del filtro de primer orden. La función de transferencia deseada del filtro de tercer orden se puede expresar como

$$H(s) = \frac{-500\,000}{s^2 + 500s + 250\,000} \times H_4(s)$$

lo que requiere

$$H_4(s) = \frac{-250}{s + 500}$$

Las ecuaciones de diseño en la fila 1 de la tabla 16.5-2 indican que

$$500 = \frac{1}{R_2 C}$$

y

$$250 = \frac{1}{R_1 C}$$

Elija  $C = 0.1 \mu\text{F}$ . Entonces

$$R_2 = \frac{1}{500 \times C} = \frac{1}{(500)(0.1 \times 10^{-6})} = 20 \text{ k}\Omega$$

$$y \quad R_1 = \frac{1}{250 \times C} = \frac{1}{(250)(0.1 \times 10^{-6})} = 40 \text{ k}\Omega$$

La etapa de filtro de primer orden se muestra en la figura 16.4-5b. Conectando en cascada la etapa Sallen-Key y la etapa de primer orden, se produce el filtro de Butterworth de tercer orden que se muestra en la figura 16.5-5c.

## 16.6 SIMULACIÓN DE CIRCUITOS DE FILTRO UTILIZANDO PSpICE

PSpice proporciona una manera conveniente para verificar que un circuito de filtro tenga en realidad la función de transferencia correcta. La figura 16.6-1 ilustra un método de comprobar un diseño de filtro. El filtro a probar es un filtro de rechazo de banda de cuarto orden que consta de dos etapas de filtro de corte Sallen-Key y un amplificador inversor. Este filtro se diseñó para que tenga la función de transferencia

$$H(s) = \frac{4(s^2 + 62\,500)^2}{(s^2 + 250s + 62\,500)^2}$$

El voltaje de la fuente de voltaje,  $v_i(t)$ , se utiliza como entrada para dos circuitos separados. Uno de estos circuitos es el filtro de circuito que consta de etapas Sallen-Key y el amplificador inversor. La respuesta de este circuito es el voltaje de nodos  $v_{o1}(t)$ . El otro “circuito”  $H(s)$  se implementa directamente utilizando una característica de PSpice. La respuesta de este circuito es  $v_{o2}(t)$ . Una única simulación de PSpice produce las respuestas de frecuencia que corresponden a las funciones de transferencia de estos dos circuitos,  $V_{o1}(s)/V_i(s)$  y  $V_{o2}(s)/V_i(s)$ . A continuación utilizamos Probe, el procesador de postproducción gráfico que incluye PSpice, para desplegar las dos respuestas de frecuencia en el mismo eje. Si estas respuestas de frecuencia son idénticas, entonces sabemos que el circuito de filtro sí implementa la función de transferencia  $H(s)$ .

La figura 16.6-2 muestra el archivo de entrada de PSpice que corresponde a la figura 16.6-1. Hay dos aspectos de este archivo que requieren alguna explicación complementaria. Primero, observe que los parámetros se utilizaron en el primer subcircuito que representa la etapa de filtro Sallen-Key. La línea

```
.subckt sk_n in out params: C=.1uF w0 = 1 krad/s Q = 0.707
```

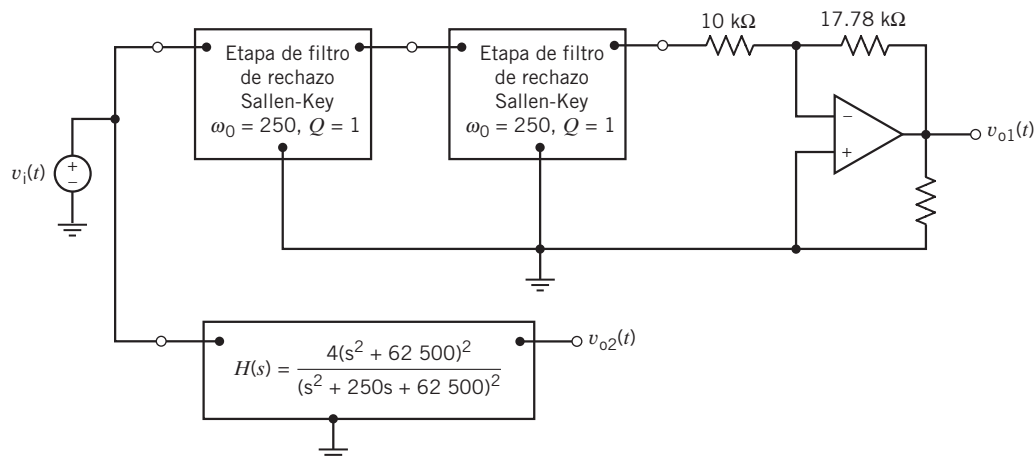


FIGURA 16.6-1 Verificación de la función de transferencia de un filtro de rechazo de banda de cuarto orden utilizando PSpice.

```

Testing a 4th order notch filter

Vin 1 0 ac 1
XSK1 1 2 sk_n params: C=.1uF w0=250 Q=1
XSK2 2 3 sk_n params: C=.1uF w0=250 Q=1
R1 3 4 10k
R2 4 5 17.78k
XOA 4 0 5 op_amp
RL 5 0 10G
XLP 1 6 4th_order_notch_filter

.subckt sk_n in out params: C=.1uF w0=1krad/s Q=0.707
R1 in 2 {1/C/w0}
R2 2 3 {1/C/w0}
C1 in 6 {C}
C2 6 3 {C}
C3 2 out {2*C}
R3 6 0 {1/2/C/w0}
XOA 5 3 out op_amp
R4 5 0 10kOhm
R5 out 5 {(1-1/Q/2)*10kOhm}
.ends sk_n

.subckt op_amp inv non out
* an ideal op amp
E (out 0) (non inv) 1G
.ends op_amp

.subckt 4th_order_notch_filter in out
R1 in 0 1G
R2 out 0 1G
E1 out 0 LAPLACE {V(in)} = {(4*(s*s+62500)*(s*s+62500)) /
+ (s*s+250*s+62500) * (s*s+250*s+62500)}
.ends 4th_order_notch_filter

.ac dec 100 1 1000
.probe V(1) V(5) V(6)
.end

```

FIGURA 16.6-2 Archivo de entrada de PSpice utilizado para probar el filtro de rechazo de cuarto orden.

marca el inicio del subcircuito denominado `sk_n`. (PSpice nos permite nombrar, en vez de numerar, los nodos. Los nodos “in” y “out” conectarán este subcircuito con el resto del circuito.) Se definen tres parámetros:  $C$ ,  $w_0$  y  $Q$ . A todos se les dan valores predeterminados, como lo requiere PSpice. Las expresiones que comprenden estos parámetros reemplazan los valores de algunos de los dispositivos que comprenden el subcircuito, por ejemplo la línea

$$R1 \text{ in } 2 \{1/C/w_0\}$$

indica que el resistor  $R1$  está conectado a los nodos “in” y 2 y que la resistencia de  $R1$  está dada por  $1/C/w_0$ . Los valores de parámetros como  $C$  y  $w_0$  se dan cuando se utiliza el subcircuito. Considere la línea

$$XSK2 \ 2 \ 3 \ sk\_n \ \text{params} : C = .1\mu f \ w_0 = 250 \ Q = 1$$

la cual indica que el dispositivo `XSK2` es un subcircuito `sk_n`. Esta línea provee valores para  $C$ ,  $w_0$  y  $Q$ . Estos valores se utilizarán para calcular la resistencia  $R1$  que se utiliza cuando `sk_n` implementa `XSK2`. Los diferentes valores de  $C$ ,  $w_0$  y  $Q$  se pueden usar cada vez que el subcircuito `sk_n` se utiliza para implementar un dispositivo diferente. La tabla 16.6-1 proporciona subcircuitos PSpice para las cuatro etapas de filtro Sallen-Key.

**Tabla 16.6-1 Subcircuitos PSpice para etapas de filtro Sallen-Key**

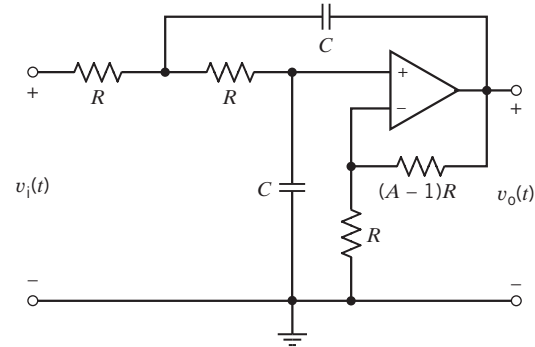
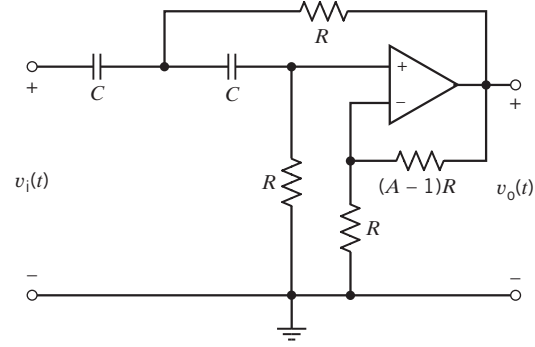
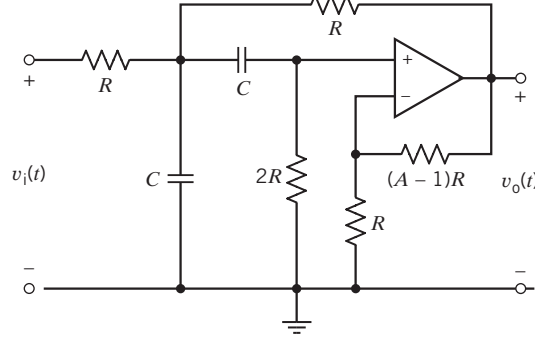
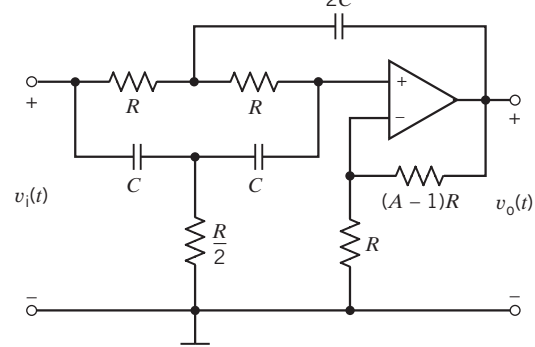
ETAPA DE FILTRO	SUBCIRCUITO PSPICE
	<pre>.subckt sk_lp in out params: C = .1uF w0 = 1krad/s Q = 0.707 R1 in 2 {1/C/w0} R2 2 3 {1/C/w0} C1 3 0 {C} C2 2 out {C} XOA 5 3 out op_amp R3 5 0 10kOhm R4 out 5 {(2 - 1/Q) * 10kOhm} .ends sk_lp</pre>
	<pre>.subckt sk_hp in out params: C = .1uF w0 = 1krad/s Q = 0.707 R1 3 0 {1/C/w0} R2 2 out {1/C/w0} C1 in 2 {C} C2 2 3 {C} XOA 5 3 out op_amp R3 5 0 10kOhm R4 out 5 {(2 - 1/Q) * 10kOhm} .ends sk_hp</pre>
	<pre>.subckt sk_bp in out params: C = .1uF w0 = 1krad/s Q = 0.707 R1 in 2 {1/C/w0} R2 2 out {1/C/w0} C1 2 3 {C} C2 2 0 {C} R3 3 0 {2/C/w0} XOA 5 3 out op_amp R4 5 0 10kOhm R5 out 5 {(2 - 1/Q) * 10kOhm} .ends sk_bp</pre>
	<pre>.subckt sk_n in out params: C = .1uF w0 = 1krad/s Q = 0.707 R1 in 2 {1/C/w0} R2 2 3 {1/C/w0} C1 in 6 {C} C2 6 3 {C} C3 2 out {2*C} R3 6 0 {1/2/C/w0} XOA 5 3 out op_amp R4 5 0 10kOhm R5 out 5 {(1 - 1/Q/2) * 10kOhm} .ends sk_n</pre>



Tabla 16.6-2 Subcircuitos PSpice para funciones de transferencia de segundo orden

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA	SUBCIRCUITO PSpICE
Bajo paso	<pre>.subckt lp_filter_stage in out params: w0 = 1 krad/s Q = 0.707 k = 1 R1 in 0 1G R2 out 0 1G E out 0 LAPLACE {V(in)} = {(k*w0*w0)/(s*s + w0*s/Q + w0*w0)} .ends lp_filter_stage</pre>
Alto paso	<pre>.subckt hp_filter_stage in out params: w0 = 1 krad/s Q = 0.707 k = 1 R1 in 0 1G R2 out 0 1G E out 0 LAPLACE {V(in)} = {(k*s*s)/(s*s + w0*s/Q + w0*w0)} .ends hp_filter_stage</pre>
Pasa banda	<pre>.subckt bp_filter_stage in out params: w0 = 1 krad/s Q = 0.707 k = 1 R1 in 0 1G R2 out 0 1G E out 0 LAPLACE {V(in)} = {(k*w0*s/Q)/(s*s + w0*s/Q + w0*w0)} .ends bp_filter_stage</pre>
Rechazo de banda (notch)	<pre>.subckt n_filter_stage in out params: w0 = 1 krad/s Q = 0.707 k = 1 R1 in 0 1G R2 out 0 1G E out 0 LAPLACE {V(in)} = {(k*(s*s + w0*w0)/(s*s + w0*s/Q + w0*w0)} .ends n_filter_stage</pre>

A continuación, considere el subcircuito

```
.subckt 4th_order_notch_filter in out
R1 in 0 1G
R2 out 0 1G
E1 out 0 LAPLACE {V(in)} = {4* (s*s + 62500)* (s*s + 62500)/
+ (s*s + 250*s + 62500) (s*s + 250*s + 62500)}
.ends 4th_order_notch_filter
```

La palabra clave LAPLACE indica que el voltaje controlado de la VCVS (fuente de voltaje de voltaje controlado) está relacionado con el control de voltajes, utilizando una función de transferencia. El control de voltajes de la VCVS se identifica dentro del primer grupo de llaves. La función de transferencia se da dentro del segundo grupo de llaves. La función de transferencia era demasiado larga para ajustarse a la línea que describe la VCVS. El signo + al principio de la cuarta línea indica que esta línea es una continuación de la línea anterior. La tabla 16.6-2 proporciona subcircuitos que describen funciones de transferencia de segundo orden.

La figura 16.6-3 muestra las respuestas de frecuencia producidas utilizando el archivo de entrada de PSpice que se muestra en la figura 16.6-2. Las respuestas de frecuencia son idénticas y se traslapan de manera exacta. El circuito de filtro en verdad implementa la función de transferencia especificada.

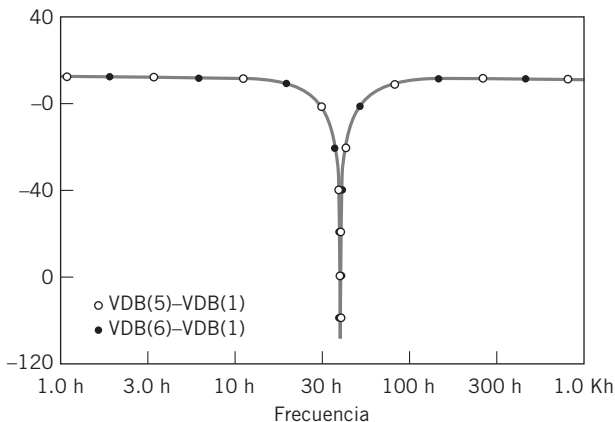


FIGURA 16.6-3 Trazos de respuesta de frecuencia utilizados para verificar la función de transferencia del filtro de rechazo de cuarto orden.

## 16.7 ¿CÓMO LO PODEMOS COMPROBAR...?

A los ingenieros se les suele solicitar comprobar que la solución de un problema sea la correcta. Por ejemplo, las soluciones propuestas para problemas de diseño se deben comprobar para confirmar que se ha cumplido con todas las especificaciones. Además, se deben revisar los resultados de la computadora para protegerse contra errores de captura de datos, así como las exigencias de los comerciantes, las cuales se deben analizar a fondo.

También a los estudiantes de ingeniería se les pide que verifiquen la exactitud de sus trabajos. Por ejemplo, tomarse un breve lapso antes de terminar un examen permitiría dar una vista rápida e identificar esas soluciones que podrían requerir un poco más de aplicación.

Los ejemplos siguientes ilustran técnicas útiles para comprobar las soluciones a los diversos problemas analizados en este capítulo.

### EJEMPLO 16.7-1 ¿Cómo podemos comprobar la respuesta de frecuencia de un filtro?

La figura 16.7-1 muestra la respuesta de frecuencia de un filtro de pasa banda que se obtuvo utilizando PSpice. Un filtro como éste se puede representar por

$$\frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)} = \mathbf{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

donde  $V_i(\omega)$  y  $V_o(\omega)$  son la entrada y la salida del filtro. Este filtro se diseñó para satisfacer las especificaciones

$$\omega_0 = 2\pi 1000 \text{ rad/s}, Q = 10, H = 10$$

¿Cómo podemos comprobar que tales especificaciones son correctas?

#### Solución

La respuesta de frecuencia se obtuvo analizando el filtro utilizando PSpice. El eje vertical de la figura 16.7-1 da la magnitud de  $\mathbf{H}(\omega)$  en decibeles. El eje horizontal da la frecuencia en hertz. Se han etiquetado tres puntos en la respuesta de frecuencia, dando la frecuencia y la magnitud en cada punto. Queremos utilizar esta información desde la respuesta de frecuencia para comprobar el filtro y ver si tiene los valores correctos de  $\omega_0$ ,  $Q$  y  $H_0$ .

Los tres puntos etiquetados en la respuesta de frecuencia se han seleccionado cuidadosamente. Una de estas etiquetas indica que la magnitud de  $\mathbf{H}(\omega)$  y la frecuencia en el pico de la respuesta de frecuencia son 20 dB y 1 000 Hz. Este pico ocurre en la frecuencia resonante, por lo tanto,

$$\omega_0 = 2\pi 1\,000 \text{ rad/s}$$

La magnitud en la frecuencia resonante es  $H_0$ , por lo que

$$20 \log_{10} H_0 = 20$$

o bien

$$H_0 = 10$$

Los otros dos puntos etiquetados se eligieron cuando las magnitudes eran de 3 dB menos que la magnitud en el pico. Las frecuencias en estos puntos son 951 Hz y 1 051 Hz. La diferencia de estas dos frecuencias es el ancho de banda,  $BW$ , de la respuesta de frecuencia. Por último,  $Q$  se calculó a partir de la frecuencia resonante,  $\omega_0$ , y del ancho de banda,  $BW$ ;

$$Q = \frac{\omega_0}{BW} = \frac{2\pi 1\,000}{2\pi(1\,051 - 951)} = 10$$

En este ejemplo se utilizaron tres puntos en la respuesta de frecuencia para verificar que el filtro de pasa banda satisfacía las especificaciones para su frecuencia resonante, ganancia y factor de calidad.

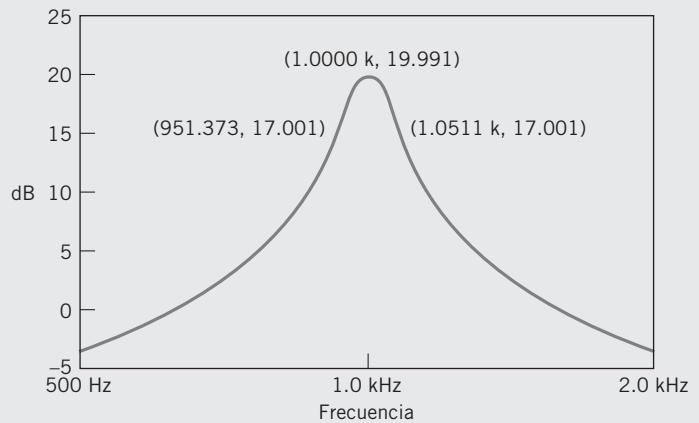


FIGURA 16.7-1 Respuesta de frecuencia de pasa banda.

### EJEMPLO 16.7-2 ¿Cómo podemos comprobar la función de frecuencia de un filtro?

ELab es un programa de análisis de circuitos que se puede utilizar para calcular la función de transferencia de un circuito de filtro (Svoboda, 1997). La figura 16.7-2 muestra el resultado de utilizar ELab para analizar el filtro de pasa banda Sallen-Key que se muestra en la figura 16.4-2. Este filtro Sallen-Key se diseñó en el ejemplo 16.4-2 para tener  $\omega_0 = 3\,142$  rad/s,  $Q = 5$  y  $k = 14$ . ¿Cómo podemos comprobar que el filtro sí cuenta con los valores requeridos de  $\omega_0$ ,  $Q$  y  $k$ ?

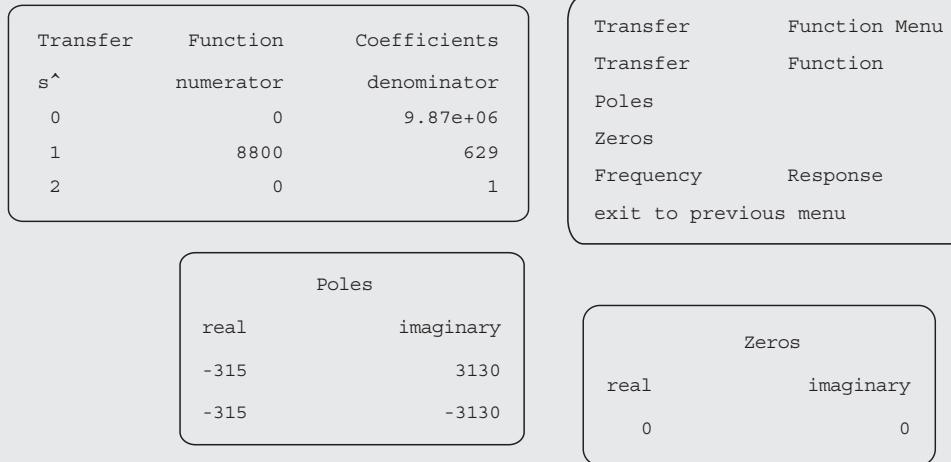


FIGURA 16.7-2 Uso de ELab para determinar la función de transferencia de un filtro pasa banda.

### Solución

Los coeficientes de la función de transferencia del filtro se dan en la porción superior izquierda de la figura 16.7-2. Los coeficientes indican que la función de transferencia de este filtro es

$$H(s) = \frac{8\,800s}{s^2 + 629s + 9.87 \times 10^6} \quad (16.7-1)$$

La forma general de la función de transferencia del filtro de pasa banda de segundo orden es

$$H(s) = \frac{k \frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2} \quad (16.7-2)$$

Observe que el coeficiente de  $s^2$  en el polinomio denominador es 1 en estas dos funciones de transferencia. Los valores de  $\omega_0$ ,  $Q$  y  $k$  se determinan al comparar los coeficientes de las funciones de transferencia en las ecuaciones 16.7-1 y 16.7-2.

La raíz cuadrada del término constante del polinomio denominador es igual a  $\omega_0$ . Por lo que,

$$\omega_0 = \sqrt{9.87 \times 10^6} = 3\,142 \text{ rad/s}$$

Luego, el coeficiente de  $s$  en el polinomio denominador es igual a  $\omega_0/Q$ . Por lo tanto,

$$Q = \frac{\omega_0}{629} = \frac{3\,142}{629} = 5$$

Por último, la relación del coeficiente de  $s$  en el polinomio numerador con el coeficiente de  $s$  en el polinomio denominador es igual a  $k$ . En consecuencia,

$$k = \frac{8\,880}{629} = 14$$

El filtro de pasa banda Sallen-Key que se muestra en la figura 16.4-2 contiene realmente los valores requeridos de  $\omega_0$ ,  $Q$  y  $k$ .

## 16.8 EJEMPLO DE DISEÑO

### FILTRO ANTIALIASING

El procesamiento de señal digital (DSP) suele implicar el muestreo de un voltaje y convertir las muestras en señales digitales. Después de procesar las señales digitales, la señal de salida se convierte de nuevo en un voltaje análogo. Por desgracia, un fenómeno conocido como aliasing provoca errores que ocurren durante el procesamiento de la señal digital. El aliasing es una posibilidad siempre que el voltaje de entrada contenga componentes en frecuencias mayores de la mitad de la frecuencia del muestreo. El aliasing ocurre cuando estos componentes se interpretan erróneamente como componentes de una frecuencia más baja. Los filtros antialiasing se utilizan para evitar estos errores por la eliminación de aquellos componentes del voltaje de entrada que tengan frecuencias mayores a la mitad de la frecuencia de muestreo.

Para una aplicación de DSP se necesita un filtro antialiasing. Se especifica que el filtro sea filtro de paso bajo de Butterworth de cuarto orden, que tenga una frecuencia de corte de 500 hertz y una ganancia de cd igual a 1. Este filtro se debe implementar como un circuito RC de amplificador operacional.

#### Describe la situación y los supuestos

El filtro antialiasing se diseñará como un circuito en cascada que conste de filtros de paso bajo Sallen-Key y quizás un amplificador. El amplificador se incluirá si fuera necesario ajustar la ganancia de cd del filtro antialiasing.

En las etapas de filtro Sallen-Key los amplificadores operacionales se modelarán como amplificadores operacionales ideales. Las resistencias se restringirán al rango de 2 k $\Omega$  a 500 k $\Omega$ , y las capacitancias al rango de 1 nf a 10  $\mu$ F.

#### Establezca el objetivo

La función de transferencia de un filtro de paso bajo de Butterworth de cuarto orden que tenga una frecuencia de corte de 500 hertz y una ganancia de cd igual a 1 se puede obtener en dos pasos. El primero, la función de transferencia de un filtro de paso bajo de Butterworth de cuarto orden la dan la ecuación 16.3-2 y la tabla 16.3-2

$$H_n(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.765s + 1)(s^2 + 1.848s + 1)} \quad (16.8-1)$$

$H_n(s)$  es la función de transferencia de un filtro que tiene una frecuencia de corte igual a 1 rad/s. El segundo, el escalamiento de frecuencia se puede utilizar para ajustar la frecuencia de corte a 500 hertz = 3142 rad/s. El escalamiento de frecuencia se puede completar reemplazando  $s$  por  $\frac{s}{\omega_c} = \frac{s}{3142}$  en  $H_n(s)$ .

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{\left(\left(\frac{s}{3142}\right)^2 + 0.765\left(\frac{s}{3142}\right) + 1\right)\left(\left(\frac{s}{3142}\right)^2 + 1.848\left(\frac{s}{3142}\right) + 1\right)} \\ &= \frac{3142^4}{(s^2 + 2403.6s + 3142^2)(s^2 + 5806.4s + 3142^2)} \end{aligned} \quad (16.8-2)$$

El objetivo es diseñar un circuito de filtro que tenga esta función de transferencia.

#### Genere un plan

Expresaremos  $H(s)$  como el producto de dos funciones de transferencia de paso bajo de segundo orden. Para cada una de estas funciones de transferencia de segundo orden haremos lo siguiente:

1. Determinar los valores de los parámetros de filtro  $k$ ,  $\omega_0$  y  $Q$ .
2. Diseñar un filtro de paso bajo Sallen-Key que tenga los valores requeridos de  $\omega_0$  y  $Q$ .

Es como si los filtros Sallen-Key no tuvieran los valores deseados de la ganancia de cd, de modo que se requeriría un amplificador para ajustar la ganancia de cd. El filtro antialiasing consistirá en una conexión en cascada de las etapas de filtro Sallen-Key y el amplificador.

**Actúe sobre el plan**

Considere el primer factor del denominador de  $H(s)$ . A partir del término constante,

$$\omega_0^2 = 3142^2$$

Por lo tanto  $\omega_0 = 3142$  rad/s. Luego, desde el coeficiente de  $s$  en el denominador,

$$\frac{\omega_0}{Q} = 2403.6$$

entonces

$$Q = \frac{3142}{2403.6} = 1.31$$

A continuación, diseñe un filtro de paso bajo Sallen-Key con  $\omega_0 = 3142$  rad/s y  $Q = 1.31$ . Las ecuaciones de diseño dadas en la fila 1 de la tabla 16.4-2 indican que

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

y

$$Q = \frac{1}{3-A}$$

Tome  $C = 0.1 \mu\text{F}$ . Entonces,

$$R = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{3142 \times 10^{-7}} = 3183$$

También,

$$A = 3 - \frac{1}{Q} = 3 - \frac{1}{1.31} = 2.24$$

La ganancia de cd de esta etapa de filtro es  $k = A = 2.24$ , por lo que la función de transferencia de esta etapa es

$$H_1(s) = \frac{2.24 \times 3142^2}{s^2 \Omega 2403.6s \Omega 3142^2}$$

En otro paso, considere el segundo factor en el denominador de  $H(s)$ . Una vez más, el término constante indica que  $\omega_0 = 3142$  rad/s. Ahora se puede calcular que  $Q$  desde el coeficiente de  $s$  sea

$$Q = \frac{3142}{5806.4} = 0.541$$

Requerimos un filtro de paso bajo Sallen-Key con  $\omega_0 = 3142$  rad/s y  $Q = 0.541$ . Tome  $C = 0.1 \mu\text{F}$ . Entonces,

$$R = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{3142 \times 10^{-7}} = 3183$$

y

$$A = 3 - \frac{1}{Q} = 3 - \frac{1}{0.541} = 1.15$$

La ganancia de cd de esta etapa de filtro es  $k = A = 1.15$ , de modo que la función de transferencia de esta etapa es

$$H_2(s) = \frac{1.15 \times 3142^2}{s^2 \Omega 5806.4s \Omega 3142^2}$$

El producto de las ganancias de estas etapas de filtro es

$$H_1(s) \times H_2(s) = 2.576 \times H(s)$$

por lo que

$$H(s) = 0.388 \times H_1(s) \times H_2(s)$$

La tercera etapa de filtro antialiasing es un amplificador inversor con una ganancia igual a 0.388. El filtro antialiasing se muestra en la figura 16.8-1.

**Verifique la solución propuesta**

La sección 16.14 describe un procedimiento para verificar que un circuito tenga una función de transferencia específica. Este procedimiento consiste en utilizar PSpice para trazar la respuesta de frecuencia del circuito y la función de transferencia. Estas dos respuestas de frecuencia se comparan. Si son las mismas, la función de transferencia del circuito es en verdad la función de transferencia específica.

La figura 16.8-2 muestra el archivo de entrada de PSpice que se usó para trazar las respuestas de frecuencia tanto del circuito que se muestra en la figura 16.8-1 y de la función de transferencia dadas en la ecuación 16.8-2. Estas respuestas de frecuencia se muestran en

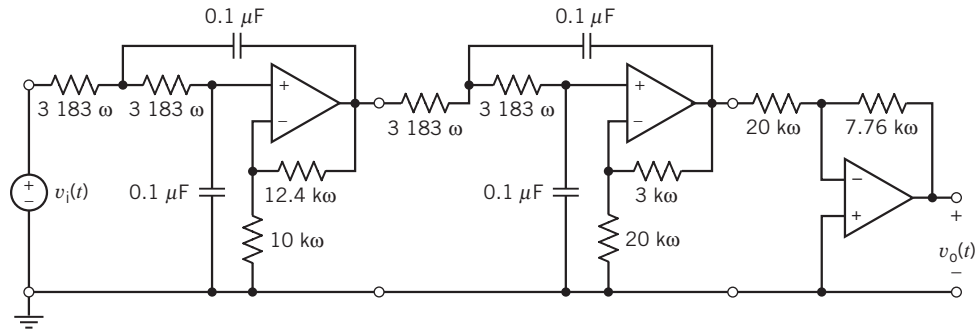


FIGURA 16.8-1 El filtro antialiasing.

Verify the transfer function of the 4th order low-pass filter

```

Vin 1 0 ac 1
XSK1 1 2 sk_lp params: C={C} w0={w0} Q=1.31
XSK2 2 3 sk_lp params: C={C} w0={w0} Q=0.541
Ri 3 4 20000
Rf 4 5 7760
XOA 4 0 5 op_amp
X1 1 6 H1
X2 6 7 H2

.subckt sk_lp in out params: C=.1uf w0=1krad/s Q=0.707
R1 in 2 {1/C/w0}
R2 2 3 {1/C/w0}
C1 3 0 {C}
C2 2 out {C}
XOA 5 3 out op_amp
R3 5 0 10kOhm
R4 out 5 {(2-1/Q)*10kOhm}
.ends

.subckt op_amp inv non out
*an ideal op amp
E (out 0) (non inv) 1G
.ends op_amp

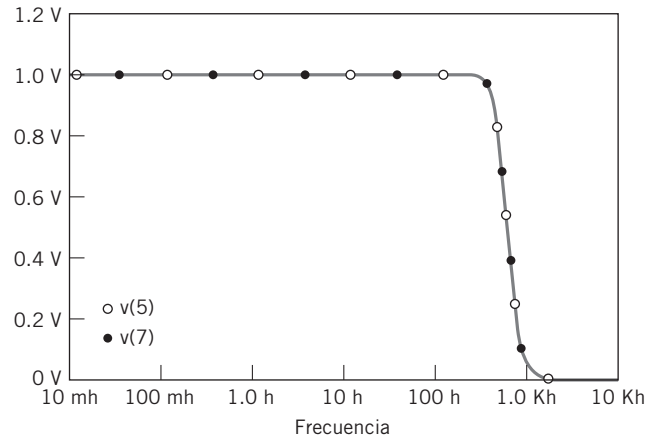
.subckt H1 in out
R1 in 0 1G
R2 out 0 1G
E out 0 LAPLACE {V(in)}={3142*3142/(s*s+2403.6*s+3142*3142)}
.ends H1

.subckt H2 in out
R1 in 0 1G
R2 out 0 1G
E out 0 LAPLACE {V(in)}={3142*3142/(s*s+5806.4*s+3142*3142)}
.ends H2

.ac dec 25 .01 5000
.probe V(7) V(5)
.param: C=0.1uF w0=3142 Q=2 k=2.5
.end

```

FIGURA 16.8-2 Archivo de entrada de PSpice para verificar que el circuito mostrado en la figura 16.8-1 tiene la función de transferencia especificada.



**FIGURA 16.8-3** La respuesta de frecuencia del circuito mostrado en la figura 16.8-1 y la respuesta de frecuencia que corresponde a la función de transferencia dada en la ecuación 16.8-2 son idénticas.

la figura 16.8-3. Estas respuestas de frecuencia se traslapan exactamente de manera que los dos diagramas parecen como un solo trazo. Por consiguiente, el filtro realmente contiene la función de transferencia requerida.

## 16.9 RESUMEN

- Un filtro ideal separa su entrada en dos partes. Una parte se pasa, sin cambios, a la salida. La otra parte se elimina. En otras palabras, la salida de un filtro ideal es una copia exacta de parte de la entrada del filtro.
- Hay varias formas de separar la entrada del filtro en dos partes y, en correspondencia, diversos tipos de filtro ideal. La tabla 16.3-1 ilustra los tipos de filtro más comunes.
- Por desgracia, los circuitos de filtro ideales no existen. Los filtros son circuitos que se aproximan a los filtros ideales.
- Las funciones de transferencia de **Butterworth** tienen respuestas de magnitud de frecuencia que se aproximan a la respuesta de frecuencia de un filtro ideal.
- La respuesta de frecuencia de filtros de segundo orden se caracteriza por tres parámetros de filtro: una ganancia  $k$ , la frecuencia de ángulo  $\omega_0$ , y el **factor de calidad**,  $Q$ . Los circuitos de filtro se diseñan seleccionando los valores de los elementos de circuito de tal manera que se obtengan los valores requeridos de  $k$ ,  $\omega_0$  y  $Q$ .
- 1. La tabla 16.4-1 provee la información requerida para diseñar circuitos  $RLC$  de filtros de segundo orden.
- 2. La tabla 16.4-2 provee la información requerida para diseñar filtros Sallen-Key.
- Los filtros de alto orden son filtros que tienen un orden mayor de 2. Una estrategia muy común para diseñar filtros de alto orden se vale de una conexión en cascada de filtros de segundo orden.
- PSpice proporciona una forma conveniente para verificar que un circuito de filtro tenga realmente la función de transferencia correcta.
- Los subcircuitos de PSpice reducen la complejidad de las simulaciones de filtros de alto orden. La tabla 16.6-1 proporciona subcircuitos de PSpice para las cuatro etapas de filtros Sallen-Key.

## PROBLEMAS

### Sección 16.3 Filtros

**P 16.3-1** Obtenga la función de transferencia de un filtro de paso bajo de Butterworth de tercer orden, que tenga una frecuencia de corte igual a 100 hertz.

*Respuesta:* 
$$H_L(s) = \frac{628^3}{(s + 628)(s^2 + 628s + 628^2)}$$

**P 16.3-2** Una ganancia de cd se puede incorporar en filtros de paso bajo de Butterworth al definir que la función de transferencia sea

$$H_L(s) = \frac{\pm k}{D(s)}$$

donde  $D(s)$  indica los polinomios registrados en la tabla 16.3-2 y  $k$  es la ganancia de cd. La ganancia  $k$  de cd también se llama

ganancia de pasa banda. Obtenga la función de transferencia de un filtro de paso bajo de Butterworth de tercer orden que tenga una frecuencia de corte igual a 100 rad/s y una ganancia de pasa banda igual a 5.

**P 16.3-3** Los filtros de Butterworth de paso alto tienen funciones de transferencia de la forma

$$H_H(s) = \frac{\pm ks^n}{D_n(s)}$$

donde  $n$  es el orden del filtro,  $D(s)$  indica el polinomio de  $n$ -ésimo orden en la tabla 16.3-2, y  $k$  es la ganancia de pasa banda. Obtenga la función de transferencia de un filtro de paso alto de Butterworth de tercer orden que tenga una frecuencia de corte igual a 100 rad/s y una ganancia de pasa banda igual a 5.

*Respuesta:*  $H_H(s) = \frac{5 \times s^3}{(s \Omega 100)(s^2 \Omega 100s \Omega 10\ 000)}$

**P 16.3-4** Los filtros de Butterworth de paso alto tienen funciones de transferencia de la forma

$$H_H(s) = \frac{\pm ks^n}{D_n(s)}$$

donde  $n$  es el orden del filtro,  $D(s)$  indica el polinomio de  $n$ -ésimo orden en la tabla 16.3-2, y  $k$  es la ganancia de pasa banda. Obtenga la función de transferencia de un filtro de paso alto de Butterworth de cuarto orden que tenga una frecuencia de corte igual a 500 hertz y una ganancia de pasa banda igual a 5.

**P 16.3-5** Un filtro de pasa banda tiene dos frecuencias de corte,  $\omega_a$  y  $\omega_b$ . Suponga que  $\omega_a$  es algo menor que  $\omega_b$ , digamos  $\omega_a < \omega_b/10$ . Sea  $H_L(s)$  una función de transferencia de paso bajo que tiene una frecuencia de corte igual a  $\omega_b$  y que  $H_H(s)$  sea una función de transferencia que tenga una frecuencia de corte igual a  $\omega_a$ . Una función de transferencia de pasa banda se puede obtener como un producto de funciones de transferencias de paso bajo y de paso alto,  $H_B(s) = H_L(s) \cdot H_H(s)$ . El orden del filtro de pasa banda es igual a la suma de los órdenes de los filtros de paso bajo y de paso alto. Por lo común hacemos que el orden de los filtros de paso bajo y paso alto sean iguales, en cuyo caso el orden del filtro de pasa banda es par. La ganancia de pasa banda del filtro de pasa banda es el producto de las ganancias de pasa banda de las funciones de transferencia de paso bajo y de paso alto. Obtenga la función de transferencia de un filtro de pasa banda de cuarto orden que tenga frecuencias de corte iguales a 100 rad/s y 2 000 rad/s y una ganancia de pasa banda igual a 4.

*Respuesta:*  $H_B(s) = \frac{16\ 000\ 000 \cdot s^2}{(s^2 \Omega 141.4s \Omega 10\ 000)(s^2 \Omega 2\ 828s \Omega 4\ 000\ 000)}$

**P 16.3-6** En algunas aplicaciones los filtros de pasa banda se utilizan para pasar solamente aquellas señales que tengan una frecuencia especificada  $\omega_0$ . Las frecuencias de corte del filtro de pasa banda se especifican para que satisfagan  $\sqrt{\omega_a \omega_b} = \omega_0$ . La función de transferencia del filtro de pasa banda la da

$$H_B(s) = k \left( \frac{\frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2} \right)^m$$

El orden de esta función de transferencia de pasa banda es  $n = 2m$ . La ganancia de pasa banda es  $k$ . Las funciones de transferencia del tipo se implementan fácilmente como la conexión en

cascada de las etapas de filtro de segundo orden.  $Q$  es el factor de calidad de la etapa de filtro de segundo orden. Esta frecuencia  $\omega_0$  se denomina frecuencia de centro del filtro de pasa banda. Obtenga la función de transferencia de un filtro de pasa banda de cuarto orden que tenga una frecuencia de centro igual a 250 rad/s y una ganancia de pasa banda igual a 4. Utilice  $Q = 1$ .

*Respuesta:*  $H_B(s) = \frac{250\ 000s^2}{(s^2 \Omega 250s \Omega 62\ 500)^2}$

**P 16.3-7** Un filtro de rechazo de banda tiene dos frecuencias de corte,  $\omega_a$  y  $\omega_b$ . Suponga que  $\omega_a$  es algo menor que  $\omega_b$ , digamos  $\omega_a < \omega_b/10$ . Sea  $H_L(s)$  una función de transferencia de paso bajo que tiene una frecuencia de corte igual a  $\omega_a$  y que  $H_H(s)$  sea una función de transferencia de alto bajo que tenga una frecuencia de corte igual a  $\omega_b$ . Una función de transferencia de rechazo de banda se puede obtener como una suma de funciones de transferencias de paso bajo y de paso alto,  $H_N(s) = H_L(s) + H_H(s)$ . El orden del filtro de pasa banda es igual a la suma de los órdenes de los filtros de paso bajo y de paso alto. Por lo común hacemos que el orden de los filtros de paso bajo y paso alto sean iguales, en cuyo caso el orden del rechazo de banda es par. Las ganancias de pasa banda de funciones de transferencia de bajo paso y paso alto se establecen igual a la ganancia de pasa banda del filtro de rechazo de banda. Obtenga la función de transferencia de un filtro de pasa banda de cuarto orden que tenga frecuencias de corte iguales a 100 rad/s y 2000 rad/s y una ganancia de pasa banda igual a 2.

*Respuesta:*  $H_N(s) = \frac{2s^4 \Omega 282.8s^3 \Omega 40\ 000s^2 \Omega 56\ 560\ 000s \Omega 8 \cdot 10^{10}}{(s^2 \Omega 141.4s \Omega 10\ 000)(s^2 \Omega 2\ 828s \Omega 4\ 000\ 000)}$

**P 16.3-8** En algunas aplicaciones, los filtros de rechazo de banda se utilizan para rechazar sólo aquellas señales que tengan una frecuencia especificada  $\omega_0$ . Las frecuencias de corte del filtro de rechazo de banda se especifican para satisfacer  $\sqrt{\omega_a \omega_b} = \omega_0$ . La función de transferencia del filtro de pasa banda la da

$$H_N(s) = k - H_B(s) = k - k \left( \frac{\frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2} \right)^m$$

El orden de esta función de transferencia de rechazo de banda es  $n = 2m$ . La ganancia de pasa banda es  $k$ . Las funciones de transferencia del tipo se implementan fácilmente con una conexión en cascada de etapas de filtro de segundo orden idénticas.  $Q$  es el factor de calidad de la etapa de filtro de segundo orden. La frecuencia  $\omega_0$  se denomina frecuencia de centro de un filtro de rechazo de banda de cuarto orden que tiene una frecuencia de centro igual a 250 rad/s y una ganancia de pasa banda igual a 4. Utilice  $Q = 1$ .

*Respuesta:*  $H_N(s) = \frac{4(s^2 \Omega 62\ 500)^2}{(s^2 \Omega 250s \Omega 62\ 500)^2}$

**P 16.3-9** Las funciones de transferencia de la forma

$$H_L(s) = k \left( \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2} \right)^m$$

son funciones de transferencia de paso bajo. (Ésta no es una función de transferencia de Butterworth.) El orden de esta fun-



ción de transferencia de paso bajo es  $n = 2m$ . La ganancia de pasa banda es  $k$ . Las funciones de transferencia de este tipo se implementan fácilmente utilizando una conexión en cascada de etapas de filtro de segundo orden idénticas.  $Q$  es el factor de calidad de la etapa de filtro de segundo orden. La frecuencia  $\omega_0$  es la frecuencia de corte,  $\omega_c$ , del filtro de paso bajo. Obtenga la función de transferencia del filtro de paso bajo de cuarto orden que tenga una frecuencia de corte igual a 250 rad/s y una ganancia de pasa banda igual a 4. Utilice  $Q = 1$ .

**P 16.3-10** Las funciones de transferencia de la forma

$$H_H(s) = k \left( \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \right)^m$$

son funciones de transferencia de paso alto. (Ésta no es una función de transferencia de Butterworth.) El orden de esta función de transferencia de paso alto es  $n = 2m$ . La ganancia de pasa banda es  $k$ . Las funciones de transferencia de este tipo se implementan fácilmente utilizando una conexión en cascada de etapas de filtro de segundo orden idénticas.  $Q$  es el factor de calidad de la etapa de filtro de segundo orden. La frecuencia  $\omega_0$  es la frecuencia de corte,  $\omega_c$ , del filtro de paso alto. Obtenga la función de transferencia del filtro de paso alto de cuarto orden que tenga una frecuencia de corte igual a 250 rad/s y una ganancia de pasa banda igual a 4. Utilice  $Q = 1$ .

### Sección 16.4 Filtros de segundo orden

**P 16.4-1** El circuito que se muestra en la figura P 16.4-1 es un filtro de pasa banda de segundo orden. Diseñe este filtro para tener  $k = 1$ ,  $\omega_0 = 1\,000$  rad/s y  $Q = 1$ .

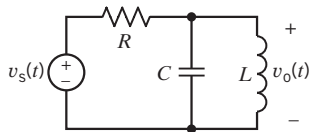


Figura P 16.4-1

**P 16.4-2** El circuito que se muestra en la figura P 16.4-2 es un filtro de paso bajo de segundo orden. Diseñe este filtro para tener  $k = 1$ ,  $\omega_0 = 200$  rad/s y  $Q = 0.707$ .

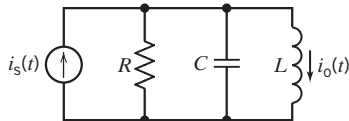


Figura P 16.4-2

**P 16.4-3** El circuito que se muestra en la figura P 16.4-3 es un filtro de paso bajo de segundo orden. Este circuito de filtro se denomina filtro multirrealimentado de ciclo múltiple (MFF). La impedancia de salida de este filtro es cero, por lo tanto, el filtro MFF de paso bajo es apto para su uso como etapa de filtro en un filtro en cascada. La función de transferencia del filtro MFF de paso bajo es

$$H_L(s) = \frac{1}{s^2 + \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_3 C_1} \right) s + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

Diseñe este filtro para tener  $\omega_0 = 2\,000$  rad/s y  $Q = 8$ . ¿Cuál es el valor de la ganancia de cd?

**Sugerencia:** Sean  $R_2 = R_3$  y  $C_1 = C_2 = C$ . Tome un valor conveniente de  $C$  y calcule  $R$  para obtener  $\omega_0 = 20\,000$  rad/s. Calcule  $R_1$  para obtener  $Q = 8$ .

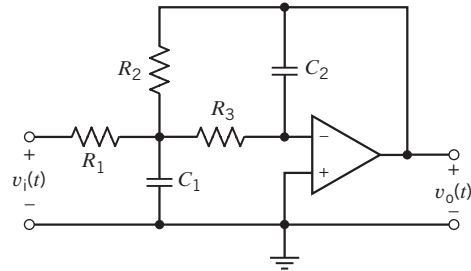


Figura P 16.4-3

**P 16.4-4** El circuito que se muestra en la figura P 16.4-4 es un filtro de pasa banda de segundo orden. Este circuito de filtro se denomina filtro multirrealimentado de ciclo múltiple (MFF). La impedancia de salida de este filtro es cero, por lo tanto, el filtro MFF de pasa banda es apto para su uso como etapa de filtro en un filtro en cascada. La función de transferencia del filtro MFF de pasa banda es

$$H_B(s) = \frac{-\frac{s}{R_1 C_2}}{s^2 + \left( \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) s + \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

Para diseñar este filtro, tome un valor conveniente de  $C$  y luego utilice

$$R_1 = \frac{Q}{k\omega_0 C}, \quad R_2 = \frac{2Q}{\omega_0 C}, \quad \text{y} \quad R_3 = \frac{2Q}{\omega_0 C(2Q^2 - k)}$$

Diseñe este filtro para tener  $k = 5$ ,  $\omega_0 = 2\,000$  rad/s y  $Q = 8$ .

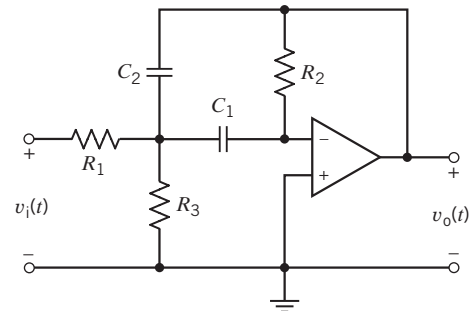


Figura P 16.4-4

**P 16.4-5** El circuito que se muestra en la figura P 16.4-5 es un filtro de paso bajo. La función de transferencia de este filtro es

$$H_L(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{1}{R_1 C_1} s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

Diseñe este filtro para tener  $k = 1$ ,  $\omega_0 = 1\,000$  rad/s y  $Q = 1$ .

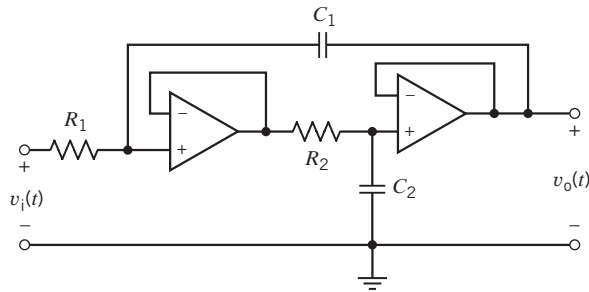


Figura P 16.4-5

**P 16.4-6** La transformación  $CR:RC$  se utiliza para transformar circuitos de filtro de paso bajo en circuitos de filtro de paso alto y viceversa. Esta transformación se aplica a circuitos de filtro de amplificadores operacionales  $RC$ . Cada condensador es reemplazado por un resistor, cuando cada resistor es reemplazado por un condensador. Aplique la transformación  $CR:RC$  al circuito de filtro de paso bajo en la figura P 16.4-5 para obtener el circuito de filtro de paso bajo que se muestra en la figura P 16.4-6. Diseñe un filtro de paso alto para tener  $k = 1$ ,  $\omega_0 = 1000$  rad/s y  $Q = 1$ .

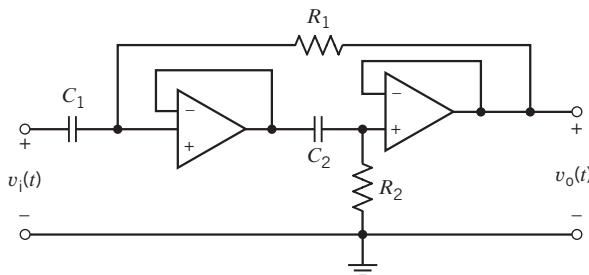


Figura P 16.4-6

**P 16.4-7** Hemos visto que las funciones de transferencia se pueden escalar con cierta frecuencia reemplazando  $s$  por  $s/k_f$  cada vez que eso ocurre. Como alternativa, los circuitos se pueden escalar con frecuencia dividiendo cada capacitancia y cada inductancia entre el factor de escalamiento de frecuencia  $k_f$ . La respuesta de frecuencia se cambió a la derecha por  $k_f$ . En particular, todas las frecuencias de corte, de ángulos y resonantes se multiplicaron por  $k_f$ . Suponga que queremos cambiar la frecuencia de corte de un circuito de filtro desde  $\omega_{viejo}$  a  $\omega_{nuevo}$ . Establecemos el factor de escalamiento de frecuencia a

$$k_f = \frac{\omega_{nuevo}}{\omega_{viejo}}$$

y luego dividimos cada capacitancia y cada inductancia entre  $k_f$ . Utilice el escalamiento de frecuencia para cambiar la frecuencia de corte del circuito de la figura P 16.4-7 a 250 rad/s.

**Respuesta:**  $k_f = 0.05$

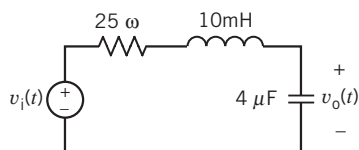


Figura P 16.4-7

**P 16.4-8** El escalamiento de impedancia se utiliza para ajustar las impedancias de un circuito. Sea  $k_m$  que indique el factor de escalamiento de impedancia. El escalamiento de impedancia se completa multiplicando cada impedancia por  $k_m$ . Eso significa que cada resistencia y cada inductancia se multiplique por  $k_m$ , pero cada capacitancia se divide entre  $k_m$ . Las funciones de transferencia de la forma  $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$  o  $H(s) = \frac{I_o(s)}{I_i(s)}$  no cambian del todo por el escalamiento de impedancia. Las funciones de transferencia de la forma  $H(s) = \frac{V_o(s)}{I_i(s)}$  son multiplicados por  $k_m$ , ya que las funciones de transferencia de la forma  $H(s) = \frac{I_o(s)}{V_i(s)}$  se dividen entre  $k_m$ . Utilice el escalamiento de impedancia para cambiar los valores de las capacitancias en el filtro que se muestra en la figura P 16.4-8 de modo que las capacitancias estén en el rango de 0.01  $\mu\text{F}$  a 1.0  $\mu\text{F}$ . Calcule la función de transferencia antes y después de escalar la impedancia.

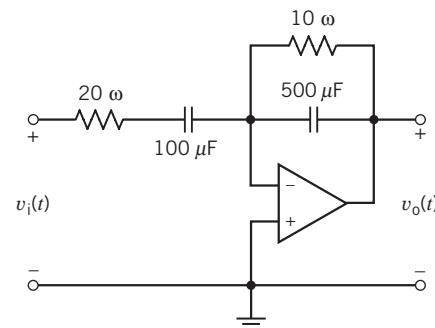


Figura P 16.4-8

**P 16.4-9** Un amplificador de pasa banda tiene la respuesta de frecuencia que se muestra en la figura P 16.4-9. Encuentre la función de transferencia,  $H(s)$ .

**Sugerencia:**  $\omega_0 = 2\pi(10 \text{ MHz})$ ,  $k = 10 \text{ dB} = 3.16$ ,  $AB = 0.2 \text{ MHz}$ ,  $Q = 50$ .

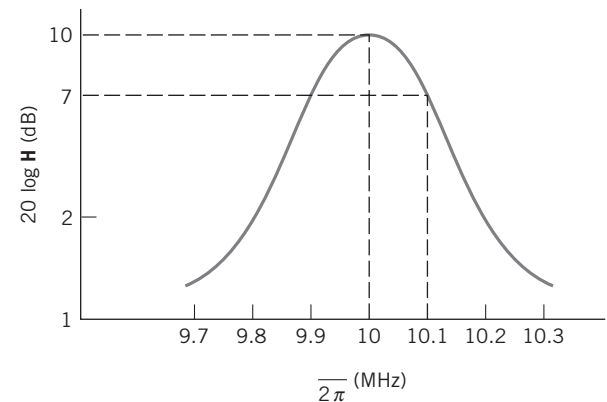


Figura P 16.4-9 Un amplificador de pasa banda.

**P 16.4-10** Un filtro de pasa banda se puede archivar utilizando el circuito de la figura P 16.4-10. Encuentre (a) la magnitud  $\mathbf{H} = \mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$ ; (b) las frecuencias de corte de baja y alta frecuencia  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , y (c) la ganancia de pasa banda cuando  $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$ .

**Respuestas:**

- (b)  $\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$  y  $\omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}$
- (c) ganancia de pasa banda =  $\frac{R_2}{R_1}$

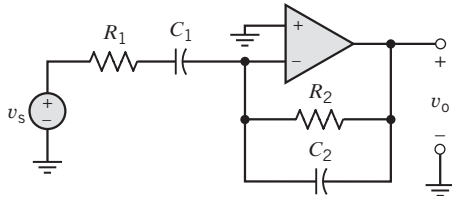


Figura P 16.4-10 Un filtro de pasa banda.

**P 16.4-11** Un filtro de paso bajo de ganancia unitaria, se obtiene desde el circuito de amplificador operacional que se muestra en la figura P 16.4-11. Determine la función de red  $\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{V}_o/\mathbf{V}_s$ .

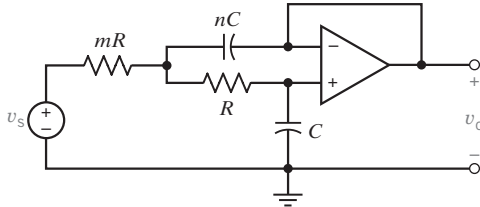


Figura P 16.4-11

**P 16.4-12** Un sensor acústico en particular produce una salida senoidal con una frecuencia igual a 5 kHz. La señal desde el sensor se ha corrompido con ruido. La figura P 16.4-12 muestra un filtro de pasa banda que se diseñó para recuperar la señal del sensor a partir del ruido. El voltaje  $v_s$  representa la señal ruidosa del sensor. La salida del filtro,  $v_o$ , debe ser una señal menos ruidosa. Determine la frecuencia de centro y el ancho de banda de este filtro de pasa banda. Suponga que el amplificador operacional es ideal.

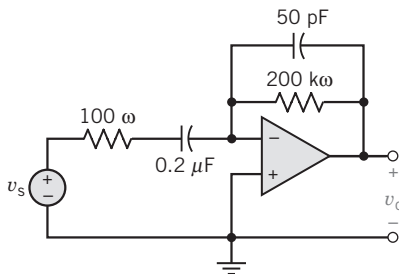


Figura P 16.4-12

### Sección 16.5 Filtros de alto orden

**P 16.5-1** Diseñe un filtro de paso bajo que tenga la función de transferencia

$$H_L(s) = \frac{628^3}{(s + 628)(s^2 + 628s + 628^2)}$$

*Respuesta:* Vea la figura PS 16-1.

**P 16.5-2** Diseñe un filtro que tenga la función de transferencia

$$H_H(s) = \frac{5 \times s^3}{(s + 100)(s^2 + 100s + 10\,000)}$$

*Respuesta:* Vea la figura PS 16-2.

**P 16.5-3** Diseñe un filtro que tenga la función de transferencia

$$H_B(s) = \frac{16\,000\,000 \times s^2}{(s^2 \Omega 141.4s \Omega 10\,000)(s^2 \Omega 2\,828s \Omega 4\,000\,000)}$$

*Respuesta:* Vea la figura PS 16-3.

**P 16.5-4** Diseñe un filtro que tenga la función de transferencia

$$H_B(s) = \frac{250\,000s^2}{(s^2 + 250s + 62\,500)^2}$$

*Respuesta:* Vea la figura PS 16-4.

**P 16.5-5** Diseñe un filtro que tenga la función de transferencia

$$H_N(s) = \frac{2s^2}{(s^2 \Omega 2\,828s \Omega 4\,000\,000)} \Omega \frac{20\,000}{(s^2 \Omega 141.4s \Omega 10\,000)}$$

*Respuesta:* Vea la figura PS 16-5.

**P 16.5-6** Diseñe un filtro que tenga la función de transferencia

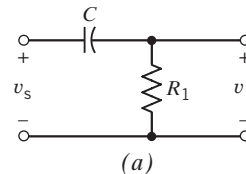
$$H_N(s) = \frac{4(s^2 + 62\,500)^2}{(s^2 + 250s + 62\,500)^2}$$

*Respuesta:* Vea la figura PS 16-6.

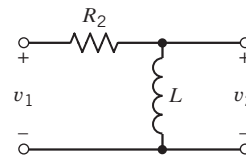
### P 16.5-7

- Para el circuito de la figura P 16.5-7a, derive una expresión para la función de transferencia  $H_a(s) = V_1/V_s$ .
- Para el circuito de la figura P 16.5-7b, derive una expresión para la función de transferencia  $H_b(s) = V_2/V_1$ .
- Cada uno de los filtros anteriores es un filtro de primer orden. El circuito de la figura P 16.5-7c es la conexión en cascada de los circuitos de las figuras 16.5-7a y P 16.5-7b. Derive una expresión para la función de transferencia  $H_c(s) = V_2/V_s$  del circuito de segundo orden en la figura P 16.5-7c.
- ¿Por qué no  $H_c(s) = H_a(s)H_b(s)$ ?

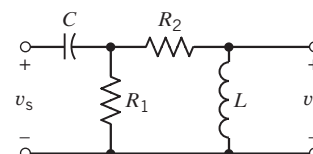
*Sugerencia:* Considere la carga.



(a)



(b)



(c)

Figura P 16.5-7 (a) Circuito para  $\mathbf{H}_1$ . (b) Circuito para  $\mathbf{H}_2$ . (c) Circuito para  $\mathbf{H}$ .

**P 16.5-8** Dos etapas de filtro están conectadas en cascada como se muestra en la figura P 16.5-8. La función de transferencia de cada etapa de filtro es de la forma

$$H(s) = \frac{As}{(1 + s/\omega_L)(1 + s/\omega_H)}$$

Determine la función de transferencia del filtro de cuarto orden. (Suponga que no hay carga.)

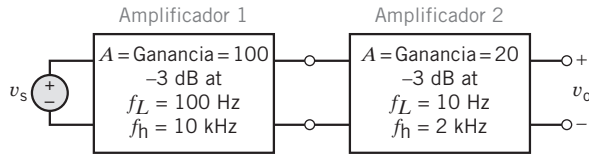


Figura P 16.5-8 Dos amplificadores en cascada.

**P 16.5-9** Un filtro de segundo orden utiliza dos etapas de filtro de primer orden idénticos, como se muestra en la figura P 16.5-9. Se especifica que cada etapa de filtro tenga una frecuencia de corte o reposo en  $\omega_c = 1000$  rad/s y una ganancia de pasa banda de 0 dB. (a) Encuentre los  $R_1$ ,  $R_2$  y  $C$  requeridos. (b) Encuentre la ganancia del filtro de segundo orden en  $\omega = 10\,000$  rad/s en decibelios.

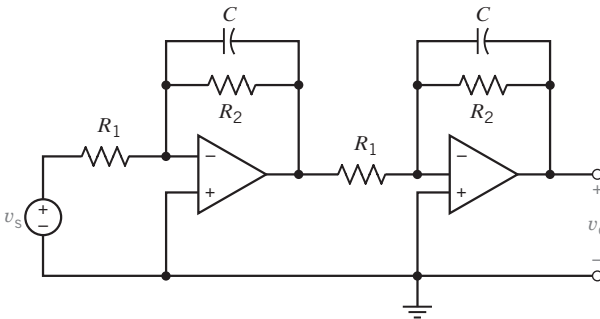


Figura P 16-5-9

**Sección 16.7 ¿Cómo podemos comprobar...?**

**P 16.7-1** Las especificaciones para un filtro de pasa banda requieren que  $\omega_0 = 100$  rad/s,  $Q = 5$  y  $k = 3$ . La función de transferencia de un filtro diseñado para satisfacer estas especificaciones es

$$H(s) = \frac{75s}{s^2 + 25s + 10\,000}$$

¿Este filtro satisface las especificaciones?

**P 16.7-2** Las especificaciones para un filtro de pasa banda requieren que  $\omega_0 = 100$  rad/s,  $Q = 4$  y  $k = 3$ . La función de transferencia de un filtro diseñado para satisfacer estas especificaciones es

$$H(s) = \frac{75s}{s^2 + 25s + 10\,000}$$

¿Este filtro satisface las especificaciones?

**P 16.7-3** Las especificaciones para un filtro de paso bajo requieren que  $\omega_0 = 20$  rad/s,  $Q = 0.8$  y  $k = 1.5$ . La función de transferencia de un filtro diseñado para satisfacer estas especificaciones es

$$H(s) = \frac{600}{s^2 + 25s + 400}$$

¿Este filtro satisface las especificaciones?

**P 16.7-4** Las especificaciones para un filtro de paso bajo requieren que  $\omega_0 = 25$  rad/s,  $Q = 0.4$  y  $k = 1.2$ . La función de transferencia de un filtro diseñado para satisfacer estas especificaciones es

$$H(s) = \frac{750}{s^2 + 62.5s + 625}$$

¿Este filtro satisface las especificaciones?

**P 16.7-5** Las especificaciones para un filtro de paso alto requieren que  $\omega_0 = 12$  rad/s,  $Q = 4$  y  $k = 5$ . La función de transferencia de un filtro diseñado para satisfacer estas especificaciones es

$$H(s) = \frac{5s^2}{s^2 + 30s + 144}$$

¿Este filtro satisface las especificaciones?

**Problemas de PSpice**

**PS 16.1** El circuito de filtro que se muestra en la figura PS 16-1 se diseñó para que tuviera la función de transferencia

$$H_L(s) = \frac{628^3}{(s + 628)(s^2 + 628s + 628^2)}$$

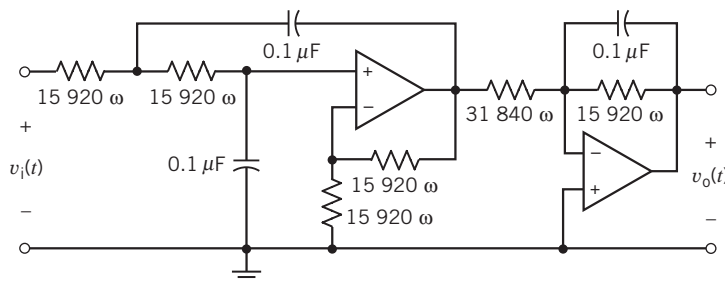


Figura PS 16-1

Utilice PSpice para verificar que el circuito de filtro implementa realmente esta función de transferencia.

**PS 16.2** El circuito de filtro que se muestra en la figura PS 16-2 se diseñó para que tuviera la función de transferencia

$$H_H(s) = \frac{5 \times s^3}{(s + 100)(s^2 + 100s + 10\,000)}$$

Utilice PSpice para verificar que el circuito de filtro implementa realmente esta función de transferencia.

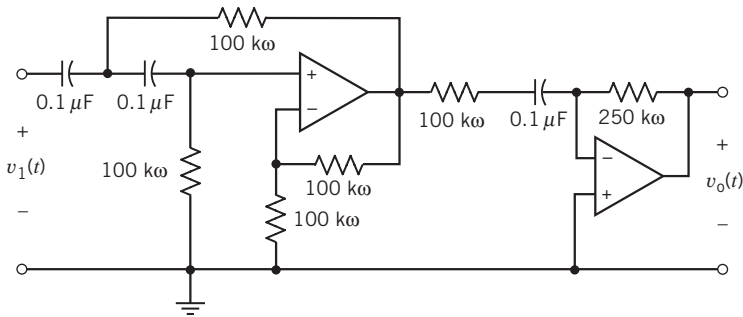


Figura PS 16-2

**PS 16.3** El circuito de filtro que se muestra en la figura PS 16-3 se diseñó para que tuviera la función de transferencia

$$H_B(s) = \frac{16\,000\,000 \times s^2}{(s^2 \Omega 141.4s \Omega 10\,000)(s^2 \Omega 2\,828s \Omega 4\,000\,000)}$$

Utilice PSpice para verificar que el circuito de filtro implementa realmente esta función de transferencia.

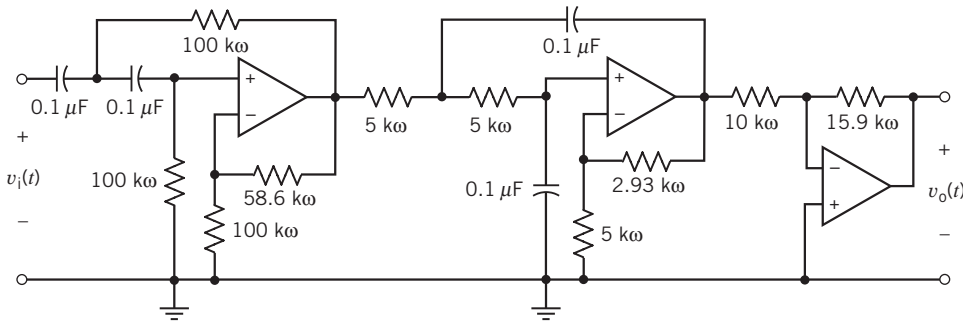


Figura PS 16-3

**PS 16.4** El circuito de filtro que se muestra en la figura PS 16-4 se diseñó para que tuviera la función de transferencia

$$H_B(s) = \frac{250\,000s^2}{(s^2 + 250s + 62\,500)^2}$$

Utilice PSpice para verificar que el circuito de filtro implementa realmente esta función de transferencia.

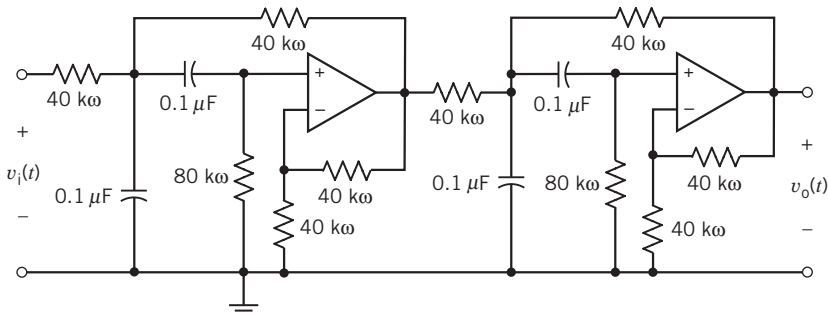


Figura PS 16-4

**PS 16.5** El circuito de filtro que se muestra en la figura PS 16-5 se diseñó para que tuviera la función de transferencia

$$H_N(s) = \frac{2s^2}{(s^2 \Omega 2\ 828s \Omega 4\ 000\ 000)} \Omega \frac{20\ 000}{(s^2 \Omega 141.4s \Omega 10\ 000)}$$

Utilice PSpice para verificar que el circuito de filtro implementa realmente esta función de transferencia.

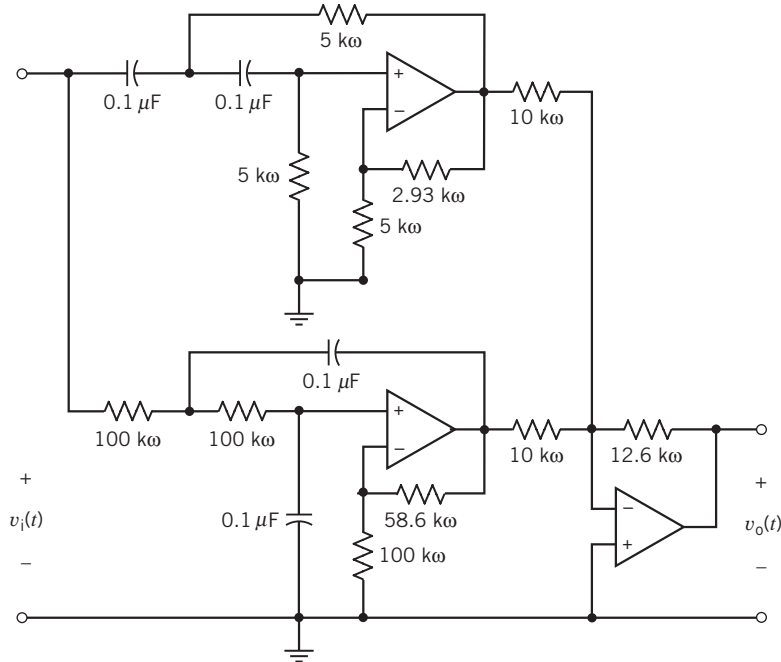


Figura PS 16-5

**PS 16.6** El circuito de filtro que se muestra en la figura PS 16-6 se diseñó para que tuviera la función de transferencia

$$H_N(s) = \frac{4(s^2 + 62\ 500)^2}{(s^2 + 250s + 62\ 500)^2}$$

Utilice PSpice para verificar que el circuito de filtro implementa realmente esta función de transferencia.

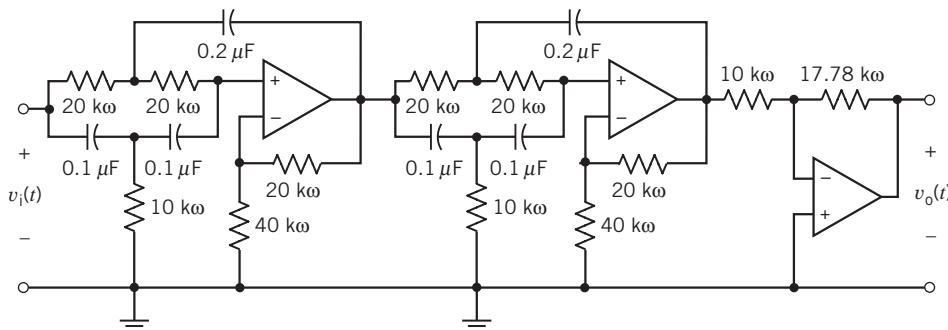


Figura PS 16-6

**PS 16.7** En la figura PS 16-7 se muestra un filtro de rechazo. La salida de un filtro de etapa dos es  $v_1$ , y la salida de un filtro de etapa tres es  $v_2$ . Trace el diagrama de Bode de  $V_1/V_s$  y  $V_2/V_s$  y compare los resultados cuando  $L = 10$  mH y  $C = 1$   $\mu$ F.

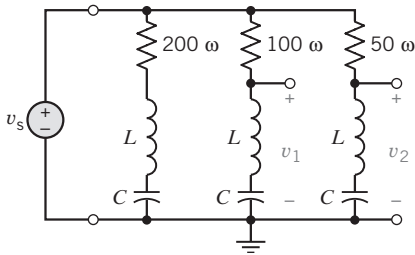


Figura PS 16-7

**PS 16.8** Un sensor acústico opera en el rango de 5 kHz a 25 kHz y está representado en la figura PS 16-8 por  $v_s$ . Se ha especificado que el filtro de pasa banda que se muestra en la figura pase la señal en el rango de frecuencia dentro de 3 dB de la ganancia de la frecuencia de centro. Determine el ancho de banda y la frecuencia de centro del circuito cuando el amplificador operacional tiene  $R_1 = 500$  k $\Omega$ ,  $R_s = 1$  k $\Omega$ , y  $A = 10^6$ .

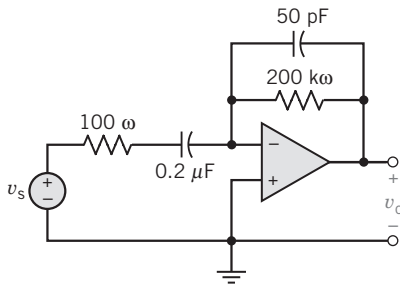


Figura PS 16-8

**PS 16.9** Con frecuencia, los sistemas de audio contienen dos o más altavoces que se pretende manejen partes diferentes del espectro de frecuencia de audio. En un conjunto de tres vías, un altavoz, llamado *woofer*, maneja frecuencias bajas. Un segundo altavoz, el *tweeter*, maneja frecuencias altas, y un tercero, el de rango medio, maneja el rango medio del espectro de audio.

Un filtro de tres vías, llamado red de cruzamiento, divide la señal de audio en las tres bandas de frecuencia disponible para cada altavoz. Hay muchos y variados diseños. Uno muy sencillo se basa en los circuitos serie  $RL$ ,  $CR$  y  $RLC$  resonantes, como se muestra en la figura PS 16-9. Se supone que todas las impedancias de los altavoces son resistivas. Las condiciones son (1) woofer, en la frecuencia de cruzamiento:  $X_{L1} = R_W$ ; (2) tweeter, en la frecuencia de cruzamiento:  $X_{C3} = R_T$ ; y (3) rango medio, con componentes  $C_2$ ,  $L_2$  y  $R_{MR}$  formando una serie de circuitos resonantes con frecuencias de corte superior e inferior  $f_u$  y  $f_L$ , respectivamente. La frecuencia resonante  $= (f_u f_L)^{1/2}$ .

Cuando todas las resistencias de los altavoces estén en  $8 \Omega$ , determine la respuesta de frecuencia y las frecuencias de corte. Trace el diagrama de Bode para los tres altavoces. Determine el ancho de banda de la sección del altavoz de rango medio.

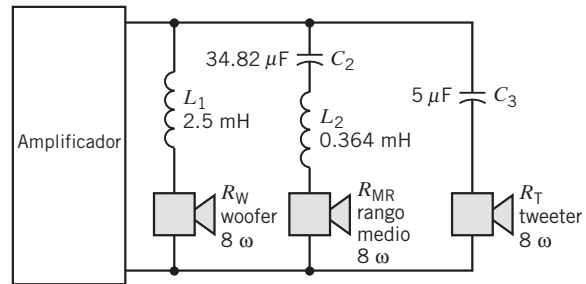


Figura PS 16-9 Filtro de tres vías para un sistema de altavoces.

## Problemas de diseño

**PD 16-1** Diseñe un filtro de pasa banda con una frecuencia de centro de 100 kHz y un ancho de banda de 10 kHz, utilizando el circuito que se muestra en la figura PD 16-2. Suponga que  $C = 100$  pF y encuentre  $R$  y  $R_3$ . Utilice PSpice para verificar el diseño.

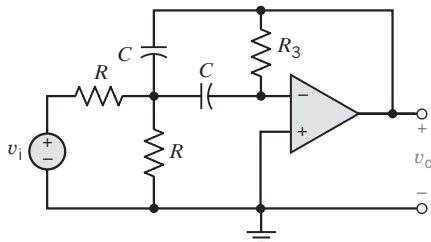


Figura PD 16-1

**PD 16-2** Un transmisor de comunicaciones requiere un filtro de pasa banda para eliminar ruido de baja frecuencia de tráfico cercano. Las mediciones indican que el rango del ruido del tráfico es  $2 < \omega < 12$  rad/s. Un diseñador propone un filtro como

$$H(s) = \frac{(1 + s/\omega_1)^2(1 + s/\omega_3)}{(1 + s/\omega_2)^3}$$

donde  $s = j\omega$ .

Se desea que las señales por encima de 100 rad/s pasen con menos de 3 dB de pérdida, mientras el ruido del tráfico se reduzca a 46 dB o más. Seleccione  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $\omega_3$  y trace el diagrama de Bode.

**PD 16-3** Un transmisor de comunicaciones requiere un filtro de rechazo de banda para eliminar ruido de baja frecuencia del tráfico cercano. Las mediciones indican que el rango del ruido del tráfico es  $2 \text{ rad/s} < \omega < 12 \text{ rad/s}$ . Un diseñador propone un filtro como

$$H(s) = \frac{(1 + s/\omega_1)^2(1 + s/\omega_3)^2}{(1 + s/\omega_2)^2(1 + s/\omega_4)^2}$$

donde  $s = j\omega$ . Se desea que las señales por encima de 130 rad/s pasen con menos de 4 dB de pérdida, mientras el ruido del tráfico se reduzca a 35 dB o más. Seleccione  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  y  $\omega_4$  y trace el diagrama de Bode.

# Redes de dos y tres puertos

# CAPÍTULO 17

## EN ESTE CAPÍTULO

- |      |  |       |   |
|------|--|-------|---|
| 17.1 | Introducción   | 17.7  | Interconexión de redes de dos puertos                 |
| 17.2 | Transformación de T a $\Pi$ y redes de dos puertos y tres terminales | 17.8  | ¿Cómo podemos comprobar...?                           |
| 17.3 | Ecuaciones de redes de dos puertos                                   | 17.9  | <b>EJEMPLO DE DISEÑO</b> — Amplificador de transistor |
| 17.4 | Parámetros $Z$ y $Y$ para un circuito con fuentes dependientes       | 17.10 | Resumen   |
| 17.5 | Parámetros híbridos y de transmisión                                 |       | Problemas   |
| 17.6 | Relaciones entre parámetros de dos puertos                           |       | Problemas de diseño                                   |

## 17.1 INTRODUCCIÓN

Muchos circuitos prácticos tienen solamente dos *puertos* de acceso, es decir, dos lugares donde las señales pueden entrar o salir. Por ejemplo, un cable coaxial entre Boston y San Francisco tiene dos puertos, uno en cada una de esas ciudades. Ahora el objetivo es analizar este tipo de redes en términos de sus características de terminales, sin tocar el aspecto de la composición interna de la red. Para este fin, la red se describirá por las relaciones entre los voltajes y las corrientes de los puertos.

Estudiamos las redes de dos puertos y los parámetros que las describen por varias razones. La mayoría de los circuitos o sistemas cuentan con al menos dos puertos. Podemos colocar una señal de entrada en un puerto y obtener una señal de salida del otro. Los parámetros de la red de dos puertos describen totalmente su comportamiento en términos del voltaje y la corriente en cada puerto. Por lo tanto, conocer los parámetros de una red de dos puertos nos permite describir su funcionamiento cuando está conectado a una red más grande. Las redes de dos puertos también son importantes para el modelado de dispositivos electrónicos y de componentes de sistemas. Por ejemplo, en electrónica, las redes de dos puertos se emplean para modelar transistores, amplificadores operacionales, transformadores, y líneas de transmisión.

La red que se muestra en la figura 17.1-1 representa una red de dos puertos. Una red de cuatro terminales se denomina *red de dos puertos* cuando la corriente entrante a una terminal de un par sale por la otra terminal del par. Por ejemplo,  $I_1$  entra por la terminal a y sale por la terminal b del par de terminales de entrada a-b. Supondremos en nuestro análisis que no hay fuentes independientes o condiciones iniciales de no cero dentro de la red lineal de dos puertos. Las redes de dos puertos pueden ser o no puramente resistivas y, por lo general, ser formuladas en términos de la variable  $s$  o la variable  $j\omega$ .

Una **red de dos puertos** tiene dos puntos de acceso que aparecen como pares de terminal. La corriente que entra por una terminal de un par, sale por la otra terminal en el par.



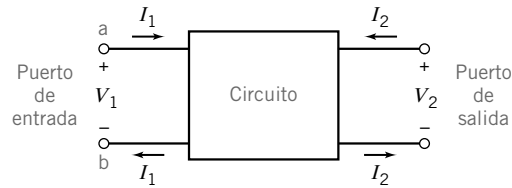


FIGURA 17.1-1 Una red de dos puertos.

## 17.2 TRANSFORMACIÓN DE T A II Y REDES DE DOS PUERTOS Y TRES TERMINALES

Dos redes que suelen presentarse en el análisis de circuitos son la red T y la red II, que se muestran en la figura 17.2-1. Cuando se dibujan de nuevo, pueden aparecer como las redes Y o delta ( $\Delta$ ) de la figura 17.2-2.

Si una red tiene simetría de espejo con respecto a alguna línea de centro, es decir, si se encuentra una línea para dividir la red en dos mitades simétricas, la red es una *red simétrica*. La red T es simétrica cuando  $Z_1 = Z_2$ , y la red P es simétrica cuando  $Z_A = Z_B$ . Es más, si todas las impedancias en la red T o en la red P son iguales, entonces la red T o la red P es *simétrica totalmente*.

Observe que las redes que se muestran en las figuras 17.2-1 y 17.2-2 tienen dos puertos de acceso y tres terminales. Por ejemplo, un puerto se obtiene por el par terminal a-c y el otro puerto es b-c.

Podemos obtener ecuaciones para transformación o conversión directa desde una red T a una red II, o de una red II a una red T, considerando que, por equivalencia, las dos redes deben tener la misma impedancia cuando se midieron entre el mismo par de terminales. Por ejemplo, en el puerto 1 (en a-c) para las dos redes de la figura 17.2-2, requerimos

$$Z_1 + Z_3 = \frac{Z_A(Z_B + Z_C)}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

Para convertir una red II en una red T, se deben obtener las relaciones de  $Z_1$ ,  $Z_2$  y  $Z_3$  en términos de las impedancias  $Z_A$ ,  $Z_B$  y  $Z_C$ . Con un ligero esfuerzo algebraico podemos mostrar que

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (17.2-1)$$

$$Z_2 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (17.2-2)$$

$$Z_3 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (17.2-3)$$

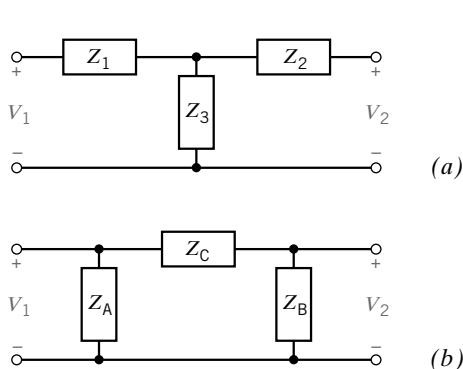


FIGURA 17.2-1 (a) Red T y (b) red II.

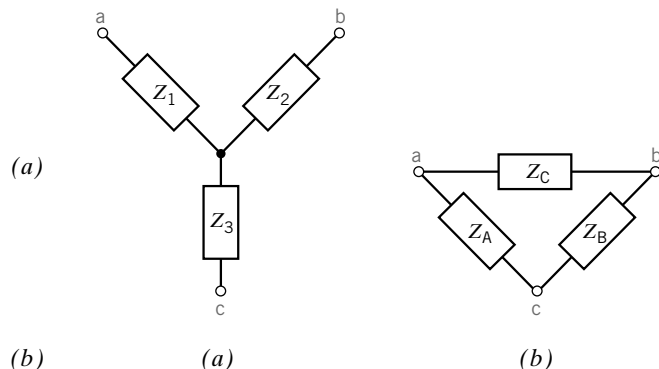


FIGURA 17.2-2 (a) Red Y y (b) red  $\Delta$ .

Del mismo modo, podemos obtener las relaciones para  $Z_A$ ,  $Z_B$  y  $Z_C$  como

$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2} \quad (17.2-4)$$

$$Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1} \quad (17.2-5)$$

$$Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3} \quad (17.2-6)$$

Cada impedancia T iguala el producto de los dos lados adyacentes de la red II dividida entre la suma de los tres lados de la red II. Por otra parte, cada lado de la red II iguala la suma de los productos posibles de las impedancias T divididas entre la impedancia T opuesta.

Cuando una red T o II es simétrica totalmente, las ecuaciones de conversión se reducen a

$$Z_T = \frac{Z_{II}}{3} \quad (17.2-7)$$

y 
$$Z_{II} = 3Z_T \quad (17.2-8)$$

donde  $Z_T$  es la impedancia en cada lado de la red T y  $Z_{II}$  es la impedancia en cada lado de la red II.

**EJEMPLO 17.2-1** Transformación de T a II

Encuentre la forma II del circuito T en la figura 17.2-3a.

**Solución**

La primera impedancia de la red II, utilizando la ecuación 17.2-4, es

$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2} = \frac{j5(-j5) + (-j5)1 + 1(j5)}{-j5} = j5 \Omega$$

Del mismo modo, la segunda impedancia, utilizando la ecuación 17.2-5, es

$$Z_B = -j5 \Omega$$

y la tercera impedancia, utilizando la ecuación 17.2-6, es

$$Z_C = 25 \Omega$$

En la figura 17.2-3b se muestra el circuito equivalente II.

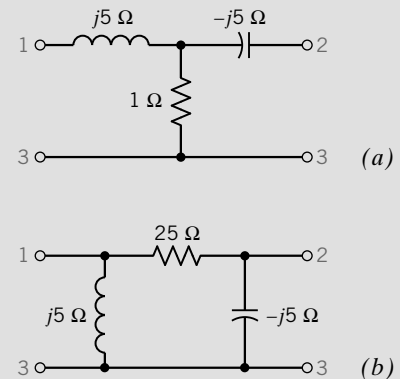


FIGURA 17.2-3 (a) Circuito T del ejemplo 17.2-1. (b) Equivalente II de circuito T.

**EJEMPLO 17.2-2** Transformación II a T

Encuentre la red T equivalente a la red II que se muestra en la figura 17.2-4 en el dominio  $s$  utilizando la transformada de Laplace. Entonces, para  $s = j1$ , encuentre los elementos de la red T.

**Solución**

Primero, utilizando la ecuación 17.2-1, tenemos

$$Z_1 = \frac{(1)(1/s)}{s + 1 + 1/s} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

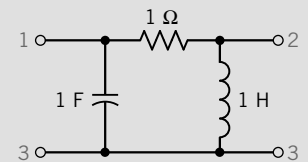


FIGURA 17.2-4 Circuito II del ejemplo 17.2-2.

Luego, utilizando la ecuación 17.2-2, tenemos

$$Z_2 = \frac{1(s)}{s + 1 + 1/s} = \frac{s^2}{s^2 + s + 1}$$

Por último, la tercera impedancia es (ecuación 17.2-3)

$$Z_3 = \frac{s(1/s)}{s + 1 + 1/s} = \frac{s}{s^2 + s + 1}$$

Para encontrar los elementos de la red T en  $s = j1$ , sustituimos  $s = j1$  y determinamos cada impedancia. Entonces tenemos

$$Z_1 = -j, \quad Z_2 = j, \quad Z_3 = 1$$

Por consiguiente, la red T equivalente es como se muestra en la figura 17.2-5 para el valor  $s = j1$ .

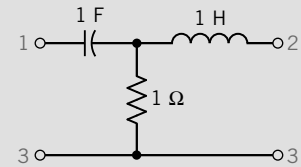


FIGURA 17.2-5 Circuito T equivalente del circuito  $\Pi$  original del ejemplo 17.2-2 para  $s = j1$ .

**EJERCICIO 17.2-1** Encuentre el circuito T equivalente para el circuito  $\Pi$  que se muestra en la figura E 17.2-1.

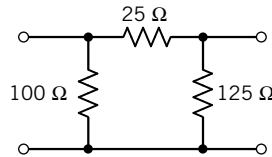


FIGURA E 17.2-1

**Respuesta:**  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 12.5 \Omega$  y  $R_3 = 50 \Omega$

## 17.3 ECUACIONES DE REDES DE DOS PUERTOS

Consideremos la red de dos puertos de la figura 17.1-1. Por convención, se supone que  $I_1$  e  $I_2$  deben fluir dentro de la red como se muestra. Las variables son  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $I_1$  e  $I_2$ . Dentro de la red de dos puertos, dos variables son independientes y dos son dependientes, y debemos seleccionar un conjunto de dos variables independientes de entre los seis posibles conjuntos:  $(V_1, V_2)$ ,  $(I_1, I_2)$ ,  $(V_1, I_2)$ ,  $(I_1, V_2)$ ,  $(V_1, I_1)$  y  $(V_2, I_2)$ . También supondremos elementos lineales.

Las posibilidades de las variables (entrada) independientes y las variables dependientes asociadas se resumen en la tabla 17.3-1. En la misma tabla también se identifican los nombres de los seis conjuntos asociados de parámetros de circuito. En el caso de las transformaciones de fasor o transformadas

Tabla 17.3-1 Modelos de seis parámetros de circuitos

VARIABLES INDEPENDIENTES (ENTRADAS)	VARIABLES DEPENDIENTES (SALIDAS)	PARÁMETROS DE CIRCUITOS
$I_1, I_2$	$V_1, V_2$	Impedancia $Z$
$V_1, V_2$	$I_1, I_2$	Admitancia $Y$
$V_1, I_2$	$I_1, V_2$	Híbrida inversa $g$
$I_1, V_2$	$V_1, I_2$	Híbrida $h$
$V_2, I_2$	$V_1, I_1$	Transmisión $T$
$V_1, I_1$	$V_2, I_2$	Transmisión inversa $T'$

**Tabla 17.3-2 Ecuaciones para los seis conjuntos de parámetros de dos puertos**

Impedancia $Z$	$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$
Admitancia $Y$	$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases}$
Híbrida inversa $g$	$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases}$
Híbrida $h$	$\begin{cases} I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \\ V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \end{cases}$
Transmisión $T$	$\begin{cases} V_1 = AV_2 - BI_2 \\ I_1 = CV_2 - DI_2 \end{cases}$
Transmisión inversa $T'$	$\begin{cases} V_2 = A'V_1 - B'I_1 \\ I_2 = C'V_1 - D'I_1 \end{cases}$

de Laplace con el circuito de la figura 17.1-1, tenemos las conocidas ecuaciones de impedancia en las cuales las variables de salida son  $V_1$  y  $V_2$ , como vemos a continuación:

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \quad (17.3-1)$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \quad (17.3-2)$$

Las ecuaciones para las admitancias son

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \quad (17.3-3)$$

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \quad (17.3-4)$$

Lo adecuado sería, si así lo prefiriera, utilizar las literales  $z$  y  $y$  para los coeficientes de las ecuaciones 17.3-1 a 17.3-4. Las ecuaciones para los seis conjuntos de parámetros de dos puertos se resumen en la tabla 17.3-2.

Para elementos lineales y fuentes no dependientes o amplificadores en la red de dos puertos, mostramos por el teorema de reciprocidad que  $Z_{12} = Z_{21}$  y  $Y_{21} = Y_{12}$ . Un posible arreglo de un circuito pasivo como un circuito T se muestra en la figura 17.3-1. Escribiendo las dos ecuaciones de enlace para la figura 17.3-1, podemos obtener fácilmente las ecuaciones 17.3-1 y 17.3-2. Por lo tanto, el circuito de la figura 17.3-1 puede representar los parámetros de impedancia. También podría haber otro arreglo de los parámetros de admitancia como un circuito  $\Pi$  se muestra en la figura 17.3-2.

Examinando la ecuación 17.17 vemos que podemos medir  $Z_{11}$  y obtener

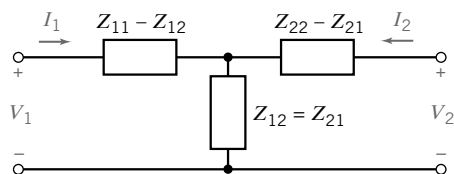
$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

Desde luego,  $I_2 = 0$  implica que las terminales de salida sean circuitos abiertos. Por lo tanto, los parámetros  $Z$  suelen llamarse *impedancias de circuito abierto*.

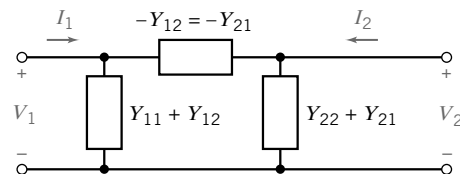
Los parámetros  $Y$  se pueden medir determinando

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

En general, los parámetros de admitancia se denominan *parámetros de admitancia de cortocircuito*.



**FIGURA 17.3-1** Circuito T que representa los parámetros de impedancia.



**FIGURA 17.3-2** Circuito  $\Pi$  que representa los parámetros de admitancia.

### EJEMPLO 17.3-1 Parámetros de admitancia y parámetros de impedancia

Determine los parámetros de admitancia y de impedancia de la red T que se muestra en la figura 17.3-3.

#### Solución

Los parámetros de admitancia utilizan las terminales de salida abreviadas y

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

Entonces, los dos resistores de  $8\text{-}\Omega$  están en paralelo y  $V_1 = 28I_1$ . Por consiguiente, tenemos

$$Y_{11} = \frac{1}{28} \text{ S}$$

Para  $Y_{12}$ , tenemos

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

de modo que abreviamos las terminales de entrada. Entonces tenemos el circuito como se muestra en la figura 17.3-4.

Si aplicamos la división de corriente, tenemos

$$-I_1 = I_2 \left( \frac{8}{8 + 24} \right)$$

y

$$I_2 = \frac{V_2}{8 + [8(24)/(8 + 24)]} = \frac{V_2}{14}$$

Por consiguiente

$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} = \frac{-(V_2/14)(1/4)}{V_2} = -\frac{1}{56} \text{ S}$$

Además,

$$Y_{21} = Y_{12} = -\frac{1}{56} \text{ S}$$

Al fin se obtiene  $Y_{22}$  a partir de la figura 17.3-4 como

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

donde

$$I_2 = \frac{V_2}{8 + [8(24)/(8 + 24)]} = \frac{V_2}{14}$$

Por consiguiente,

$$Y_{22} = \frac{1}{14} \text{ S}$$

De este modo, en forma de matriz, tenemos que  $\mathbf{I} = \mathbf{YV}$ , o bien

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{28} & -\frac{1}{56} \\ -\frac{1}{56} & \frac{1}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

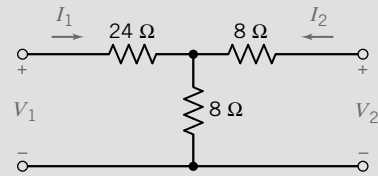


FIGURA 17.3-3 Circuito para el ejemplo 17.3-1.

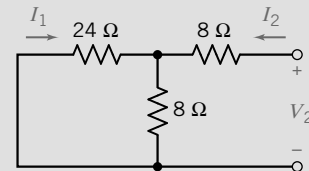


FIGURA 17.3-4 Circuito para el ejemplo 17.3-1 con las terminales de entrada abreviadas.

Ahora encontremos los parámetros de impedancia. Tenemos

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

Las terminales de salida son circuitos abiertos, de modo que tenemos el circuito de la figura 17.3-3. Entonces,

$$Z_{11} = 24 + 8 = 32 \Omega$$

Del mismo modo,  $Z_{22} = 16 \Omega$  y  $Z_{21} = Z_{12} = 8 \Omega$ . Luego, en forma de matriz, tenemos  $\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$ , o bien

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Los métodos generales para encontrar los parámetros Z y los parámetros Y se resumen en las tablas 17.3-3 y 17.3-4, respectivamente.

**Tabla 17.3-3 Método para obtener los parámetros Z de un circuito**

*Paso IA* Para determinar  $Z_{11}$  y  $Z_{21}$ , conecte una fuente de voltaje  $V_1$  a las terminales de entrada y a las terminales de salida de circuito abierto.

*Paso IB* Encuentre  $I_1$  y  $V_2$  y entonces  $Z_{11} = V_1/I_1$  y  $Z_{21} = V_2/I_1$ .

*Paso IIA* Para determinar  $Z_{22}$  y  $Z_{12}$ , conecte una fuente de voltaje  $V_2$  a las terminales de salida y a las terminales de entrada de circuito abierto.

*Paso IIB* Encuentre  $I_2$  y  $V_1$  y entonces  $Z_{22} = V_2/I_2$  y  $Z_{12} = V_1/I_2$ .

*Nota:*  $Z_{12} = Z_{21}$  sólo cuando hay fuentes no dependientes o amplificadores operacionales en la red de dos puertos.

**Tabla 17.3-4 Método para obtener los parámetros Y de un circuito**

*Paso IA* Para determinar  $Y_{11}$  e  $Y_{21}$ , conecte una fuente de corriente  $I_1$  a las terminales de entrada y a las terminales de salida de cortocircuito ( $V_2 = 0$ ).

*Paso IB* Encuentre  $V_1$  e  $I_2$  y entonces  $Y_{11} = I_1/V_1$  y  $Y_{21} = I_2/V_1$ .

*Paso IIA* Para determinar  $Y_{22}$  e  $Y_{12}$ , conecte una fuente de corriente  $I_2$  a las terminales de salida y a las terminales de entrada de cortocircuito ( $V_1 = 0$ ).

*Paso IIB* Encuentre  $I_1$  y  $V_2$  y entonces  $Y_{22} = I_2/V_2$  y  $Y_{12} = I_1/V_2$ .

*Nota:*  $Y_{12} = Y_{21}$  sólo cuando hay fuentes no dependientes o amplificadores operacionales en la red de dos puertos.

**EJERCICIO 17.3-1** Encuentre los parámetros Z y Y del circuito de la figura E 17.3-1.

*Respuesta:*  $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{1}{21} \\ -\frac{1}{21} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

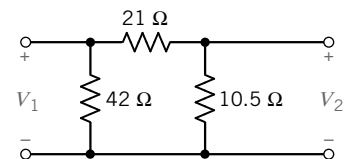


FIGURA E 17.3-1

## 17.4 PARÁMETROS Z Y Y PARA UN CIRCUITO CON FUENTES DEPENDIENTES

Cuando un circuito incorpora una fuente dependiente, se facilita seguir los métodos de la tabla 17.3-3 o los de la tabla 17.3-4 para determinar los parámetros Z o Y. Cuando una fuente dependiente está en el circuito,  $Z_{21} \neq Z_{12}$  y  $Y_{12} \neq Y_{21}$ .

### EJEMPLO 17.4-1 Parámetros de impedancia

Determine los parámetros  $Z$  del circuito de la figura 17.4-1 cuando  $m = 2/3$ .

#### Solución

Determinamos los parámetros  $Z$  siguiendo el método de la tabla 17.3-3. Conectamos una fuente de voltaje  $V_1$  y las terminales de circuito abierto como se muestra en la figura 17.4-2a.

La KLC en el nodo a conduce a

$$I_1 - mV_2 - 1 = 0 \quad (17.4-1)$$

La KVL en torno al lazo externo es

$$V_1 = 4I_1 + 5I \quad (17.4-2)$$

Además,  $V_2 = 3I$ , por lo que  $I = V_2/3$ . Sustituimos  $I = V_2/3$  en la ecuación 17.4-1 y obtenemos

$$I_1 = mV_2 + \frac{V_2}{3} = (m + 1/3)V_2 \quad (17.4-3)$$

Por lo tanto,

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = 1 \Omega$$

Sustituimos  $I = V_2/3$  en la ecuación 17.4-2 y obtenemos

$$V_1 = 4I_1 + \frac{5V_2}{3} = 4I_1 + \frac{5}{3}I_1 \quad (17.4-4)$$

De modo que

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{17}{3} \Omega$$

Para obtener  $Z_{22}$  y  $Z_{12}$ , conectamos una fuente de voltaje  $V_2$  a las terminales de salida y a las terminales de circuito abierto, como se muestra en la figura 17.4-2. Podemos escribir dos ecuaciones de enlaces para las direcciones de corriente supuestas, que se muestran como

$$V_1 + 5I_4 - 3I_2 = 0 \quad (17.4-5)$$

y

$$V_2 + 3I_4 - 3I_2 = 0 \quad (17.4-6)$$

Además,  $I_4 = mV_2$ , por lo que sustituyendo en la ecuación 17.4-6, tenemos

$$V_2 + 3mV_2 - 3I_2 = 0$$

o bien,

$$V_2 = \frac{3}{3}I_2$$

Por consiguiente,

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = 1 \Omega$$

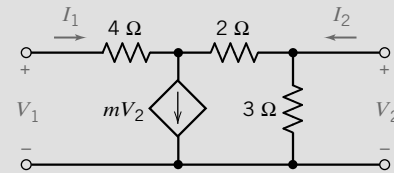


FIGURA 17.4-1 Circuito del ejemplo 17.4-1.

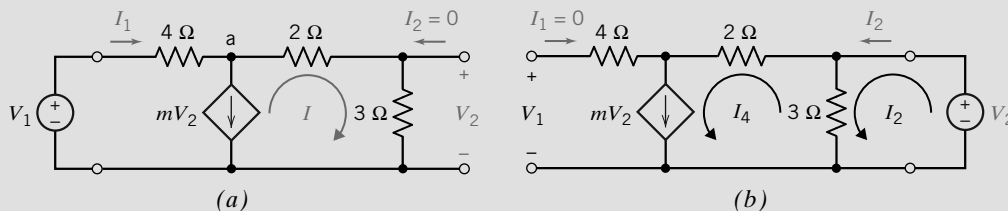


FIGURA 17.4-2 Circuito para determinar (a)  $Z_{11}$  y  $Z_{21}$  y (b)  $Z_{22}$  y  $Z_{12}$ .

Sustituyendo  $I_4 = mV_2$  en la ecuación 17.4-5, tenemos

$$V_1 + 5mV_2 = 3I_2$$

o

$$V_1 + 5mI_2 = 3I_2$$

Por consiguiente,

$$Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} = (3 - 5m) = -\frac{1}{3} \Omega$$

Así, en resumen, tenemos

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \frac{17}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que  $Z_{21} \neq Z_{12}$ , porque hay una fuente dependiente dentro del circuito.

### EJERCICIO 17.4-1 Determine los parámetros $Y$ del circuito de la figura 17.4-1.

Respuesta:  $Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{18} \\ -\frac{1}{6} & \frac{17}{18} \end{bmatrix}$

## 17.5 PARÁMETROS HÍBRIDOS Y DE TRANSMISIÓN

Las ecuaciones de parámetros híbridos de dos puertos se basan en  $V_1$  y  $V_2$  como las variables de salida, por lo que

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \quad (17.5-1)$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \quad (17.5-2)$$

o, en forma de matriz

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (17.5-3)$$

Estos parámetros tienen un gran uso en los modelos de circuitos de transistores. El modelo del circuito híbrido se muestra en la figura 17.5-1.

Las ecuaciones del parámetro híbrido inverso son

$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \quad (17.5-4)$$

$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \quad (17.5-5)$$

o, en forma de matriz

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (17.5-6)$$

El modelo de circuito híbrido inverso se muestra en la figura 17.5-2.

Los parámetros híbrido e híbrido inverso incluyen parámetros tanto de impedancia como de admitancia y se les conoce como *híbridos*. Los parámetros  $h_{11}$ ,  $h_{12}$ ,  $h_{21}$  y  $h_{22}$  representan la impedancia de

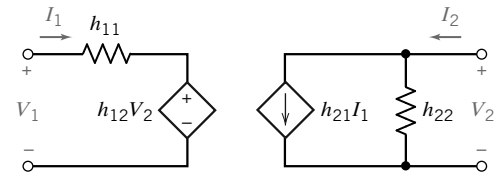


FIGURA 17.5-1 Modelo del parámetro  $h$  de un circuito de dos puertos.

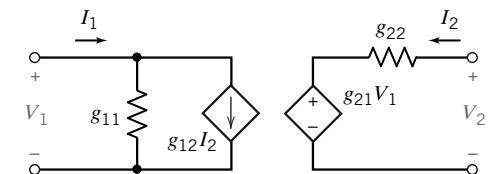


FIGURA 17.5-2 Modelo del circuito híbrido inverso (parámetro  $g$ ).



entrada de cortocircuito, la ganancia de voltaje inverso de circuito abierto, la ganancia de corriente directa de cortocircuito, y la admitancia de salida de circuito abierto, respectivamente. Los parámetros  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{21}$  y  $g_{22}$  representan la admitancia de entrada de cortocircuito, la ganancia de corriente inversa de cortocircuito, la ganancia de voltaje directo de circuito abierto, y la impedancia de salida de cortocircuito, respectivamente.

Los parámetros de transmisión se escriben

$$V_1 = AV_2 - BI_2 \quad (17.5-7)$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2 \quad (17.5-8)$$

o, en forma de matriz, como

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (17.5-9)$$

Los parámetros de transmisión se utilizan para describir cable, fibras y líneas de transmisión. Los parámetros de transmisión  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  representan la ganancia del voltaje inverso de circuito abierto, la impedancia negativa de transferencia de cortocircuito, la admitancia de transferencia de circuito abierto y la ganancia negativa de corriente inversa de cortocircuito, respectivamente. A los parámetros de transmisión se les suele conocer como parámetros  $ABCD$ . Nuestro interés principal está en los parámetros híbridos y de transmisión por su amplio uso.

### EJEMPLO 17.5-1 Parámetros híbridos y parámetros de transmisión

- (a) Encuentre los parámetros  $h$  para el circuito T de la figura 17.5-3 en términos de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ .
- (b) Evalúe los parámetros cuando  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$  y  $R_3 = 6 \Omega$ .

#### Solución

- (a) Primero, encuentre  $h_{11}$  y  $h_{21}$  poniendo en cortocircuito las terminales de salida y conectando una fuente de entrada  $I_1$  como se muestra en la figura 17.5-4a. Por lo tanto,

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

Luego, utilizando el principio del divisor de corriente, tenemos

$$I_2 = \frac{-R_2}{R_2 + R_3} I_1$$

Por lo tanto,

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} = \frac{-R_2}{R_2 + R_3}$$

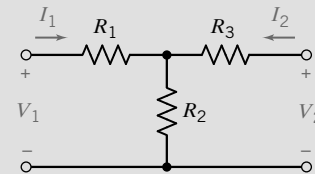


FIGURA 17.5-3 El circuito T del ejemplo 17.5-1.

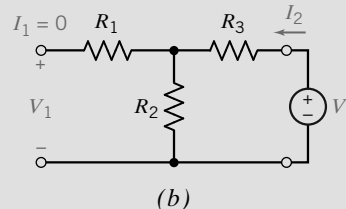
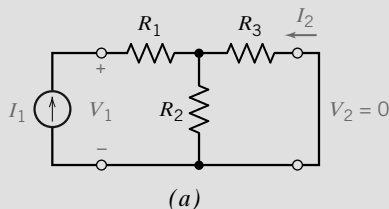


FIGURA 17.5-4 Los circuitos para determinar (a)  $h_{11}$  y  $h_{21}$  y (b)  $h_{22}$  y  $h_{12}$ .

El paso siguiente es dibujar de nuevo el circuito con  $I_1 = 0$  y conectar la fuente de voltaje  $V_2$  como se muestra en la figura 17.5-4b. Entonces determinamos  $h_{12}$  utilizando el principio del divisor de voltaje como sigue:

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0} = \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

Por último, determinamos  $h_{22}$  a partir de la figura 17.5-4b como

$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0} = \frac{1}{R_2 + R_3}$$

El que  $h_{12} = -h_{21}$  es una propiedad de un circuito pasivo (no de amplificadores operacionales o fuentes dependientes dentro de la red de dos puertos).

(b) Cuando  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$  y  $R_3 = 6 \Omega$ , tenemos

$$h_{11} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 3.4 \Omega$$

$$h_{21} = \frac{-R_2}{R_2 + R_3} = -0.4$$

$$h_{12} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 0.4$$

$$h_{22} = \frac{1}{R_2 + R_3} = 0.1 \text{ S}$$

**EJERCICIO 17.5-1** Encuentre el modelo del parámetro híbrido del circuito que se muestra en la figura E 17.5-1.

**Respuestas:**  $h_{11} = 0.9 \Omega$ ,  $h_{21} = 4.4 \Omega$  y  $h_{22} = 0.6 \text{ S}$

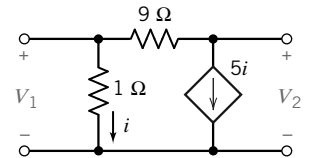


FIGURA E 17.5-1.

## 17.6 RELACIONES ENTRE PARÁMETROS DE DOS PUERTOS

Si existen todos los parámetros de dos puertos para un circuito, se puede relacionar un conjunto de parámetros con otro porque las variables  $V_1$ ,  $I_1$ ,  $V_2$  e  $I_2$  se interrelacionan por los parámetros. Lo primero es considerar la relación entre los parámetros  $Z$  y los parámetros  $Y$ . La ecuación matriz para los parámetros  $Z$  es  $\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$ , o

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (17.6-1)$$

Del mismo modo, la ecuación para los parámetros  $Y$  es  $\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{V}$  o

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (17.6-2)$$

Sustituimos  $\mathbf{I}$  de la ecuación 17.6-2 en la ecuación 17.6-1 y obtenemos

$$\mathbf{V} = \mathbf{ZYV}$$

$$\text{o} \quad \mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1} \quad (17.6-3)$$

De este modo, obtenemos la matriz  $\mathbf{Z}$  invirtiendo la matriz  $\mathbf{Y}$ . Desde luego, también podemos obtener del mismo modo la matriz  $\mathbf{Y}$  si invertimos una matriz  $\mathbf{Z}$  conocida. Es posible que una red de dos puertos tenga una matriz  $\mathbf{Y}$  o una matriz  $\mathbf{Z}$  pero no las dos. En otras palabras, puede ser que  $\mathbf{Z}^{-1}$  o  $\mathbf{Y}^{-1}$  no existan para algunas redes.

Si tenemos una matriz  $\mathbf{Y}$  conocida, obtenemos la matriz  $\mathbf{Z}$  encontrando la determinante de la matriz  $\mathbf{Y}$  como  $\Delta Y$ , y la matriz  $\mathbf{Y}$  adjunta como

$$\text{adj } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix}$$

$$\text{Entonces} \quad \mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{Y}}{\Delta Y} \quad (17.6-4)$$

donde  $\Delta Y = Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}$ .

En la tabla 17.6-1 se proporcionan las relaciones de la conversión del parámetro de dos puertos para los parámetros  $Z$ ,  $Y$ ,  $h$ ,  $g$  y  $T$ .

Tabla 17.6-1 Relaciones de parámetros

	$Z$	$Y$	$h$	$g$	$T$
$Z$	$Z_{11} \quad Z_{12}$ $Z_{21} \quad Z_{22}$	$\frac{Y_{22}}{\Delta Y} \quad \frac{-Y_{12}}{\Delta Y}$ $\frac{-Y_{21}}{\Delta Y} \quad \frac{Y_{11}}{\Delta Y}$	$\frac{\Delta h}{h_{22}} \quad \frac{h_{12}}{h_{22}}$ $\frac{-h_{21}}{h_{22}} \quad \frac{1}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}} \quad \frac{-g_{12}}{g_{11}}$ $\frac{g_{21}}{g_{11}} \quad \frac{\Delta g}{g_{11}}$	$\frac{A}{C} \quad \frac{\Delta T}{C}$ $\frac{1}{C} \quad \frac{D}{C}$
$Y$	$\frac{Z_{22}}{\Delta Z} \quad \frac{-Z_{12}}{\Delta Z}$ $\frac{-Z_{21}}{\Delta Z} \quad \frac{Z_{11}}{\Delta Z}$	$Y_{11} \quad Y_{12}$ $Y_{21} \quad Y_{22}$	$\frac{1}{h_{11}} \quad \frac{-h_{12}}{h_{11}}$ $\frac{h_{21}}{h_{11}} \quad \frac{\Delta h}{h_{11}}$	$\frac{\Delta g}{g_{22}} \quad \frac{g_{12}}{g_{22}}$ $\frac{-g_{21}}{g_{22}} \quad \frac{1}{g_{22}}$	$\frac{D}{B} \quad \frac{-\Delta T}{B}$ $\frac{-1}{B} \quad \frac{A}{B}$
$h$	$\frac{\Delta Z}{Z_{22}} \quad \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$ $\frac{-Z_{21}}{Z_{22}} \quad \frac{1}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}} \quad \frac{-Y_{12}}{Y_{11}}$ $\frac{Y_{21}}{Y_{11}} \quad \frac{\Delta Y}{Y_{11}}$	$h_{11} \quad h_{12}$ $h_{21} \quad h_{22}$	$\frac{g_{22}}{\Delta g} \quad \frac{g_{12}}{\Delta g}$ $\frac{-g_{21}}{\Delta g} \quad \frac{g_{11}}{\Delta g}$	$\frac{B}{D} \quad \frac{\Delta T}{D}$ $\frac{-1}{D} \quad \frac{C}{D}$
$g$	$\frac{1}{Z_{11}} \quad \frac{-Z_{12}}{Z_{11}}$ $\frac{Z_{21}}{Z_{11}} \quad \frac{\Delta Z}{Z_{11}}$	$\frac{\Delta Y}{Y_{22}} \quad \frac{Y_{12}}{Y_{22}}$ $\frac{-Y_{21}}{Y_{22}} \quad \frac{1}{Y_{22}}$	$\frac{h_{22}}{\Delta h} \quad \frac{-h_{12}}{\Delta h}$ $\frac{-h_{21}}{\Delta h} \quad \frac{h_{11}}{\Delta h}$	$g_{11} \quad g_{12}$ $g_{21} \quad g_{22}$	$\frac{C}{A} \quad \frac{-\Delta T}{A}$ $\frac{1}{A} \quad \frac{B}{A}$
$T$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}} \quad \frac{\Delta Z}{Z_{21}}$ $\frac{1}{Z_{21}} \quad \frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}} \quad \frac{-1}{Y_{21}}$ $\frac{-\Delta Y}{Y_{21}} \quad \frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	$\frac{-\Delta h}{h_{21}} \quad \frac{-h_{11}}{h_{21}}$ $\frac{-h_{22}}{h_{21}} \quad \frac{-1}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}} \quad \frac{g_{22}}{g_{21}}$ $\frac{g_{11}}{g_{21}} \quad \frac{\Delta g}{g_{21}}$	$A \quad B$ $C \quad D$

$$\Delta Z = Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}; \Delta Y = Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}; \Delta g = g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}; \Delta h = h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21}; \Delta T = AD - BC$$

**EJEMPLO 17.6-1** Conversión de parámetros de dos puertos

Determine los parámetros  $Y$  y  $h$  si

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

**Solución**

Primero, determinamos los parámetros  $Y$  calculando la determinante como

$$\Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} = 18(9) - 6(6) = 126$$

Luego, utilizando la tabla 17.6-1 obtenemos

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{Z_{22}}{\Delta Z} = \frac{9}{126} = \frac{1}{14} \text{ S} \\ Y_{12} &= Y_{21} = \frac{-Z_{12}}{\Delta Z} = \frac{-6}{126} = \frac{-1}{21} \text{ S} \\ Y_{22} &= \frac{Z_{11}}{\Delta Z} = \frac{18}{126} = \frac{1}{7} \text{ S} \\ h_{11} &= \frac{\Delta Z}{Z_{22}} = \frac{126}{9} = 14 \Omega \\ h_{12} &= \frac{Z_{12}}{Z_{22}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \\ h_{21} &= \frac{-Z_{21}}{Z_{22}} = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3} \\ h_{22} &= \frac{1}{Z_{22}} = \frac{1}{9} \text{ S} \end{aligned}$$

**EJERCICIO 17.6-1** Determine los parámetros  $Z$  si los parámetros  $Y$  son

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Las unidades son siemens.

**Respuestas:**  $Z_{11} = 12 \Omega$ ,  $Z_{12} = 6 \Omega$ ,  $Z_{21} = 3 \Omega$  y  $Z_{22} = 4 \Omega$

**EJERCICIO 17.6-2** Determine los parámetros  $T$  a partir de los parámetros  $Y$  del ejercicio 17.6-1.

**Respuesta:**  $A = 4$ ,  $B = 10 \Omega$ ,  $C = 1/3 \text{ S}$  y  $D = 4/3$

**17.7 INTERCONEXIÓN DE REDES DE DOS PUERTOS**

En muchos circuitos es común tener varias redes de dos puertos interconectadas en paralelo o en cascada. La conexión *en paralelo* de dos puertos que se muestra en la figura 17.7-1 requiere que la variable  $V_1$  de cada dos puertos sea igual.

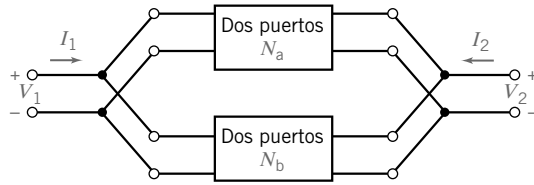


FIGURA 17.7-1 Conexión en paralelo de redes de dos puertos.

Del mismo modo, en el puerto de salida  $V_2$  está el voltaje de salida de ambas redes de dos puertos. La definición de la ecuación matriz para la red  $N_a$  es

$$\mathbf{I}_a = \mathbf{Y}_a \mathbf{V}_a \quad (17.7-1)$$

y para la red  $N_b$  tenemos

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{Y}_b \mathbf{V}_b \quad (17.7-2)$$

Además, tenemos la corriente total  $\mathbf{I}$  como

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b$$

Inclusive, puesto que  $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_b = \mathbf{V}$

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_a \mathbf{V} + \mathbf{Y}_b \mathbf{V} = (\mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_b) \mathbf{V} = \mathbf{Y} \mathbf{V}$$

Por consiguiente, la ecuación matriz describe los parámetros  $Y$  para la red total de dos redes de dos puertos en paralelo

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_b \quad (17.7-3)$$

Por ejemplo,

$$Y_{11} = Y_{11a} + Y_{11b}$$

De aquí que para determinar los parámetros  $Y$  para la red total, agregamos los parámetros  $Y$  de cada red. En general, la matriz de parámetros  $Y$  de la conexión en paralelo es la suma de las matrices de parámetros  $Y$  de la red de dos puertos individual conectada en paralelo.

En la figura 17.7-2 se muestra la interconexión en serie de dos redes de dos puertos. Utilizaremos los parámetros  $Z$  para describir cada red de dos puertos y la combinación en serie. Las ecuaciones de matriz describen las dos redes

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{Z}_a \mathbf{I}_a \quad (17.7-4)$$

$$\mathbf{V}_b = \mathbf{Z}_b \mathbf{I}_b \quad (17.7-5)$$

y

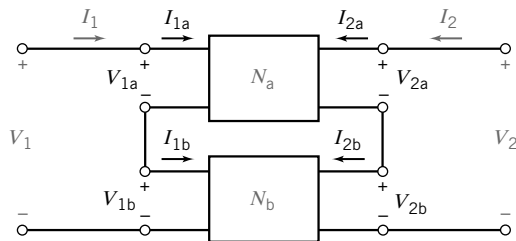


FIGURA 17.7-2 Conexión en serie de redes de dos puertos.

Las corrientes de terminal son

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_a = \mathbf{I}_b$$

Por lo tanto, dado que  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_a + \mathbf{V}_b$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{Z}_a \mathbf{I}_a + \mathbf{Z}_b \mathbf{I}_b \\ &= (\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b) \mathbf{I} = \mathbf{Z} \mathbf{I} \end{aligned}$$

o

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b \quad (17.7-6)$$

Por consiguiente, los parámetros  $Z$  para la red total son iguales a la suma de los parámetros  $Z$  para las redes.

Cuando la salida de una red está conectada al puerto de entrada de la red siguiente, como se muestra en la figura 17.7-3, se dice que las redes deben estar *en cascada*. Dado que las variables de salida de la primera red se convierten en variables de salida de la segunda red, se utilizan los parámetros de transmisión. La primera red de dos puertos,  $N_a$ , está representada por la ecuación matriz

$$\begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_a \begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix}$$

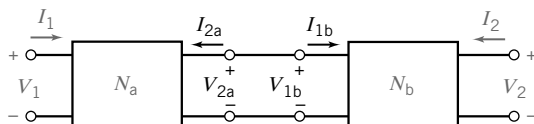


FIGURA 17.7-3 Conexión en cascada de redes de dos puertos.

Para  $N_b$  tenemos

$$\begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_b \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix}$$

Además, observemos que en la entrada y en la salida tenemos

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

En la conexión intermedia, tenemos

$$\begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix}$$

Por consiguiente,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_a \mathbf{T}_b \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_a \mathbf{T}_b \quad (17.7-7)$$

De aquí que los parámetros de transmisión para la red completa provienen de la multiplicación de matriz, observando el orden adecuado.

Todos los cálculos anteriores para las redes interconectadas hacen suponer que la interconexión no distorsiona la naturaleza de dos puertos de las subredes individuales.

### EJEMPLO 17.7-1 Conexiones en paralelo y en cascada de redes de dos puertos

Para la red T de la figura 17.7-4, (a) encuentre los parámetros  $Z$ ,  $Y$  y  $T$ , y (b) determine los parámetros resultantes luego de conectar dos redes de dos puertos en paralelo y en cascada. Las dos redes de dos puertos son idénticas, como se ve en la figura 17.7-4.

#### Solución

Primero, encontremos los parámetros  $Z$  de la red T. Examinamos la red y tenemos

$$Z_{12} = Z_{21} = 1 \, \Omega$$

$$Z_{22} = Z_{11} = 2 \, \Omega$$

Entonces, mediante los factores de conversión de la tabla 17.6-1 encontramos

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dos redes idénticas conectadas en paralelo tendrán una matriz  $\mathbf{Y}$  total de

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_a + \mathbf{Y}_b$$

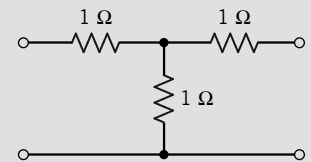


FIGURA 17.7-4 La red T del ejemplo 17.7-1.

Como  $\mathbf{Y}_a = \mathbf{Y}_b$ , tenemos

$$\mathbf{Y} = 2\mathbf{Y}_a = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Finalmente, cuando dos redes idénticas están conectadas en cascada, tenemos una matriz  $\mathbf{T}$  total de

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_a \mathbf{T}_b = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

**EJERCICIO 17.7-1** Determine los parámetros de transmisión total de la conexión en cascada de tres redes de dos puertos que se muestran en la figura E 17.7-1.

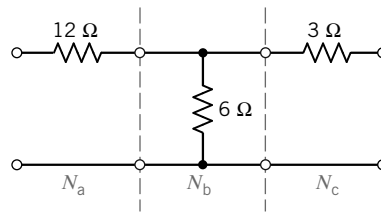


FIGURA E 17.7-1

**Respuestas:**  $A = 3, B = 21, C = 1/6 \text{ S}$  y  $D = 3/2$

## 17.8 ¿CÓMO LO PODEMOS COMPROBAR . . . ?

A los ingenieros se les suele solicitar comprobar que la solución de un problema sea la correcta. Por ejemplo, las soluciones propuestas para problemas de diseño se deben comprobar para confirmar que se ha cumplido con todas las especificaciones. Además, se deben revisar los resultados de la computadora para protegerse contra errores de captura de datos, así como las exigencias de los comerciantes, las cuales se deben analizar a fondo.

También a los estudiantes de ingeniería se les pide que verifiquen la exactitud de sus trabajos. Por ejemplo, tomarse un breve lapso antes de terminar un examen permitiría dar una vista rápida e identificar esas soluciones que podrían requerir un poco más de aplicación.

El ejemplo siguiente ilustra técnicas útiles para comprobar las soluciones a los diversos problemas analizados en este capítulo.

### EJEMPLO 17.8-1 ¿Cómo podemos comprobar circuitos con redes de dos puertos?

El circuito que se muestra en la figura 17.8-1a se diseñó para que tuviera un función de transferencia dada por

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{2s - 10}{s^2 + 27s + 2}$$

¿Cómo podemos comprobar que el circuito satisface esta especificación?

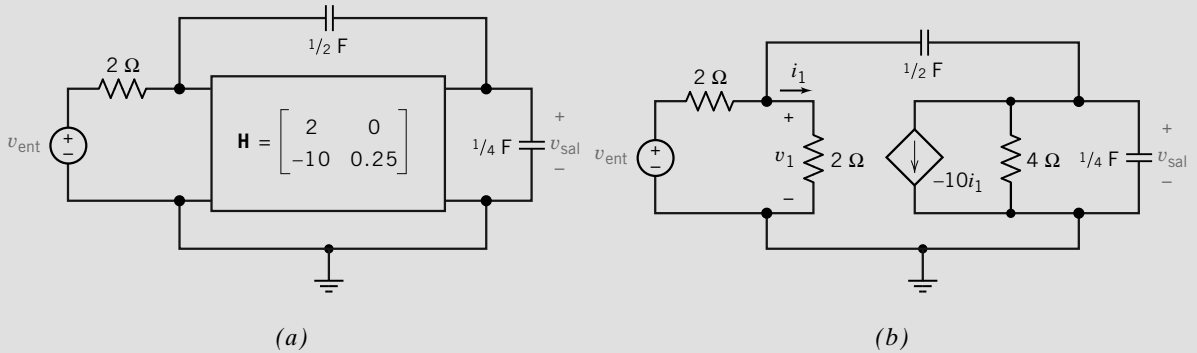


FIGURA 17.8-1 (a) Circuito que contiene una red de dos puertos. (b) Utilizando el modelo del parámetro  $h$  para representar la red de dos puertos.

**Solución**

El modelo del parámetro  $h$  de la figura 17.5-1 se puede utilizar para dibujar de nuevo el circuito como se muestra en la figura 17.9-1b. Este circuito se puede representar por las ecuaciones nodales

$$\begin{bmatrix} \left(1 + \frac{s}{2}\right) & -\frac{s}{2} \\ \left(-5 - \frac{s}{2}\right) & \left(\frac{3s}{4} + \frac{1}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_o(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_e(s)}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde se ha utilizado  $10I_1(s) = 5V_1(s)$  para expresar las corrientes de la fuente dependiente en términos de los voltajes de nodos. Aplicar la regla de Cramer nos da

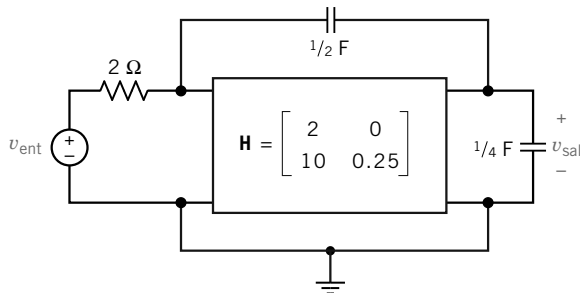
$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{2}\left(5 + \frac{s}{2}\right)}{\left(1 + \frac{s}{2}\right)\left(\frac{3s}{4} + \frac{1}{4}\right) - \frac{s}{2}\left(\frac{s}{2} + 5\right)} = \frac{2s + 20}{s^2 - 13s + 2}$$

Ésta no es la función requerida, de modo que el circuito no satisface la especificación.

**EJERCICIO 17.8-1** Compruebe que el circuito que se muestra en la figura 17.8-1 sí tiene la función de transferencia

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{2s - 10}{s^2 + 27s + 2}$$

(Los circuitos en las figuras 17.8-1a y E 17.8-1 sólo difieren por el signo de  $h_{21}$ .)



FIGURAE 17.8-1 Una versión modificada del circuito de la figura 17.8-1.



## 17.9 EJEMPLO DE DISEÑO

## AMPLIFICADOR DE TRANSISTORES

La figura 17.9-1 muestra el circuito equivalente de señal corta de un amplificador de transistor. La hoja de especificaciones para el transistor describe el transistor mediante la especificación de que sus parámetros  $h$  sean

$$h_{ie} = 1\,250\ \Omega, \quad h_{oe} = 0, \quad h_{fe} = 100 \quad \text{y} \quad h_{re} = 0$$

El valor de la resistencia  $R_c$  debe estar entre  $300\ \Omega$  y  $5\,000\ \Omega$  para garantizar que el transistor se polarice correctamente. Se define que la ganancia de señal corta sea

$$A_v = \frac{v_{sal}}{v_{ent}}$$

El reto es diseñar el amplificador de modo que

$$A_v = -20$$

(No es seguro que se vayan a satisfacer estas especificaciones. Parte del problema es decidir si es posible diseñar este amplificador de manera que  $A_v = -20$ .)

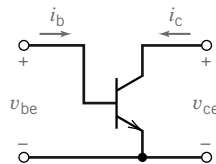
## Describa la situación y los supuestos

1.  $R_c$  debe estar entre  $300\ \Omega$  y  $5\,000\ \Omega$ .
2. El transistor está representado por parámetros  $h$ . La figura 17.9-1a muestra que el transistor se puede configurar para que sea una red de dos puertos y que lo representen los parámetros  $h$ . La figura 17.9-2b muestra un circuito equivalente para el transistor. Este circuito equivalente se basa en los parámetros  $h$ . Para este transistor en particular, los valores del parámetro  $h$  son

$$h_{ie} = 1\,000\ \Omega, \quad h_{oe} = 0, \quad h_{fe} = 100 \quad \text{y} \quad h_{re} = 0$$

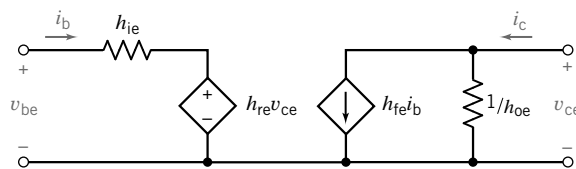
Porque

$$\frac{1}{h_{oe}} = \infty$$

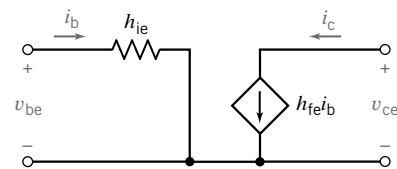


$$\begin{bmatrix} h_{ie} & h_{re} \\ h_{fe} & h_{oe} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_b \\ v_{ce} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{be} \\ i_c \end{bmatrix}$$

(a)



(b)



(c)

FIGURA 17.9-2 (a) Utilizando parámetros  $h$  para describir un transistor. (b) Un circuito equivalente. (c) Un circuito simplificado para  $h_{re} = 0$  y  $h_{oe} = 0$ .

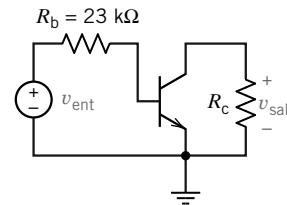


FIGURA 17.9-1 Un amplificador de transistor.

el resistor del lado derecho del circuito equivalente es un circuito abierto. Dado que

$$h_{re} = 0$$

la fuente de voltaje dependiente es un cortocircuito. La figura 17.9-2c muestra el circuito equivalente

3. La ganancia del voltaje debe ser  $A_v = -20$ .

### Establezca el objetivo

Seleccionar  $R_c$  para que  $A_v = -20$ .

### Genere un plan

En la figura 17.9-1, reemplace el transistor por el circuito equivalente de la figura 17.9-2c. Analice el circuito resultante para obtener una fórmula para la ganancia de voltaje,  $A_v$ . Esta fórmula implicará a  $R_c$ . Determine el valor de  $R_c$  que hará que  $A_v = -20$ . Si este valor de  $R_c$  está entre  $300 \Omega$  y  $5\,000 \Omega$ , el diseño del amplificador está completo. Por otra parte, si este valor de  $R_c$  no está entre  $300 \Omega$  y  $5\,000 \Omega$ , las especificaciones no se satisfacen.

### Actúe sobre el plan

La figura 17.9-3 muestra el amplificador luego de que se ha reemplazado por el circuito equivalente. Al aplicar la ley de Ohm para  $R_c$  nos da

$$v_o = -R_c 100 i_b$$

donde el signo menos se debe a las direcciones de referencia. A continuación, aplique la KVL al enlace de la izquierda para obtener

$$v_{ent} = 23\,000 i_b + 1\,000 i_b$$

Entonces

$$A_v = \frac{v_o}{v_{ent}} = \frac{-100 R_c}{24\,000}$$

Por último, establezca  $A_v = -20$ , con lo que se obtiene

$$-20 = \frac{-100 R_c}{24\,000}$$

Ahora resuelva  $R_c$  para determinar

$$R_c = 4\,800 \Omega$$

### Verifique la solución propuesta

Primero, la resistencia  $R_c = 4\,800 \Omega$  sí está entre  $300 \Omega$  y  $5\,000 \Omega$ . Segundo, la ganancia del circuito que se muestra en la figura 17.9-3 es

$$\frac{v_o}{v_{ent}} = \frac{-h_{fe} R_c}{R_b + h_{ie}} = -\frac{100 \times 4\,800}{23\,000 + 1\,000} = -20$$

Por consiguiente, ambas especificaciones se han satisfecho.

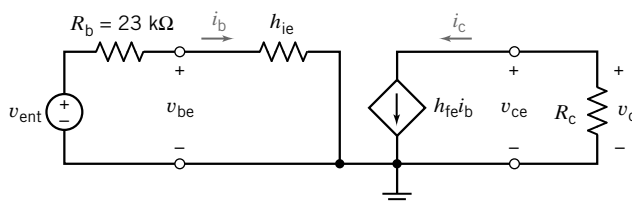


FIGURA 17.9-3 Un circuito equivalente para el amplificador de transistor.

## 17.10 RESUMEN

- Un puerto es un par de terminales junto con la restricción que la corriente dirigida a una terminal sea igual a la corriente dirigida fuera de la otra terminal.
- Los modelos de dos puertos de circuitos o dispositivos son útiles para describir el desempeño del circuito o dispositivo en términos de las corrientes y los voltajes en sus puertos. Los detalles internos del circuito o dispositivo no se incluyen en el modelo de dos puertos, de modo que el modelo de dos puertos de un circuito puede ser considerablemente más sencillo que el circuito en sí.
- El modelo de dos puertos implica cuatro señales, la corriente y el voltaje en cada puerto. Dos de estas señales se tratan como entradas, y las otras dos como salidas. Hay seis maneras de

separar las cuatro señales en señales de entrada y salida, y por lo tanto hay seis conjuntos de parámetros de dos puertos. Los seis conjuntos de parámetros de dos puertos se denominan parámetros de impedancia, admitancia, híbridos, híbridos inversos, de transmisión y de transmisión inversa. La tabla 17.3-2 resume los seis conjuntos de parámetros de dos puertos.

- La tabla 17.6-1 resume las ecuaciones utilizadas para convertir un conjunto de parámetros de dos puertos en otro, por ejemplo, para convertir parámetros de impedancia en parámetros híbridos.
- Podemos utilizar parámetros de dos puertos para describir el desempeño de la conexión en paralelo, en serie o en cascada de dos o más circuitos.

## PROBLEMAS

### Sección 17.2 Transformación de T a $\Pi$ y redes de dos puertos y tres terminales

**P 17.2-1** Determine la resistencia equivalente  $R_{ab}$  de la red de la figura P 17.2-1. Utilice la transformación  $\Pi$  a T como una etapa de la reducción.

**Respuesta:**  $R_{ab} = 3.2 \Omega$

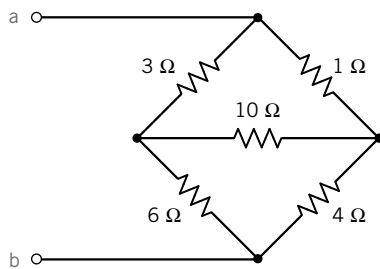


Figura P 17.2-1

**P 17.2-2** Repita el problema P 17.2-1 cuando la resistencia de  $6\text{-}\Omega$  se cambia a  $4 \Omega$  y la resistencia de  $10\text{-}\Omega$  se cambia a  $12 \Omega$ .

**P 17.2-3** La red de dos puertos de la figura 17.1-1 tiene una fuente de entrada  $V_s$  con una resistencia  $R_s$  de fuente conectada a las terminales de entrada de modo que  $V_1 = V_s - I_1 R_s$  y una carga de resistencia conectada a las terminales de salida de modo que  $V_2 = -I_2 R_L = I_L R_L$ . Encuentre  $R_{ent} = V_1/I_1$ ,  $A_v = V_2/V_1$ ,  $A_i = -I_2/I_1$  y  $A_p = -V_2 I_2/(V_1 I_1)$  utilizando el modelo del parámetro Z.

**P 17.2-4** Utilizando la transformación  $\Delta$  a T, determine la corriente  $I$  cuando  $R_1 = 15 \Omega$  y  $R = 20 \Omega$  para el circuito que se muestra en la figura P 17.2-4.

**Respuesta:**  $I = 385 \text{ mA}$

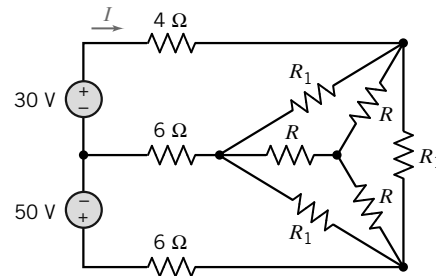


Figura P 17.2-4

**P 17.2-5** Utilice la transformación Y a  $\Delta$  para determinar  $R_{ent}$  del circuito que se muestra en la figura P 17.2-5.

**Respuesta:**  $R_{ent} = 673.85 \Omega$

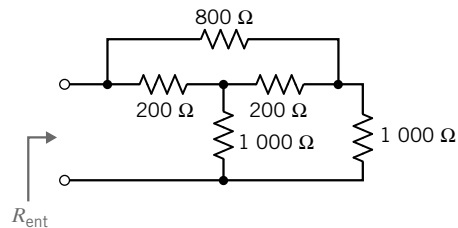


Figura P 17.2-5

### Sección 17.3 Ecuaciones de redes de dos puertos

**P 17.3-1** Encuentre los parámetros Y y los parámetros Z para la red de dos puertos de la figura P 17.3-1.

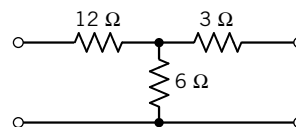


Figura P 17.3-1

**P 17.3-2** Determine los parámetros  $Z$  del circuito de ca que se muestra en la figura P 17.3-2.

**Respuesta:**  $Z_{11} = 2 - j4 \Omega$ ,  $Z_{12} = Z_{21} = -j4 \Omega$ ,  $Z_{22} = -j2 \Omega$

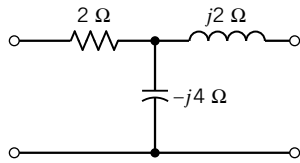


Figura P 17.3-2

**P 17.3-3** Encuentre los parámetros  $Y$  del circuito de la figura P 17.3-3 cuando  $b = 4$ ,  $G_1 = 2 \text{ S}$ ,  $G_2 = 1 \text{ S}$  y  $G_3 = 3 \text{ S}$ .

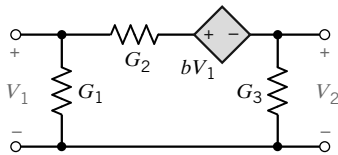


Figura P 17.3-3

**P 17.3-4** Encuentre los parámetros  $Y$  del circuito de la figura P 17.3-4.

**Respuestas:**  $Y_{11} = 0.3 \text{ S}$ ,  $Y_{21} = Y_{12} = -0.1$  y  $Y_{22} = 0.15 \text{ S}$

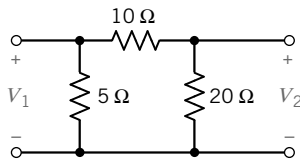


Figura P 17.3-4

**P 17.3-5** Encuentre los parámetros  $Y$  del circuito de la figura P 17.3-5.

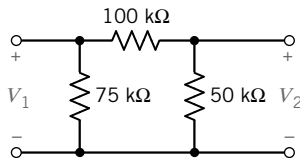


Figura P 17.3-5

**P 17.3-6** Encuentre los parámetros  $Z$  para el circuito que se muestra en la figura P 17.3-6 para la respuesta senoidal de estado estable en  $\omega = 3 \text{ rad/s}$ .

**Respuestas:**  $Z_{11} = 3 + j \Omega$ ,  $Z_{12} = Z_{21} = -j2 \Omega$  y  $Z_{22} = -j2 \Omega$

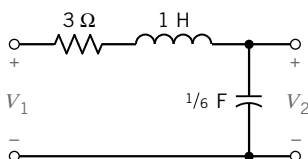


Figura P 17.3-6

**P 17.3-7** Determine los parámetros de impedancia en el dominio  $s$  (dominio de Laplace) para el circuito que se muestra en la figura P 17.3-7.

**Respuestas:**  $Z_{11} = (4s + 1)/s$ ,  $Z_{12} = Z_{21} = 1/s$  y  $Z_{22} = (2s^2 + 1)/s$

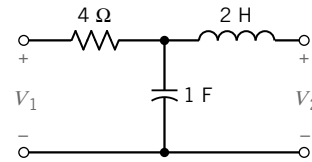


Figura P 17.3-7

**P 17.3-8** Determine una red de dos puertos que esté representada por los parámetros  $Y$ :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & -1 \\ -1 & (s+1) \end{bmatrix}$$

**P 17.3-9** Encuentre una red de dos puertos incorporando un inductor, un condensador y dos resistores que darán los siguientes parámetros de impedancia:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (s^2 + 2s + 2) & 1 \\ 1 & (s^2 + 1) \end{bmatrix}$$

donde  $\Delta = s^2 + s + 1$ .

**P 17.3-10** En la figura P 17.3-10 se muestra una red de dos puertos infinita. Cuando las terminales de salida están conectadas a la resistencia  $R_s$  característica del circuito, la resistencia que se ve debajo de la línea de cada sección es la misma. Calcule la  $R_s$  necesaria.

**Respuesta:**  $R_s = (\sqrt{3} - 1)R$

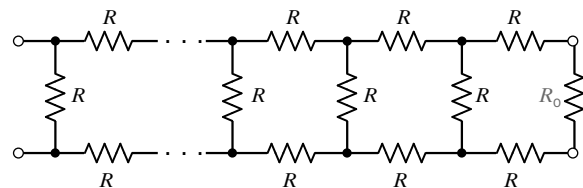


Figura P 17.3-10 Red de dos puertos infinita.

### Sección 17.4 Parámetros $Z$ y $Y$ para un circuito con fuentes dependientes

**P 17.4-1** Determine los parámetros del circuito y que se muestran en la figura P 17.4-1.

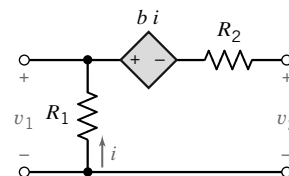


Figura P 17.4-1

**P 17.4-2** Un amplificador electrónico tiene el circuito que se muestra en la figura P 17.4-2. Determine los parámetros de impedancia para el circuito.

**Respuestas:**  $Z_{11} = 4$ ,  $Z_{12} = 3(1 + \alpha)$ ,  $Z_{21} = 3$  y  $Z_{22} = 5 + 3\alpha$

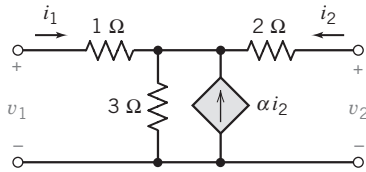


Figura P 17.4-2

**P 17.4-3**

- (a) Para el circuito que se muestra en la figura P 17.4-3, determine el modelo  $Y$  de dos puertos utilizando impedancias en el dominio  $s$ .
- (b) Determine la respuesta  $v_2(t)$  cuando una fuente de corriente  $i_1 = 1 u(t)$  A está conectada a las terminales de entrada.

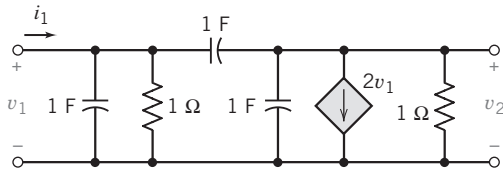
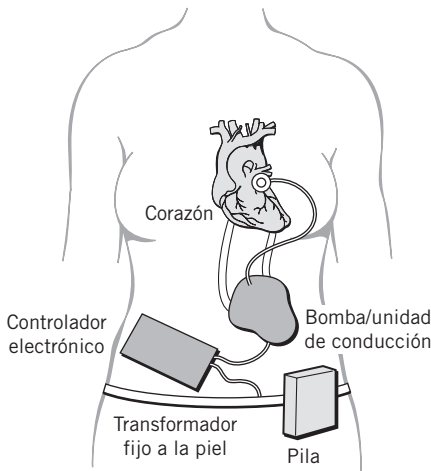


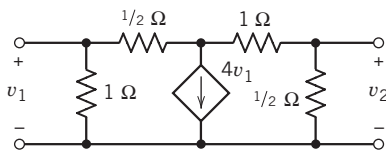
Figura P 17.4-3

**P 17.4-4** En la figura 17.4-4a se muestra una forma de dispositivo de ayuda cardíaca. El modelo del controlador electrónico y de bomba con unidad de conducción se muestra en la figura P 17.4-4b. Determine los parámetros de impedancia del modelo de dos puertos.

Dispositivo de ayuda ventricular



(a)



(b)

Figura P 17.4-4 (a) Dispositivo de ayuda cardíaca y (b) modelo del controlador y la bomba.

**P 17.4-5** Determine los parámetros  $Y$  para el circuito que se muestra en la figura P 17.4-5.

*Respuesta:*  $Y_{12} = -\frac{1}{R_2}$  y  $Y_{21} = \frac{-(1+b)}{R_2}$

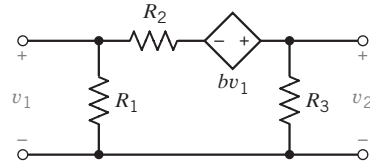


Figura P 17.4-5

**Sección 17.5 Parámetros híbridos y de transmisión**

**P 17.5-1** Encuentre los parámetros de transmisión del circuito de la figura P 17.5-1.

*Respuestas:*  $A = 1.2$ ,  $B = 6.8\Omega$ ,  $C = 0.1$  y  $D = 1.4$

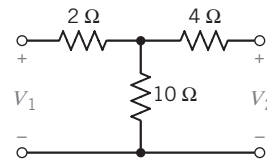
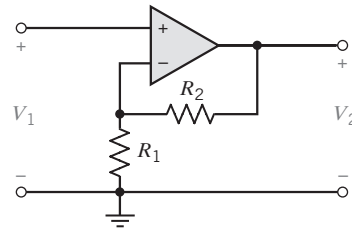


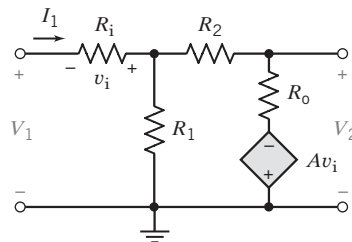
Figura P 17.5-1

**P 17.5-2** En la figura P 17.5-2 se muestra un circuito de amp op y su modelo. Determine el modelo del parámetro  $h$  del circuito y la matriz  $\mathbf{H}$  cuando  $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $R_1 = R_2 = 1 \text{ M}\Omega$ ,  $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$  y  $A = 10^4$ .

*Respuesta:*  $h_{11} = 600 \text{ k}\Omega$ ,  $h_{12} = 1/2$ ,  $h_{21} = -10^6$  y  $h_{22} = 10^{-3} \text{ S}$



(a)



(b)

Figura P 17.5-2 (a) Circuito de amp op y (b) modelo del circuito.

**P 17.5-3** Determine los parámetros  $h$  para el transformador ideal de la sección 11.11.

**P 17.5-4** Determine los parámetros  $h$  para el circuito T de la figura P 17.5-4.

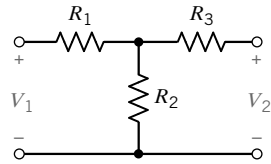


Figura P 17.5-4

**P 17.5-5** En la figura 17.5-5 se muestra un modelo simplificado de un transistor de empalme bipolar. Determine los parámetros  $h$  de este circuito.

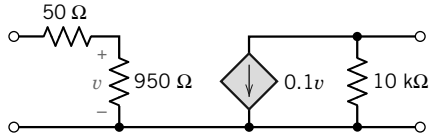


Figura P 17.5-5 Modelo de un transistor de empalme bipolar.

**Sección 17.6 Relaciones entre parámetros de dos puertos**

**P 17.6-1** Derive las relaciones entre los parámetros  $Y$  y los parámetros  $h$  utilizando las ecuaciones de definición para ambos conjuntos de parámetros.

**P 17.6-2** Determine los parámetros  $Y$  si los parámetros  $Z$  son (en ohms):

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

**P 17.6-3** Determine los parámetros  $h$  cuando los parámetros  $Y$  son (en siemens):

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

**P 17.6-4** Una red de dos puertos tiene los parámetros  $Y$  siguientes:  $Y_{12} = Y_{21} = -0.4 \text{ S}$ ,  $Y_{11} = 0.5 \text{ S}$  y  $Y_{22} = 0.6 \text{ S}$ . Determine los parámetros  $h$ .

*Respuestas:*  $h_{11} = 2 \Omega$ ,  $h_{21} = -0.8$ ,  $h_{12} = 0.8$  y  $h_{22} = 0.28 \text{ S}$

**Sección 17.7 Interconexión de redes de dos puertos**

**P 17.7-1** Conecte en paralelo los dos circuitos que se muestran en la figura P 17.7-1 y encuentre los parámetros  $Y$  de la combinación en paralelo.

*Respuestas:*  $Y_{11} = 17/6$ ,  $Y_{12} = Y_{21} = -4/3$  y  $Y_{22} = 5/3$

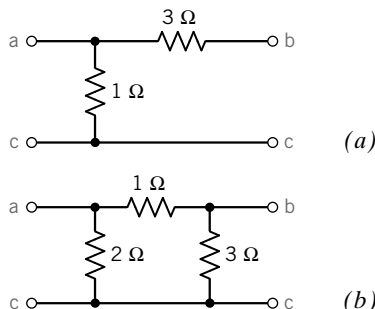


Figura P 17.7-1

**P 17.7-2** Para la red T de la figura P 17.7-2, encuentre los parámetros  $Y$  y  $Z$  y determine los parámetros resultantes después de que los dos puertos estén conectados (a) en paralelo y (b) en cascada. Los dos puertos son idénticos, como se define en la figura P 17.7-2.

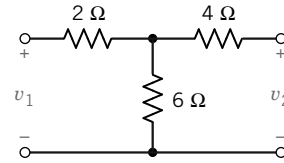


Figura P 17.7-2

**P 17.7-3** Determine los parámetros  $Y$  de la combinación en paralelo de los circuitos de la figuras P 17.7-3a, b.

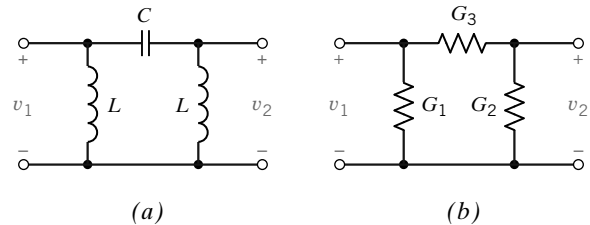


Figura P 17.7-3

**Sección 17.8 ¿Cómo podemos comprobar...?**

**P 17.8-1** Un informe de laboratorio con respecto a la figura 17.8-1 establece que  $Z_{12} = 15 \Omega$  y que  $Y_{11} = 24 \text{ mS}$ . Verifique estos resultados.

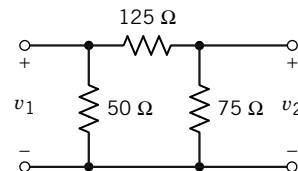


Figura P 17.8-1

**P 17.8-2** Un estudiante reporta respecto al circuito de la figura P 17.8-2, que ha determinado los parámetros de transmisión como  $A = 2(s + 10)/s$ ,  $D = A$ ,  $C = 10/s$  y  $B = (3s^2 + 80s + 400)/s^2$ . Verifique estos resultados cuando  $M = 0.1 \text{ H}$ .

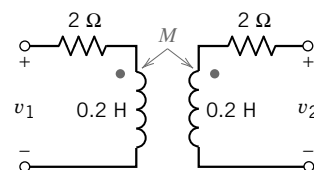


Figura P 17.8-2

## Problemas de diseño

**PD 17-1** Seleccione  $R_1$  y  $R$  de modo que  $R_{\text{ent}} = 16.6 \Omega$  para el circuito de la figura PD 17.1. Una restricción de diseño requiere que tanto  $R_1$  como  $R$  sean menores de  $10 \Omega$ .

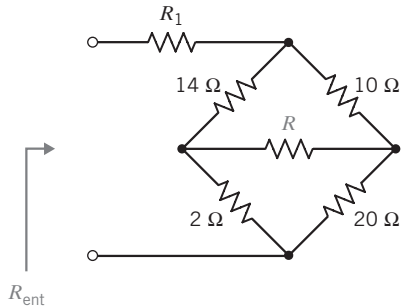


Figura PD 17-1

**PD 17-2** Se dice que el circuito en forma de puente que se muestra en la figura PD 17-2 se debe balancear cuando  $I = 0$ . Determine la relación requerida para las resistencias de puente cuando se haya logrado el balanceo.

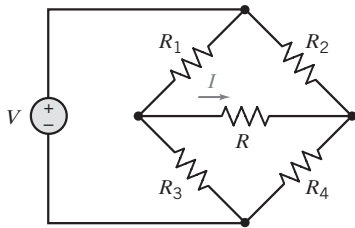


Figura PD 17-2 Circuito balanceado.

**PD 17-3** En la figura PD 17-33 se muestra un modelo híbrido de un amplificador de transistor de emisión común. Los parámetros del transistor son  $h_{21} = 80$ ,  $h_{11} = 45 \Omega$ ,  $h_{22} = 12.5 \mu\text{S}$  y  $h_{12} = 5 \times 10^{-4}$ . Seleccione  $R_L$  de modo que la ganancia de corriente  $i_2/i_1 = 79$  y la resistencia de salida del amplificador sea menor de  $10 \Omega$ .

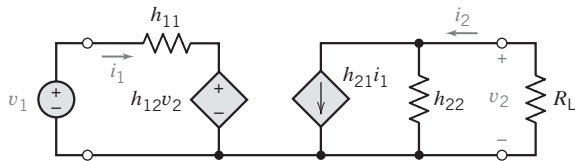


Figura PD 17-3 Modelo de amplificador de transistor.

**PD 17-4** En la figura PD 17-4 se muestra una red de dos puertos conectada a una fuente  $v_f$  y una resistencia de carga  $R_L$ .

- Determine los parámetros de impedancia de la red de dos puertos.
- Seleccione  $R_L$  de modo que la potencia máxima se entregue a  $R_L$ .

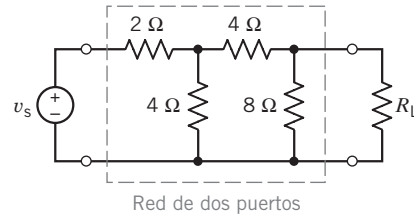


Figura PD 17-4

### PD 17-5

- Determine la  $ABCD$  (matriz de transmisión) de las redes de dos puertos que se muestran en las figuras PD 17-5a y b.
- Utilizando los resultados del inciso (a), encuentre la matriz  $ABCD$  de dominio  $s$  de la red que se muestra en c.
- Dados  $L_1 = (10/\pi)$  mH,  $L_2 = (2.5/\pi)$  mH,  $C_1 = (0.78/\pi)$   $\mu\text{F}$ ,  $C_2 = C_3 = (1/\pi)$   $\mu\text{F}$  y  $R_L = 100 \Omega$ , encuentre la ganancia del voltaje  $V_2/V_1$  del circuito abierto y la ganancia de corriente  $I_2/I_1$  de cortocircuito en condiciones de estado estable en las frecuencias siguientes: 2.5 kHz, 5.0 kHz, 7.5 kHz, 10 kHz y 12.5 kHz.

**Sugerencia:** Utilice las entradas adecuadas de la matriz  $ABCD$ . Además, observe las frecuencias resonantes del circuito.

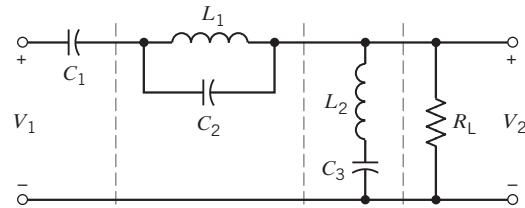
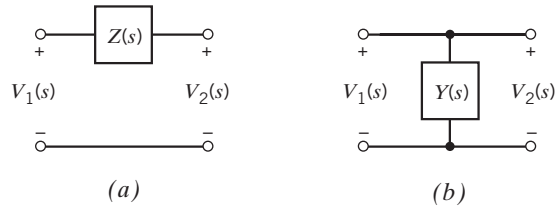


Figura PD 17-5

# Inicios con PSpice

APÉNDICE



## A.1 PSPICE

SPICE, acrónimo de *Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis* (programa de simulación con énfasis en circuitos integrados) es un programa de computadora que se utiliza para análisis numéricos de circuitos eléctricos. Desarrollado a principios de la década de 1970 en la Universidad de California en Berkeley, se le reconoce generalmente como el programa de simulación de más uso (Perry, 1998). PSpice es una versión de SPICE diseñada para computadoras personales, desarrollado por MicroSim Corporation en 1984 (Tuinenga, 88). SPICE era un programa basado en texto que requería que el usuario describiera el circuito utilizando solamente texto, y los resultados de la simulación se mostraban en la pantalla como texto. MicroSim proporcionó un postprocesador gráfico, Probe, para diagramar los resultados de las simulaciones de SPICE. Más tarde, MicroSim también proveyó una interfaz gráfica llamada Schematics que permitió a los usuarios describir circuitos de manera gráfica. El nombre del programa de simulación se cambió de PSpice a PSpice A/D cuando fue posible simular circuitos que contenían dispositivos analógicos y digitales. MicroSim fue adquirido por ORCAD<sup>®</sup>, que a su vez fue adquirida por Cadence<sup>®</sup>. ORCAD mejoró Schematics y lo renombró como Capture. “Utilizar PSpice” se refiere de modo amplio al uso de ORCAD Capture, PSpice A/D, y Probe para analizar numéricamente un circuito eléctrico.

## A.2 CÓMO EMPEZAR

Empecemos por el programa ORCAD Capture. La figura A.1 muestra la pantalla de apertura de ORCAD Capture. (Si es necesario, maximice la ventana Session Log.) La línea superior de la pantalla muestra el título del programa, ORCAD Capture CIS – Demo Edition. Bajo la línea de título se ubica una barra de menús que proporciona los menús *File (Archivo)*, *View (Ver)*, *Edit (Editar)*, *Options (Opciones)*, *Window (Ventana)* y *Help (Ayuda)*. Bajo la barra de menús se ubica una fila de botones y la regla está debajo de la fila de botones. El área de taller se localiza por debajo de la regla. El circuito que se va a simular se describe dibujándolo en este espacio de taller. Bajo este espacio se ubica una línea que contiene dos campos de mensajes. El campo de mensajes izquierdo es de particular interés porque provee información sobre la pantalla Capture. Por ejemplo, mueva el cursor a uno de los botones. El campo de mensajes izquierdo describe la función del botón. La función del tercer botón de la izquierda es *Save Active Document* (guardar el documento activo).

De la barra de menús de Capture, seleccione el menú *File (Archivo)*, haga clic en la opción *New (Nuevo)* y luego en *Project (Proyecto)*, como se muestra en la figura A.2. Se desplegará el cuadro de diálogo *New Project (Proyecto nuevo)* que se muestra en la figura A.3. Seleccione la opción *Analog Or Mixed (Análogo o combinado) A/D*, como se muestra. El cuadro de diálogo *New Project* requiere un nombre y una ubicación para el proyecto. La ubicación es el nombre del directorio o carpeta en el que Capture deberá guardar el archivo del proyecto. El nombre será el nombre del archivo o el nombre del proyecto. ORCAD Capture utiliza OPJ como sufijo para archivos de proyecto, por lo que al elegir la opción *Name to be ExampleCircuit and Location to be c:\PSpiceCircuits* se hace que ORCAD guarde un archivo denominado *Example Circuit.opj* en la carpeta *c:\PSpiceCircuits*. Observe que los nombres de archivo largos están soportados, lo que facilita aplicar nombres descriptivos a los proyectos.



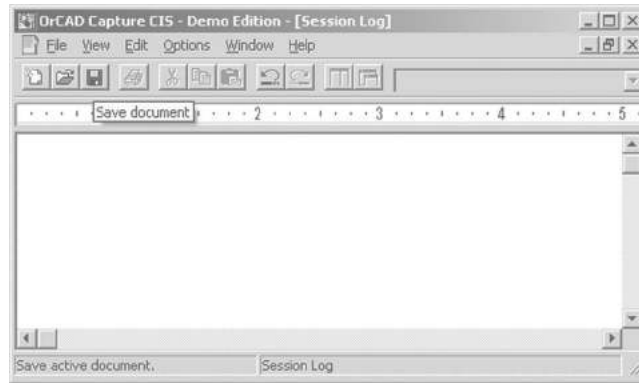


FIGURA A.1 Pantalla de apertura de ORCAD Capture CIS, versión 15.7 de edición de demostración.

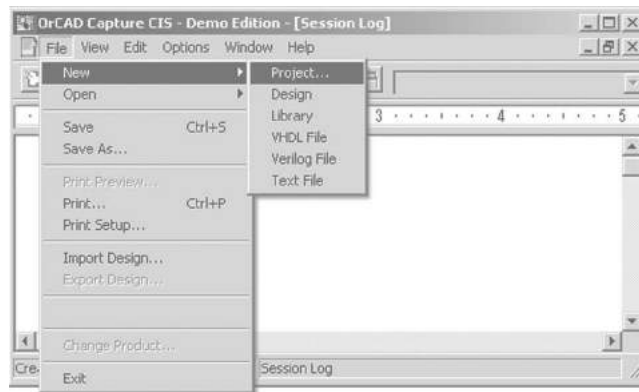


FIGURA A.2 Apertura de un nuevo proyecto en ORCAD Capture.

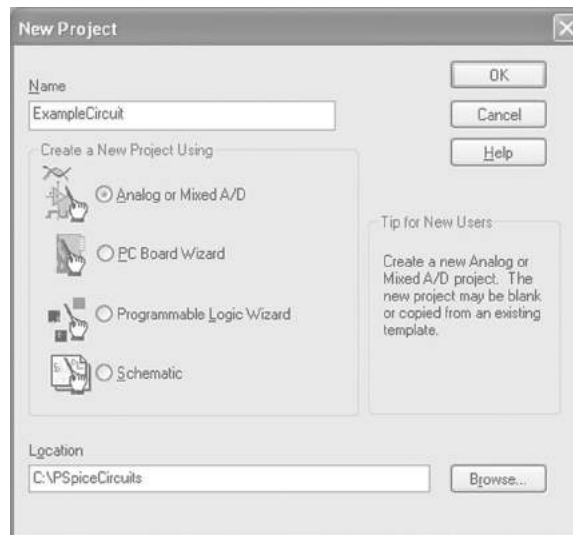


FIGURA A.3 Cuadro de diálogo *New Project*.

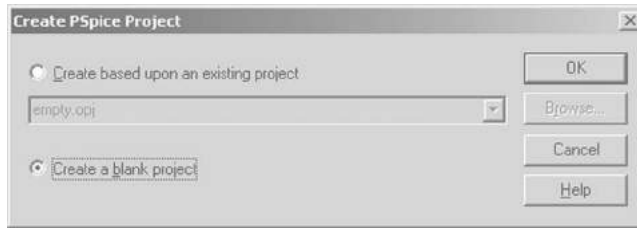


FIGURA A.4 Cuadro de diálogo *Create PSpice Project*.

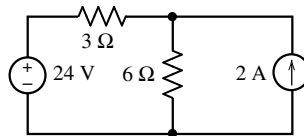


Figura A.5 El circuito ejemplo.

Haga clic en el botón OK del cuadro de diálogo *New Project* para cerrar el cuadro de diálogo y para que se despliegue el cuadro de diálogo *Create PSpice Project* que se muestra en la figura A.4. Seleccione el botón *Create a blank project* y luego haga clic en el botón OK para volver a la pantalla ORCAD Capture. Ésta ha cambiado, y se han agregado las opciones *Place*, *Macro*, *PSpice* y *Accessories* a la barra de menús; hay más botones y hay una rejilla en el espacio de taller.

Ya estamos listos para dar principio a nuestra primera simulación con PSpice. En ella simularemos el circuito que se muestra en la figura A.5 para determinar los voltajes de nodos. Empezamos por dibujar el circuito en el espacio de taller de ORCAD Capture.

### A.3 DIBUJO DE UN CIRCUITO EN EL ESPACIO DE TALLER DE ORCAD CAPTURE

Dibujar un circuito en el espacio de taller de ORCAD requiere tres actividades:

1. Colocar los elementos del circuito en el espacio de taller de ORCAD Capture.
2. Ajustar los valores de los parámetros de elementos del circuito; por ejemplo, las resistencias de los resistores.
3. Bobinar el circuito para conectar los elementos de circuito.

Para empezar, en la barra de menús de Capture seleccione el menú *Part* y haga clic en la opción *Place* para que se despliegue el cuadro de diálogo *Place Part* que se muestra en la figura A.6. Para obtener un resistor, seleccione la opción ANALOG de la lista de bibliotecas y R de la lista de partes. Haga clic en el botón OK para cerrar el cuadro de diálogo *Place Part* y volver a la pantalla de Capture. Luego de volver a la pantalla de Capture, el cursor está dibujando el símbolo para un resistor. Coloque el resistor, como lo desee, con un clic. Ahora el cursor estará dibujando un segundo símbolo de resistor. Hacer clic con el botón derecho da por resultado el menú que se muestra en la figura A.7. Las selecciones que se hagan con este menú harán que el resistor se voltee o gire. Seleccione la opción *End Mode* para dejar de colocar resistores. (Si no está listada la opción ANALOG entre las bibliotecas disponibles en el cuadro de diálogo *Place Part*, haga clic en el botón *Add Library*. ORCAD Capture

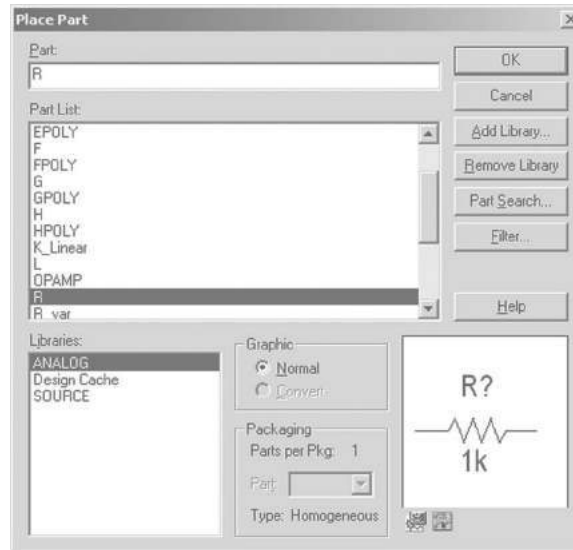


FIGURA A.6 El cuadro de diálogo *Place Part*.

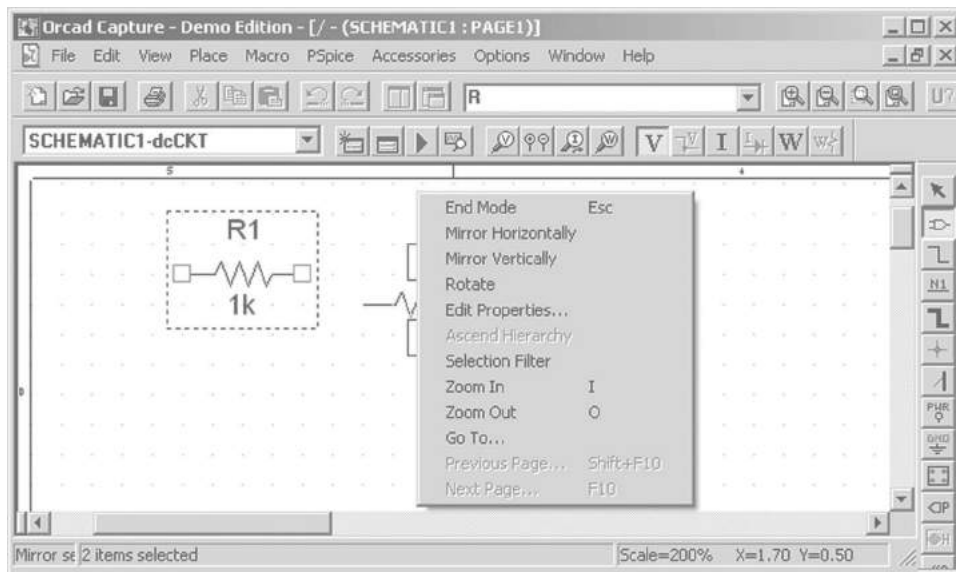


FIGURA A.7 Un clic con el botón derecho mientras se colocan las partes hace que se despliegue este menú.

proporciona varias bibliotecas que contienen partes de circuitos. Los nombres de archivos o las bibliotecas de partes utilizan el sufijo OLB. Seleccione las bibliotecas analog.olb y source.olb.)

SPICE requiere que todo circuito incluya un nodo a tierra. En la barra de menús de Capture, seleccione el menú *Part* y haga clic en la opción *Ground* para desplegar el cuadro de diálogo *Place Ground*. El nodo a tierra es una parte de PSpice denominada 0 y está contenido en la biblioteca SOURCE. (Quizá se tenga que agregar esta biblioteca. Haga clic en el botón *Add Library* para que se despliegue el cuadro de diálogo *Browse File*. El archivo de biblioteca se denomina source.olb y reside en la carpeta de PSpice. Seleccione source.olb y la biblioteca y luego haga clic en el botón *Open* para

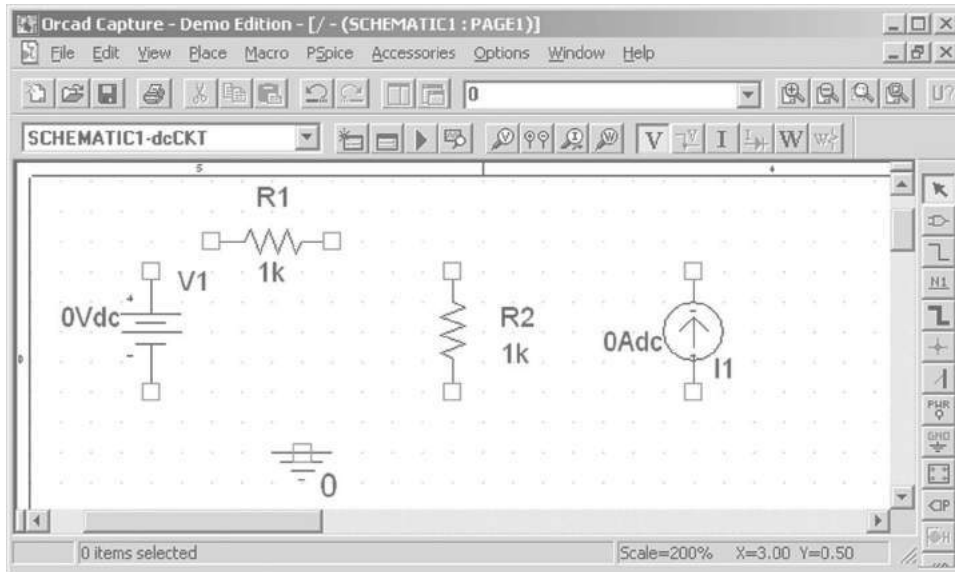


FIGURA A.8 Pantalla de ORCAD Capture luego que se han colocado las partes.

que esta biblioteca esté disponible y para volver al cuadro de diálogo *Place Ground*.) Coloque el nodo a tierra en el espacio de taller de Capture. La figura A.8 muestra la pantalla de Capture luego de que se han colocado las partes.

Las resistencias de los selectores tienen cada uno el valor predeterminado de 1k. Haga clic en 1k del resistor vertical para seleccionarlo, luego haga clic en cualquier punto del espacio de taller de Capture para obtener el menú que se muestra en la figura A.9. Elija la opción *Edit Properties* para que se despliegue el cuadro de diálogo *Display Properties* que se muestra en la figura A.10. Cambie

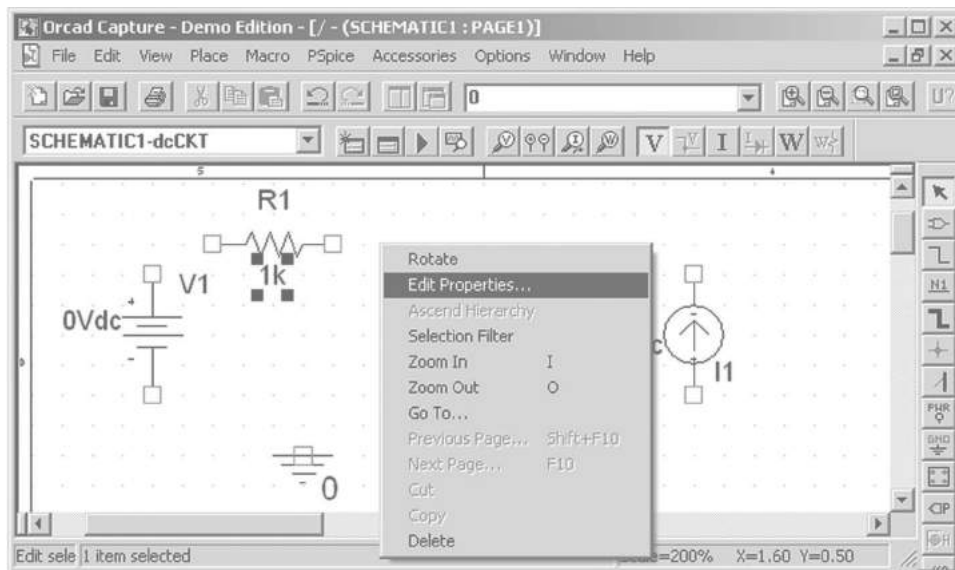


FIGURA A.9 El valor, 1k, se muestra resaltado. Un clic con el botón derecho en cualquier punto del espacio de taller de Capture hace que se despliegue este menú emergente.

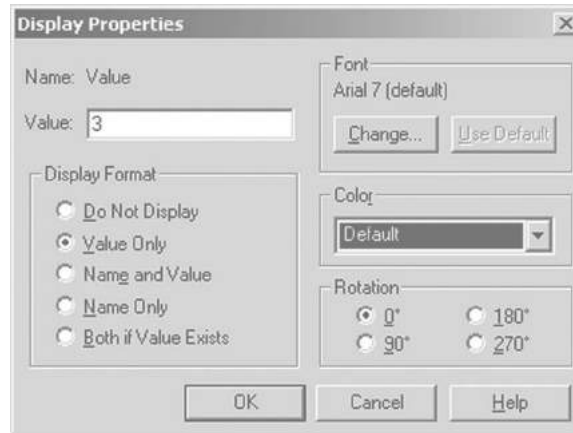


FIGURA A.10 El cuadro de diálogo Display Properties.

el valor de 1k a 3. La figura A.11 muestra el espacio de taller de Capture luego de que se han ajustado los valores de parámetro de las partes.

Seleccione el menú *Parts* y haga clic en la opción *Wire* para el cableado de todas las partes. En la figura A.11 observe que las terminales de cada parte están marcadas con cuadritos. Para el cableado de dos terminales, haga clic y sostenga una terminal, arrastre el ratón a la otra terminal y suelte el ratón. Por lo general, la trayectoria del cable seguirá la ruta del ratón, pero los cables se dibujarán utilizando líneas rectas horizontales y verticales. Los cables también pueden conectar terminales a cables o cables a cables. Para detener el cableado, haga clic con el botón derecho y seleccione la opción *End Mode* del menú que aparece. La figura A.12 muestra el circuito después de que se han establecido los cables.

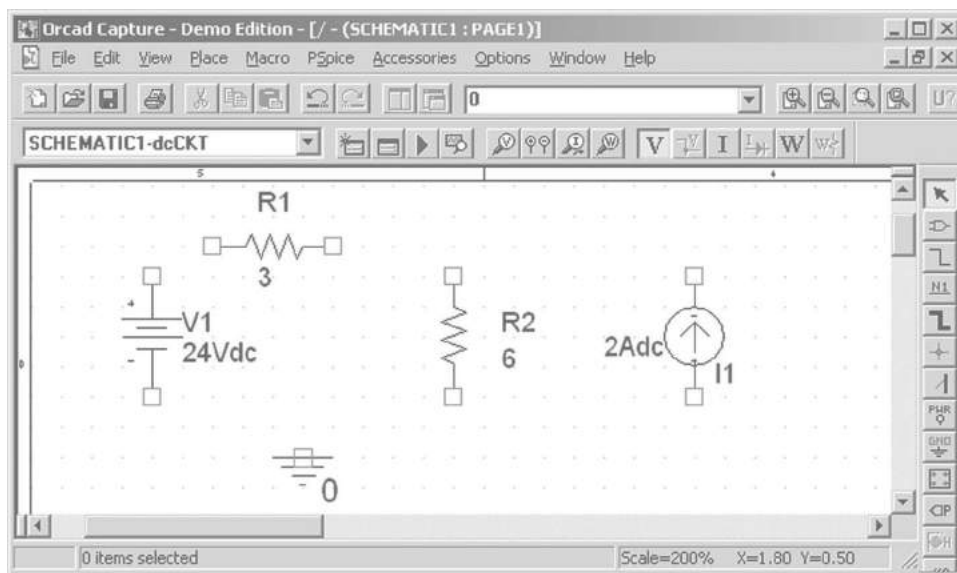


FIGURA A.11 Pantalla de Capture después de ajustar los valores de los parámetros del circuito.

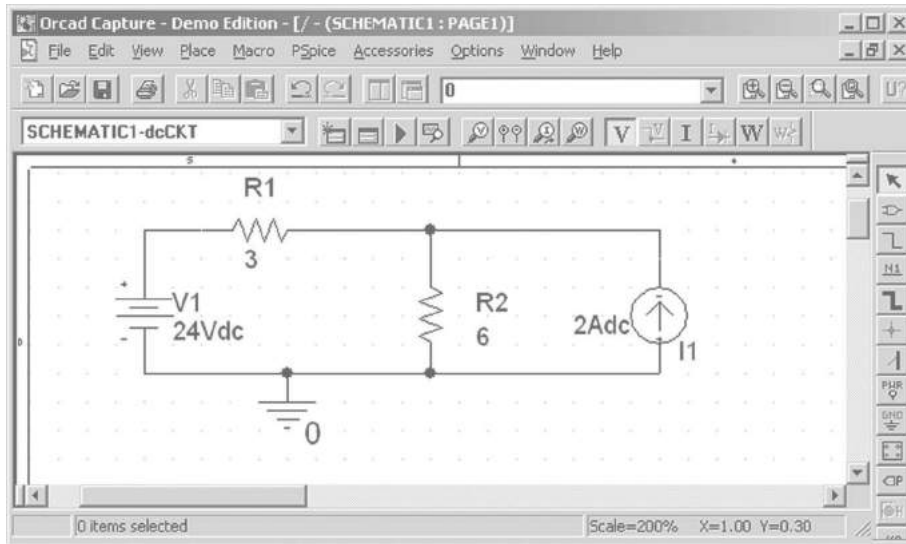


FIGURA A.12 El circuito de la figura A.5 como se describe en Capture.

#### A.4 ESPECIFICACIONES Y EJECUCIÓN DE LA SIMULACIÓN

De la barra de menús de ORCAD Capture, seleccione el menú *PSpice* y haga clic en la opción *New Simulation Profile* para desplegar el cuadro de diálogo *New Simulation*. Proporcione un nombre, como análisis de cd, y luego haga clic en la opción *Create*. Se desplegará el cuadro de diálogo *Simulation Settings*. Seleccione la opción *Bias Point* de la lista *Analysis type* y seleccione la opción *General Settings* que está debajo de la opción *Options*. Haga clic en el botón OK para cerrar el cuadro de diálogo *Simulation Settings*. De la barra de menús de ORCAD Capture seleccione el menú *PSpice* y haga clic en la opción *Run* para ejecutar la simulación. La figura A.13 muestra los resultados de la simulación.

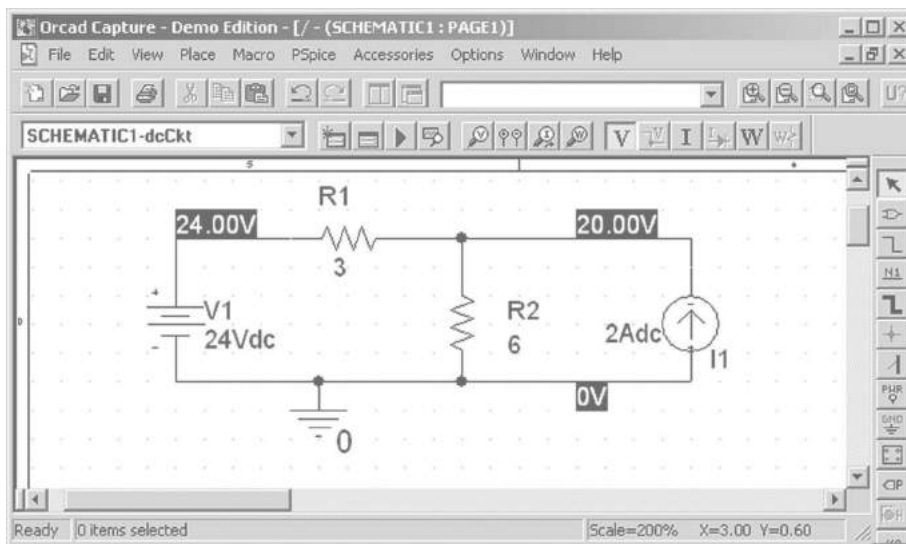


FIGURA A.13 Después de llevar a cabo la simulación, ORCAD Capture etiqueta los voltajes de nodos.

# MATLAB, matrices y aritmética compuesta

## APÉNDICE

# B

El uso del programa de computadora MATLAB<sup>®</sup> se ha vuelto común entre los ingenieros para efectuar una gran diversidad de cálculos técnicos. MATLAB, abreviatura de MATrix LABoratory, es un producto cuyo soporte recibe de la compañía The Math Works, la cual proporciona documentación de demostraciones y aplicaciones en su sitio Web, [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com). Además, MATLAB cuenta con una amplia ayuda integrada, como se muestra en la figura B.1.

En este apéndice utilizaremos MATLAB primero como una poderosa calculadora, luego nos servirá para resolver ecuaciones que implican matrices o números compuestos y, finalmente, para efectuar funciones de trazado de diagramas.

### B.1 USO DE MATLAB COMO CALCULADORA

Considere la ecuación

$$C \times D = 4A + B \Rightarrow D = \frac{4A + B}{C}$$

Utilicemos MATLAB para evaluar  $D$  cuando  $A = 4$ ,  $B = 7$  y  $C = 6$ . Para ello, escribimos las ecuaciones que representen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  en el espacio de taller de MATLAB, utilizando las operaciones

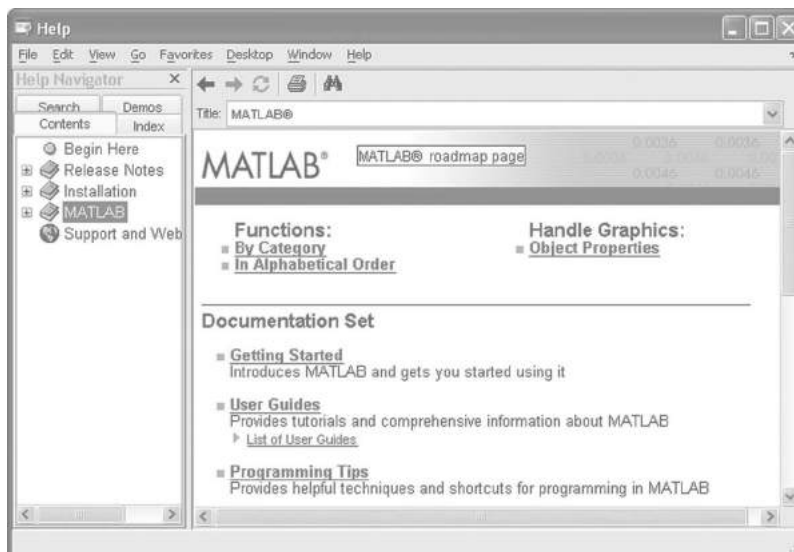


FIGURA B.1 Se accede a MATLAB Help haciendo clic en el menú *Help* de la barra de menús de MATLAB.

Tabla B.1 Operaciones aritméticas

OPERACIÓN	SÍMBOLO	ECUACIÓN	MATLAB
Suma	+	$4 + x$	$4 + x$
Resta	-	$4 - x$	$4 - x$
Multiplicación	*	$4 x$	$4 * x$
División	/	$4/x$	$4 / x$
Potencia	^	$4^x$	$4^x$

Tabla B.2 Funciones integradas

FUNCIÓN	ECUACIÓN	MATLAB
seno	$\text{sen}(x)$	$\text{sen}(x)$
coseno	$\text{cos}(x)$	$\text{cos}(x)$
tangente	$\text{tan}(x)$	$\text{tan}(x)$
seno de arco	$\text{sen}^{-1}(x)$	$\text{asin}(x)$
coseno de arco	$\text{cos}^{-1}(x)$	$\text{acos}(x)$
tangente de arco	$\text{tan}^{-1}(x)$	$\text{atan}(x)$
logaritmo	$\log_{10}(x)$	$\log_{10}(x)$
logaritmo natural	$\ln(x)$	$\log(x)$
exponencial	$e^x$	$\text{exp}(x)$
raíz cuadrada	$\sqrt{x}$	$\text{sqrt}(x)$
valor absoluto	$ x $	$\text{abs}(x)$

aritméticas y las funciones disponibles en MATLAB. Las tablas B.1 y B.2 enlistan las operaciones matemáticas y algunas de las funciones disponibles en MATLAB.

La figura B.2 muestra el espacio de taller de MATLAB. El símbolo  $\gg$  es el cursor de MATLAB. Para indicar que  $A = 4$ , escribimos

$$A = 4; \langle \text{Enter} \rangle$$

después del cursor. ( $\langle \text{Enter} \rangle$  indica la tecla Enter. Si omitimos el punto y coma, MATLAB nos dirá el valor de  $A$ . Como ya conocemos el valor de  $A$ , incluimos el punto y coma para ahorrar espacio.) MATLAB responde al  $\langle \text{Enter} \rangle$  proporcionando otro cursor. Escribimos las ecuaciones para  $B$ ,  $C$  y luego  $D$  de manera similar. (MATLAB emplea el orden usual de precedencia para operaciones aritméticas.

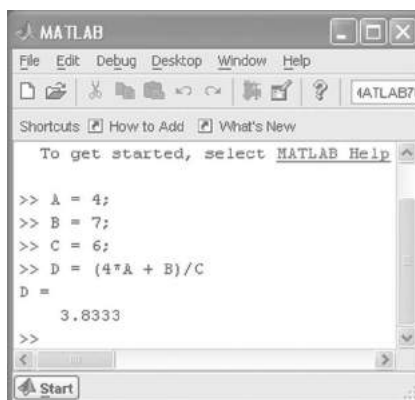


FIGURA B.2 Uso de MATLAB como calculadora.



Por lo tanto, en las ecuaciones se usan los paréntesis representando a  $D$ , para garantizar que la suma se realice antes de la división.) Observe que el punto y coma se omitió desde la ecuación que representa a  $D$ , por lo que MATLAB respondió al <Enter> proporcionando el valor de  $D$ .

### EJEMPLO B.1 Funciones trigonométricas

Evalúe

$$\theta = \text{sen}^{-1}(\cos(72^\circ))$$

#### Solución

Las funciones trigonométricas  $\text{sen}$ ,  $\text{cos}$  y  $\text{tan}$  esperan un ángulo en radianes, y las funciones trigonométricas inversas  $\text{asen}$ ,  $\text{acos}$  y  $\text{atan}$  producen un ángulo en radianes. Como se nos dio un ángulo en grados, determinemos el valor de  $\theta$  en grados. El comando MATLAB

```
>> theta = (180/pi) * asin(cos(72*pi/180))
```

Produce el resultado

```
theta = 18.0000
```

Los multiplicadores  $\text{pi}/180$  y  $180/\text{pi}$  convierten unidades de ángulos de grados a radianes y viceversa. A guisa de comprobación, el comando MATLAB

```
>> phi = (180/pi) * acos(sin(theta*pi/180))
```

produce por resultado

```
phi = 72
```

## B.2 MATRICES, DETERMINANTES Y ECUACIONES SIMULTÁNEAS

Hay muchas situaciones en el análisis de circuitos en las que se tiene que ver con arreglos rectangulares de números. El arreglo rectangular de números

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

se conoce como *matriz*. Los números  $a_{ij}$  se llaman *elementos* de la matriz y el subíndice  $i$  indica la fila, así como el subíndice  $j$  indica la columna.

Se dice que una matriz con  $m$  filas y  $n$  columnas debe ser de *orden*  $m \times n$  o, de manera alternativa, una matriz  $m \times n$ . (Leemos “ $m \times n$ ” como “ $m$  por  $n$ ”.) Cuando el número de las columnas es igual al número de filas,  $m = n$ , la matriz se denomina *matriz rectangular* de orden  $n$ . Es muy común utilizar letras mayúsculas en negritas para indicar una matriz  $m \times n$ .

Una matriz que consta sólo de una columna, es decir, una matriz  $m \times 1$ , se conoce como una matriz de columna o, más comúnmente, un *vector en columna*. Representamos un vector en columna con letras minúsculas en negritas como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

La suma de dos matrices es posible para matrices del mismo orden. Esta suma de dos matrices se obtiene agregando los elementos correspondientes. Así, si los elementos de  $\mathbf{A}$  son  $a_{ij}$ , y los elementos de  $\mathbf{B}$  son  $b_{ij}$ , y si

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

entonces los elementos de  $\mathbf{C}$  se obtienen como

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

La suma de matrices es conmutativa, es decir

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

Incluso, la operación de suma es asociativa, por lo que

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

Para efectuar la operación de multiplicar la matriz  $\mathbf{A}$  por una constante  $\alpha$ , cada elemento de la matriz se multiplica por la constante. Por consiguiente, podemos escribir

$$\alpha\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

La multiplicación de matrices se define como una forma de ayudar a la solución de ecuaciones lineales simultáneas. La multiplicación de dos matrices  $\mathbf{AB}$  requiere que el número de columnas de  $\mathbf{A}$  sea igual al número de filas de  $\mathbf{B}$ . Por lo tanto, si  $\mathbf{A}$  es del orden  $m \times n$  y  $\mathbf{B}$  es del orden  $n \times q$ , el producto es una matriz de orden  $m \times q$ . Los elementos de un producto

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$$

se hallan multiplicando la  $i$ -ésima fila de  $\mathbf{A}$  y la  $j$ -ésima columna de  $\mathbf{B}$  y la suma de estos productos da por resultado el elemento  $c_{ij}$ . Es decir,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{iq}b_{qj} = \sum_{k=1}^q a_{ik}b_{kj}$$

Por lo tanto, obtenemos  $c_{11}$ , el primer elemento de  $\mathbf{C}$ , al multiplicar la primera fila de  $\mathbf{A}$  por la primera columna de  $\mathbf{B}$  y sumando los productos de los elementos. Debemos notar que, por lo general, la multiplicación de matriz no es conmutativa, es decir,

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

### EJEMPLO B.2 Matrices en MATLAB

Evalúe

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

```

MATLAB
File Edit Debug Desktop Window Help
Shortcuts How to Add What's New
>> A = [2 1; 4 2]
A =
     2     1
     4     2
>> B = [6 1
        3 1]
B =
     6     1
     3     1
>> A+B
ans =
     8     2
     7     3
>> A-B
ans =
    -4     0
     1     1
>> A*B
ans =
    15     3
    30     6
>>

```

FIGURA B.3 Aritmética de matriz.

## Solución

La figura B.3 muestra cómo hacer estos cálculos utilizando MATLAB. Primero, se definen dos variables de matriz,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

La figura B.3 muestra dos formas de definir una variable de matriz en MATLAB. El comando

```
>>A = [ 2 1; 4 2 ]
```

utiliza un espacio para separar los elementos en cada fila de la matriz y un punto y coma para separar las filas de la matriz. El comando

```
>> B = [ 6 1
        2 1 ]
```

utiliza un espacio para separar los elementos en una fila de la matriz y un <Enter> para separar las filas de la matriz. (Después del <Enter>, se usan los espacios para alinear las columnas de la matriz **B**.) Ambos comandos utilizan los símbolos de corchete, [y], para indicar el inicio y el fin de la matriz.

La figura B.3 muestra que las operaciones listadas en la tabla 1 se pueden utilizar para efectuar la aritmética de la matriz. Vemos que

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{y } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 30 & 6 \end{bmatrix}$$

Un conjunto de ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (\text{B-1})$$

se pueden escribir en forma de matriz como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (\text{B-2})$$

Con cierta frecuencia, nos gustaría resolver un conjunto de ecuaciones simultáneas como las de la ecuación B-1. En otras palabras, dados los valores de los coeficientes  $a_{ij}$  y  $b_{ij}$ , querríamos determinar los valores de las variables  $x_i$ . Utilizando MATLAB expresamos la ecuación en forma de matriz, como se muestra en la ecuación B-2, al introducir las matrices **A** y **b** y luego dar el comando MATLAB.

```
>> x = A\b
```

MATLAB responderá con el valor de la matriz **x**.

**EJEMPLO B.3** Solución de ecuaciones simultáneas utilizando MATLAB

Resuelva las ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 12 \\4x_2 - 2x_3 &= -1 \\6x_1 - x_2 - x_3 &= 0\end{aligned}$$

**Solución**

Primero, escriba las ecuaciones simultáneas como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

A continuación, introduzca las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{b}$  en la ventana de comando MATLAB como se muestra en la figura B.4. Entonces, emita el comando MATLAB

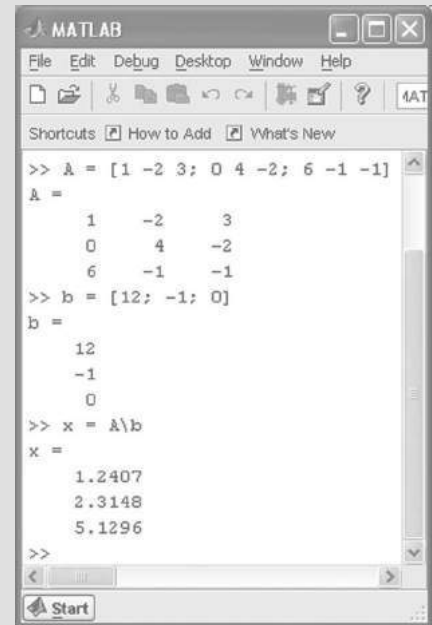
$$\gg \mathbf{x} = \mathbf{A} \backslash \mathbf{b}$$

MATLAB provee el resultado

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.2407 \\ 2.3148 \\ 5.1296 \end{bmatrix}$$

lo que indica que

$$x_1 = 1.2407, x_2 = 2.3148 \text{ y } x_3 = 5.1296$$



```

MATLAB
File Edit Debug Desktop Window Help
Shortcuts How to Add What's New
>> A = [1 -2 3; 0 4 -2; 6 -1 -1]
A =
     1     -2     3
     0     4     -2
     6     -1     -1
>> b = [12; -1; 0]
b =
    12
    -1
     0
>> x = A\b
x =
    1.2407
    2.3148
    5.1296
>>
  
```

FIGURA B.4 Solución de ecuaciones simultáneas.

También podemos resolver ecuaciones simultáneas utilizando la *regla de Cramer*, la cual implica determinantes, menores y cofactores. El *determinante* de una matriz es un número asociado con una matriz rectangular. Definimos la determinante de una matriz rectangular  $\mathbf{A}$  como  $\Delta$ , donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Por ejemplo, la determinante de una matriz  $2 \times 2$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Del mismo modo, la determinante de una matriz  $3 \times 3$  es

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

En general, tenemos la capacidad de determinar la determinante  $\Delta$  en términos de cofactores y menores. La determinante de una submatriz de  $\mathbf{A}$  obtenida por la eliminación de  $\mathbf{A}$  en la  $i$ -ésima fila de la  $j$ -ésima columna se denomina la menor del elemento  $a_{ij}$  y se indica como  $m_{ij}$ .

El cofactor  $c_{ij}$  es una menor con un signo asociado, de modo que

$$c_{ij} = (-1)^{(i+j)} m_{ij}$$

La regla para evaluar la determinante  $\Delta$  utilizando la  $i$ -ésima fila de una matriz  $n \times n$  es

$$\Delta = \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{ij}$$

para un valor seleccionado de  $i$ . Como alternativa, podemos obtener  $\Delta$  utilizando la  $j$ -ésima columna y, entonces,

$$\Delta = \sum_{i=1}^n a_{ij} c_{ij}$$

para un valor selecto de  $j$ .

La regla de Cramer establece que la solución para la incógnita,  $x_k$ , de las ecuaciones simultáneas de la ecuación B-1 es

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$$

donde  $\Delta$  es la determinante de  $\mathbf{A}$  y  $\Delta_k$  es la determinante formada por el reemplazo de la  $k$ -ésima columna de  $\mathbf{A}$  por el vector columna  $\mathbf{b}$ .

### B.3 NÚMEROS COMPUESTOS Y ARITMÉTICA COMPUESTA

Podemos representar el número compuesto  $c$  como

$$c = a + jb \quad (\text{B-3})$$

donde  $a$  y  $b$  son números reales y  $j = \sqrt{-1}$ . Es muy útil asociar este número compuesto con un punto en el plano compuesto como se muestra en la figura B.5a, la cual muestra que los números reales  $a$  y  $b$  en la ecuación B.3 son las proyecciones del punto hasta los ejes real e imaginario. En consecuencia,  $a$  se denomina la *parte real* de  $c$ , y a  $b$  se le llama la *parte imaginaria* de  $c$ . Escribimos

$$a = \text{Re}\{c\} \text{ y } b = \text{Im}\{c\}$$

La figura B.5b ilustra una representación alterna del número compuesto  $c$ , en la cual se dibuja un segmento de línea desde el origen del plano compuesto hasta el punto que representa el número compuesto. El ángulo de este segmento de línea,  $\theta$ , medido en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj a partir del eje, se denomina el *ángulo* del número compuesto. La longitud del segmento de línea,  $r$ , se denomina la *magnitud* del número compuesto.

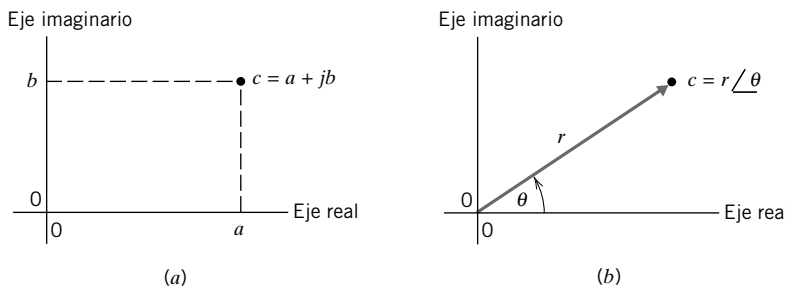


FIGURA B.5 Formas (a) rectangular y (b) polar de un número compuesto.

La forma polar representa el número compuesto en términos de su magnitud y ángulo. Escribimos

$$c = r \angle \theta$$

Para indicar que  $r$  es la magnitud del número compuesto  $c$  y que  $\theta$  es el ángulo de  $c$ , escribimos

$$r = |c| \text{ y } \theta = \angle c$$

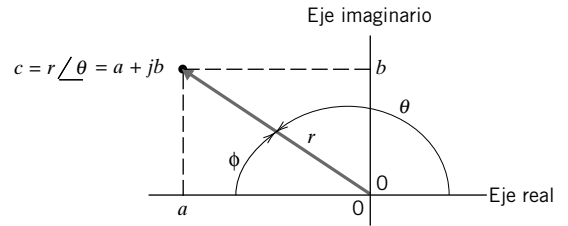


FIGURA B.6 Un número compuesto que tiene  $a \angle \lambda \tau; 0$ .

La figura B.6 muestra un número compuesto  $c$  con  $\text{Re}\{c\} < 0$ . Observe que  $\theta$ , no  $\phi$ , es el ángulo de  $c$ .

Dado que un número compuesto puede ser expresado en las formas rectangular y polar, escribimos

$$a + jb = c = r \angle \theta$$

La trigonometría de las figuras B.4 y B.5 proporciona las ecuaciones siguientes para la conversión entre las formas rectangular y polar de números compuestos.

$$a = r \cos(\theta), \quad b = r \sin(\theta), \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

y

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) & a > 0 \\ 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{b}{-a}\right) & a < 0 \end{cases}$$

Vale la pena hacer notar algunos casos especiales.

$$1 = 1 \angle 0^\circ, \quad j = 1 \angle 90^\circ, \quad -1 = 1 \angle \pm 180^\circ \text{ y } -j = 1 \angle -90^\circ = 1 \angle 270^\circ$$

A continuación, consideremos matemáticas para números compuestos. Convertiremos números compuestos a la forma rectangular antes de sumar o restar. Entonces,

$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$$

y

$$(a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d)$$

Convertiremos números compuestos a la forma polar antes de multiplicar o dividir. Entonces,

$$(A \angle \theta)(B \angle \phi) = AB \angle (\theta + \phi) \text{ y } \frac{A \angle \theta}{B \angle \phi} = \frac{A}{B} \angle (\theta - \phi)$$

La *conjugada* del número compuesto  $c = a + jb$  se indica como  $c^*$  y se define como

$$c^* = a - jb$$

En la forma polar, tenemos

$$c^* = r \angle -\theta$$

Una tercera representación de números compuestos, la forma exponencial, es motivada por la fórmula de Euler, la cual es

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

Tabla B.3 Funciones de aritmética compuesta		
FUNCIÓN	ECUACIÓN	MATLAB
Parte real	$\text{Re}\{c\}$	real(c)
Parte imaginaria	$\text{Im}\{c\}$	imag(c)
Magnitud	$ c $	abs(c)
Ángulo	$\angle c$	angle(c)
Conjugada compleja	$c^*$	conj(c)

En consecuencia,  $r e^{j\theta} = r \cos \theta + j r \text{sen} \theta$

Del mismo modo, cuando convertimos de forma rectangular a forma polar,

$$r \angle \theta = r \cos \theta + j r \text{sen} \theta$$

Teniendo en cuenta que los lados derechos de las dos ecuaciones anteriores son idénticos, establece la equivalencia entre las formas exponencial y polar de un número compuesto.

$$r e^{j\theta} = r \angle \theta$$

La conversión entre las formas exponencial y polar es inmediata. Cuando utilicemos MATLAB, representaremos un número compuesto de forma polar por el número compuesto de forma exponencial equivalente.

Vale la pena observar que la fórmula de Euler proporciona fórmulas para el seno y el coseno.

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \text{ y } \text{sen} \theta = \frac{1}{2j} (e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

La tabla B.3 lista algunas de las funciones aritméticas compuestas disponibles en MATLAB.

#### EJEMPLO B.4 Formas rectangular y polar de números compuestos

```

MATLAB
File Edit Debug Desktop Window Help
Shortcuts How to Add What's New
>> c1 = 4 - j*3;
>> abs(c1)
ans =
    5
>> angle(c1)*(180/pi)
ans =
   -36.8699
>> c2 = 6.2*exp(-j*120*pi/180)
c2 =
   -3.1000 - 5.3694i
>>
  
```

FIGURA B.7 Números compuestos.

Expresar  $c_1 = 4 - j3$  en formas exponencial y polar. Expresar  $c_2 = 6.2 \angle -120^\circ$  en forma rectangular.

#### Solución

Hacer manualmente las conversiones da por resultado

$$c_1 = \sqrt{4^2 + (-3)^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right) = 5 \angle -36.87^\circ$$

y

$$c_2 = 6.2 \cos(-120^\circ) + j6.2 \text{sen}(-120^\circ) = -3.1 - j5.37$$

En la figura B.7, MATLAB hace las mismas conversiones con los mismos resultados. Los factores  $180/\pi$  y  $\pi/180$  se utilizan para convertir radianes en grados y grados en radianes. Observe que la función `angle(c1)` da el ángulo de  $c_1$  en radianes y la función `exp(-j*\theta)` espera que  $\theta$  se dé en grados.

**EJEMPLO B.5** Números compuestos con aritmética

Encuentre  $c + d$ ,  $c - d$ ,  $cd$  y  $c/d$  cuando  $c = 4 - j3$  y  $d = 6.2 \angle -120^\circ$ .

**Solución**

Primero, convirtamos  $c$  a forma polar y  $d$  a forma rectangular.

$$c = \sqrt{4^2 + (-3)^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right) = 5 \angle -36.87^\circ$$

y

$$\begin{aligned} d &= 6.2 \cos(-120^\circ) + j6.2 \sin(-120^\circ) \\ &= -3.1 - j5.37 \end{aligned}$$

Utilizar la forma rectangular a la suma y resta, nos da

$$\begin{aligned} c + d &= (4 - j3) + (-3.1 - j5.37) \\ &= (4 - 3.1) + j(-3 - 5.37) = 0.9 - j8.37 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} c - d &= (4 - j3) - (-3.1 - j5.37) \\ &= (4 + 3.1) + j(-3 + 5.37) = 7.1 + j2.37 \end{aligned}$$

Aplicar la forma polar a la multiplicación y la división nos da

$$\begin{aligned} cd &= \left(5 \angle -36.87^\circ\right) \left(6.2 \angle -120^\circ\right) \\ &= (5 \times 6.2) \angle (-36.87^\circ - 120^\circ) \\ &= 31 \angle -156.87^\circ \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{c}{d} &= \frac{5 \angle -36.87^\circ}{6.2 \angle -120^\circ} \\ &= \left(\frac{5}{6.2}\right) \angle (-36.87^\circ + 120^\circ) \\ &= 0.806 \angle 83.13^\circ \end{aligned}$$

En la figura B.8 MATLAB hace la misma aritmética con los mismos resultados.

```

MATLAB
File Edit Debug Desktop Window Help
Shortcuts How to Add What's New
>> c = 4 - j*3;
>> d = 6.2*exp(-j*120*pi/180);
>> c+d
ans =
    0.9000 - 8.3694i
>> c-d
ans =
    7.1000 + 2.3694i
>> e = c*d;
>> abs(e)
ans =
    31.0000
>> (180/pi)*angle(e)
ans =
   -156.8699
>> f=c/d;
>> abs(f)
ans =
    0.8065
>> (180/pi)*angle(f)
ans =
    83.1301
>>
  
```

FIGURA B.8 Aritmética compuesta.

**B.4 FUNCIONES DE TRAZADO UTILIZANDO MATLAB**

Considere la ecuación

$$y = 0.2x^2 + 1.6$$

el comando MATLAB

```
>> plot(x,y)
```

le indica a MATLAB que trace  $y$  como una función de  $x$ . El comando requiere que  $x$  sea un vector de hilera, es decir, una matriz  $1 \times n$  que contenga una lista de valores espaciados de igual manera de la variable  $x$ , y que  $y$  sea un vector de hilera que contenga una lista de los valores correspondientes de la variable  $y$ .



Para obtener una lista de valores espaciados de igual manera de la variable  $x$ , utilizamos un comando de MATLAB de la forma

```
>> x = [xs : dx : xf]
```

donde  $x_s$  es el valor de inicio de  $x$ ,  $dx$  es el incremento de  $x$  y  $x_f$  es el valor final de  $x$ . Por ejemplo, el comando MATLAB

```
>> x = [-5 : 4 : 15]
```

produce la lista

```
>> x = -5 -1 3 7 11 15
```

Para obtener la lista de los valores correspondientes de la variable  $y$ , editamos el comando MATLAB

```
>> y=0.2*x.^2+1.6
```

el cual produce la lista

```
>> y = 0.6 1.4 2.2 3.0 3.8 4.6
```

(Observe la operación “ $\wedge$ ” en este comando. La operación  $\wedge$  es la operación de potencia de la tabla B.1, y  $x$  es una matriz. El  $\cdot$  antes de  $\wedge$  le dice a MATLAB que aplique la operación de potencia a cada elemento de  $x$  en vez de a la matriz  $x$  en sí.)

### EJEMPLO B.6 Funciones de trazado con el uso de MATLAB

Utilice MATLAB para verificar que

$$5.61 \cos(100t) - 13.96 \sin(100t) = 15 \cos(100t + 68.1^\circ)$$

#### Solución

Los comandos MATLAB

```
>> t = [0 : 0.001 : 0.12];
>> v1 = 5.61*cos(100*t) - 16.96*sin(100*t);
>> v2 = 15*cos(100*t + 68.1*pi/180);
>> plot(t,v1,t,v2)
```

producen el trazo que se muestra en la figura B.9. Utilice el comando MATLAB

```
>> plot(t,v1,t,v2)
```

le dice a MATLAB que trace tanto  $v_1$  contra  $t$  y  $v_2$  contra  $t$  en el mismo eje. Como los trazos se sobrepone exactamente, llegamos a la conclusión de que  $v_1$  y  $v_2$  son funciones idénticas de  $t$ .

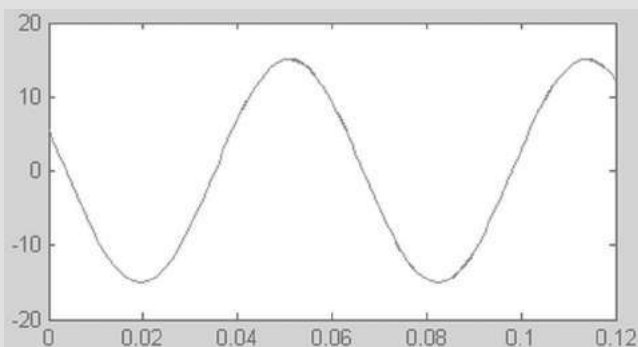
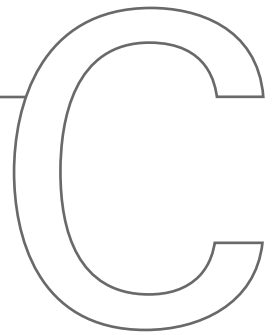


FIGURA B.9 Trazo de MATLAB para el ejemplo B.6.

# Fórmulas matemáticas



## C.1 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

1.  $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen } \alpha$
2.  $\text{cos}(-\alpha) = \text{cos } \alpha$
3.  $\text{sen } \alpha = \text{cos}(\alpha - 90^\circ) = -\text{cos}(\alpha + 90^\circ)$
4.  $\text{cos } \alpha = -\text{sen}(\alpha - 90^\circ) = \text{sen}(\alpha + 90^\circ)$
5.  $\text{sen } \alpha = -\text{sen}(\alpha \pm 180^\circ)$
6.  $\text{cos } \alpha = -\text{cos}(\alpha \pm 180^\circ)$
7.  $\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen } \alpha \text{ cos } \beta \pm \text{cos } \alpha \text{ sen } \beta$
8.  $\text{cos}(\alpha \pm \beta) = \text{cos } \alpha \text{ cos } \beta \mp \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$
9.  $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$
10.  $\text{sen } 2\alpha = 2 \text{ sen } \alpha \text{ cos } \alpha$
11.  $\text{cos } 2\alpha = \text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$
12.  $2 \text{ sen } \alpha \text{ sen } \beta = \text{cos}(\alpha - \beta) - \text{cos}(\alpha + \beta)$
13.  $2 \text{ sen } \alpha \text{ cos } \beta = \text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta)$
14.  $2 \text{ cos } \alpha \text{ cos } \beta = \text{cos}(\alpha + \beta) + \text{cos}(\alpha - \beta)$
15.  $2 \text{ sen}^2 \alpha = 1 - \text{cos } 2\alpha$
16.  $2 \text{ cos}^2 \alpha = 1 + \text{cos } 2\alpha$
17.  $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$

## C.2 DERIVADAS

Las literales  $u$  y  $v$  representan funciones de  $x$ , en tanto que  $a$ ,  $b$  y  $m$  son constantes.

1.  $\frac{d}{dx}(au) = a \frac{du}{dx}$
2.  $\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

3.  $\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$
4.  $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
5.  $\frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1}$
6.  $\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$
7.  $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$
8.  $\frac{d}{dx}\cos(ax + b) = -a \operatorname{sen}(ax + b)$
9.  $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(ax + b) = a \cos(ax + b)$

### C.3 INTEGRALES INDEFINIDAS

Las literales  $u$  y  $v$  representan funciones de  $x$ , en tanto que  $a$  y  $b$  son constantes.

1.  $\int au \, dx = a \int u \, dx$
2.  $\int (u + v) \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx$
3.  $\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$  cuando  $m \neq -1$
4.  $\int u \frac{dv}{dx} \, dx = uv - \int v \frac{du}{dx} \, dx$
5.  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$
6.  $\int \operatorname{sen} ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax$
7.  $\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{sen} ax$
8.  $\int \operatorname{sen}^2 ax \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$
9.  $\int \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$
10.  $\int \cos ax \operatorname{sen} ax \, dx = \frac{\operatorname{sen}^2 ax}{2a}$
11.  $\int x \operatorname{sen} ax \, dx = \frac{\operatorname{sen} ax - ax \cos ax}{a^2}$

12.  $\int x \cos ax \, dx = \frac{\cos ax + ax \operatorname{sen} ax}{a^2}$
13.  $\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx \, dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)}$  cuando  $b^2 \neq a^2$
14.  $\int \cos ax \cos bx \, dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)}$  cuando  $b^2 \neq a^2$
15.  $\int \operatorname{sen} ax \cos bx \, dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)}$  cuando  $b^2 \neq a^2$
16.  $\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
17.  $\int x e^{ax} \, dx = \frac{ax-1}{a^2} e^{ax}$
18.  $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \operatorname{sen} bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}$
19.  $\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \operatorname{sen} bx)}{a^2 + b^2}$



# Código de colores del resistor estándar

Los resistores de potencia baja tienen un conjunto estándar de valores. Los códigos de bandas de colores indican el valor de la resistencia así como una tolerancia. Los tipos más comunes de resistores son los de composición de carbón y los resistores de película de carbón.

El código de color para el valor del resistor emplea dos dígitos y un dígito multiplicador, en ese orden, como se muestra en la figura D.1. Una cuarta banda se asigna para la tolerancia. Los valores estándar para los dos primeros dígitos se listan en la tabla D.1.

La resistencia de un resistor con las cuatro bandas de color se puede escribir como

$$R = (a \times 10 + b)m \pm \text{tolerancia}$$

donde  $a$  y  $b$  son los valores de la primera y segunda bandas, respectivamente, y  $m$  es un multiplicador. Estos valores de resistencia son para resistores de 2% y de 5% de resistencia, como se lista en las tablas D.3 y D.4, respectivamente. Considere un resistor que tenga las cuatro bandas, amarillo, violeta, naranja y oro. Escribimos así la resistencia

$$\begin{aligned} R &= (4 \times 10 + 7) \text{ k}\Omega \pm 5\% \\ &= 47 \text{ k}\Omega \pm 5\% \end{aligned}$$

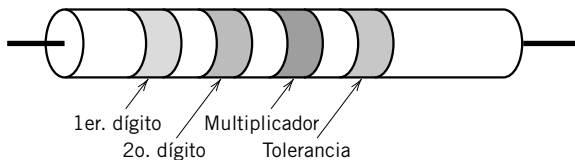


FIGURA D.1 Resistor con cuatro bandas de color.

Tabla D.1 Valores estándar para los dos primeros dígitos para resistores de tolerancia de 2% y de 5%				
10	16	27	43	68
11	18	30	47	75
12	20	33	51	82
13	22	36	56	91
15	24	39	62	100

Tabla D.2 Código de colores

0	negro
1	café
2	rojo
3	naranja
4	amarillo
5	verde
6	azul
7	violeta
8	gris
9	blanco

Tabla D-3 Multiplicador de código de colores

plata	0.01
oro	0.1
negro	1
café	10
rojo	100
naranja	1 k
amarillo	10 k
verde	100 k
azul	1 M
violeta	10 M
gris	100 M

Tabla D-4 Código de banda de tolerancia

rojo	2%
oro	5%
plata	10%
ninguno	20%

# Referencias

---

- Adler, Jerry, "Another Bright Idea", *Newsweek*, 15 de junio de 1992, p. 67.
- Albean, D.L., "Single Post Swings Amplifier Gain Positive or Negative", *Electronic Design*, enero de 1997, p. 153.
- Barnes, R. y Wong, K.T., "Unbalanced and Harmonic Studies for the Channel Tunnel Railway System", *IEE Proceedings*, marzo de 1991, pp. 41-50.
- Bernstein, Theodore, "Electrical Shock Hazards", *IEEE Transactions on Education*, agosto de 1991, pp. 216-222.
- Brown, S.F., "Predicting Earthquakes", *Popular Science*, junio de 1989, pp. 124-125.
- Butterworth, S., "On the Theory of Filters", *Wireless World*, vol. 7, octubre de 1930, pp. 536-541.
- Coltman, John W., "The Transformer", *Scientific American*, enero de 1988, pp. 86-95.
- Doebelin, E.O., *Measurement Systems*, McGraw-Hill, Nueva York, 1966.
- Dordick, Herbert S., *Understanding Modern Telecommunications*, McGraw-Hill, Nueva York, 1986.
- Dorf, Richard, *The Electrical Engineering Handbook*, CRC Press, 1988.
- Dorf, Richard C., *Technology, Society and Man*, Boyd & Fraser, San Francisco, 1974.
- Edelson, Edward, "Solar Cell Update", *Popular Science*, junio de 1992, pp. 95-99.
- Gardner, Dana, "The Walking Piano", *Design News*, 11 de diciembre de 1988, pp. 60-65.
- Garnett, G.H., "A High-Resolution, Multichannel Digital-to-Analog Converter", *Hewlett-Packard Journal*, febrero de 1992, pp. 48-52.
- Graeme, J., "Active Potentiometer Tunes Common-Mode Rejection", *Electronics*, junio de 1982, p. 119.
- Graham, Dunstan, *Analysis of Nonlinear Control Systems*, Dover Publishing, Nueva York, 1971.
- Halliday, D., Resnick, R. y Walker, J., *Fundamentals of Physics*, John Wiley & Sons, Nueva York, 2001.
- Hanselman, D. y Littlefield, B., *Mastering MATLAB<sup>®</sup>*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2005.
- Jurgen, Ronald, "Electric Handgun Trigger Proposed", *IEEE Institute*, febrero de 1989, p. 5.
- Lamarre, Leslie, "Problems with Power Quality", *EPRI Journal*, agosto de 1991, pp. 14-23.
- Lenz, James E., "A Review of Magnetic Sensors", *Proceedings of the IEEE*, junio de 1990, pp. 973-989.
- Lewis, Raymond, "A Compensated Accelerometer", *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, agosto de 1988, pp. 174-178.
- Loeb, Gerald E., "The functional Replacement of the Ear", *Scientific American*, febrero de 1985, pp. 104-108.
- Mackay, Lionel, "Rural Electrification in Nepal", *Power Engineering Journal*, septiembre de 1990, pp. 223-231.
- Mathcad User's Guide*, MathSoft Inc., Cambridge, MA, 1991.
- McCarty, Lyle H., "Catheter Clears Coronary Arteries", *Design News*, 23 de septiembre de 1991, pp. 88-92.
- McMahon, A.M., *The Making of a Profession: A Century of Electrical Engineering in America*, IEEE Press, Nueva York, 1984.
- Nahin, Paul J., "Oliver Heaviside", *Scientific American*, junio de 1990, pp. 122-129.
- Perry, T.S., "Donald Pederson: The Father of SPICE", *IEE Spectrum*, junio de 1998.

- Sallen, R.P. y Key, E.L., "A Practical Method of Designing RC Active Filters", *IRE Transactions on Circuit Theory*, vol. CT-2, marzo de 1955, pp. 74-85.
- Smith, E.D., "Electric Shark Barrier", *Power Engineering Journal*, julio de 1991, pp. 167-177.
- Svoboda, J.A., "Elab, A Circuit Analysis Program for Engineering Education", *Computer Applications in Engineering Education*, vol. 5, no. 2, 1997, pp. 135-149.
- Svoboda, J.A., *PSpice for Linear Circuits*, John Wiley & Sons, Nueva York, 2007.
- Trotter, D.M., "Capacitors", *Scientific American*, vol. 259, no. 1, 1988, pp. 86-90.
- Tuinenga, P.W., *PSPICE: A Guide to Circuit Simulation & Analysis Using PSpice*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1988.
- Williams, E.R., "The Electrification of Thunderstorms", *Scientific American*, noviembre de 1988, pp. 88-99.
- Wright, A., "Construction and Application of Electric Fuses", *Power Engineering Journal*, vol. 4, no. 3, 1990, pp. 141-148.





# Índice

---

- $\mu A741$ , 208, 210, 229
- Admitancia, 434, 693
- Amperes, 5
- Amperímetros, 31
- Amplificador, 143, 189
  - de diferencia, 213, 217
  - inversor, 217, 220, 229, 240, 456
  - operacional ideal, 210
  - separador, 217
- Amplificador no inversor, 217, 220
  - en el dominio de frecuencia, 456
- Amplificador operacional, 208
  - amplificador operacional ideal, 210, 211
  - catálogo de circuitos de, 217
  - circuitos con polos y ceros, 610, 611
  - corriente de polarización, 227, 229
  - corriente de saturación, 210
  - filtros de paso bajo de primer orden, 605
  - ganancia de, dependiente de la frecuencia, 633
  - ganancia de voltaje, 227, 231
  - límite de razón de decaimiento, 210
  - modelo de ramas, 227, 229
  - modelos, 227, 234
  - parámetros seleccionados, 228
  - producto de ganancia de ancho de banda, 233
  - proporción de rechazo del modo común (CMRR), 233
  - resistencia de entrada, 228
  - resistencia de salida, 227
  - voltaje de saturación, 210, 234
- Amplificadores operacionales, aplicaciones, 220
  - circuitos, 208, 220
  - circuitos CA, 455
  - circuitos CD, 217
  - circuitos de primer orden, 605
  - diferenciador, 258, 294
  - ecuaciones algebraicas lineales, 222
  - ecuaciones diferenciales, 281
  - ecuaciones diferenciales lineales, 281
  - ecuaciones nodales, 212
  - filtros de primer orden, 808
  - filtros Sallen-Key, 799
  - integrador, 258, 294
  - no ideales, 227
  - polos y ceros, 610, 611
  - PSpice, 236
  - sumando integrador, 283
- Ancho de banda, 625
- Ángulo de fase, 417, 420
- Antialiasing, filtro, 817
- Aritmética compuesta, 867
  - MATLAB, 869
- Armónicos, 731
- Bell, Alexander Graham, 607
- Bobinas
  - acopladas, 523
  - primaria, 527, 531
  - secundaria, 527, 531
- Bode, H.W., 606
- Cable coaxial, 349
- Cambio de fase, 594
  - retardo de, 596, 669
- Campo
  - eléctrico, 258, 264
  - magnético, 269, 274
- Carga, 2, 218, 805
- Carga trifásica balanceada, 562
- Cascada, conexión en, 805, 808

- CCCS, 35
- CCVS, 35
- Ceros, 610, 672
- Circuito,
  - cd permanente, 278
  - cerrado (*loop*), 57, 122
- Circuito abierto, 44, 347
  - condensador en un circuito cd, 278
  - voltímetro ideal, 31
- Circuito equivalente, 73
  - amplificador operacional dependiente de la frecuencia, 630
  - inductores acoplados, 525
  - parámetros híbridos, 837
  - parámetros híbridos inversos, 837
  - por fase, 564, 576
  - transformador ideal, 532
- Circuito equivalente de Norton, 175, 312, 315
  - en el dominio de frecuencia, 452
- Circuito equivalente de Thévenin, 171, 182, 190, 214, 312, 314
  - en el dominio de frecuencia, 452
- Circuito trifásico, 560
  - potencia instantánea, 578
- Circuito Y a D, 573
- Circuito Y a Y, 562
  - 3 hilos, 563
  - 4 hilos, 562
- Circuitos,
  - dibujo de, 54
  - equivalentes de Thévenin y Norton, 192
  - planares, 122
  - trifásicos balanceados, 576
- Circuitos de filtros, 793
  - PSpice, 811
- Circuitos de primer orden, 312, 314
  - funciones de red, 605
  - resumen, 352
- Circuitos resonantes, 623, 640
  - RLC* en paralelo, 624, 629
  - RLC* en serie, 626, 629
- Código de color, probadores del, 32, 33
- Coefficiente,
  - de acoplamiento, 526
  - de amortiguamiento, 380
- “¿Cómo podemos comprobar...?”, 13
  - análisis de circuitos de CA, 469
  - aritmética con números compuestos, 469
  - circuitos de primer orden, 345
  - circuitos del amplificador operacional, 237
  - circuitos equivalentes de Thévenin, 188
  - circuitos trifásicos balanceados, 584
  - circuitos trifásicos no balanceados, 585
  - corrientes de enlaces, 142
  - diagramas de Bode, 636
  - funciones de transferencia, 707, 708, 709
  - ganancia y cambio de fase, 637
  - ley de Ohm, 41
  - potencia en circuitos de CA, 536
  - potencia y convención pasiva, 13
  - respuesta de frecuencia de un filtro, 815
  - serie de Fourier, 779
  - valores de voltaje y corriente, 82
  - voltaje y corriente de un condensador, 289
  - voltajes de nodos, 140
- Condensador, 258, 314, 347
  - circuito cd, 279
  - dominio de frecuencia compleja, 662
  - ecuaciones de elementos, 293
  - redes de dos puertos, 842
- Condición inicial, 316, 681
  - circuitos de segundo orden, 377
  - circuitos permanentes de cd, 277
  - condensador, 259
  - inductor, 270, 687
- Conductancia, 26, 436
- Conmutación secuencial 327, 347
- Constante,
  - de tiempo, 315, 316, 345
  - dieléctrica, 258
- Convención,
  - de puntos, 524
  - pasiva, 8, 26, 44, 500
  - T-Pi, 831
- Conversión,
  - de parámetros de dos puertos, 840
  - de rectangular a polar, 736

- Convertidor analógico a digital (ADC), 239
- Convolución, 695, 774
  - MATLAB, 697
- Corrección de factor de potencia, 512
  - circuito trifásico y, 587
- Corriente, 2
  - alterna (ca), 3
  - de fase, 573
  - directa, cd, 3
- Corriente de enlaces, 123
  - corrientes y voltajes de elementos, 124
  - PSpice, 138
- Cortocircuito, 44, 346
  - amperímetro, ideal, 31
  - corriente de, 171
  - inductor en un circuito de cd, 278
- Críticamente amortiguado, circuito, 377, 394
  - respuesta natural, 379
- Culombio, 2
  
- Decibel, 607
- Delta-Y, transformación de, a, 571
- Determinante, 865
- Diagrama
  - asintótico, 609
  - de bloques, 223, 224, 281
  - de Bode, 606
  - de fasor, 454
  - polos complejos y, 617
- Diferenciación, 282
- Dirichlet, condiciones de, 732
- Diseño, ejemplo de,
  - alimentación de potencia cd, 781
  - amplificador de transistor, 846
  - circuito de amplificador operacional, 471
  - circuito de interfase de transductor, 239
  - compuerta de carga del transbordador espacial, 710
  - controlador de válvulas de un motor de propulsión a chorro, 14
  - corrección del factor de potencia, 587
  - despliegue angular del potenciómetro, 143
  - dispositivo de encendido de bolsa de aire de un automóvil, 397
  - filtro antialiasing, 817
  - fuelle de voltaje ajustable, 84
  - integrador e interruptor, 290
  - punto de indicador de tensión, 189
  - sensor de temperatura, 42
  - sintonizador de radio, 640
  - transferencia de potencia máxima, 538
  - una computadora y su impresora, 349
- Dispositivo, 2
- Divisor de corriente, 67, 87
  - diseño de, 70
  - dominio de frecuencia, en el, 439
- Divisor de voltaje, 62, 87, 229
  - diseño de, 64
  - dominio de frecuencia, 439, 466
- Dominio de frecuencia, 427
  - compleja, 684
  - tabla, 433
- Dominio *s*, 684
  
- Ecuación característica, 374
- Ecuación de elementos,
  - (ecuación constitutiva), 20
  - condensador, 293
  - dominio de frecuencia, 433
  - dominio de frecuencia completa, 541
  - inductores, 293
  - inductores acoplados, 541
  - transformadores ideales, 541
- Ecuación diferencial, 315
  - circuitos de primer orden, 314
  - factor de integración, 335
  - método de las variables de estado, 389
  - método de operador, 370, 371
  - método directo, 369, 370
  - transformada de Laplace, 680

- Ecuaciones de enlaces, 123, 134, 146
  - dominio de frecuencia, 443
  - fuentes dependientes, 131, 146
  - MATLAB, 136
  - PSpice, 138
- Ecuaciones nodales, 110, 134, 146
  - circuitos de amplificadores operacionales, 212
  - dominio de frecuencia, 443,
  - fuentes dependientes, 120, 146
  - MATLAB, 115
  - PSpice, 138
- Ecuaciones simultáneas, 864
  - MATLAB, 865
- EFS, 750
- Ejemplo interactivo, xi
  - análisis de circuitos CA, 441, 442
  - circuito equivalente de Thévenin, 172, 174
  - circuitos de amp ops, 215, 216
  - circuitos *RC*, 317, 319, 334
  - circuitos *RL*, 318, 320, 332
  - condensadores, 261, 262
  - diagrama de Bode, 613, 615
  - ecuaciones de enlaces, 132
  - funciones de red, 600, 601, 602
  - inductores, 272
  - inductores acoplados, 528, 529, 530
  - leyes de Kirchhoff, 57
  - leyes de Kirchhoff y de Ohm, 59, 60
  - potencia CA, 516
  - resistencia equivalente, 75
  - resistores en paralelo, 69
  - resistores en serie, 64
  - respuesta total, 685, 687
  - transformadores, 534, 535
- Electroforesis de gel 2D, 18
- Elemento, 2
  - activo, 25
  - lineal, 21
- Elemento pasivo, 24
  - de resistor, 28
- Energía, 7
  - almacenada en bobinas acopladas, 526
  - almacenada en un condensador, 264
  - almacenada en un inductor, 274
- Enlace, 122
- Escalamiento de frecuencia, 796
- Espectro,
  - de amplitud, 754
  - de fase, 754
- Espectro de Fourier, 754, 773
  - MATLAB, 757
- Estabilidad, 329, 699
  - función de transferencia, 700
  - respuesta de impulso, 700
- Euler, fórmula de, 868
- Expansión de fracción parcial, 672
  - MATLAB, 702
- Exponencial compuesta, 422
- Factor de calidad, 625, 797
- Faraday, Michael, 258
- Faradio, 258
- Fasores, 426
  - elementos *RLC*, 430
- FFT, 750
- Filtro, 794
  - de paso bajo, 794
  - ideal, 794
  - notch, 794
  - pasa banda, 801
- Filtros,
  - de orden alto, 805
  - de paso alto, 794
  - de primer orden, 808
  - RCL* de segundo orden, 798
- Fórmulas trigonométricas, 871
- Fourier, Jean-Baptiste-Joseph, 732
- Fourier, serie de, 731
  - coseno rectificado de onda completa, 732
  - exponencial, 746, 748
  - forma de onda triangular, 741
  - MATLAB, 734
  - PSpice, 761
  - trigonométrica, 731, 744
- Franklin, Benjamin, 2
- Frecuencia, 416
  - compleja, 394, 662
  - de ángulo, 609, 610

- de corte, 610, 794
- de radianes, 416
- fundamental, 731
- resonante, 624
- resonante amortiguada, 380, 397
- Frecuencias naturales, 375
- Fuente,
  - controlada, 33
  - ideal, 29
  - independiente, 29
  - trifásica balanceada, 560
- Fuente de corriente, 29
  - no ideal, 163
  - en paralelo, 73
- Fuente de voltaje, 29
  - no ideal, 162
  - en serie, 73
  - trifásico conectada a Y, 561
- Fuente dependiente, 33, 35
  - ecuaciones nodales, 120
  - ganancia, 34
  - potencia, 36
- Fuente trifásica, 561
  - conectada a delta, 561
  - conectada a Y, 561
- Fuentes senoidales, 416
- Función
  - de impulso, 667
  - de red, 598
  - de transferencia, 692, 708
  - de transferencia de Butterworth, 795
  - escalón, 331, 667
  - impar, 739
  - par, 739
  - periódica, 416, 731
  - racional propia, 671
- Ganancia, 220, 594
- Heaviside, Oliver, 374
- Henry, Joseph, 270
- Hertz, 5, 416
- Hertz, Heinrich, 416
- Homogeneidad, 21
- Impedancia, 434, 693,
  - de entrada y de salida, 807
  - en dominio de frecuencia compleja, 662
- Inductancia mutua, 524
  - ecuaciones de elementos, 541
- Inductor, 269, 315, 346
  - circuito de cd, 278
  - dominio de frecuencia compleja, 662
  - ecuaciones de elementos, 293
  - simulado, 641
- Inductores acoplados, 523
  - convención de puntos, 524
  - ecuación de elementos, 541
- Integrador, 282, 290
- Interruptores, 39
- Joule, 5
- Kilo, 6
- Kirchhoff, Gustav Robert, 56
  - en el dominio de frecuencia, 438
  - ley de la corriente (KCL) de, 56, 83
  - ley del voltaje (KVL), 57, 83
  - leyes de, 53
- Laplace, Pierre-Simon, 662
- MathCad, 82, 238, 279
  - ecuaciones simultáneas, 238
  - leyes de Kirchhoff, 82
  - serie de Fourier, 779
- MATLAB, 860
  - amplificadores operacionales, 234
  - aritmética compuesta, 869
  - circuito equivalente de Thévenin, 182
  - circuitos ca, 464
  - condensadores e inductores, 287
  - convolución, 697
  - diagrama de Bode, 632
  - ecuaciones consecutivas, 78
  - ecuaciones de enlaces, 136
  - ecuaciones nodales, 115
  - ecuaciones simultáneas, 78, 183

- espectro de Fourier, 757
- expansión de fracción parcial, 702
- funciones, 861
- funciones de trazado, 870
- matrices, 184, 863
- números compuestos, 868
- operaciones, 861
- respuesta de frecuencia, 632
- serie exponencial de Fourier, 749
- serie trigonométrica de Fourier, 734
- Matriz, 862
- Medición de potencia con dos vatímetros, 581, 583
- Mega, 6
- Método para la solución del problema, 11
- Mho, 26
- Micro, 6
- Mili, 6
- Modelo, 20, 30, 234
- Multiplicidad, 675
- my\_periodic\_function, 750
- Nano, 6
- No linealidad de saturación, 779
- Nodo, 2
  - a tierra, 110, 209
  - de referencia, 110
- Nodos, 2, 54, 109
- Norton, E.L., 175
- Números compuestos, 866, 868
  - conjugada de, 867
  - forma polar, 866
  - forma rectangular, 866
  - MATLAB, 868
- Ohm, Georg Simon, 5, 26
  - ley de, 26, 44
- Ohmímetro, 75
- Operador diferencial, 371
- Operador, 340
- Paralelo, en, 66
  - admitancias, 439, 465
  - condensadores, 267, 294
- fuentes de corriente, 73
- fuentes de voltaje, 87
- inductores, 276, 294
- redes de dos puertos, 841
- resistores, 66, 87
- Parámetros
  - de admitancia, 833
  - de impedancia, 833
  - de transmisión, 838, 843
  - $h$ , 845, 846
  - híbridos, 837, 844
  - híbridos inversos, 837
  - $Y$ , 833, 842
  - $Z$ , 833, 842
- Pasa banda, filtro 794
- Pérdidas en línea, 567
- Permeabilidad, 269
- Pico, 6
- Plano compuesto, raíces en el, 393
- Polos, 610, 671
  - MATLAB, 703
  - estabilidad de, 700
- Polos compuestos, 674
  - MATLAB, 705
- Polos reales, simples, 672
  - MATLAB, 703
- Polos repetidos, 675
  - MATLAB, 704
- Potencia, 7
  - absorbida, 8
  - alimentada, 0
  - aparente, 504
  - compleja, 503, 505, 506
  - factor de, 511
  - instantánea, 497, 498,
  - promedio, 499, 504
  - reactiva, 504
  - relaciones de, tabla, 505
  - resistor, en, 27
  - superposición de, 519, 520
  - triángulo de, 505
- Potencia compleja, conservación, 507
- Potencia promedio, 499
  - circuito trifásico y, 579

- Potenciómetro, 37, 84, 136, 143
- Prefijos SI, 6
- Procesamiento de señal digital, 817
- Producto de ganancia de ancho de banda, 632
- Proporción de vueltas, 527, 532
- PSpice, 853
  - cableado, 858
  - circuito equivalente de Thévenin, 185
  - circuitos *CA*, 466
  - circuitos de amplificador operacional, 236
  - circuitos de primer orden, 342
  - cómo empezar, 853
  - condición inicial, 342
  - corrientes de enlaces, 138
  - espacio de taller, 853
  - filtros, 811
  - filtros Sallen-Key, 813
  - fuentes para circuitos de ca, 467, 468
  - fuentes para simulaciones de respuesta transitoria, 343
  - nodo a tierra, 856
  - partes de, 467, 855
  - respuesta de frecuencia, 634
  - respuesta total, 313
  - serie de Fourier, 761
  - voltajes de nodos, 138
- Puente, 189, 214
  - de indicador de tensión, 189
- Puerto, 829
- Pulso, 332
  - entradas de, 667
- Raíces características, 374
- Raíz cuadrada de la media (rcm), 502
- Reactancia, 435
- Rechazo de banda, 794
- Redes de dos puertos, 829
- Regla de Cramer, 865
- Residuos, 672
  - MATLAB, 703
- Resistencia, 25
- Resistencia equivalente, 78, 87
  - resistores en paralelo, 67
  - resistores en serie, 63
- Resistencia equivalente de Thévenin, 180, 329
  - transferencia de potencia máxima, 522
- Resistor, 25
  - código de colores, 874
  - tolerancia de, 874
- Respuesta,
  - de impulso, 693
  - escalón, 692, 708
  - forzada, 313, 336, 339, 382
  - transitoria, 313
- Respuesta de estado estable, 313, 346, 395
  - entradas periódicas, 759
  - entrada senoidal, 421
- Respuesta de frecuencia, 599
  - PSpice, 634
- Respuesta natural, 313, 336
  - circuitos de segundo orden, 373
  - críticamente amortiguada, 379
  - sobreamortiguada, 376
  - subamortiguada, 380
- Respuesta total, 313, 337, 386
  - circuitos de primer orden, 314
  - circuitos de segundo orden, 391
  - circuitos permanentes de ca, 457
- Retardo, 596
  - copia retardada, 669
- Sallen-Key, filtros, 799
- Secuencia de fase abc, 560
- Sensor de temperatura, 37, 42
- Serie, 61
  - condensadores en, 267, 294
  - de Fourier de amplitud de fase, 736
  - de seno y coseno de Fourier, 736
  - fuentes de corriente en, 87
  - fuentes de voltaje en, 73
  - impedancias en, 438, 465
  - inductores en, 276, 294
  - redes de dos puertos en, 842
  - resistores en, 61, 62, 87



- Serie exponencial de Fourier, 747
  - MATLAB, 749
- Siemens, 5, 26
- Simetría y serie de Fourier, 740
- Sobreamortiguado, circuito, 377, 394
- SPST, SPDT, 39
- Subamortiguado, circuito, 377, 394
  - respuesta natural de un circuito *RLC*, 380
- Sumando amplificador, 217, 221, 240
  - no inversor, 224
- Superenlace, 129, 130
- Supernodo, 116, 117
- Superposición, 21, 167, 168, 229, 759
  - en el dominio de frecuencia, 449
- Susceptancia, 436
  
- Teorema del valor,
  - final, 678, 708
  - inicial, 677
- Terminal, 2
- Thévenin, M.L., 171
  - impedancia de, 452
  - resistencia de, 171
- Tow-Thomas, filtros, 803
- Transductor de presión, 239
- Transferencia de potencia máxima, 179, 180, 522, 534
  - circuitos ca, 538
- Transformación Y a D, 571
- Transformaciones de fuentes, 162, 165, 192
  - en el dominio de frecuencia, 451
- Transformada de Fourier, 766
  - inversa, 767
  - propiedades, 769, 770
  - tabla de, 771
  - transformada de Laplace, y, 777
- Transformada de Laplace, 661
  - inversa, 662, 671
  - propiedades de, 665
  - tabla de, 665
- Transformador, 527
  - ecuación de elementos, 430, 541
  - ideal, 531
  - pérdidas en línea, 568
- Transformadores ideales, 531
  - ecuación de dispositivos, 541
  - sin pérdida, 533
  
- Unidades SI, 5
  
- Valor efectivo, 501
- Valores estándar de resistores, 874
- Variables
  - de circuito, lineamientos para el etiquetado de, 81
  - de estado, 389
- VCCS, 35
- VCCS, 35
- Vector de columna, 862
- Voltaje, 7
  - de circuito abierto, 171
  - de fase, 561
  - de línea a línea, 561
  - interruptor de voltaje controlado, 290
  - seguidor de, 217, 218, 220, 231, 240
  - trifásico, fuente de, conectada a Y, 561
- Voltajes de nodos, 110
  - corrientes y voltajes de elementos, 111
  - Pspice, 138
- Voltímetro, 31
- Voltios, 5
  
- Watt, 5

# CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Esta obra es un libro de texto para los cursos de análisis de circuitos que se imparten en las carreras de Ingeniería Mecánica, Computación, Ingeniería Eléctrica-Electrónica y Telecomunicaciones. En esta nueva edición el enfoque central de la exposición es el concepto de que los circuitos eléctricos forman parte de la estructura básica de la tecnología moderna.

## Destaca por

- Su flexibilidad en la organización de los cursos a impartir.
- Proporcionar los elementos necesarios para solución de problemas específicos en la industria.
- Sus apéndices: uso de PSpice y de MatLab; fórmulas más usuales y el de Códigos de color de las resistencias estándar.

## Aprenda

- A analizar circuitos complejos.
- Las principales técnicas de análisis de circuitos eléctricos.
- Los modelos matemáticos de los elementos básicos de dos terminales en el dominio del tiempo,  $t$ , y en el dominio de la variable compleja,  $s$ .

## Conozca

- El procesamiento de señales, que es una aplicación importante de los circuitos eléctricos.
- La técnica de fasores para el análisis de circuitos lineales e invariantes en el tiempo, en estado senoidal permanente.
- Los principales teoremas que facilitan el análisis de redes eléctricas.
- Las diversas formas para caracterizar las redes eléctricas de dos puertos.

## Desarrolle sus habilidades para

- Analizar y diseñar circuitos eléctricos, habilidades imprescindibles en todos los ingenieros.
- Utilizar Pspice y Matlab en la solución de problemas de circuitos.
- Interpretar correctamente los resultados al utilizar estos programas.

**Richard C. Dorf**, Doctor en Ingeniería Eléctrica por la U.S. Naval Postgraduate School, con maestría por la Universidad de Colorado y licenciatura en Ciencias por la Universidad Clarkson. Como catedrático, ha sido profesor huésped en la Universidad de Edinburgo, Escocia; el Instituto Massachusetts de Tecnología (MIT), la Universidad Stanford y la Universidad de California en Berkeley. Miembro del Institute of Electrical and Electronic Engineers y de la American Society for Engineering Education. Autor de diversas publicaciones.

**James A. Svoboda** Doctor en Ingeniería Eléctrica por la Universidad de Wisconsin en Madison, con maestría por la Universidad de Colorado y licenciatura en Ciencias del General Motors Institute. En 1986 recibió el Distinguished Teaching Award de la Universidad Clarkson.

[www.alfaomega.com.mx](http://www.alfaomega.com.mx)



Apoyo en la



“Te acerca al conocimiento”

 **Alfaomega Grupo Editor**